W*-ALGEBREN ALS VOLLSTÄNDIGE AXIOMATISIERUNG DER VON-NEUMANN-ALGEBREN

1

Heute: „vollständige Axiomatisierung"

Def: Eine C*-Algebra ist eine Struktur
$(A, +, (s_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{C}}, \cdot, {}^*, \|.\|)$, wobei

- $(A, +, (s_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{C}})$ ein VR über $\mathbb{C}$ ist
- $\cdot$ bilinear ist und assoziativ ist
- * konjugiert linear und involutorisch ist
- $\forall a, b \in A: (ab)^* = b^* a^*$
- $\|.\|$ eine vollständige Norm ist, d. h. $(A, +, (s_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{C}}, \|.\|)$ ist ein Banachraum
- * isometrisch ist: $\forall a \in A: \|a^*\| = \|a\|$
- $\|.\|$ submultiplikativ ist:
  $\forall a, b \in A: \|a \cdot b\| \leq \|a\| \cdot \|b\|$
- die C*-Eigenschaft gilt:
  $\forall a \in A: \|a^* a\| = \|a\|^2$

Ein Element $e \in A$ heißt Einselement, wenn
$\forall a \in A: ae = ea = a$ und $\|e\| = 1$.

Schreibe für e einfach 1.

Bsp.: 1) $C(K)$ für K kompakt Hausdorff mit den punktweisen Operationen und der Supremumsnorm

⇝ kommutative C^*-Algebra mit Einselement

2) $A \leq L_b(H)$ normabgeschlossene (Abbildungsnorm) *-Unteralgebra für H... Hilbertraum

Fakt 2: Jede kommutative C^*-Algebra mit Einselement ist isometrisch isomorph zu einem $C(K)$.

[Gelfandtransformation]

~~gilt auch: Jede C^*-Algebra ist~~

K .. Gelfandraum, der Raum aller multiplikativen Funktionale auf A

↳ $m \in A^*$ mit $m \neq 0$ und ~~$\forall a,b \in A: m(ab)$~~

$\forall a, b \in A: m(ab) = m(a)\, m(b)$

Dann $m \in A'$ mit $\|m\| = 1$.

Es gilt auch: Jede C^*-Algebra (mit Eins) ist isometrisch isomorph zu einer C^*-Unteralgebra von $L_b(H)$ für irgendeinen Hilbertraum H. ⇝ vollständige Axiomatisierung!

⟶ $\boxed{\text{Satz von Gelfand-Naimark}}$

Betrachte ab jetzt nur C^*-Algebren mit Einselement.

Def: Ein Element $a \in A$ ist

(i) selbstadjungiert, wenn $a^* = a$

(ii) positiv, wenn a selbstadjungiert ist und $\sigma(a) \subseteq [0, +\infty)$

$\uparrow$

$\{\lambda \in \mathbb{C} : a - \lambda \text{ nicht invertierbar}\}$

In Zeichen: $a \geq 0$.

A_{sa} ... Menge der selbstadjungierten Elemente

A^+ ... — " — positiven — " —

Lemma: A^+ ist unter Addition abgeschlossen, unter nichtnegativen skalaren Vielfachen abgeschlossen und topologisch abgeschlossen (bzgl. $\|\cdot\|$)

~~Damit kann man eine Halbordnung auf A_{sa} definieren:~~

Def: Für $a, b \in A_{sa}$ schreibt man $a \leq b$, wenn $b - a$ positiv ist.

Lemma: $\leq$ ist eine Halbordnung auf A_{sa}

Bew. (teilweise):

Zur Transitivität: Sei $a \leq b$, $b \leq c$.

$\Rightarrow c - b,\ b - a \in A^+$

$\Rightarrow c - a = (c - b) + (b - a) \in A^+$

Wichtiges Instrument:

Sei a selbstadjungiert (oder allgemeiner normal, d.h. $a^*a = aa^*$). Dann ist die von a erzeugte C^*-Algebra mit Eins kommutativ:

Für $a \in A_{sa}$: $C^*(a) = \overline{\left\{ \sum_{i=0}^{n} c_i a^i : n \in \mathbb{N}, c_i \in \mathbb{C} \right\}}$

[Für a normal: $C^*(a) = \overline{\left\{ \sum_{i,j} c_{ij} a^i (a^*)^j : c_{ij} \in \mathbb{C} \right\}}$]

Also: $C^*(a) \cong \mathbb{C}(K)$

$\rightsquigarrow$ kann a als stetige Funktion betrachten

$a \in A_{sa} \iff$ reellwertige Funktion!

Anwendung: $a \in A^+ \iff$ nichtnegative Funktion!

Sei $a \in A_{sa}$. Dann gibt es $a^+, a^- \in A^+$ mit $a = a^+ - a^-$ und $a^+ a^- = a^- a^+ = 0$.

... Positiv-/Negativteil

Lemma: $A = (A^+ - A^+) + i(A^+ - A^-)$

Bew.: Schreibe $b \in A$ als $b = \operatorname{Re} b + i \cdot \operatorname{Im} b$

mit $\operatorname{Re} b := \frac{a + a^*}{2} \in A_{sa}$

$\operatorname{Im} b := \frac{a - a^*}{2i} \in A_{sa}$

Zerlege $\operatorname{Re} b$, $\operatorname{Im} b$ in Positiv-/Negativteil:

$$b = \left((\operatorname{Re} b)^+ - (\operatorname{Re} b)^-\right) + i \cdot \left((\operatorname{Im} b)^+ - (\operatorname{Im} b)^-\right)$$

Ziel für den Beweis des Satzes von Gelfand-Naimark ist ja ein isometrischer Isomorphismus zwischen der C^*-Algebra (mit Eins) A und einer C^*-Unteralgebra $B \leq L_b(H)$ für einen noch zu konstruierenden Hilbertraum H.
Betrachte ~~den~~ ~~Abb~~ Isomorphismus stattdessen als Abbildung $\Phi : A \longrightarrow L_b(H)$.

Eigenschaften:

1) Φ ist ein $*$-Homomorphismus
2) Φ ist injektiv
3) Φ ist isometrisch
4) $\operatorname{ran} \Phi$ ist eine C^*-Unteralgebra von $L_b(H)$

Wenn wir eine Abb. Φ mit 1) – 4) haben, sind wir fertig!

Bedingung 4) ist redundant:
Wegen 1) ist $\operatorname{ran} \Phi$ eine $*$-Unteralgebra, die wegen 3) vollständig und daher abgeschlossen ist.

Tatsächlich ist auch Bedingung 3) redundant!

Satz: Ein injektiver $*$-Homomorphismus $\Phi : A \longrightarrow B$ zwischen C^*-Algebren (mit Eins) ist isometrisch.

Aus FANA 2 ist die folgende Variante (vielleicht) bekannt:

Satz: Ein $*$-Homomorphismus $\Phi: A \to B$ ist kontraktiv, d.h. $\|\Phi(a)\| \leq \|a\|$

Ein $*$-Isomorphismus $\Phi: A \to B$ $\boxed{\text{zwischen}}$ C^*-Algebren mit Eins A, B ist isometrisch.

Beweis kommt (implizit) gleich.

Um diesen Satz zu verwenden, müsste man vorher zeigen, dass von Φ aus dem letzten Satz bereits eine C^*-Algebra ist, also abgeschlossen.
Der Beweis des stärkeren Satzes ist eine Variante und Verschärfung des bekannten Resultats.

Bew. (Satz):

~~Als erstes sei angenommen, dass A und B kommutativ sind~~.
Ziel: analytisches Resultat – isometrisch – aus algebraischen Voraussetzungen.

Derartige Argumente laufen meistens über das Spektrum.

Zur Erinnerung (FANA 1/2): Für a normal (z.B. selbstadjungiert) gilt

$$\|a\| = r(a) := \max\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(a)\}$$

Bew. (Satz, Forts.):

Zunächst einmal ist für $\lambda \notin \sigma_A(a)$ das Element $\Phi((a-\lambda 1_A)^{-1})$ definiert und ~~[illegible]~~ es ist die Inverse von $\Phi(a) - \lambda 1_B$:

$$\Phi((a-\lambda 1_A)^{-1}) \cdot (\Phi(a) - \lambda \underbrace{1_B}_{= \Phi(1_A)}) =$$

$$= \Phi((a-\lambda 1_A)^{-1}) \cdot \Phi(a - \lambda 1_A)$$

$$= \Phi((a-\lambda 1_A)^{-1}(a-\lambda 1_A))$$

$$= \Phi(1_A) = 1_B$$

Umgekehrt genauso ✓

$\Rightarrow \lambda \notin \sigma_B(\Phi(a))$

Also: $\sigma_B(\Phi(a)) \subseteq \sigma_A(a)$

Für normale Elemente a folgt daraus (1)

$$\|\Phi(a)\| = r_B(\Phi(a)) \leq r_A(a) = \|a\|$$

$\rightsquigarrow$ *-Homomorphismen sind kontraktiv auf normalen Elementen

Ziel: $\sigma_B(\Phi(a)) = \sigma_A(a)$

Ganz stimmt das aber nicht!

(1) $\Phi(a)^* \Phi(a) = \Phi(a^*a) = \Phi(aa^*) = \Phi(a)\Phi(a)^*$, also ist auch $\Phi(a)$ normal.

<u>Bew.</u> (Satz, Forts.):

Nehme an, dass A und B kommutativ sind. Dann stimmt es!

Zur Erinnerung: Funktionalkalkül (FANA 2)

In einer komm. C^*-Algebra mit Eins kann man $f(a)$ für $f \in C(\sigma(a))$ definieren.

Nämlich: $f(a)$ ist jenes (eindeutige) Element mit $m(f(a)) = f(\underbrace{m(a)}_{\in \sigma(a)})$ nach FANA 2 für alle multiplikativen Funktionale m.

Dabei gilt $\|f(a)\| = \|f\|_{\infty, \sigma(a)}$.

Außerdem brauche ich das Lemma von Urysohn (in einem normalen Raum X, (abg. TM von) insbesondere $\mathbb{C}$, kann man disjunkte abgeschlossene Mengen A, B funktional trennen, d.h. es gibt ein stetiges $f: X \to [0,1]$ mit $f(A) \subseteq \{0\}$, $f(B) \subseteq \{1\}$).

Angenommen, $\sigma_B(\Phi(a)) \neq \sigma_A(a)$. Dann gibt es $\lambda \in \sigma_A(a) \setminus \sigma_B(\Phi(a))$.

Nach Urysohn gibt es $f: \sigma_A(a) \to [0,1]$ stetig mit $f(\sigma_B(\Phi(a))) = \{0\}$ und $f(\lambda) = 1$, insbesondere $\|f\|_\infty = 1$.

Bew. (Satz, Forts.):

Behaupte $\Phi(f(a)) = 0$:

Sei m ein multiplikatives Funktional auf B. Dann ist $m \circ \Phi$ ein solches auf A.

$$\Rightarrow m(\Phi(f(a))) = m \circ \Phi(f(a)) =$$

$$= f(m \circ \Phi(a)) = f(\underbrace{m(\Phi(a))}_{\in \sigma_B(\Phi(a))}) = 0$$

Also tatsächlich $\Phi(f(a)) = 0$ (nach dem Satz von der Gelfandtransformation)

$\Rightarrow f(a) = 0$, da Φ injektiv

Umgekehrt $\|f(a)\| = \|f\|_\infty = 1$ ↯

$\Rightarrow$ Es gilt $\sigma_B(\Phi(a)) = \sigma_A(a)$, also $r_B(\Phi(a)) = r_A(a)$

$$\underset{\|\Phi(a)\|}{\|} \qquad \underset{\|a\|}{\|}$$

in kommutativen C^*-Algebren sind alle Elemente normal

Jetzt der allgemeine Fall:

Beschränke mich zuerst auf $a \in A_{sa}$.

Dann gilt $\Phi(a) \in B_{sa}$, also sind die erzeugten C^*-Algebren $C_A^*(a)$ und $C_B^*(\Phi(a))$ kommutativ.

$a \in \Phi^{-1}(C_B^*(\Phi(a)))$ ... C^*-Alg.

$\Rightarrow C_A^*(a) \subseteq \Phi^{-1}(C_B^*(\Phi(a)))$

Es gilt $\Phi(C_A^*(a)) \subseteq C_B^*(\Phi(a))$, also kann man $\Phi|_{C_A^*(a)} : C_A^*(a) \to C_B^*(\Phi(a))$ betrachten.

$\Rightarrow$ nach dem Obigen gilt $\|\Phi(a)\| = \|a\|$ für unser $a \in A$.

Für beliebige a:

$$\|a\| = \|\underbrace{a^* a}_{\in A_{sa}}\|^{1/2} = \|\Phi(a^* a)\|^{1/2} = \|\Phi(a)^* \Phi(a)\|^{1/2}$$

$$= \|\Phi(a)\|.$$

□

Wir müssen also einen Hilbertraum H finden, für den es einen injektiven $*$-Homomorphismus $\Phi : A \longrightarrow L_b(H)$ gibt.

Def.: Ein $*$-Homomorphismus $\Phi : A \to L_b(H)$ heißt Darstellung. Eine injektive Darstellung ist treu.

~~Betrachtung der positiven Fkt~~

Zentrales Hilfsmittel im Beweis des Satzes von Gelfand-Naimark sind die mit den positiven Elementen verträglichen Funktionale.

<u>Def.</u>: Ein lineares Funktional $\varphi: A \to \mathbb{C}$ heißt <u>positiv</u>, wenn $\varphi(a) \geq 0$ für alle $a \geq 0$.

<u>Lemma</u>: Sei φ ein positives Funktional auf A.

(i) φ ist beschränkt

(ii) Für $a, b \in A$ gilt: $\varphi(b^* a) = \overline{\varphi(a^* b)}$

(iii) Für $a, b \in A$ gilt: $|\varphi(b^* a)| \leq \varphi(a^* a)^{1/2} \cdot \varphi(b^* b)^{1/2}$

[Cauchy-Schwarz Ungleichung]

(iv) $a \mapsto \varphi(a^* a)^{1/2}$ ist eine Seminorm

<u>Bew.</u>:

(i) Zeige zunächst $C := \sup_{a \in A^+, \|a\| \leq 1} \underbrace{\varphi(a)}_{\geq 0} \overset{!}{<} +\infty$

Andernfalls gäbe es zu $n \in \mathbb{N}$ ein $a_n \in A^+$ mit $\varphi(a_n) \geq 2^n$ und $\|a_n\| \leq 1$.

Betrachte $a := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} a_n$.

Für $N \in \mathbb{N}$ ist $a - \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{2^n} a_n = \lim_{\substack{M \to \infty \\ M \geq N+1}} \sum_{n=N+1}^{M} \frac{1}{2^n} a_n \geq 0$

nach einem Lemma.

$$\Rightarrow \varphi(a) = \underbrace{\varphi\left(a - \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{2^n} a_n\right)}_{\geq 0} + \varphi\left(\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{2^n} a_n\right)$$

$$\geq \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{2^n} \underbrace{\varphi(a_n)}_{\geq 2^n} \geq N \quad \text{für } \underline{\text{alle}}\ N \quad ↯$$

Bew. (Forts.)

Also gilt tatsächlich $C < +\infty$.

Sei $a \in A$ mit $\|a\| \le 1$ beliebig.

Schreibe $a = ((\mathrm{Re}\, a)^+ - (\mathrm{Re}\, a)^-) + i((\mathrm{Im}\, a)^+ - (\mathrm{Im}\, a)^-)$

$\|\mathrm{Re}\, a\| = \left\|\frac{a + a^*}{2}\right\| \le \frac{1}{2}(\|a\| + \|a^*\|) = \|a\| \le 1$,

$\|\mathrm{Im}\, a\| \le 1$ analog.

Für $b \in A_{sa}$ mit $\|b\| \le 1$ gilt $\|b^\pm\| \le 1$, da dies für Funktionen klar ist.

$$\Rightarrow |\varphi(a)| \le \varphi(\underbrace{(\mathrm{Re}\, a)^+}_{\|.\| \le 1}) + \varphi(\underbrace{(\mathrm{Re}\, a)^-}_{\|.\| \le 1}) + \varphi(\underbrace{(\mathrm{Im}\, a)^+}_{\|.\| \le 1}) + \varphi(\underbrace{(\mathrm{Im}\, a)^-}_{\|.\| \le 1})$$

$$\le 4C$$

$$\Rightarrow \|\varphi\| \le 4C$$

(ii), (iii), (iv): $\sigma(a,b) := \varphi(b^* a)$ ist eine ~~positiv semidefinite~~ (2) Sesquilinearform!

[(ii) ist genau $\sigma(a,b) = \overline{\sigma(b,a)}$, also die Hermitizität von σ]

□

~~Man kann die positiven Funktionale unter allen beschränkten Funktionalen charakterisieren:~~

~~Proposition: Ein beschränktes Funktional φ ist genau dann positiv, wenn $\varphi(1) = \|\varphi\|$.~~

(2) Für $a \in A$ gilt $a^* a \ge 0$ (ohne Beweis), also $\sigma(a,a) = \varphi(a^* a) \ge 0$

Wesentlich ist, dass es viele positive Funktionale gibt; genug, um damit Strukturanalysen zu machen.

Satz: Sei $a \neq 0$ ein normales (oder speziell selbstadjungiertes) Element von A. Dann gibt es ein positives Funktional φ mit $\varphi(a) \neq 0$. Insbesondere existiert ein positives Funktional ungleich 0.

Vgl. Hahn-Banach!

Bedeutung der positiven Funktionale:
Man kann zu jedem eine Darstellung konstruieren!

Sei φ ein positives Funktional.
Dann ist $\sigma(a,b) := \varphi(b^* a)$ eine positiv semidefinite Sesquilinearform.

1) Definit machen
2) Vervollständigen

$$N_\varphi := \{a \in A : \varphi(a^* a) = 0\} \stackrel{C\text{-}S}{=} \{a \in A : \forall b \in A : \varphi(b^* a) = 0\}$$ ... isotroper Anteil

$N_\varphi \leq A$!

$\rightsquigarrow A/N_\varphi$, $\tilde{\sigma}(a+N_\varphi, b+N_\varphi) := \sigma(a,b)$ wohldef., positiv definit

$\rightsquigarrow$ vervollständigen zu H_φ

Darstellung:

$\Phi_\varphi(a)(b+N_\varphi) := ab + N_\varphi$ ist wohldef.

$\|ab+N_\varphi\|^2_{A/N_\varphi} = \varphi(b^*a^*ab)$

$\overset{\nabla}{\underset{\circ}{\leq}} \|a^*a\| \cdot \varphi(b^*b) = \|a\|^2 \cdot \|b+N_\varphi\|^2_{A/N_\varphi}$

$\Rightarrow \Phi_\varphi(a)$ beschränkt, $\|\Phi_\varphi(a)\| \leq \|a\|$

$\rightsquigarrow$ Fortsetzung auf H_φ, $\|\Phi_\varphi(a)\| \leq \|a\|$

Nachrechnen: $\Phi_\varphi : A \to L_b(H_\varphi)$ ist ein

$*$-Homomorphismus

[Rechnen auf A/N_φ + Dichtheit/Stetigkeit]

Also: Φ_φ ist eine Darstellung $\overset{\nabla}{!}$

$\boxed{\text{GNS-Darstellung zu } \varphi.}$

↳ Gelfand, Naimark, Segal

Wir brauchen eine treue Darstellung $\overset{\nabla}{!}$

Idee: Verkleben der Φ_φ

Verkleben der H_φ: direktes Produkt ist zu groß, vgl. $\mathbb{C}^I \leftrightarrow \ell^2(I)$.

$$\bigoplus_{\varphi \text{ pos. Fkt.}} H_\varphi := \left\{ (x_\varphi)_\varphi \in \prod_\varphi H_\varphi : \sum_\varphi \|x_\varphi\|^2_{H_\varphi} < +\infty \right\}$$

mit $\left((x_\varphi)_\varphi, (y_\varphi)_\varphi \right) := \sum_\varphi (x_\varphi, y_\varphi)_{H_\varphi}$

ist ein Hilbertraum, direkte Summe der H_φ

$$\|(x_\varphi)_\varphi\| = \left(\sum_\varphi \|x_\varphi\|^2_{H_\varphi} \right)^{1/2}$$

Verkleben der Φ_φ:

$$\cancel{\Phi : \begin{cases} H \longrightarrow H \end{cases}}$$

$$\Phi(a) : \begin{cases} H \longrightarrow H \\ (x_\varphi)_\varphi \longmapsto (\Phi_\varphi(a)\, x_\varphi)_\varphi \end{cases}$$

$\Phi(a)$ bildet tatsächlich H nach H ab:

$$\sum_\varphi \|\Phi_\varphi(a)\, x_\varphi\|^2_{H_\varphi} \leq \sum_\varphi \underbrace{\|\Phi_\varphi(a)\|}_{\leq \|a\|}{}^2 \cdot \|x_\varphi\|^2_{H_\varphi}$$

$$\leq \|a\|^2 \cdot \sum_\varphi \|x_\varphi\|^2_{H_\varphi} < +\infty \quad \checkmark$$

Außerdem sieht man: $\|\Phi(a)\| \leq \|a\|$, also $\Phi(a) \in L_b(H)$

Nachrechnen: $\Phi : A \longrightarrow L_b(H)$ ist ein

$*$-Homomorphismus, also eine Darstellung

~~Der Satz von Gelfand-Naimark bekommt die~~

~~[illegible]~~

Man nennt Φ die universelle Darstellung von A.

Der Satz von Gelfand-Naimark bekommt also die folgende Form:

Satz (Gelfand-Naimark): Die universelle Darstellung ist treu.

Bew. (Gelfand-Naimark):

Nebenrechnung: Sei φ ein positives Funktional und $a \in A_{sa}$.

$$\varphi(a^4) = \varphi(a^2 \cdot a^2) = \varphi((a^2)^* a^2) =$$
$$= \| a^2 + N_\varphi \|_{H_\varphi}^2 = \| \Phi_\varphi(a)(a + N_\varphi) \|_{H_\varphi}^2$$

Angenommen, Φ ist nicht treu, also $\Phi(a) = 0$ für $a \neq 0$.
Dann gilt auch $a^* a \neq 0$, $\Phi(a^* a) = \Phi(a)^* \Phi(a) = 0$

$\leadsto$ oBdA ist a selbstadjungiert

$\Phi(a) = 0$ bedeutet $\Phi_\varphi(a) = 0$ für alle φ

$$\Rightarrow \varphi(a^4) = \| \Phi_\varphi(a)(a + N_\varphi) \|_{H_\varphi}^2 = 0 \text{ für alle } \varphi$$

a^4 ist selbstadjungiert, also folgt aus einem Satz von vorher $a^4 = 0$.

$$\Rightarrow 0 = \|a^4\| = \|(a^2)^* a^2\| = \|a^2\|^2 =$$
$$= \|a^* a\|^2 = \|a\|^4$$

$\Rightarrow a = 0$ $\lightning$

Somit muss Φ treu sein.

$\square$