Unitäre Dilatationen von Hilberträumen

Technische Universität Wien
Seminararbeit aus Analysis
WS 2016
Georg Höld

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Diese Arbeit betrachtet den Satz von Stinespring, Satz von Sz.-Nagy, Satz von Naimark und den Satz von Ando.
Die Hauptaussage wird der Satz von Sz.-Nagy sein, welcher aussagt, dass jeder Operator aus $B(\mathcal{H})$, mit einer Abbildungsnorm kleiner oder gleich 1 nur eine Einschränkung eines unitären Operators mit anschließender Projektion (Kompression genannt) ist, welcher auf einem weiteren Hilbertraum Oberraum des ursprünglichen definiert ist. Als Anwendungen betrachten wir noch den Satz von Naimark und den Satz von Ando. In ihnen legen wir den Satz von Sz.-Nagy auf reguläre, positive, $B(\mathcal{H})$-wertige Maße auf kompakten Hausdorffräume um und zeigen, dass zwei kommutierende Kompressionen, ähnlich des Satzes von Sz.-Nagy als Kompression von kommutierenden unitären Abbildungen aufgefasst werden können.
Zu Beginn wollen wir einige allgemeine Begriffe definieren.

Definition 1.1.

○) ***Banachalgebra:*** *Ein Vektorraum ($\mathcal{A}$,+) über dem Körper $\mathbb{K}$ der reellen oder komplexen Zahlen mit einer Norm $\|.\|$ und einem Produkt $\circ : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ ist eine Banachalgebra, wenn gilt:*

- $(\mathcal{A}, +, \|.\|)$ *ist vollständiger normierter Raum*
- $(\mathcal{A}, +, \circ)$ *ist assoziative* $\mathbb{K}$*-Algebra*
- $\|a \circ b\| \leq \|a\| \cdot \|b\|$ *(submultiplikativ)*

Eine Banachalgebra heißt unitär, wenn sie ein neutrales Element bezüglich Multiplikation besitzt. Im Folgenden werden wir das Symbol $\circ$ weglassen und $a \circ b$ als ab darstellen.

○) ***C*-Algebra:*** *Eine Banachalgebra $\mathcal{A}$ über dem Körper $\mathbb{K}$, mit einer Involution *: $\mathcal{A} \to \mathcal{A}$ heißt C*-Algebra, wenn folgende Eigenschaften erfüllt sind:*

- $\forall a \in \mathcal{A} : (a^*)^* = a$ *(Involution)*
- $\forall a, b \in \mathcal{A} : (ab)^* = b^* a^*$ *(anti-multiplikativ)*
- $\forall a, b \in \mathcal{A}, \forall z, w \in \mathbb{K} : (za + wb)^* = \overline{z} a^* + \overline{w} b^*$ *(semilinear)*
- $\forall a \in \mathcal{A} : \|a^* a\| = \|a\|^2$ *(C*-Eigenschaft)*

Definition 1.2.

○) $\boldsymbol{M_n(\mathcal{A})}$ **:** *Sei $\mathcal{A}$ eine C*-Algebra, dann ist $M_n(\mathcal{A})$ die Menge der $n\times n$-Matrizen mit Einträgen aus $\mathcal{A}$. $M_n(\mathcal{A})$ bildet mit der Operatornorm eine C*-Algebra (Siehe [5]).*

Definition 1.3.

○) ***Positive Elemente einer C*-Algebra:*** *Ein Element einer C*-Algebra heißt positiv, wenn das Spektrum $\sigma(a) = \{\lambda \in \mathbb{K} : (a - \lambda I) \notin \mathrm{Inv}(\mathcal{A})\}$ des betrachteten Elementes, aus nichtnegativen reellen Zahlen besteht. Gleichbedeutend dazu ist, dass ein b aus $\mathcal{A}$ existiert mit $a = b^* b$ (Siehe [2]). Die folgenden Definitionen von positiven Elementen in bestimmten C*-Algebren sind äquivalent zur Definition in C*-Algebren.*

○) ***Positive Elemente in*** $\boldsymbol{M_n(\mathcal{A})}$**:** *Eine Matrix A aus $M_n(\mathcal{A})$ heißt positiv, wenn für alle x aus $\mathcal{A}^n$ das Element $x^* A x$ positiv in der Algebra $\mathcal{A}$ ist. Gleichbedeutend dazu ist, dass ein B aus $M_n(\mathcal{A})$ existiert mit $A = B^* B$. Die Menge aller positiven Matrizen in $M_n(\mathcal{A})$ wird mit $M_n(\mathcal{A})^+$ bezeichnet (Siehe [2]).*

○) ***Positive Elemente in*** $\boldsymbol{M_n(C(X))}$**:** *Eine Matrix A aus $M_n(C(X))$ heißt positiv, wenn für alle $x \in X$ die Matrix $A(x)$ positiv in $M_n(\mathbb{K})$ ist.*

○) ***Positive Elemente in*** $\boldsymbol{B(\mathcal{H})}$**:** *Der Operator A heißt positiv, wenn er selbstadjungiert ist und das Spektrum aus nichtnegativen reellen Zahlen besteht. Gleichbedeutend dazu ist selbstadjungiert und $\langle Ax, x\rangle \geq 0 \; \forall x \in \mathcal{H}$ (Siehe [2]).*

Definition 1.4.

- ◦) ***Positive Abbildung:*** *Seien $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ zwei C*-Algebren. Eine Abbildung $P : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ heißt positiv, wenn sie linear, stetig und positive Elemente des Ausgangsraumes auf positive Elemente des Zielraumes abbildet.*
- ◦) ***Vollständig positive Abbildung:*** *Sei $P : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ eine positive Abbildung zwischen zwei C*-Algebren. Wir definieren die Abbildung $P_n := P \otimes \mathrm{id}_{M_n(\mathbb{C})} : M_n(\mathcal{A}) \to M_n(\mathcal{B})$ durch $P_n((a_{i,j})_{1\le i,j\le n})$ $= (P(a_{i,j}))_{1\le i,j\le n}$. P heißt vollständig positiv, falls P_n positiv ist für alle n aus $\mathbb{N}$.*

Definition 1.5.

- ◦) ***Unitärer *-Homomorphismus:*** *Eine Abbildung $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ zwischen zwei C*-Algebren, heißt unitärer *-Homomorphismus, falls folgende Eigenschaften für alle $x, y \in \mathcal{A}$, $k \in \mathbb{K}$ gelten:*
  - $F(1_{\mathcal{A}}) = 1_{\mathcal{B}}$ *(unitär)*
  - $F(kx) = kF(x)$, $F(x + y) = F(x) + F(y)$ *(linear)*
  - $F(xy) = F(x)F(y)$ *(multiplikativ)*
  - $F(x^*) = F(x)^*$ *(mit Involution verträglich)*
- ◦) ***Dilatation:*** *Sei T ein beschränkter Operator auf dem Hilbertraum $\mathcal{H}$ und $\mathcal{K}$ ein weiterer Hilbertraum, der $\mathcal{H}$ enthält. Dann heißt ein beschränkter Operator U auf $\mathcal{K}$ Dilatation von T, wenn $T = P_{\mathcal{H}}U|_{\mathcal{H}}$, wobei $P_{\mathcal{H}}$ die orthogonale Projektion auf $\mathcal{H}$ ist.*
- ◦) ***Kompression:*** *Sei U ein beschränkter Operator auf dem Hilbertraum $\mathcal{K}$ und $\mathcal{H}$ ein weiterer Hilbertraum, der in $\mathcal{K}$ enthalten ist. Dann heißt der beschränkte Operator T auf $\mathcal{H}$ Kompression von U, wenn $T = P_{\mathcal{H}}U|_{\mathcal{H}}$, wobei $P_{\mathcal{H}}$ die orthogonale Projektion auf $\mathcal{H}$ ist.*

2 Satz von Stinespring

Theorem 2.1 (Satz von Stinespring)**.** *Sei $\mathcal{A}$ eine unitäre C*-Algebra, $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum und $\phi : \mathcal{A} \to B(\mathcal{H})$ eine vollständig positive Abbildung. Dann existiert ein Hilbertraum $\mathcal{K}$, ein unitärer *-Homomorphismus $\pi : \mathcal{A} \to B(\mathcal{K})$ und ein beschränkter Operator $V : \mathcal{H} \to \mathcal{K}$ mit $\|\phi(1)\| = \|V\|^2$, so dass*

$$\phi(a) = V^*\pi(a)V.$$

Beweis. Sei $(a_i)_{i\in I}$ eine Basis von $\mathcal{A}$ und $(b_j)_{j\in J}$ eine Basis von $\mathcal{H}$, wir betrachten das algebraische Tensorprodukt $\mathcal{A}\otimes\mathcal{H}$ und definieren die hermitesche Sesquilinearform $\langle .,. \rangle$, auf der Basis $(a_i \otimes b_j)_{(i,j)\in I\times J}$, durch

$$\langle a_{i_1} \otimes b_{j_1}, a_{i_2} \otimes b_{j_2} \rangle = \langle \phi(a_{i_2}^* a_{i_1}) b_{j_1}, b_{j_2} \rangle_{\mathcal{H}},\ (i_1, j_1), (i_2, j_2) \in I \times J$$

und erweitere sie nun linear auf $\mathcal{A} \otimes \mathcal{H}$, wobei $\langle .,. \rangle_{\mathcal{H}}$ das Skalarprodukt auf $\mathcal{H}$ ist.
Aus folgender Rechnung und der vollständigen Positivität von ϕ folgt, dass $\langle .,. \rangle$ sogar positiv semidefinit ist.

Wir setzen $\mathcal{H}^{(n)} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} : x_1, \dots, x_n \in \mathcal{H} \right\}$, $\left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \right\rangle_{\mathcal{H}^{(n)}} := \sum_{i=1}^n \langle x_i, y_i \rangle_{\mathcal{H}}$.

$$\begin{aligned}
\langle \sum_{j=1}^n a_j \otimes x_j, \sum_{i=1}^n a_i \otimes x_i \rangle &= \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \langle a_j \otimes x_j, a_i \otimes x_i \rangle = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \langle \phi(a_i^* a_j) x_j, x_i \rangle_{\mathcal{H}} \\
&= \sum_{i=1}^n \langle \sum_{j=1}^n \phi(a_i^* a_j) x_j, x_i \rangle_{\mathcal{H}} = \left\langle \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^n \phi(a_1^* a_j) x_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n \phi(a_n^* a_j) x_j \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \right\rangle_{\mathcal{H}^{(n)}} \\
&= \left\langle \phi_n((a_i^* a_j)_{1\le i,j\le n}) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \right\rangle_{\mathcal{H}^{(n)}} \ge 0
\end{aligned}$$

Für semidefinite hermitesche Sesquilinearformen gilt die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung:

$$|\langle u, v\rangle|^2 \leq \langle u, u\rangle \cdot \langle v, v\rangle$$

Daraus folgt $\{u \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{H} : \ \langle u, u\rangle = 0\} = \{u \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{H} : \ \langle u, v\rangle = 0 \ \ \forall v \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{H}\}$. Diese Menge ist ein Unterraum den wir mit $\mathcal{N}$ bezeichnen. Nun induzieren wir die positiv definite Sesquilinearform $\langle ., .\rangle$ auf dem Faktorraum $(\mathcal{A} \otimes \mathcal{H})/\mathcal{N}$ durch $\langle u + \mathcal{N}, v + \mathcal{N}\rangle = \langle u, v\rangle$.
Sei $\mathcal{K}$ der Hilbertraum, der durch vervollständigen von $(\mathcal{A} \otimes \mathcal{H})/\mathcal{N}$ bezüglich des inneren Produktes entsteht. Für alle a aus $\mathcal{A}$ definieren wir nun eine Abbildung auf der Basis $(a_i \otimes b_j)_{(i,j)\in I\times J}$ durch $\pi(a)(a_i \otimes b_j) = (aa_i) \otimes b_j$ und erweitern sie linear auf $\mathcal{A} \otimes \mathcal{H}$.
Diese Abbildung erfüllt $\pi(a)((\sum\limits_{i=1}^{n} c_i) \otimes x_i) = (\sum\limits_{i=1}^{n} ac_i) \otimes x_i$ für alle $c_i \in \mathcal{A}, x_i \in \mathcal{H}$, $i \in \{1, \dots, n\}$.

Wir definieren die Matrix $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$, a_i aus $\mathcal{A}$ für alle $i \in \{1, \dots, n\}$. Da $(\|a^*a\|1_{\mathcal{A}} - a^*a)$ für alle $a \in \mathcal{A}$ positiv in $\mathcal{A}$ ist und somit ein $b \in \mathcal{A}$ existiert mit $(\|a^*a\|1_{\mathcal{A}} - a^*a) = b^*b$, gilt:

$$\begin{aligned} \|a^*a\|(a_i^*a_j)_{1\leq i,j\leq n} - (a_i^*a^*aa_j)_{1\leq i,j\leq n} &= \|a^*a\|A^*A - A^*[(a^*a)I]A = A^*[(\|a^*a\|1_{\mathcal{A}} - a^*a)I]A \\ &= A^*[(b^*b)I]A = A^*(b^*I)(bI)A \geq 0 \end{aligned}$$

Somit gilt die Ungleichung $(a_i^*a^*aa_j)_{1\leq i,j\leq n} \leq \|a^*a\|(a_i^*a_j)_{1\leq i,j\leq n}$ in $M_n(\mathcal{A})$.

Daraus folgt:

$$\begin{aligned} \langle \pi(a)(\sum_{j=1}^{n} a_j \otimes x_j), \pi(a)(\sum_{i=1}^{n} a_i \otimes x_i)\rangle &= \langle \sum_{j=1}^{n}(aa_j) \otimes x_j, \sum_{i=1}^{n}(aa_i) \otimes x_i\rangle = \sum_{i,j=1}^{n} \langle \phi(a_i^*a^*aa_j)x_j, x_i\rangle_{\mathcal{H}} \\ &\leq \|a^*a\| \sum_{i,j=1}^{n} \langle \phi(a_i^*a_j)x_j, x_i\rangle_{\mathcal{H}} = \|a\|^2 \langle \sum_{j=1}^{n} a_j \otimes x_j, \sum_{i=1}^{n} a_i \otimes x_i\rangle \end{aligned}$$

Da die Abbildung $\pi(a)$ den Unterraum $\mathcal{N}$ invariant lässt, induziert $\pi(a)$ eine lineare Transformation von $(\mathcal{A} \otimes \mathcal{H})/\mathcal{N}$ nach $(\mathcal{A} \otimes \mathcal{H})/\mathcal{N}$, welche wir wieder mit $\pi(a)$ bezeichnen.
Die Ungleichung zeigt außerdem, dass $\pi(a)$ beschränkt ist mit $\|\pi(a)\| \leq \|a\|$.
Daraus folgt, dass $\pi(a)$ zu einem beschränkten linearen Operator auf $\mathcal{K}$ erweitert werden kann, den wir auch mit $\pi(a)$ bezeichnen. Da folgende Eigenschaften erfüllt sind wissen wir, dass die Abbildung $\pi : \mathcal{A} \to B(\mathcal{K})$ ein unitärer *-Homomorphismus ist:

- unitär: $\pi(1_{\mathcal{A}}) = \mathrm{id}_{\mathcal{B}}$
- linear: $\pi(ka) = k\pi(a), \ \pi(a + b) = \pi(a) + \pi(b)$
- multiplikativ: $\pi(ab) = \pi(a) \circ \pi(b)$
- mit Involution verträglich:

$$\begin{aligned} \langle \pi(a)(b \otimes x), c \otimes y\rangle &= \langle (ab) \otimes x, c \otimes y\rangle = \langle \phi(c^*ab)x, y\rangle_{\mathcal{H}} = \langle \phi((a^*c)^*b)x, y\rangle_{\mathcal{H}} \\ &= \langle \otimes x, (a^*c) \otimes y\rangle = \langle b \otimes x, \pi(a^*)(c \otimes y)\rangle \end{aligned}$$

  und somit $\pi(a^*) = \pi(a)^*$

Wir definieren $V : \mathcal{H} \to \mathcal{K}$ als $V(x) = 1 \otimes x + \mathcal{N}$. V ist beschränkt, da $\|V(x)\|^2 = \langle 1 \otimes x, 1 \otimes x\rangle = \langle \phi(1)x, x\rangle_{\mathcal{H}} \leq \|\phi(1)\|\|x\|^2$. Tatsächlich folgt daraus schon $\|V\|^2 = \sup\{\langle \phi(1)x, x\rangle_{\mathcal{H}} : \|x\| \leq 1\} = \|\phi(1)\|$.

Um den Beweis des Satzes von Stinespring abzuschließen, müssen wir nur noch folgendes beobachten:
$\langle V^*\pi(a)Vx, y\rangle_{\mathcal{H}} = \langle \pi(a)Vx, Vy\rangle_{\mathcal{K}} = \langle \pi(a)(1 \otimes x), 1 \otimes y\rangle_{\mathcal{K}} = \langle \phi(a)x, y\rangle_{\mathcal{H}}$ für alle $x, y \in \mathcal{H}$
Und somit $V^*\pi(a)V = \phi(a)$. $\square$

Definition 2.2. *Ein Tripel* $(\pi, V, \mathcal{K})$ *welches* $\phi(a) = V^*\pi(a)V$ *erfüllt, heißt Stinespring Repräsentant von* ϕ*. Wir nennen Repräsentanten mit der Eigenschaft, dass* $\mathcal{K}$ *der abgeschlossene Unterraum von* $\pi_1(\mathcal{A})V\mathcal{H}$ *ist, minimale Repräsentanten.*

Lemma 2.3. *Sei* $\mathcal{A}$ *eine C*-Algebra,* $\phi : \mathcal{A} \to B(\mathcal{H})$ *vollständig positiv, dann existiert mindestens ein minimaler Stinespring Repräsentant für* ϕ*. Sind weiters* $(\pi_i, V_i, \mathcal{K}_i)_{i=1,2}$ *zwei minimale Stinespring Repräsentanten, dann existiert ein unitäres* $U : \mathcal{K}_1 \to \mathcal{K}_2$ *welches* $UV_1 = V_2$ *und* $U\pi_1U^* = \pi_2$ *erfüllt.*

Beweis. Sei $(\pi, V, \mathcal{K})$ ein Stinespring Repräsentant zu ϕ und $\mathcal{K}_1$ der Abschluss des von $\pi(\mathcal{A})V\mathcal{H}$ aufgespannten Unterraum zu gegebenen Stinespring Repräsentanten. Durch die Kompression des Ergebnisse von π auf $\mathcal{K}_1$ wird ein *-Homomorphismus $\pi_1 : \mathcal{A} \to B(\mathcal{K}_1)$ definiert. Man sieht leicht, dass $V\mathcal{H} \subset \mathcal{K}_1$ und erhält daraus $\phi(a) = V^*\pi_1(a)V$ für alle $a \in \mathcal{A}$. Das heißt, dass $(\pi_1, V, \mathcal{K}_1)$ auch ein Stinespring Repräsentant ist mit der zusätzlichen Eigenschaft, dass $\mathcal{K}_1$ der abgeschlossene Unterraum von $\pi_1(\mathcal{A})V\mathcal{H}$ ist. Somit ist $(\pi_1, V, \mathcal{K}_1)$ ein minimaler Stinespring Repräsentant
Seien nun $(\pi_i, V_i, \mathcal{K}_i)_{i=1,2}$ zwei minimale Stinespring Repräsentanten. Sollte solch ein oben gefordertes U existiert, muss es folgende Gleichung erfüllen:
$U(\sum\limits_{i=1}^{\infty} \pi_1(a_i)V_1h_i) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \pi_2(a_i)V_2h_i$
Dank der Minimalvoraussetzung liegt $U(\mathcal{K}_1)$ dicht in $\mathcal{K}_2$.
Wir zeigen nun, dass die obige Formel eine wohldefinierte Isometrie von $\mathcal{K}_1$ auf $\mathcal{K}_2$ definiert:

$$\begin{aligned}
\|\sum_{i=1}^{\infty} \pi_1(a_i)V_1h_i\|^2 &= \langle \sum_{i=1}^{\infty} \pi_1(a_i)V_1h_i, \sum_{j=1}^{\infty} \pi_1(a_j)V_1h_j \rangle = \sum_{i,j=1}^{\infty} \langle \pi_1(a_i)V_1h_i, \pi_1(a_j)V_1h_j \rangle \\
&= \sum_{i,j=1}^{\infty} \langle V_1^*\pi_1(a_j)^*\pi_1(a_i)V_1h_i, h_j \rangle = \sum_{i,j=1}^{\infty} \langle V_1^*\pi_1(a_j^*a_i)V_1h_i, h_j \rangle \\
&= \sum_{i,j=1}^{\infty} \langle \phi(a_j^*a_i)h_i, h_j \rangle = \|\sum_{i=1}^{\infty} \pi_2(a_i)V_2h_i\|^2
\end{aligned}$$

Wir können daher die Abbildung U auf einer Basis von $\mathcal{K}_1$ definieren, erweitern sie linear und erhalten eine Isometrie.
Aus der Definition von U erhalten wir $U\pi_1(a)U^*UV_1h = U\pi_1(a)V_1h = \pi_2(a)V_2h$.
Wir brauchen nun nur noch erkennen, dass $UV_1h = U\pi_1(1)V_1h = \pi_2(1)V_2h = V_2h$ für alle $h \in \mathcal{H}$ und somit $UV_1 = V_2$ und $U\pi_1U^* = \pi_2$ gilt. □

Bemerkung 2.4. *Wenn* ϕ *unitär ist, folgt leicht dass* V *eine Isometrie ist, wodurch man einen Hilbertraum* $\mathcal{K}'$ *Oberraum von* $\mathcal{H}$ *konstruieren kann, sodass* $V' : \mathcal{H} \to \mathcal{K}'$ *die Einbettung von* $\mathcal{H}$ *in* $\mathcal{K}'$*,* V'^* *die orthogonale Projektion* $P_{\mathcal{H}}$ *von* $\mathcal{K}'$ *auf* $\mathcal{H}$ *und* $\pi' : \mathcal{A} \to B(\mathcal{K}')$ *ein unitärer *-Homomorphismus mit* $\phi(a) = P_{\mathcal{H}}\pi'(a)|_{\mathcal{H}}$ *ist.*

3 Satz von Sz.-Nagy

Lemma 3.1. *Sei* $\mathcal{H}$ *ein Hilbertraum,* $T \in B(\mathcal{H})$ *ein Operator mit* $\|T\| \leq 1$ *und sei* $\mathcal{S} \subset C(\mathbb{T})$ *das Operatorsystem* $\mathcal{S} = \{p(e^{i\theta}) + \overline{q(e^{i\theta})} : p, q \text{ sind Polynome}\}$*.*
Dann ist die Abbildung $\phi : \mathcal{S} \to B(\mathcal{H})$ *definiert durch* $\phi(p + \overline{q}) = p(T) + q(T)^*$ *positiv.*

Beweis. Als erstes erkennen wir, dass wir nur zeigen müssen, dass $\phi(\tau)$ positiv ist für alle strikt positiven τ. Sollte τ nur positiv sein, ist $\tau+\epsilon\cdot 1$ strikt positiv für alle $\epsilon > 0$ und wir erhalten $\phi(\tau)+\epsilon\cdot I = \phi(\tau+\epsilon\cdot 1) \geq 0$ und somit $\phi(\tau) \geq 0$.
Sei $\tau(e^{i\theta})$ strikt positiv in $\mathcal{S}$, wobei wir $\mathcal{S}$ als C*-Algebra auffassen. Somit gibt es ein Polynom $p(z) = \sum\limits_{l=0}^{n} \alpha_l z^l$ sodass $\tau(e^{i\theta}) = p(e^{i\theta}) \cdot \overline{p(e^{i\theta})} = \sum\limits_{l,k=0}^{n} \alpha_l\overline{\alpha_k}e^{i(l-k)\theta}$.
Wir müssen nun zeigen, dass $\phi(\tau) = \sum\limits_{l,k=0}^{n} \alpha_l\overline{\alpha_k}T(l-k)$ ein positiver Operator ist mit
$T(j) = \begin{cases} T^j & ,j \geq 0 \\ (T^*)^{-j} & ,j < 0 \end{cases}$. Um dies zu zeigen betrachten wir zu festen Vektor x aus $\mathcal{H}$ folgende Gleichung:

$$\langle \phi(\tau)x, x\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} I & T^* & \dots & T^{*n} \\ T & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & T^* \\ T^n & \dots & T & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{\alpha_1}x \\ \overline{\alpha_2}x \\ \vdots \\ \overline{\alpha_n}x \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \overline{\alpha_1}x \\ \overline{\alpha_2}x \\ \vdots \\ \overline{\alpha_n}x \end{pmatrix} \right\rangle_{\mathcal{H}^{(n)}} \tag{$*$}$$

Wir können daher zeigen, dass der Matrixoperator positiv ist um zu zeigen, dass $\phi(\tau)$ positiv ist.

Wir definieren $R := \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ T & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & T & 0 \end{pmatrix}$. Für diese Matrix gilt: $R^{n+1} = 0, \|R\| \leq 1$.

Mit I als den Identitätsoperator auf $\mathcal{H}^{(n)}$ können wir die Matrix $(*)$ auch anschreiben als
$I + R + R^2 + ... + R^n + R^* + ... + (R^*)^n$.

Weiters gilt:

$$\begin{aligned} I + R + R^2 + ... + R^n + R^* + ... + (R^*)^n &= (I + R + R^2 + ... + R^n) + (I + R^* + ... + (R^*)^n) - I \\ &= (I - R)^{-1} + (I - R^*)^{-1} - I \end{aligned}$$

Wir wählen nun für beliebiges h aus $\mathcal{H}^{(n)}$ ein y aus $\mathcal{H}^{(n)}$ sodass $h = (I - R)y$.
Mit der folgenden Rechnung erkennt man, dass die Matrix $(*)$ und damit ϕ positiv ist:
$\langle((I - R)^{-1}(I - R^*)^{-1} - I)h, h\rangle$

$= \langle (I - R)^{-1}(I - R)y, (I - R)y\rangle + \langle (I - R^*)^{-1}(I - R)y, (I - R)y\rangle + \langle -(I - R)y, (I - R)y\rangle$

$= \langle y, (I - R)y\rangle + \langle (I - R)y, y\rangle - \langle (I - R)y, (I - R)y\rangle$

$= \langle y, y\rangle - \langle y, Ry\rangle + \langle y, y\rangle - \langle Ry, y\rangle - \langle y, y\rangle + \langle Ry, y\rangle + \langle y, Ry\rangle - \langle Ry, Ry\rangle$

$= \langle y, y\rangle - \langle Ry, Ry\rangle = \|y\|^2 - \|Ry\|^2 \geq 0$

Die letzte Ungleichung folgt aus $\|R\| \leq 1$. □

Lemma 3.2. *Sei X ein kompakter Hausdorffraum, B eine C^*-Algebra und $\phi : C(X) \to B$ ein positiver Operator. Dann ist ϕ sogar vollständig positiv.*

Beweis. Sei $P(x) = (p_{j,k}(x))_{1 \leq j,k \leq n}$ positiv in $M_n(C(x))$. Wir müssen zeigen, dass $\phi_n(P)$ positiv ist, dazu wählen wir $\epsilon > 0$ fest und eine offene Überdeckung $\{U_i\}$ von X, sodass $|p_{j,k}(x) - p_{j,k}(x_i)| < \epsilon$ für alle x aus U_i, feste x_i aus U_i und alle $1 \leq j, k \leq n$ gilt.

Da X ein kompakter Hausdorffraum ist reichen endlich viele U_i aus um X zu überdecken.
Laut dem Lemma von Urysohn existiert eine Zerlegung der Eins $\{u_i\}$ zu der Überdeckung $\{U_i\}$, aus nichtnegativen stetigen Funktionen, welche $\sum\limits_{i=1}^{m} u_i = 1$ und $u_i(x) = 0$ für alle $x \notin U_i$ erfüllt.
Wir bezeichnen die Matrizen $(p_{j,k}(x_i))_{1 \leq j,k \leq n}$ mit P_i, diese sind positiv, da sie von P auf positive Matrizen abgebildet werden.
Weiters gilt $\|P(x) - \sum\limits_{l=1}^{m} u_l(x)P_l\| < \epsilon$ für alle $x \in X$.
Durch $\phi_n(u_l \cdot P_l) = \phi_n(u_l \cdot (p_{j,k}(x_l))_{1 \leq j,k \leq n}) = (\phi(u_l) \cdot p_{j,k}(x_l))_{1 \leq j,k \leq n}$ wissen wir, dass $\phi_n(u_l \cdot P_l)$ positiv in $M_n(B)$ ist. Daraus folgt, dass $\phi_n(P)$ in der offenen Umgebung mit Radius $\epsilon\|\phi_n\|$ eine Summe von positiven Elementen besitzt. Da $M_n(B)^+$ abgeschlossen ist und ϵ beliebig war folgt, dass $\phi_n(P)$ positiv ist. □

Definition 3.3. *Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum, $A \in B(\mathcal{H})$ und M ein abgeschlossener linearer Unterraum von $\mathcal{H}$, mit $M^\perp$ als sein Orthokomplement. Dann heißt M reduzierender Unterraum bezüglich A, wenn sowohl M als auch $M^\perp$ invariante Unterräume unter A sind.*

Theorem 3.4 (Satz von Sz.-Nagy). *Sei $T \in B(\mathcal{H})$ eine Abbildung mit $\|T\| \leq 1$. Dann existiert ein Hilbertraum $\mathcal{K}$ Oberraum von $\mathcal{H}$ und ein unitäres U auf $\mathcal{K}$ mit der Eigenschaft, dass $\mathcal{K}$ der kleinste abgeschlossene reduzierende Unterraum bezüglich U ist der $\mathcal{H}$ enthält und sodass $T^n = P_{\mathcal{H}} U^n|_{\mathcal{H}}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Weiters gilt, dass wenn $(U', \mathcal{K}')$ ein weiteres Paar mit den obigen Eigenschaften ist, dann existiert ein unitäres $V : \mathcal{K} \to \mathcal{K}'$, sodass $Vh = h$ für alle $h \in \mathcal{H}$ und $VUV^* = U'$ gilt.*

Beweis. Nach Lemma 3.1 ist die Abbildung $\phi : \mathcal{S} \to B(\mathcal{H})$ mit $\phi(p - \overline{q}) = p(T) + q(T)^*$ positiv.
Da $B(\mathcal{H})^+$ abgeschlossen ist, ist die Erweiterung von ϕ auf den Abschluss von $\mathcal{S}$ bezüglich der Norm auch positiv. Nach Lemma 3.2 ist diese Abbildung sogar vollständig positiv.
Sei $(\pi, V, \mathcal{K})$ ein minimaler Stinespring Repräsentant von ϕ. Da $\phi(1) = I$ können wir, analog zu Bemerkung 2.4, $V\mathcal{H}$ mit $\mathcal{H}$ identifizieren. Wir setzen $U = \pi(z)$, wobei z die Koordinatenfunktion ist. Es folgt, dass U unitär ist und $T^n = \phi(z^n) = P_{\mathcal{H}}\pi(z^n)|_{\mathcal{H}} = P_{\mathcal{H}}U^n|_{\mathcal{H}}$.
Die Minimalitätseigenschaft ist äquivalent zu der Forderung, dass die lineare Hülle von $\{U^n\mathcal{H} : n \in \mathbb{Z}\}$ dicht in $\mathcal{K}$ ist. Welche wiederum äquivalent ist zu der Forderung, dass es keinen kleineren abgeschlossenen Unterraum als $\mathcal{K}$ bezüglich U gibt, der $\mathcal{H}$ enthält.
Die letzte Aussage des Theorems folgt direkt aus Lemma 2.3. □

4 Satz von Naimark

Definition 4.1. ***$B(\mathcal{H})$-wertiges Maß:*** *Sei $\mathcal{B}$ eine σ-Algebra aus Borelmengen eines kompakten Hausdorffraumes X und $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum. Eine Abbildung $E : \mathcal{B} \to B(\mathcal{H})$ heißt $B(\mathcal{H})$-wertiges Maß, wenn sie σ-additiv ist, also für jede abzählbare Folge von paarweise disjunkten Mengen B_i mit $B = \bigcup B_i$ die Gleichung $\langle E(B)x, y\rangle = \sum \langle E(B_i)x, y\rangle$ gilt.*
Ein Maß heißt beschränkt, wenn $\|E\| = sup\{\|E(B)\| : B \in \mathcal{B}\} < \infty$. Es heißt regulär, wenn das Maß $\mu_{x,y}(B) = \langle E(B)x, y\rangle$ für alle $x, y \in \mathcal{H}$ regulär ist.
Wir nennen $B(\mathcal{H})$-wertige Maße:

- *spektral, wenn $E(M \cap N) = E(M) \cdot E(N)$ für alle M, N aus $\mathcal{B}$ ist.*
- *positiv, wenn $E(M)$ positiv für alle M aus $\mathcal{B}$ ist.*
- *selbstadjungiert, wenn $E(M)^* = E(M)$ für alle M aus $\mathcal{B}$ ist.*

Bemerkung 4.2. *Sei X ein kompakter Hausdorffraum, dann existiert zu jedem regulären beschränkten $B(\mathcal{H})$-wertigen Maß E, eine eindeutige beschränkte lineare Abbildung $\phi_E : C(X) \to B(\mathcal{H})$ die die Gleichung $\langle \phi_E(f)x, y\rangle = \int f d\mu_{x,y}$ (∗) erfüllt. Wobei $\mu_{x,y}$ das durch $\mu_{x,y}(B) = \langle E(B)x, y\rangle$ definierte reguläre Maß ist.*
Umgekehrt wird mit jeder beschränkten linearen Abbildung $\phi : C(X) \to B(\mathcal{H})$, welche reguläre Borel-Maße $\{\mu_{x,y}\}$ für alle x,y aus $\mathcal{H}$ mit der Formel (∗) definiert, genau ein beschränkter Operator $E(B)$ für B aus $\mathcal{B}$ mitbestimmt der $\langle E(B)x, y\rangle = \mu_{x,y}(B)$ erfüllt. Man erkennt leicht, dass die Abbildung $E : \mathcal{B} \to B(\mathcal{H})$ ein beschränktes, reguläres, $B(\mathcal{H})$-wertiges Maß ist.
Weiters erkennen wir eine bijektive Beziehung zwischen den beschränkten linearen Abbildungen von $C(X)$ nach $B(\mathcal{H})$, welche reguläre Borel-Maße definieren und den regulären beschränkten $B(\mathcal{H})$-wertigen Maßen. Aus dem Zusammenhang erkennt man außerdem, dass ϕ genau dann positiv ist, wenn E positiv ist.

Theorem 4.3 (Satz von Naimark). *Sei E ein reguläres, positives, $B(\mathcal{H})$-wertiges Maß auf einem kompakten Hausdorffraum X. Dann existiert ein Hilbertraum $\mathcal{K}$, ein beschränkter linearer Operator $V : \mathcal{H} \to \mathcal{K}$ und ein reguläres, selbstadjungiertes, spektrales, $B(\mathcal{K})$-wertiges Maß F auf X sodass:*

$$E(B) = V^* F(B) V$$

Beweis. Wir wählen analog zu Bemerkung 4.2 $\phi : C(X) \to B(\mathcal{H})$ so, dass es $\langle \phi(f)x, y\rangle = \int f d\mu_{x,y}$ für alle x, y aus $\mathcal{H}$ erfüllt, wobei $\mu_{x,y}(B) = \langle E(B)x, y\rangle$ das von E mitbestimmte reguläres Maß ist. Aus der Definition folgt sofort, dass ϕ linear und positiv ist. Mit E ist auch ϕ positiv. ϕ erfüllt somit die Voraussetzungen von Lemma 3.2 und ist somit vollständig positiv. Wir werden nun den Satz von Stinespring an um einen *-Homomorphismus $\pi : C(X) \to B(\mathcal{K})$ und einen beschränkten linearen Operator $V : \mathcal{H} \to \mathcal{K}$ zu bekommen, welche $\phi(f) = V^*\pi(f)V$ für alle f in $C(X)$ erfüllen.

Wir wollen jetzt das zugehörige $B(\mathcal{K})$-wertige Maß zu π definieren. Sei also für alle x, y aus $\mathcal{K}$ die Abbildung $\tilde{\mu}_{x,y} : \mathcal{B} \to B(\mathcal{K})$ definiert durch $\tilde{\mu}_{x,y}(A) = \langle \pi(\mathbb{1}_A)x, y\rangle$. Da π ein *-Homomorphismus ist, ist diese Abbildung wohldefiniert und man erkennt leicht, dass $\int f \, d\tilde{\mu}_{y,x} = \langle \pi(f)x, y\rangle$ für alle $f \in B(X)$ gilt. Wir erkennen weiters, dass $\tilde{\mu}_{x,y}(A) = \langle \pi(\mathbb{1}_A)x, y\rangle < \infty$ und somit $\tilde{\mu}_{x,y}$ ein Borel-Maß ist. Da π ein *-Homomorphismus und somit stetig ist erhalten wir, dass $\tilde{\mu}_{x,y}$ regulär ist. Zu diesen existiert nach Bemerkung 4.2 ein eindeutiges $B(\mathcal{K})$-wertiges Maß F mit der Eigenschaft $\langle F(B)x, y\rangle = \tilde{\mu}_{x,y}(B)$. Um den Beweis des Theorems nun abzuschließen, bleibt nur noch zu zeigen, dass das $B(\mathcal{K})$-wertige Maß F regulär, selbstadjungiert und spektral ist.

- Die **Regularität** von F folgt direkt aus der Konstruktion.
- Dass F **selbstadjungiert** ist folgt aus den folgenden Gleichungen.
  $\langle F(B)x, y\rangle = \langle x, F(B)y\rangle \Leftrightarrow \langle F(B)x, y\rangle = \overline{\langle F(B)y, x\rangle} \Leftrightarrow \tilde{\mu}_{x,y}(B) = \overline{\tilde{\mu}_{y,x}(B)}$
  $\int f \, d\overline{\tilde{\mu}_{y,x}} = \overline{\int \overline{f} \, d\tilde{\mu}_{y,x}} = \overline{\langle \pi(\overline{f})y, x\rangle} = \langle x, \pi(\overline{f})y\rangle = \langle x, \pi^*(f)y\rangle = \langle \pi(f)x, y\rangle = \int f \, d\tilde{\mu}_{x,y}$
  $\Rightarrow \tilde{\mu}_{x,y}(B) = \overline{\tilde{\mu}_{y,x}(B)}$
- F ist **spektral**:$(F(M \cap N) = F(M) * F(N))$:
  Wir beweisen dies mit Hilfe der Indikatorfunktionen $\mathbb{1}$ welche die Gleichung $F(M) = \pi(\mathbb{1}_M)$ für alle $M \in \mathcal{B}$ erfüllen. Ein einfacher Beweis der Aussage wäre, wenn die Gleichung $F(M \cap N) = \pi(\mathbb{1}_{M\cap N}) = \pi(\mathbb{1}_M \mathbb{1}_N) = \pi(\mathbb{1}_M)\pi(\mathbb{1}_N) = F(M)F(N)$ gelten würde, jedoch ist π nur auf der Banachalgebra $C(X)$ definiert, die charakteristischen Funktionen müssen aber nicht stetig sein.

  Um die Gleichung trotzdem zu zeigen, verwenden wir $\langle \pi(f)x, y\rangle = \int f \, d\tilde{\mu}_{x,y}$ bei der die rechte Seite immer noch wohldefiniert ist, wenn f eine beschränkte messbare Funktion auf X ist. Wenn wir die Erweiterung von π auf diese größere Menge betrachten und zeigen können, dass diese auch multiplikativ ist, ist die obige Gleichung gezeigt.

  Seien f, g stetig und $S = \pi(f)$, $T = \pi(g)$, dann erhalten wir $\int fg \, d\tilde{\mu}_{x,y} = \langle STx, y\rangle = \int f \, d\tilde{\mu}_{Tx,y}$. Diese Gleichung gilt für alle $f \in C(X)$ und somit sind $g \cdot \tilde{\mu}_{x,y}$ und $\tilde{\mu}_{Tx,y}$ äquivalente Maße. Weiters folgt, dass die Gleichung auch für alle beschränkten messbaren Funktionen f erfüllt wird.

  Mit der selben Herangehensweise und $z = (\pi(f))^*y$, stetigem g und beliebigem beschränkten messbaren f können wir schlussfolgern, dass $\int fg \, d\tilde{\mu}_{x,y} = \int f \, d\tilde{\mu}_{Tx,y} = \langle \pi(f)Tx, y\rangle = \langle Tx, z\rangle = \int g \, d\tilde{\mu}_{x,z}$. Wir folgern daraus, dass die Maße $f \cdot \tilde{\mu}_{x,y}$ und $\tilde{\mu}_{x,z}$ äquivalent sind, sodass diese Gleichung auch für alle beschränkten messbaren g gilt.

  Wir können nun daraus schließen, dass für beliebige beschränkte messbaren Funktionen f und g die Gleichung $\langle \pi(fg)x, y\rangle = \int fg \, d\tilde{\mu}_{x,y} = \int g \, d\tilde{\mu}_{x,z} = \langle \pi(g)x, z\rangle = \langle \pi(g)x, \pi^*(f)y\rangle = \langle \pi(f)\pi(g)x, y\rangle$ erfüllt wird und somit F spektral ist.

□

5 Satz von Ando

Lemma 5.1. *Seien $\{V_1, ..., V_n\}$ eine Menge von kommutierenden Isometrien auf einem Hilbertraum $\mathcal{H}$. Dann existiert ein Hilbertraum $\mathcal{K}$ Oberraum von $\mathcal{H}$ und eine Menge von kommutierenden unitären Abbildungen $\{U_1, ..., U_n\}$ auf $\mathcal{K}$ so, dass*

$$V_1^{m_1} \cdots V_n^{m_n} = P_{\mathcal{H}} U_1^{m_1} \cdots U_n^{m_n}|_{\mathcal{H}}$$

für alle $m_1, ..., m_n$ aus den natürlichen Zahlen gilt.

Beweis. Sei U_1 eine minimale unitäre Erweiterung von V_1 auf $\mathcal{K}_1$ aus dem Satz von Sz. Nagy. Damit ist die lineare Hülle von $\{U_1^n \mathcal{H} : n \in \mathbb{Z}\}$ dicht in $\mathcal{K}_1$. Für $i \neq 1$ behaupten wir dass $W_i : \mathcal{K}_1 \to \mathcal{K}_1$ definiert durch

$$W_i(\sum_{n=-N}^{N} U_1^n h_n) = \sum_{n=-N}^{N} U_1^n V_i h_n$$

eine wohldefinierte Isometrie ist.

Um das zu erkennen, betrachten wir folgende Gleichung.

$$\begin{aligned}
\| \sum_{n=-N}^{N} U_1^n V_i h_n \|^2 &= \sum_{n \geq m} \langle U_1^{n-m} V_i h_n, V_i h_m \rangle + \sum_{n<m} \langle V_i h_n, U_1^{m-n} V_i h_m \rangle \\
&= \sum_{n \geq m} \langle V_1^{n-m} V_i h_n, V_i h_m \rangle + \sum_{n<m} \langle V_i h_n, V_1^{m-n} V_i h_m \rangle \\
&= \sum_{n \geq m} \langle V_i V_1^{n-m} h_n, V_i h_m \rangle + \sum_{n<m} \langle V_i h_n, V_i V_1^{m-n} h_m \rangle \\
&= \sum_{n \geq m} \langle V_1^{n-m} h_n, h_m \rangle + \sum_{n<m} \langle h_n, V_1^{m-n} h_m \rangle \\
&= \sum_{n \geq m} \langle U_1^{n-m} h_n, h_m \rangle + \sum_{n<m} \langle h_n, U_1^{m-n} h_m \rangle \\
&= \| \sum_{n=-N}^{N} U_1^n h_n \|^2
\end{aligned}$$

Wir können daher die Abbildung U auf einer Basis von $\{U_1^n \mathcal{H} : n \in \mathbb{Z}\}$ definieren, erweitern sie linear und erhalten eine Isometrie. Wir bemerken weiters, dass wenn V_i unitär ist, W_i auf einen dichten Unterraum von $\mathcal{K}_1$ definiert und somit auch unitär ist.
Man erkennt außerdem schnell, dass $\{U_1, W_2, ..., W_n\}$ kommutieren und dass

$$V_1^{m_1} \cdots V_n^{m_n} = P_{\mathcal{H}} U_1^{m_1} W_2^{m_2} \cdots W_n^{m_n}|_{\mathcal{H}}.$$

Als nächstes betrachten wir die unitäre Erweiterung W_2 auf $\mathcal{K}_2$ und erweitern $U_1, W_2, ..., W_n$ auf Isometrien auf $\mathcal{K}_2$. Da U_1 unitär ist, ist die Erweiterung auch unitär auf $\mathcal{K}_2$. Wir können solche Erweiterungen (n-2)-mal wiederholen und erhalten einen n-Tupel von unitären Abbildungen auf $\mathcal{K}_n$ mit den gewünschten Eigenschaften. □

Theorem 5.2 (Satz von Ando). *Sei T_1, T_2 zwei kommutierende Kompressionen auf dem Hilbertraum $\mathcal{H}$. Dann existiert ein Hilbertraum $\mathcal{K}$ Oberraum von $\mathcal{H}$ und zwei kommutierende unitäre Abbildungen $U_1, U_2 \in B(\mathcal{K})$ so, dass $T_1^n T_2^m = P_{\mathcal{H}} U_1^n U_2^m|_{\mathcal{H}}$ für alle n, m aus natürlichen Zahlen gilt.*

Beweis. Nach Lemma 5.1 reicht es aus zwei kommutierende Isometrien $V_1,\ V_2$ zu finden, sodass

$$T_1^n T_2^m = P_{\mathcal{H}} V_1^n V_2^m|_{\mathcal{H}} \qquad (*)$$

für alle n, m aus den Natürlichen Zahlen gilt. Die isometrische Erweiterungen $V_i : l^2(\mathcal{H}) \to l^2(\mathcal{H})$ definiert durch

$$V_i((h_1, h_2, ...)) = (T_i h_1, D_i h_1, h_2, ...), \quad D_i = (I - T_i^* T_i)^{1/2} \quad i = 1, 2$$

erfüllen die obige Gleichung $(*)$, sie müssen aber nicht kommutieren. In der Tat haben wir
$V_1 V_2((h_1, h_2, ...)) = (T_1 T_2 h_1, D_1 T_2 h_1, D_2 h_1, h_2, ...)$ während
$V_2 V_1((h_1, h_2, ...)) = (T_2 T_1 h_1, D_2 T_1 h_1, D_1 h_1, h_2, ...)$ ist.

Nehmen wir einmal an, dass ein unitäres $U : \mathcal{H} \otimes \mathcal{H} \to \mathcal{H} \otimes \mathcal{H}$ existiert mit $U((D_1 T_2 h, D_2 h)) = (D_2 T_1 h, D_1 h)$. Wir definieren die unitäre Abbildung $W : l^2(\mathcal{H}) \to l^2(\mathcal{H})$ durch $W((h_1, h_2, ...)) = (h_1, U(h_2, h_3), U(h_4, h_5), ...)$. Mit V_i und W sind auch WV_1 und $V_2 W^{-1}$ Isometrien, die die Gleichung $(*)$ erfüllen und folgende gilt:

$$\begin{aligned}
(WV_1)(V_2 W^{-1})((h_1, h_2, ...)) &= W(T_1 T_2 h_1, D_1 T_2 h_1, D_2 h_1, U^{-1}((h_2, h_3)), U^{-1}((h_4, h_5)), ...) \\
&= (T_1 T_2 h_1, U((D_1 T_2 h_1, D_2 h_1)), h_2, h_3, ...) \\
&= V_2 V_1((h_1, h_2, h_3, ...)) \\
&= (V_2 W^{-1})(WV_1)((h_1, h_2, h_3, ...))
\end{aligned}$$

Somit kommutieren WV_1 und $V_2 W^{-1}$.

Um nun das gesuchte unitäre U zu erhalten, betrachten wir:

$$\begin{aligned}\|D_1T_2h\|^2 + \|D_2h\|^2 &= \langle [T_2^*(I - T_1^*T_1)T_2 + (I - T_2^*T_2)]h, h\rangle \\ &= \langle [T_1^*(I - T_2^*T_2)T_1 + (I - T_1^*T_1)]h, h\rangle = \|D_2T_1h\|^2 + \|D_1h\|^2\end{aligned}$$

Daher definiert $U((D_1T_2h, D_2h)) = (D_2T_1h, D_1h)$ eine isometrische Abbildung zwischen zwei Unterräumen von $\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}$. Wenn die Kodimensionen übereinstimmen, kann man nun diese Abbildung zu dem gesuchte U auf $\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}$ erweitern. Das ist zum Beispiel dann der Fall, wenn die Dimension von $\mathcal{H}$ endlich ist. Sollte $\mathcal{H}$ unendlichdimensional sein, können die beiden Kodimensionen unterschiedlich sein und wir benötigen ein etwas komplizierteres Argument.
Wir beginnen bei der Neudefinition der Isometrien mittels $V_i((h_1, h_2, ...)) = (T_ih_1, D_ih_1, 0, h_2, ...)$.
Da V_1V_2 und V_2V_1 folgendermaßen aussehen:

$$\begin{aligned}V_1V_2((h_1, h_2, ...)) = V_1((T_2h_1, D_2h_1, 0, h_2, ...)) = (T_1T_2h_1, D_1T_2h_1, 0, D_2h_1, 0, h_2, ...) \\ V_2V_1((h_1, h_2, ...)) = V_2((T_1h_1, D_1h_1, 0, h_2, ...)) = (T_2T_1h_1, D_2T_1h_1, 0, D_1h_1, 0, h_2, ...)\end{aligned}$$

erkennen wir, dass wir ein unitäres $U : \mathcal{H}^{(4)} \to \mathcal{H}^{(4)}$ finden müssen mit $U((D_1T_2h, 0, D_2h, 0)) = (D_2T_1h, 0, D_1h, 0)$.
Die extra Nullen garantieren, dass wenn $\mathcal{H}$ unendlichdimensional ist, dass beide Unterräume die selbe endliche Kodimension haben und somit das gesuchte U existiert.
Mit $W((h_1, h_2, ...)) = (h_1, U((h_2, h_3, h_4, h_5)), U((h_6, h_7, h_8, h_9)), ...)$ erhalten wir, dass WV_1 und V_2W^{-1} kommutieren und die Gleichung $(*)$ erfüllen und somit der Satz von Ando bewiesen ist. $\square$

Literatur

[1] Vern Paulsen. *Cambridge Studies in Advanced Mathemathics 78: Completely Bounded Maps and Operator Algebras*. Cambridge University Press, 2002. ISBN 978-0-521-81669-4.

[2] John B. Conway. *A Course in Functional Analysis*. Springer-Verlag New York Berlin Heidelberg, 1990. ISBN 0-387-97245-5.

[3] Franka Miriam Brückler. Tensor products of C*-algebras, operator spaces and Hilbert C*-modules. In *Mathematical Communications 4*, 1999.

[4] David Loeffler. Spectral measures, 2003. `http://homepages.warwick.ac.uk/~masiao/maths/juvenilia/spectral_measures.pdf`. Eingesehen am 07.02.2017.

[5] William Arveson. *An invitation to C*-algebras*. Springer-Verlag , 1998. ISBN 0-387-90176-0.