# Translationsoperatoren auf Maßräumen

Leo Brauner

9. Mai 2020

Bekanntermaßen ist das Lebesgue-Maß das einzige translationsinvariante, sigma-endliche Maß auf $(\mathbb{R}, \mathfrak{B}_\mathbb{R})$. Damit sind insbesondere die Räume $L^p(\lambda)$ für $p \in [1, \infty]$ translationsinvariant, d.h. jeder Translationsoperator $T_t$ mit $T_t f(x) := f(x - t)$ bildet für $t \in \mathbb{R}$ den Raum $L^p(\lambda)$ in sich selbst ab. Mehr noch: Jeder Translationsoperator $T_t : L^p(\lambda) \to L^p(\lambda)$ ist isometrisch und für $p < \infty$ ist $(T_t)_{t \geq 0}$ eine stark stetige Operatorhalbgruppe auf $L^p(\lambda)$.

Wir fragen uns nun, was passiert, wenn wir $\lambda$ durch ein (mit gewissen Einschränkungen) beliebiges Maß $\mu$ ersetzen und die simple Forderung aufstellen, dass der Raum $L^p(\mu)$ translationsinvariant ist.

Sind die Translationsoperatoren $T_t : L^p(\mu) \to L^p(\mu)$ dann beschränkt?

Bilden sie eine stark stetige Operatorhalbgruppe?

Und was bedeutet unsere Forderung für das Maß $\mu$?

Zu Beginn müssen wir diese Fragen präzisieren und ihre Wohldefiniertheit sicherstellen.

## 1 Quasi-Translationsinvarianz

Zunächst wiederholen wir einige Begriffe aus der Maßtheorie.

**Definition 1.1.** Ein Maß $\mu : \mathfrak{B}_\mathbb{R} \to [0, \infty)$ auf $\mathbb{R}$ heißt *Borelmaß*, falls gilt:

- $\forall K \subseteq \mathbb{R}, K$ kompakt : $\mu(K) < \infty$

Ein Borelmaß $\mu : \mathfrak{B}_\mathbb{R} \to [0, \infty)$ heißt *regulär*, falls gilt:

- $\forall A \in \mathfrak{B}_\mathbb{R} : \mu(A) = \sup\{\mu(K) : K \subseteq A \text{ kompakt}\}$
- $\forall A \in \mathfrak{B}_\mathbb{R} : \mu(A) = \inf\{\mu(O) : O \supseteq A \text{ offen}\}$

Wir werden uns im Folgenden auf reguläre Borelmaße auf $\mathbb{R}$ einschränken.

Es sei bemerkt, dass jedes Borelmaß auf $\mathbb{R}$ bereits regulär ist (Satz von Ulam). Daher ist die Beschränkung auf Regularität nicht wesentlich.

**Definition 1.2.** Wir bezeichnen mit $\mathcal{L}^0(\mu)$ den Raum der messbaren Funktionen auf $\mathbb{R}$, mit $\mathcal{L}^p(\mu)$ für $p \in [1,\infty)$ den Raum der $p$-fach $\mu$-integrierbaren Funktionen und mit $\mathcal{L}^\infty(\mu)$ den Raum der $\mu$-essentiell beschränkten messbaren Funktionen. Wir definieren weiters

$$\begin{aligned}
&\mathcal{N}(\mu) := \{f \in \mathcal{L}^0 : f = 0 \ \mu\text{-f.ü.}\},\\
&L^0(\mu) := \mathcal{L}^0(\mu)/\mathcal{N}(\mu),\\
&L^p(\mu) := \mathcal{L}^p(\mu)/(\mathcal{N}(\mu) \cap \mathcal{L}^p(\mu)), \qquad p \in [1,\infty].
\end{aligned}$$

Wir definieren die Familie von Translationsoperatoren $(T_t)_{t\in\mathbb{R}}$ durch

$$T_t : \mathcal{L}^0(\mu) \to \mathcal{L}^0(\mu) : T_t f(x) := f(x-t), \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Wir könnten nun untersuchen, unter welchen Bedingungen und mit welchen Konsequenzen die Operatoren $T_t$ den Raum $\mathcal{L}^p(\mu)$ in sich selbst abbilden. Es ist (beispielsweise in der Maßtheorie und Funktionalanalysis) jedoch üblich, mit den Faktorräumen $L^0(\mu)$, $L^p(\mu), p \in [1,\infty]$ zu arbeiten. Damit der Translationsoperator $T_t$ auf dem jeweiligen Faktorraum aber überhaupt wohldefiniert ist, braucht es an das Maß $\mu$ eine zusätzliche Forderung.

**Definition 1.3.** Ein reguläres Borelmaß $\mu$ auf $\mathbb{R}$ heißt *quasi-translationsinvariant (q.t.i.)*, falls gilt:

$$\forall A \in \mathfrak{B}_\mathbb{R} \ \forall t \in \mathbb{R} : \qquad \mu(A) = 0 \Longrightarrow \mu(A+t) = 0.$$

Sei nun $\mu$ ein q.t.i. reguläres Borelmaß auf $\mathbb{R}$. Dann gilt für jedes $f \in \mathcal{L}^0(\mu)$:

$$\begin{aligned}
f \in \mathcal{N}(\mu) &\Longrightarrow \mu(\{f \neq 0\}) = 0\\
&\Longrightarrow \mu(\{T_t f \neq 0\}) = \mu(\{f \neq 0\} + t) = 0\\
&\Longrightarrow T_t f \in \mathcal{N}(\mu).
\end{aligned}$$

Daher ist $T_t : L^0(\mu) \to L^0(\mu)$ wohldefiniert und damit sind die eingangs gestellten Fragen sinnvoll gestellt. Insofern ist die Quasi-Translationsinvarianz eine Mindestanforderung. Zugleich werden wir aber allein aus dieser Eigenschaft einige interessante Folgerungen ziehen können.

Zum Aufwärmen zeigen wir zwei einfache Eigenschaften von q.t.i. Maßen und geben ein wichtiges Beispiel für q.t.i. Maße an.

**Definition 1.4.** Ein reguläres Borelmaß auf $\mathbb{R}$ heißt stetig, falls $\mu(\{x\}) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

**Definition 1.5.** Der Träger eines regulären Borelmaßes $\mu$ auf $\mathbb{R}$ ist definiert als

$$\operatorname{supp}\mu := \{x \in \mathbb{R} : \forall U \in \mathfrak{U}(x) : \mu(U) > 0\}.$$

**Lemma 1.6.** *Sei $\mu$ ein nichttriviales q.t.i. reguläres Borelmaß auf $\mathbb{R}$. Dann ist $\mu$ stetig und $\operatorname{supp}\mu = \mathbb{R}$.*

*Beweis.* Wir zeigen beide Behauptungen mit Widerspruch.

Angenommen, $\mu$ ist unstetig. Dann gibt es $x \in \mathbb{R}$ mit $\mu(\{x\}) > 0$. Doch dann ist $\mu(\{y\}) = \mu(\{x\} + (y - x)) > 0$ für jedes $y \in \mathbb{R}$, im Widerspruch dazu, dass $\mu$ lokal endlich und damit sigma-endlich ist.

Angenommen, $\operatorname{supp}\mu \subsetneq \mathbb{R}$. Dann gibt es $O \subseteq \mathbb{R}$ offen, $O \neq \emptyset$ mit $\mu(O) = 0$. Wegen $\mathbb{R} = \bigcup_{q \in \mathbb{Q}}(O + q)$ ist dann aber

$$\mu(\mathbb{R}) = \mu\left(\bigcup_{q\in\mathbb{Q}}(O+q)\right) \leq \sum_{q\in\mathbb{Q}} \mu(O+q) = 0,$$

im Widerspruch zu $\mu \neq 0$. ∎

**Beispiel 1.7.** Für $\rho \in L^1_{\text{lok}}(\lambda)$ mit $\rho > 0$ $\lambda$-f.ü., definiere

$$\mu(A) := \int_A \rho \, d\lambda, \qquad A \in \mathfrak{B}_{\mathbb{R}}.$$

Dann ist $\mu$ ein reguläres Borelmaß auf $\mathbb{R}$ und absolutstetig (bzgl. $\lambda$). Ist nun $t \in \mathbb{R}$ und $\mu(A) = 0$, dann ist wegen der Positivität von $\rho$ auch $\lambda(A) = 0$. Damit ist auch $\lambda(A + t) = 0$ und wegen der Absolutstetigkeit von $\mu$ ist ebenso $\mu(A + t) = 0$. Dies zeigt, dass $\mu$ quasi-translationsinvariant ist.

Wie zuvor erwähnt, hat die Quasi-Translationsinvarianz interessante Konsequenzen. Ein Resultat, das für uns von zentraler Bedeutung sein wird, ist die Tatsache, dass für ein q.t.i. Maß die Abbildung $\theta_A : t \mapsto \mu(A + t)$ für jedes beschränkte $A \in \mathfrak{B}_{\mathbb{R}}$ stetig ist. Mithilfe dieser Tatsache werden wir das Hauptresultat von Abschnitt 2 herleiten und später zeigen, dass alle q.t.i. Maße die Gestalt wie in Beispiel 1.7 haben. Zunächst brauchen wir dafür aber folgendes (etwas technisches) Lemma:

**Lemma 1.8.** *Sei $\mu$ ein q.t.i. reguläres Borelmaß auf $\mathbb{R}$, $B \in \mathfrak{B}_{\mathbb{R}}$ beschränkt und $(t_k) \subseteq \mathbb{R}$ eine Nullfolge. Dann gilt:*

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 \; \forall n \geq n_0 : \qquad \mu\left(\bigcup_{k\geq n}(B + t_k)\right) < \mu(B) + \varepsilon.$$

*Beweis.* Weil $\mu$ regulär von innen ist, können wir $B$ ein einem gewissen Sinne von innen durch Kompakta approximieren: Es gibt es eine aufsteigende Folge von Kompakta $K_i \subseteq B$, sodass

$$\mu\left(B \setminus \bigcup_{i\geq 1} K_i\right) = 0.$$

Wegen der Quasi-Translationsinvarianz von $\mu$ ist für jedes $k \geq 1$ dann auch

$$\mu\left((B + t_k)\setminus \bigcup_{i\geq 1}(K_i + t_k)\right) = \mu\left(\left(B \setminus \bigcup_{i\geq 1} K_i\right) + t_k\right) = 0.$$

Daraus folgt:

$$\mu\left(\bigcup_{k\geq 1}(B+t_k)\setminus\bigcup_{i\geq 1}\bigcup_{k\geq 1}(K_i+t_k)\right)=\mu\left(\bigcup_{k\geq 1}(B+t_k)\setminus\bigcup_{k\geq 1}\bigcup_{i\geq 1}(K_i+t_k)\right)$$
$$\leq\mu\left(\bigcup_{k\geq 1}\left((B+t_k)\setminus\bigcup_{i\geq 1}(K_i+t_k)\right)\right)=0,$$

d.h. wir haben $\bigcup_{k\geq 1}(B+t_k)$ von innen durch die aufsteigende Mengenfolge der $\bigcup_{k\geq 1}(K_i+t_k)$, $i\geq 1$, approximiert. Für ein gewisses $K=K_i$ ist daher

$$\mu\left(\bigcup_{k\geq 1}(B+t_k)\setminus\bigcup_{k\geq 1}(K+t_k)\right)<\varepsilon. \tag{1}$$

Wir möchten nun ausgehend von $K$ eine weitere Approximation für $B$ finden, welche stärker vom Verhalten der Nullfolge $(t_k)$ abhängt. Definiere dafür

$$K':=\limsup_{k\to\infty}(K+t_k)=\bigcap_{n\geq 1}\bigcup_{k\geq n}(K+t_k)=\{x\in\mathbb{R}:x\in K+t_k \text{ für unendl. viele } k\geq 1\}.$$

Sei $x\in K'$ beliebig. Dann gibt es eine Teilfolge $(t_{k_j})$ von $(t_k)$, sodass $x\in K+t_{k_j}$ für alle $j\geq 1$. Dann ist $x-t_{k_j}\in K$ für alle $j\geq 1$. Wegen $t_{k_j}\to 0$ und der Kompaktheit von $K$ ist dann $x\in K$. Dies zeigt die Mengeninklusion $K'\subseteq K(\subseteq B)$.

Die Menge $K'$ ist der Durchschnitt über die absteigenden Mengenfolge $(\bigcup_{k\geq n}(K+t_k))_{n\in\mathbb{N}}$ und diese Mengenfolge ist in einer gemeinsamen beschränkten Menge $D$ enthalten. Daher is es wegen der Stetigkeit von oben des endlichen Maßes $\mu|_D$

$$\mu\left(\bigcup_{k\geq n}(K+t_k)\setminus K'\right)<\varepsilon$$

für $n$ hinreichend groß. Fügen wir das Gezeigte nun zusammen, so erhalten wir:

$$\begin{aligned}
&\mu\left(\bigcup_{k\geq n}(B+t_k)\right)-\mu(B)\\
&\quad\leq\mu\left(\bigcup_{k\geq n}(B+t_k)\right)-\mu(K')\\
&\quad=\mu\left(\bigcup_{k\geq n}(B+t_k)\right)-\mu\left(\bigcup_{k\geq n}(K+t_k)\right)+\mu\left(\bigcup_{k\geq n}(K+t_k)\right)-\mu(K')\\
&\quad=\mu\left(\bigcup_{k\geq n}(B+t_k)\setminus\bigcup_{k\geq n}(K+t_k)\right)+\mu\left(\bigcup_{k\geq n}(K+t_k)\setminus K'\right)\\
&\quad<\varepsilon+\varepsilon=2\varepsilon,
\end{aligned}$$

wobei wir verwendet haben, dass Gleichung (1) wegen $K\subseteq B$ auch noch gilt, wenn man "$k\geq 1$" durch "$k\geq n$" ersetzt. ■

**Satz 1.9** (Lusin). *Sei $\mu$ ein reguläres Borelmaß auf $\mathbb{R}$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ messbar, beschränkt und $\mu(\mathrm{supp} f) < \infty$. Dann gilt:*

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists g \in C_{00}(\mathbb{R}) : \qquad \|g\|_\infty \leq \|f\|_\infty \qquad \text{und} \qquad \mu(f \neq g) < \varepsilon.$$

Die Idee, um die Stetigkeit von $t \mapsto \mu(A+t)$ zu zeigen, ist, die Funktion $f := \mathbb{1}_A$ mit dem Satz von Lusin durch eine $C_{00}(\mathbb{R})$-Funktion $g$ zu approximieren und dann das Maß der symmetrischen Mengendifferenz $(A+t)\Delta A$ mithilfe von Lemma 1.8 abzuschätzen.

**Proposition 1.10.** *Sei $\mu$ ein q.t.i. reguläres Borelmaß. Für jede beschränkte Menge $A \in \mathfrak{B}_\mathbb{R}$ ist die Funktion $\theta_A : t \mapsto \mu(A+t)$ stetig.*

*Beweis.* Wegen $\theta_A(t+t') = \theta_{A+t'}(t)$ reicht es, für beliebiges beschränktes $A \in \mathfrak{B}_\mathbb{R}$ Stetigkeit von $\theta_A$ in $t=0$ zu zeigen. Sei dazu $A \in \mathfrak{B}_\mathbb{R}$ beschränkt, $(t_k) \subseteq \mathbb{R}$ eine Nullfolge und $\varepsilon > 0$ beliebig. Die Funktion $\mathbb{1}_A$ ist messbar, beschränkt und hat kompakten Träger, also gilt nach dem Satz von Lusin:

$$\exists g \in C_{00}(\mathbb{R}) : \qquad \|g\|_\infty \leq 1 \qquad \text{und} \qquad \mu(\mathbb{1}_A \neq g) < \varepsilon.$$

Definiere $B := \{|\mathbb{1}_A - g| \geq \frac{1}{3}\} \subseteq \{\mathbb{1}_A \neq g\}$. Dann ist $\mu(B) < \varepsilon$. Daher ist nach Lemma 1.8

$$\mu\Bigg(\underbrace{B \cup \bigcup_{k \geq n} (B + t_k)}_{=:D}\Bigg) \leq \mu(B) + \mu\Bigg(\bigcup_{k \geq n} (B+t_k)\Bigg) < \mu(B) + \mu(B) + \varepsilon < 3\varepsilon$$

für $n$ hinreichend groß. Da $g$ gleichmäßig stetig ist, gilt

$$\forall x \in \mathbb{R} \; \forall k \geq n : \qquad |g(x - t_k) - g(x)| < \frac{1}{3}$$

für $n$ hinreichend groß. Wählen wir nun insgesamt $n$ hinreichend groß, so gilt:

$$\begin{aligned}\forall x \in D^\mathsf{c} \; \forall k \geq n : \qquad & |\mathbb{1}_{A+t_k}(x) - \mathbb{1}_A(x)| \\ &= |\mathbb{1}_A(x-t_k) - \mathbb{1}_A(x)| \\ &\leq |\mathbb{1}_A(x-t_k) - g(x-t_k)| + |g(x-t_k) - g(x)| + |g(x) - \mathbb{1}_A(x)| \\ &< \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 1.\end{aligned}$$

Damit ist $D^\mathsf{c} \cap ((A+t_k) \cap A) = \emptyset$ für $k \geq n$. Daraus folgt:

$$\forall k \geq n : \qquad |\mu(A+t_k) - \mu(A)| \leq \mu((A+t_k)\Delta A) \leq \mu(D) < 3\varepsilon$$

Da $(t_k)$ eine beliebige Nullfolge und $\varepsilon > 0$ beliebig war, sind wir fertig. ∎

Wir haben uns vorher die Frage gestellt, was aus der Translationsinvarianz des Raumes $L^p(\mu)$ gefolgert werden kann. So wie auch im Fall $\mu = \lambda$ gibt es einen wesentlichen Unterschied zwischen dem Fall $p < \infty$ und $p = \infty$.

## 2 Translationsoperatoren auf $L^p(\mu)$ für $p < \infty$

**Definition 2.1.** Sei $X$ ein Banachraum. Eine Familie $(T_t)_{t\geq 0}$ heißt Operatorhalbgruppe auf $X$, falls

- $\forall t \geq 0 : T_t$ ist ein beschränkter linearer Operator auf $X$.
- $T_0 = I$.
- $\forall s, t \geq 0 : T_{s+t} = T_s T_t$.

Eine Operatorhalbgruppe auf $X$ heißt...

| | |
|---|---|
| ...normstetig, | falls $\|T_t - I\| \xrightarrow[t\to 0+]{} 0$. |
| ...stark stetig (oder $C_0$), | falls $\forall f \in X : \|T_t f - f\| \xrightarrow[t\to 0+]{} 0$. |
| ...schwach stetig, | falls $\forall f \in X\ \forall \phi \in X' : \phi(T_t f - f) \xrightarrow[t\to 0+]{} 0$. |

Wir werden zeigen, dass aus der Voraussetzung, dass der Raum $L^p(\mu)$ translationsinvariant ist, folgt, dass die Familie der Translationsoperatoren $(T_t)_{t\geq 0}$ eine stark stetige Operatorhalbgruppe ist. Zusätzlich werden wir eine gewisse Uniformität in $p \in [1, \infty)$ zeigen: Es reicht sogar, dass nur einer der Räume $L^p(\mu)$ translationsinvarant ist.

Offensichtlich hat die Familie der Translationsoperatoren $(T_t)_{t\geq 0}$ die Halbgruppeneigenschaft. Die Familie $(T_t)_{t\in\mathbb{R}}$ ist in dieser Nomenklatur sogar eine Gruppe. Wir zeigen zunächst, dass unter obigen Voraussetzungen jeder Operator $T_t$ beschränkt ist. Dazu erinnern wir uns an folgendes Resultat aus der Maßtheorie:

**Proposition 2.2.** *Sei $\mu$ ein reguläres Borelmaß auf $\mathbb{R}$, $p \in [1, \infty)$ und $f_n, f \in L^p(\mu)$, $n \in \mathbb{N}$. Dann gelten folgende Implikationen:*

$$\begin{aligned} &\|f_n - f\|_p \to 0 \\ \Longrightarrow\ & f_n \to f \text{ im Maß } \mu \qquad [\text{d.h. } \forall \eta > 0 : \mu(|f_n - f| \geq \eta) \to 0] \\ \Longrightarrow\ & \exists (f_{n_k}) \text{ Teilfolge von } (f_n) : f_{n_k} \to f\ \mu\text{-f.ü.} \end{aligned}$$

**Lemma 2.3.** *Sei $\mu$ ein q.t.i. reguläres Borelmaß auf $\mathbb{R}$, $p \in [1, \infty)$ und $t \in \mathbb{R}$. Falls $T_t(L^p(\mu)) \subseteq L^p(\mu)$, dann ist $T_t$ ein beschränkter linearer Operator auf $L^p(\mu)$.*

*Beweis.* Wir zeigen die Aussage mit dem Satz vom abgeschlossenen Graphen. Seien dazu $f_n, f, g \in L^p(\mu)$, $n \in \mathbb{N}$, sodass

$$\|f_n - f\|_p \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \qquad \text{und} \qquad \|T_t f_n - g\|_p \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Jede $L^p(\mu)$-konvergente Teilfolge hat eine $\mu$-f.ü. konvergente Teilfolge. Durch Übergang zu geeigneten Teilfolgen haben wir

$$f_n \xrightarrow[n\to\infty]{} f\ \mu\text{-f.ü.} \qquad \text{und} \qquad T_t f_n \xrightarrow[n\to\infty]{} g\ \mu\text{-f.ü.}.$$

Dann gilt für $\mu$-fast alle $x \in \mathbb{R}$:

$$T_t f(x) = f(x-t) = \lim_{n\to\infty} f_n(x-t) = \lim_{n\to\infty} T_t f_n(x) = g(x),$$

also ist $T_t f = g$ und wir sind fertig. ∎

Nun haben wir noch die starke Stetigkeit zu zeigen. Dabei hilft uns die folgende Charakterisierung:

**Lemma 2.4.** *Eine Operatorhalbgruppe $(T_t)_{t\geq 0}$ auf $X$ ist genau dann stark stetig, wenn folgende beide Bedingungen erfüllt sind:*

(1) $\exists D \subseteq X, \overline{D} = X\ \forall g \in D : \|T_t g - g\| \xrightarrow[t\to 0+]{} 0.$

(2) $\exists \delta > 0\ \exists C > 0\ \forall t < \delta : \|T_t\| \leq C.$

*Beweis.* "$\Longrightarrow$": Ist $(T_t)_{t\geq 0}$ stark stetig, dann gilt nach einem bekannten Lemma aus der Halbgruppentheorie:

$$\exists M > 0\ \exists \omega \in \mathbb{R}\ \forall t \geq 0 : \qquad \|T_t\| \leq M e^{\omega t}.$$

Definiere nun $\delta := 1$ und $C := M e^{|\omega| t}$.

"$\Longleftarrow$": Seien $f \in X$ und $\varepsilon > 0$ beliebig. Wähle $D$, $\delta$ und $C$ entsprechend. Dann gibt es lt. (1) ein Element $g \in D$ sd. $\|f - g\| < \frac{\varepsilon}{2(C+1)}$. Können $\delta' > 0$ lt. (1) so wählen, dass für alle $t < \delta'$ gilt: $\|T_t - g\| < \frac{\varepsilon}{2}$. Dann gilt für alle $t < \min\{\delta, \delta'\}$:

$$\begin{aligned}
\|T_t f - f\| &\leq \|T_t f - T_t g\| + \|T_t g - g\| + \|g - f\| \\
&\leq (\|T_t\| + 1)\,\|f - g\| + \|T_t g - g\| \\
&< (C+1)\frac{\varepsilon}{2(C+1)} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Damit sind wir fertig. ∎

Die Strategie ist nun, Punkt (1) und Punkt (2) von Lemma 2.4 zu zeigen. Zunächst zeigen wir Punkt (1) von Lemma 2.4, wofür wir wieder den Satz von Lusin einsetzen.

**Lemma 2.5.** *Sei $\mu$ ein q.t.i. reguläres Borelmaß auf $\mathbb{R}$, $p \in [1, \infty)$, und $T_t(L^p(\mu)) \subseteq L^p(\mu)$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Dann ist $C_{00}(\mathbb{R}) \subseteq L^p(\mu)$ dicht in $L^p(\mu)$ und*

$$\forall g \in C_{00}(\mathbb{R}) : \qquad \|T_t g - g\|_p \xrightarrow[t\to 0+]{} 0.$$

*Beweis.* Wir haben also zwei Dinge zu zeigen.

- Sei $g \in C_{00}$. Dann ist $g$ gleichmäßig stetig und erfüllt daher

$$\|T_t g - g\|_\infty \xrightarrow[t \to 0+]{} 0.$$

Für $t \geq 0$ hinreichend klein sind die Träger $\operatorname{supp}(T_t g)$, $\operatorname{supp} g \subseteq K$ in einem (geeignet gewählten) gemeinsamen Kompaktum $K \subseteq \mathbb{R}$ enthalten. Dann folgt:

$$\|T_t g - g\|_p \leq \mu(K)^{1/p} \|T_t g - g\|_\infty \xrightarrow[t \to 0+]{} 0.$$

- Wir zeigen nun, dass $C_{00}$ dicht in $L^p(\mu)$ ist. Für $f \in L^p(\mu)$, definiere

$$f_n(x) := \mathbb{1}_{[-n,n]}(x) \cdot \begin{cases} -n, & f(x) < -n, \\ f(x), & -n \leq f(x) < n, \\ n, & n \leq f(x). \end{cases}$$

Dann folgt mit dominierter Konvergenz: $\|f_n - f\|_p \to 0$. Daher ist

$$\mathcal{B} := \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f \text{ messbar, beschr. mit kompaktem Träger}\}$$

dicht in $L^p(\mu)$. Es reicht also, zu zeigen, dass $\overline{C_{00}(\mathbb{R})} \supseteq \mathcal{B}$ ist (denn dann ist $\overline{C_{00}(\mathbb{R})} = \overline{\overline{C_{00}(\mathbb{R})}} \supseteq \overline{\mathcal{B}} \supseteq L^p(\mu)$). Sei dazu $f \in \mathcal{B}$ und $\varepsilon > 0$. Dann folgt mit dem Satz von Lusin:

$$\exists g \in C_{00}(\mathbb{R}) : \qquad \|g\|_\infty \leq \|f\|_\infty \qquad \text{und} \qquad \mu(f \neq g) < \varepsilon.$$

Für solch ein $g$ gilt:

$$\|f - g\|_p^p = \int_{\{f \neq g\}} |f - g|^p \, d\mu \leq \int_{\{f \neq g\}} (\|f\|_\infty + \|g\|_\infty)^p \, d\mu < 2^p \|f\|_\infty^p \, \varepsilon.$$

Daher ist $C_{00}(\mathbb{R})$ dicht in $\mathcal{B}$ (bzgl. der $L^p(\mu)$-Norm).

Damit sind wir fertig. ■

Als nächstes wollen wir Punkt (2) von Lemma 2.4 zeigen. Dazu ist eine Darstellung der Operatornorm von $T_t$, welche allein von Maßen von Mengen abhängt, hilfreich.

**Lemma 2.6.** *Sei $\mu$ ein nichttriviales q.t.i. reguläres Borelmaß auf $\mathbb{R}$, $p \in [1, \infty)$ und $t \in \mathbb{R}$. Dann sind äquivalent:*

1. *$T_t$ ist ein beschränkter linearer Operator auf $L^p(\mu)$.*
2. $c_t := \sup \left\{ \frac{\mu(A+t)}{\mu(A)} : A \in \mathfrak{B}_{\mathbb{R}} \text{ beschr.}, \mu(A) > 0 \right\} < \infty.$

*In diesem Fall ist $\|T_t\|^p = c_t$.*

*Beweis.* 1. $\Longrightarrow$ 2.: Sei $T_t$ ein beschränkter linearer Operator auf $L^p(\mu)$. Für jede beschränkte Menge $A \in \mathfrak{B}_{\mathbb{R}}$, $\mu(A) > 0$, ist

$$\mu(A+t) = \|T_t \mathbb{1}_A\|_p^p \leq \|T_t\|^p \, \|\mathbb{1}_A\|_p^p = \|T_t\|^p \, \mu(A).$$

Daher ist $c_t \leq \|T_t\|^p < \infty$.

2. $\Longrightarrow$ 1.: Sei $c_t < \infty$ und $f \in L^p(\mu)$ eine einfache Funktion mit kompaktem Träger. Dann hat $f$ eine Darstellung $f = \sum_{i=1}^m \alpha_i \mathbb{1}_{A_i}$ mit paarweise disjunkten, beschränkten Mengen $A_i \in \mathfrak{B}_{\mathbb{R}}$, $\mu(A_i) > 0$, und es gilt:

$$\|T_t f\|_p^p = \sum_{i=1}^m |\alpha_i|^p \, \mu(A_i + t) \leq c_t \sum_{i=1}^m |\alpha_i|^p \, \mu(A_i) = c_t \, \|f\|_p^p \, .$$

Man zeigt unmittelbar mit dominierter Konvergenz, dass der Raum der einfachen Funktionen mit kompaktem Träger dicht in $L^p(\mu)$ ist. Damit ist $T_t$ ein beschränkter linearer Operator auf $L^p(\mu)$ und $\|T_t\|^p \leq c_t < \infty$.

Gelten beide Aussagen 1. und 2., so folgt $\|T_t\|^p = c_t$ aus dem bereits Gezeigten. ∎

Man beachte, dass die Konstanten $c_t$ in Lemma 2.6 unabhängig von $p \in [1, \infty)$ sind. Ist also $T_t$ für ein gewisses $\bar{p} \in [1, \infty)$ ein beschränkter linearer Operator auf $L^{\bar{p}}(\mu)$, so folgt dies auch für alle $p \in L^p(\mu)$. Daraus wird später die bereits angesprochene Uniformität in $p \in [1, \infty)$ folgen.

Mithilfe der in Lemma 2.6 gewonnen Darstellung von $\|T_t\|$ und der in Proposition 1.10 gezeigten Stetigkeit der Funktionen $t \mapsto \mu(A+t)$ können wir nun Punkt (2) von Lemma 2.4 zeigen:

**Proposition 2.7.** *Sei $\mu$ ein q.t.i. reguläres Borelmaß auf $\mathbb{R}$, $p \in [1, \infty)$ und $T_t(L^p(\mu)) \subseteq L^p(\mu)$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Dann gilt:*

$$\exists \delta < 0 \; \exists C > 0 \; \forall |t| < \delta : \qquad \|T_t\| \leq C.$$

*Beweis.* Definiere

$$V_n := \{t \in \mathbb{R} : \|T_t\| > n\}$$

Wir wollen den Satz von Baire auf die Mengenfamilie $(V_n)$ anwenden.

- Lt. Lemma 2.3 ist jeder Operator $T_t$ beschränkt. Daher ist $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} V_n = \emptyset$.
- Lt. Lemma 2.6 gilt:

$$\begin{aligned} V_n &= \{t \in \mathbb{R} : \exists A \in \mathfrak{B}_{\mathbb{R}} \text{ beschr.} : \mu(A+t) > n\mu(A)\} \\ &= \bigcup_{\substack{A \in \mathfrak{B}_{\mathbb{R}} \\ A \text{ beschr.}}} \underbrace{\{t \in \mathbb{R} : \mu(A+t) > n\mu(A)\}}_{=:O(A)} . \end{aligned}$$

  Da lt. Proposition 1.10 die Abbildungen $t \mapsto \mu(A+t)$ stetig sind, sind die Mengen $O(A)$ offen und damit ist auch $V_n$ offen.

Nach dem Satz von Baire ist nun eine der Mengen $V_n$ nicht dicht in $\mathbb{R}$, d.h. es gibt $n \in \mathbb{R}$, $t_0 \in \mathbb{R}$ und $\delta > 0$ sodass

$$(t_0 - \delta, t_0 + \delta) \subseteq V_n^{\mathsf{c}} = \{t \in \mathbb{R} : \forall A \in \mathfrak{B}_{\mathbb{R}} \text{ beschr.} : \mu(A + t) \leq n\mu(A)\}.$$

Damit gilt für alle $t \in (-\delta, \delta)$ und für alle $A \in \mathfrak{B}_{\mathbb{R}}$ beschränkt:

$$\mu(A + t) = \|T_t \mathbb{1}_A\|_p \leq \|T_{-t_0}\| \, \|T_{t_0 - t} \mathbb{1}_A\|_p = \|T_{-t_0}\| \, \mu(I + (t_0 - t)) \leq \|T_{-t_0}\| \, n\mu(A).$$

und wir sind fertig. ■

Man kann Proposition 2.7 auch ohne Satz von Baire beweisen: Lt. Proposition 1.10 ist $t \mapsto \mu(A + t)$ stetig. Zusammen mit Lemma 2.3 und Lemma 2.6 folgt, dass $t \mapsto \|T_t\|$ ein endliches Supremum stetiger Funktionen und damit unterhalbstetig ist. Daraus, dass eine unterhalbstetige Funktion auf jedem Kompaktum ein Maximum annimmt, folgt dann die Aussage.

Zusammen mit unseren vorherigen Überlegungen folgt nun das Hauptresultat dieses Abschnitts:

**Satz 2.8.** *Sei $\mu$ ein q.t.i. reguläres Borelmaß auf $\mathbb{R}$ und $\bar{p} \in [1, \infty)$, sodass für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt: $T_t(L^{\bar{p}}(\mu)) \subseteq L^{\bar{p}}(\mu)$. Dann ist $(T_t)_{t \geq 0}$ für jedes $p \in [1, \infty)$ eine stark stetige Operatorhalbgruppe auf $L^p(\mu)$.*

*Beweis.* Aus Lemma 2.6 folgt, dass $T_t(L^p(\mu)) \subseteq L^p(\mu)$ auch für alle $p \in [1, \infty)$ und $t \in \mathbb{R}$ gilt. Wir können die vergangenen Lemmata und Propositionen also auf beliebiges $p \in [1, \infty)$ anwenden.

Damit $(T_t)_{t \geq 0}$ eine stark stetige Operatorhalbgruppe auf $L^p(\mu)$ ist, reicht es, Punkt (1) und Punkt (2) von Lemma 2.4 zu zeigen. Punkt (1) haben wir in Lemma 2.5 gezeigt und Punkt (2) haben wir in Proposition 2.7 gezeigt. ■

Ein sehr simples Beispiel für eine solche Operatorhalbgruppe ist durch das Maß $\mu$ mit der Exponentialfunktion als Dichte gegeben:

**Beispiel 2.9.** Definiere $\mu(A) := \int_A e^x dx$, $A \in \mathfrak{B}_{\mathbb{R}}$. Dann ist $\mu$ wie in Beispiel 1.7 ein q.t.i. reguläres Borelmaß auf $\mathbb{R}$. Dann gilt für $t \in \mathbb{R}$ und $A \in \mathfrak{B}_{\mathbb{R}}$ beschränkt:

$$\mu(A + t) = \int_{A+t} e^x \, dx = \int_A e^{x+t} \, dx = e^t \int_A e^x \, dx = e^t \mu(A).$$

Daher ist der Translationsoperator $T_t$ lt. Lemma 2.6 für alle $t \in \mathbb{R}$ und für alle $p \in [1, \infty)$ ein beschränkter linearer Operator auf $L^p(\mu)$ und $\|T_t\| = c_t^{1/p} = e^{t/p}$.

So wie schon im Spezialfall $\mu = \lambda$ ist auch für allgemeineres $\mu$ nicht auf viel mehr als starke Stetigkeit zu hoffen, wie folgendes Lemma zeigt.

**Lemma 2.10.** *Sei $\mu$ ein nichttriviales q.t.i. reguläres Borelmaß auf $\mathbb{R}$ und $p \in [1, \infty)$. Dann ist die Operatorhalbgruppe $(T_t)_{t \geq 0}$ nicht normstetig auf $L^p(\mu)$.*

*Beweis.* Definiere
$$f_t := \frac{1}{\mu([0,t])^{1/p}} \mathbb{1}_{[0,t]}, \qquad t > 0.$$
Wir verwenden, dass $\mu([0,t]) > 0$ nach Lemma 1.6. Dann ist
$$\|f_t\|_p^p = \frac{1}{\mu([0,t])} \left\|\mathbb{1}_{[0,t]}\right\|_p^p = \frac{1}{\mu([0,t])}\mu([0,t]) = 1.$$
Daraus folgt:
$$\begin{aligned}\|T_t - I\|^p \geq \|(T_t - I)f_t\|_p^p = \int_{\mathbb{R}} |T_t f_t - f_t|^p \ d\mu = \frac{1}{\mu([0,t])} \int_{\mathbb{R}} \left|\mathbb{1}_{[t,2t]} - \mathbb{1}_{[0,t]}\right| \ d\mu \\ \geq \frac{1}{\mu([0,t])}\mu([0,t]) = 1\end{aligned}$$
unter Verwendung der Stetigkeit des Maßes $\mu$. Insbesondere gilt: $\|T_t - I\| \not\to 0$. ■

# 3 Translationsoperatoren auf $L^\infty(\mu)$

Anders als im Fall $p < \infty$ werden wir für $p = \infty$ ein Negativresultat erhalten. Die Translationsoperatoren $T_t$ bilden zwar alle den Raum $L^\infty(\mu)$ isometrisch in sich selbst ab, doch die Familie $(T_t)_{t\geq 0}$ ist nicht einmal eine schwach stetige Operatorhalbgruppe auf $L^\infty(\mu)$.

**Lemma 3.1.** *Sei $\mu$ ein q.t.i. reguläres Borelmaß auf $\mathbb{R}$. Dann gilt für alle $t \in \mathbb{R}$: $T_t(L^\infty(\mu)) \subseteq L^\infty(\mu)$ und $T_t : L^\infty(\mu) \to L^\infty(\mu)$ ist eine Isometrie.*

*Beweis.* Für jedes $f \in L^\infty(\mu)$ gilt:
$$\begin{aligned}\|T_t f\|_\infty &= \inf\{s \geq 0 : \mu(\{|T_t f| > s\}) = 0\} \\ &= \inf\{s \geq 0 : \mu(\{|f| > s\} + t) = 0\} \\ &= \inf\{s \geq 0 : \mu(\{|f| > s\}) = 0\} = \|f\|_\infty .\end{aligned}$$
Daher ist $T_t f \in L^\infty(\mu)$ und $T_t$ eine Isometrie auf $L^\infty(\mu)$. ■

Wir widmen uns zunächst der Frage nach starker Stetigkeit.

**Lemma 3.2.** *Sei $\mu$ ein nichttriviales q.t.i. reguläres Borelmaß auf $\mathbb{R}$. Dann ist die Operatorhalbgruppe $(T_t)_{t\geq 0}$ nicht stark stetig auf $L^\infty(\mu)$.*

*Beweis.* Definiere $f := \mathbb{1}_{[0,1]}$. Nach Lemma 1.6 ist $\operatorname{supp}\mu = \mathbb{R}$ und daher $\mu([0,t]) > 0$ für jedes $t > 0$. Es folgt (für $t > 0$ hinreichend klein):
$$\|T_t f - f\|_\infty = \left\|\mathbb{1}_{[0,1]+t} - \mathbb{1}_{[0,1]}\right\|_\infty = 1 \not\to 0.$$
Daraus folgt die Behauptung. ■

Es gilt sogar:

**Lemma 3.3.** *Sei $\mu$ ein nichttriviales q.t.i. reguläres Borelmaß auf $\mathbb{R}$. Dann ist die Operatorhalbgruppe $(T_t)_{t\geq 0}$ nicht schwach stetig auf $L^\infty(\mu)$.*

*Beweis.* Wir müssen $f \in L^\infty(\mu)$ und $\phi \in L^\infty(\mu)'$ finden sodass $\phi(T_t f - f) \not\to 0$. Lt. Lemma 1.6 ist $\mu([0,\varepsilon]) > 0$ für alle $\varepsilon > 0$. Definiere nun

$$\phi_\varepsilon : L^\infty(\mu) \to \mathbb{R} : \phi_\varepsilon(f) := \frac{1}{\mu([0,\varepsilon])} \int_{[0,\varepsilon]} f \, d\mu.$$

Dann ist

$$|\phi_\varepsilon(f)| \leq \frac{1}{\mu([0,\varepsilon])} \int_{[0,\varepsilon]} |f| \, d\mu \leq \|f\|_\infty .$$

Daher ist $\phi_\varepsilon \in L^\infty(\mu)'$ mit $\|\phi_\varepsilon\|_{L^\infty(\mu)'} \leq 1$. Nach dem Satz von Banach-Alaoglu gibt es daher ein Teilnetz $(\phi_{\varepsilon_j})_{j\in J}$ von $(\phi_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ und ein $\phi \in L^\infty(\mu)'$ mit $\|\phi\|_{L^\infty(\mu)'} \leq 1$, sodass

$$\phi_{\varepsilon_j} \xrightarrow[j\in J]{w^*} \phi.$$

Definiere nun $f := \mathbb{1}_{[0,\infty)} \in L^\infty(\mu)$. Einerseits ist $\phi_\varepsilon(f) = 1$ für jedes $n \in \mathbb{N}$. Andererseits gibt es für jedes $t > 0$ ein $j_0 \in J$ sodass für alle $j \succcurlyeq j_0$ gilt, dass $\varepsilon_j < t$ und damit $\phi_{\varepsilon_j}(T_t f) = 0$. Daraus folgt:

$$\phi(T_t f - f) = \lim_{j\in J} \phi_{\varepsilon_j}(T_t f - f) = \lim_{j\in J} \Big[ \underbrace{\phi_{\varepsilon_j}(T_t f)}_{=0 \text{ für } \varepsilon_j < t} - \underbrace{\phi_{\varepsilon_j}(f)}_{=1} \Big] = 0 - 1 = -1 \not\to 0.$$

Damit ist die Operatorhalbgruppe $(T_t)_{t\geq 0}$ nicht schwach stetig. ■

Das Funktional $\phi \in L^\infty(\mu)'$, welches wir im Beweis von Lemma 3.3 mithilfe von Banach-Alaoglu erhalten haben, hat folgende interessante Eigenschaft. Für jede Funktion $f \in L^\infty(\mu)$ gilt:

$$\Big[\exists \varepsilon > 0 : \; f|_{[0,\varepsilon]} \equiv 0\Big] \qquad \Longrightarrow \qquad \phi(f) = 0.$$

In einem gewissen Sinne hängt $\phi(f)$ also nur vom “Verhalten von $f$ rechts nahe von 0” ab. Insbesondere ist $\phi$ ein Beispiel für eine Element von $L^\infty(\mu)'$, dass sich nicht auf kanonische Weise mit einer $L^1(\mu)$-Funktion identifizieren lässt.

# 4 Äquivalenz von $\mu$ und $\lambda$

Wir wiederholen wieder kurz einige Begriffe aus der Maßtheorie.

**Definition 4.1.** Seien $\mu_1$, $\mu_2$ zwei reguläre Borelmaße auf $\mathbb{R}$.

Wir nennen $\mu_1$ absolutstetig bezüglich $\mu_2$ und schreiben dafür $\mu_1 \ll \mu_2$, falls jede $\mu_2$-Nullmenge auch eine $\mu_1$-Nullmenge ist.

In diesem Falle schreiben wir $\frac{d\mu_1}{d\mu_2}$ für die Radin-Nikodým Dichte von $\mu_1$ bzgl. $\mu_2$.

Wir nennen $\mu_1$ und $\mu_2$ äquivalent und schreiben dafür $\mu_1 \sim \mu_2$, falls $\mu_1 \ll \mu_2$ und $\mu_2 \ll \mu_1$.

**Lemma 4.2.** *Für zwei äquivalente reguläre Borelmaße $\mu_1$, $\mu_2$ auf $\mathbb{R}$ gilt:*

$$\frac{d\mu_1}{d\mu_2} \cdot \frac{d\mu_2}{d\mu_1} = 1 \qquad \mu_1\text{-}f.ü.$$

*Beweis.* Für jede Menge $A \in \mathfrak{B}_\mathbb{R}$ gilt:

$$\int_A \frac{d\mu_1}{d\mu_2} \cdot \frac{d\mu_2}{d\mu_1}\ d\mu_1 = \int_A \frac{d\mu_1}{d\mu_2}\ d\mu_2 = \int_A 1\ d\mu_1.$$

Daraus folgt die Behauptung. Es sei bemerkt, dass durch die Äquivalenz von $\mu_1$ und $\mu_2$ auch die Begriffe "$\mu_1$-f.ü." und "$\mu_2$-f.ü." äquivalent sind. ∎

Mithilfe der in Proposition 1.10 gezeigten Stetigkeit der Abbildungen $t \mapsto \mu(A+t)$ können wir eine weitere Resultat für q.t.i. Maßen zeigen:

**Satz 4.3.** *Jedes nichttriviale q.t.i. reguläre Borelmaß auf $\mathbb{R}$ ist äquivalent zum Lebesguemaß.*

*Beweis.* Sei $\mu$ ein nichttriviales q.t.i. reguläres Borelmaß auf $\mathbb{R}$. Wir haben $\lambda \ll \mu$ und $\mu \ll \lambda$ zu zeigen. Die Beweise der beiden Relationen sind sehr ähnlich.

- $\lambda \ll \mu$: Sei $A \in \mathfrak{B}_\mathbb{R}$ beschränkt. Dann ist lt. Lemma 1.6 $\mu([0,1]) > 0$ und es gilt:

$$\begin{aligned}\lambda(A) &= \frac{1}{\mu([0,1])} \int_{[0,1]} \lambda(A+t)\ d\mu(t) = \frac{1}{\mu([0,1])} \int_{[0,1]} \int_\mathbb{R} \mathbb{1}_{A+t}(x)\ dx\ d\mu(t) \\ &= \int_\mathbb{R} \frac{1}{\mu([0,1])} \int_{[0,1]} \mathbb{1}_{A+t}(x)\ d\mu(t)\ dx = \int_\mathbb{R} \frac{1}{\mu([0,1])} \int_{[0,1]} \mathbb{1}_{A-x}(-t)\ d\mu(t)\ dx.\end{aligned}$$

  Ist nun $\mu(A) = 0$, so ist auch $\mu(A-x) = 0$ für jedes $x \in \mathbb{R}$. Dann verschwindet das innere Integral $\int_{[0,1]} \mathbb{1}_{A-x}(-t)\ d\mu(t)$ auf der rechten Seite für jedes $x \in \mathbb{R}$ und damit ist auch $\lambda(A) = 0$. der Fall, dass $A \in \mathfrak{B}_\mathbb{R}$ unbeschränkt ist, folgt sofort mit Sigma-Additivität.

- $\mu \ll \lambda$: Sei $A \in \mathfrak{B}_{\mathbb{R}}$ beschränkt. Lt. Proposition 1.10 ist $\theta_A : t \mapsto \mu(A+t)$ stetig. Daher gilt:
$$\frac{1}{\delta} \int_0^\delta \mu(A+t)\ dt \xrightarrow[\delta \to 0+]{} \mu(A).$$
Mit Fubini gilt somit:
$$\begin{aligned} \mu(A) \xleftarrow[\delta \to 0+]{} \frac{1}{\delta} \int_0^\delta \mu(A+t)\ dt &= \frac{1}{\delta} \int_0^\delta \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{A+t}(x)\ d\mu(x)\ dt \\ &= \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\delta} \int_0^\delta \mathbb{1}_{A+t}(x)\ dt\ d\mu(x) = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\delta} \int_0^\delta \mathbb{1}_{A-x}(-t)\ dt\ d\mu(x) \end{aligned}$$
Ist nun $\lambda(A) = 0$, so verschwindet das innere Integral $\int_0^\delta \mathbb{1}_{A-x}(-t)\ dt$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und damit ist auch $\mu(A) = 0$. Der Fall, dass $A \in \mathfrak{B}_{\mathbb{R}}$ unbeschränkt ist, folgt sofort mit Sigma-Additivität.

Damit ist $\lambda \sim \mu$. ■

Wir geben ein Beispiel eines Maßes $\mu$ an, für das wir mithilfe von Satz 4.3 zeigen können, dass es nicht q.t.i. ist, und es keine offensichtliche Wahl einer Menge $A \in \mathfrak{B}_{\mathbb{R}}$ gibt, für welche die Q.t.i.-Eigenschaft verletzt ist.

**Beispiel 4.4.** Sei $C \subseteq [0,1]$ die Cantormenge und $c : \mathbb{R} \to [0,1]$ die Cantorfunktion (mit $c(x) = 0$ für $x < 0$ und $c(x) = 1$ für $x > 1$). Sei zudem $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Abzählung von $\mathbb{Q}$. Definiere
$$F : \mathbb{R} \to [0,1] : F(x) := \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} c(x - q_n).$$
Dann ist $F$ als gleichmäßiger Grenzwert stetiger Funktionen wieder stetig und außerdem monoton wachsend. Daher ist $F$ eine Verteilungsfunktion. Sei $\mu := \mu_F$ das von $F$ induzierte Lebesgue-Stieltjes-Maß, d.h. jenes eindeutig bestimmte Maß $\mu : \mathfrak{B}_{\mathbb{R}} \to [0, \infty]$ mit
$$\forall a, b \in \mathbb{R}, a < b : \qquad \mu((a,b]) = F(b) - F(a).$$
Wegen $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$ und $\lim_{x \to +\infty} F(x) = 1$ ist $\mu$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\mathbb{R}$. Daraus folgt, dass $\mu$ ein reguläres Borelmaß auf $\mathbb{R}$ ist. Weil $F$ stetig ist, ist $\mu$ ein stetiges Maß.

Seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Dann gibt es $n_0 \in \mathbb{N}$ und $\delta > 0$ mit $(q_{n_0}, q_{n_0} + \delta) \subseteq (a,b)$. Notieren wir mit $\mu_c$ das Lebesgue-Stieljes Maß der Cantorfunktion $c$, so gilt:
$$\begin{aligned} \mu((a,b)) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \mu_c((a,b) - q_n) &\geq 2^{-n_0} \mu_c((a,b) - q_{n_0}) \\ &\geq 2^{-n_0} \mu_c((0,\delta)) = 2^{-n_0}(c(\delta) - c(0)) > 0. \end{aligned}$$
Dies zeigt, dass $\mathrm{supp}\mu = \mathbb{R}$. Damit ist $\mu$ insgesamt ein stetiges, reguläres Borel Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\mathbb{R}$ mit $\mathrm{supp}\mu = \mathbb{R}$.

Zugleich gilt:

$$\lambda(C+\mathbb{Q}) = \lambda\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}(C+q_n)\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty}\lambda(C+q_n) = 0$$

und

$$\mu(C+\mathbb{Q}) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n}\mu_c((C+\mathbb{Q})-q_n) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n}\mu_c(C+\mathbb{Q}) \geq \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n}\mu_c(C) = 1.$$

Also ist $\mu$ auf einer $\lambda$-Nullmenge konzentriert (also *singulär zu* $\lambda$). Insbesondere ist $\mu \not\ll \lambda$ und damit nach Satz 4.3 nicht q.t.i. Es muss also $A \in \mathfrak{B}_{\mathbb{R}}$ und $t \in \mathbb{R}$ geben mit $\mu(A) = 0$ und $\mu(A+t) > 0$.

# 5 Die Radon-Nikodým-Dichte von $\mu$

Widmen wir uns nun der eingangs gestellten Frage, für welche $\mu$ der Raum $L^p(\mu)$ translationsinvariant ist (für $p < \infty$). Wie wir durch Satz 4.3 wissen, ist ein q.t.i. reguläres Borelmaß $\mu \neq 0$ auf $\mathbb{R}$ bereits äquivalent zu $\lambda$ und besitzt daher eine $\lambda$-f.ü. positive Radon-Nikodým-Dichte $\rho$ (bzgl. $\lambda$). es ist daher naheliegend, jene $\mu$, für welche $L^p(\mu)$ translationsinvariant ist, anhand ihrer Radon-Nikodým-Dichte $\rho$ zu klassifizieren. Dies leistet der folgende Satz.

**Satz 5.1.** *Sei $\mu$ ein nichttriviales q.t.i. reguläres Borelmaß auf $\mathbb{R}$, $p \in [1,\infty)$ und $\rho := \frac{d\mu}{d\lambda}$. Dann sind äquivalent:*

1. *$T_t(L^p(\mu)) \subseteq L^p(\mu)$ für alle $t \in \mathbb{R}$.*
2. *Es gibt eine Familie von positiven Konstanten $(C_\ell)_{\ell \geq 0}$, sodass für jedes beschränkte, offene Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ gilt:*
$$\|\rho\|_{I,\infty} \|1/\rho\|_{I,\infty} \leq C_{|I|} < \infty.$$

*In diesem Fall ist die optimale Wahl von $C_\ell$ gegeben durch $C_\ell = \sup\{\|T_t\|^p : |t| < \ell\}$.*

*Beweis.* 1. $\Longrightarrow$ 2.: Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein nichtleeres beschränktes offenes Intervall. Lt. Proposition 2.7 gilt:

$$\exists \delta > 0\ \exists C > 0\ \forall |t| < \delta : \qquad \|T_t\| \leq C$$

Sei nun $|t| \leq |I|$ und $n \in \mathbb{N}$, $n > \delta / |I|$. Dann ist $|t/n| < \delta$ und damit

$$\|T_t\| = \left\|T_{t/n}^n\right\| \leq \left\|T_{t/n}\right\|^n \leq C^n.$$

Daher ist $\sup_{|t| \leq |I|} \|T_t\| \leq C^n < \infty$.

Lt. Satz 4.3 ist $\mu$ äquivalent zum Lebesguemaß $\lambda$, also sind $\|\rho\|_{I,\infty}, \|1/\rho\|_{I,\infty} > 0$. A priori ist aber nicht klar, ob $\|\rho\|_{I,\infty}, \|1/\rho\|_{I,\infty} < \infty$ sind. Seien $s, s' \in \mathbb{R}$ mit

$$0 < s < \|\rho\|_{I,\infty} \qquad \text{und} \qquad 0 < s' < \|1/\rho\|_{I,\infty}.$$

Definiere
$$A := \{x \in I : \rho(x) > s\} \qquad \text{und} \qquad A' := \{x \in I : 1/\rho(x) > s'\}.$$
Dann haben die beiden Mengen $A$ und $A'$ nach der Definition des essentiellen Supremums und wegen der Äquivalenz von $\lambda$ und $\mu$ sowohl positives Lebesguemaß als auch positives Maß $\mu$. Sei nun $\varepsilon > 0$ beliebig. Aufgrund der Regularität (von oben) der Maße $\lambda$ und $\mu$ gibt es dann offene Mengen $O, O' \subseteq \mathbb{R}$, sodass
$$\begin{aligned} A \subseteq O \subseteq I, &\qquad \lambda(O) < \lambda(A) + \varepsilon, \\ A' \subseteq O' \subseteq I, &\qquad \mu(O') < \mu(A') + \varepsilon. \end{aligned}$$
Die offene Menge $O'$ kann (mittels Zerlegung in ihre Zusammenhangskomponenten) als abzählbare Vereinigung $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} J'_i$ von nichtleeren offenen Intervallen $J'_i$ geschrieben werden. Es gilt:
$$\begin{aligned} \sum_{i\in\mathbb{N}} \lambda(J'_i) = \lambda(O') \geq \lambda(A') = \int_{A'} \frac{1}{\rho}\, d\mu \\ \geq s'\mu(A') > s'\frac{\mu(A')}{\mu(A')+\varepsilon}\mu(O') = \sum_{i\in\mathbb{N}} s'\frac{\mu(A')}{\mu(A')+\varepsilon}\mu(J'_i). \end{aligned} \tag{2}$$
Daher gibt es $J' = J'_i$, sodass
$$\lambda(J') > s'\frac{\mu(A')}{\mu(A')+\varepsilon}\mu(J').$$
Analog kann man zeigen, dass es ein nichtleeres offenes Intervall $J \subseteq O$ gibt mit
$$\mu(J) > s\frac{\lambda(A)}{\lambda(A)+\varepsilon}\lambda(J).$$
Falls $|J'|$ hinreichend klein ist, gibt es $t_1, \ldots, t_n \in \mathbb{R}$ mit $|t_k| < |I|$, sodass
$$J \subseteq \bigcup_{k=1}^{n} (J' + t_k) \qquad \text{und} \qquad n\lambda(J') < (1+\varepsilon)\lambda(J).$$
Ansonsten können wir in Gleichung (2) das Intervall $J'$ durch zwei Intervalle $J'_1$ und $J'_2$ der Länge $|J'|/2$ ersetzen, wodurch eines der beiden Intervalle die Ungleichung von $J'$ erfüllt. Iteration dieses Bisektionsarguments liefert dann ein solches hinreichend kleines $J'$.

Es gilt:
$$\begin{aligned} s\frac{\lambda(A)}{\lambda(A)+\varepsilon}\lambda(J) &< \mu(J) \\ &\leq \sum_{k=1}^{n} \mu(J'+t_k) \\ &\leq \sup_{|t|<|I|} \|T_t\|^p \cdot n\mu(J') \\ &< \sup_{|t|\leq<I} \|T_t\|^p \cdot \frac{1}{s'}\frac{\mu(A')+\varepsilon}{\mu(A')} n\lambda(J') \\ &< \sup_{|t|<|I|} \|T_t\|^p \cdot \frac{1}{s'}\frac{\mu(A')+\varepsilon}{\mu(A')}(1+\varepsilon)\lambda(J) \end{aligned}$$

Division der Ungleichung liefert:

$$s\frac{\lambda(A)}{\lambda(A)+\varepsilon}s'\frac{\mu(A')}{\mu(A')+\varepsilon}(1+\varepsilon) < \sup_{|t|<|I|} \|T_t\|^p$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, ist

$$s \cdot s' \leq \sup_{|t|<|I|} \|T_t\|^p .$$

Dies zeigt, dass $\|\rho\|_{I,\infty}, \|1/\rho\|_{I,\infty}$ endlich sind und die gewünschte Ungleichung erfüllen.

2. $\Longrightarrow$ 1.: Sei $t \in \mathbb{R}$ und sei $A \in \mathfrak{B}_{\mathbb{R}}$ beschränkt, $\mu(A) > 0$. Sei als nächstes $\varepsilon > 0$ beliebig. Da $A$ beschränkt ist, können wir $A$ als endliche disjunkte Vereinigung $\bigcup_{i=1}^m A_i$ von Mengen $A_i \in \mathfrak{B}_{\mathbb{R}}$ mit $\operatorname{diam}(A_i) < \varepsilon$ darstellen. Dann ist jede Menge $A_i \cup (A_i + t)$ in einem offenen Intervall $I_i$ mit Länge $|I_i| = |t| + \varepsilon$ enthalten. Daher gilt:

$$\begin{aligned}
\mu(A_i + t) &= \int_{A_i+t} \rho \, d\lambda \\
&\leq \|\rho\|_{I_i,\infty} \lambda(A_i + t) \\
&= \|\rho\|_{I_i,\infty} \lambda(A_i) \\
&= \|\rho\|_{I_i,\infty} \int_{A_i} 1/\rho \, d\mu \\
&\leq \|\rho\|_{I_i,\infty} \|1/\rho\|_{I_i,\infty} \mu(A_i) \\
&\leq C_{|t|+\varepsilon}\mu(A_i),
\end{aligned}$$

wobei $C_{|t|+\ell}$ die entsprechende Konstante aus 2. ist. Es folgt:

$$\mu(A+t) = \sum_{i=1}^m \mu(A_i + t) \leq \sum_{i=1}^m C_{|t|+\varepsilon}\mu(A_i) = C_{|t|+\varepsilon}\mu(A)$$

Lt. Lemma 2.6 ist $T_t$ dann ein beschränkter linearer Operator auf $L^p(\mu)$ und $\|T_t\|^p \leq C_{|t|+\varepsilon}$.

Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, haben wir mit diesem Argument insbesondere gezeigt:

$$\forall \ell > |t| : \qquad \|T_t\|^p \leq C_\ell,$$

also ist $\sup\{\|T_t\|^p : |t| < \ell\} \leq C_\ell$, womit wir auch die Optimalität der Konstanten $C_\ell := \sup\{\|T_t\|^p : |t| < \ell\}$ bewiesen haben. ∎

Man beachte dass für die Konstanten $C_\ell$ in Satz 5.1 gilt: $C_\ell = \sup\{\|T_t\|^p : |t| < \ell\} = \sup\{c_t : |t| < \ell\}$ mit $c_t$ definiert wie in Lemma 2.6. Dies spiegelt wieder die zuvor aufgetretene Uniformität in $p \in [1, \infty)$ wieder.

Obiger Satz 5.1 besagt, dass genau für jene $\mu$ der Raum $L^p(\mu)$ translationsinvariant ist, wenn für jedes beschränkte offene Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$

$$\text{ess sup}_I \rho \leq C_{|I|}\text{“ess inf}_I \rho\text{”}$$

gilt, mit einem entsprechend definierten "essentiellen Infimum ess $\inf_I \rho$" und einer nur von der Intervalllänge abhängigen Konstante $C_{|I|}$. Intuitiv bedeutet das, dass $\rho$ "nirgends zu schnell wachsen darf". Wie wir schon in Beispiel 2.9 gesehen haben, ist exponentielles Wachstum von $\rho$ unproblematisch. Dies gibt uns eine Idee zur Konstruktion eines q.t.i. regulären Borelamaßes $\mu$ auf $\mathbb{R}$, bezüglich dessen keine der Räume $L^p(\mu)$, $p \in [1, \infty)$, translationsinvariant ist:

**Beispiel 5.2.** Definiere

$$\rho(x) := \begin{cases} 1, & x \leq 2, \\ \Gamma(x), & x > 2, \end{cases}$$

mit der Gamma-Funktion $\Gamma(x) := \int_0^\infty u^{x-1} e^{-u} du$. Dann ist $\rho$ stetig und positiv, also ist $\mu$, definiert durch

$$\mu(A) := \int_A \rho \; d\lambda, \qquad A \in \mathfrak{B}_{\mathbb{R}},$$

ein q.t.i. reguläres Borelmaß auf $\mathbb{R}$. Für $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ ist

$$\|\rho\|_{(n,n+1),\infty} \, \|1/\rho\|_{(n,n+1),\infty} = \frac{\max_{[n,n+1]} \rho}{\min_{[n,n+1]} \rho} = \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n)} = n.$$

Nach Satz 5.1 gibt es daher für jedes $p \in [1, \infty)$ ein $t \in \mathbb{R}$, sodass $T_t(L^p(\mu)) \not\subseteq L^p(\mu)$, d.h. für kein $p \in [1, \infty)$ ist der Raum $L^p(\mu)$ translationsinvariant.

Wir geben für $p = 1$ nun explizit eine Funktion $f$ an, an welcher die Translationsinvaraianz von $L^p(\mu)$ scheitert. Definiere

$$f(x) := \frac{1}{x^2 \Gamma(x)} \mathbb{1}_{[2,\infty)}(x).$$

Dann ist

$$\int_{\mathbb{R}} |f| \; d\mu = \int_2^\infty \frac{1}{x^2 \Gamma(x)} \Gamma(x) \; dx = \int_2^\infty \frac{1}{x^2} \; dx = \frac{1}{2} < \infty,$$

aber

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} |T_1 f| \; d\mu &= \int_{\mathbb{R}} f(x-1) \; d\mu(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x) \; d\mu(x+1) = \int_2^\infty \frac{1}{x^2 \Gamma(x)} \Gamma(x+1) \; dx \\ &= \int_2^\infty \frac{1}{x^2} x \; dx = \int_2^\infty \frac{1}{x} \; dx = \infty. \end{aligned}$$

Also ist $f \in L^1(\mu)$, aber $T_1 f \notin L^1(\mu)$.

# Literatur


[1] Krishna B. Athreya, Justin P. Peters, *Continuity of Translation Operators*, Proceedings of the American Mathematical Society, Volume 139

[2] Walter Rudin, *Real and Complex Analysis*, Third Edition, McGraw-Hill Book Company Singapore 1987