TECHNISCHE UNIVERSITÄT WIEN

SEMINARARBEIT
ANALYSIS

# Das Stieltjes Momentenproblem

**Thomas Wagenhofer**

5. Juli 2018

Betreuer
Ao.Univ.Prof. Dipl.-Ing. Dr.techn. Harald WORACEK

# Inhaltsverzeichnis

# 1 Einleitung

Der Begriff Momentenproblem wird erstmals von T. J. Stieltjes in seiner Arbeit "Recherches sur les fractions continues" behandelt. Das Stieltjes-Momentenproblem behandelt das Problem, zu einer gegebenen Folge $(m_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ reeller Zahlen ein positives Maß $\mu$ auf $[0,\infty[$ zu finden, sodass $m_n$ das $n-$te Moment von $\mu$ ist, also

$$m_n = \int\limits_{[0,\infty[} t^n d\mu,\ n \in \mathbb{N}_0. \tag{1}$$

Lässt man zu, dass $\mu$ auf ganz $\mathbb{R}$ definiert ist, so erhält man das Hamburger-Momentenproblem. Man sucht dann ein positives Maß $\mu$, sodass

$$m_n = \int_{\mathbb{R}} t^n d\mu,\ n \in \mathbb{N}_0. \tag{2}$$

Schränkt man das Problem auf $[0,1]$ ein, so erhält man das Hausdorff-Momentenproblem: Gesucht ist ein positives Maß $\mu$, sodass

$$m_n = \int\limits_{[0,1]} t^n d\mu,\ n \in \mathbb{N}_0. \tag{3}$$

Eine Anwendung des Momentenproblems findet sich beispielsweise in der Wahrscheinlichkeitstheorie: Fordert man nämlich, dass $m_0 = 1$, so ist die Verteilungsfunktion einer Lösung $\mu$ ebenfalls eine Verteilungsfunktion einer Zufallsvariable $X$, die die Momente $m_n$ besitzt, das heißt, es gilt $\mathbb{E}(X^n) = m_n$.

Im ersten Abschnitt dieser Arbeit verallgemeinern wir das Momentenproblem. Sei $\mathcal{S} \subseteq \mathbb{R}^n$, so suchen wir für eine gegebene multi-Folge reeller Zahlen $(m_{k_1,..,k_n})_{k_1,..,k_n\in\mathbb{N}_0}$ ein positives Maß $\mu$ auf $\mathcal{S}$, sodass gilt:

$$m_{k_1,..,k_n} = \int_{\mathcal{S}} t^{k_1} \cdot ... \cdot t^{k_n} d\mu, \quad k_1, \dots, k_n \in \mathbb{N}_0. \tag{4}$$

Dabei werden wir uns auf den Fall $n = 2$ beschränken. Alle Beweise können jedoch analog auf höhere Dimensionen erweitert werden.

Im Abschnitt 3 untersuchen wir das Stieltjes-Momentenproblem (1), wobei wir für $\mu$ auch signierte Maße zulassen.

Der letzte Abschnitt beschäftigt sich noch mit der Eindeutigkeit von Lösungen, beziehungsweise Fällen, in denen es immer mehrere Lösungen gibt. Viel Konzepte werden in diesem Abschnitt nur vorgestellt, da eine saubere Ausarbeitung den Rahmen dieser Arbeit sprengen würde.

Diese Arbeit bezieht sich, wenn nicht anders angegeben, auf die Werke "The classical moment problem and some related questions in analysis" von N. Akhiezer [A] und auf die Arbeit "The Stieltjes moment Problem for functions of bounded variation" von R.P. Boas [B].

# 2 Momentenproblem

## 2.1 Allgemeines Momentenproblem

Wir untersuchen das Problem (4), wobei wir uns auf $n = 2$ einschränken. Wir suchen also für eine reelle Folge $(m_{ij})_{i,j \in \mathbb{N}_0^2}$ ein Maß $\mu$ auf $\mathcal{S} \subseteq \mathbb{R}^2$, sodass

$$m_{ij} = \int_{\mathbb{R}^2} u^i v^j d\mu, \quad i, j \in \mathbb{N}. \tag{5}$$

Bevor wir im Satz 2.7 die Frage nach der Existenz eines solchen Maßes beantworten, benötigen wir noch einige Aussagen.

**Definition 2.1** Sei $\mu$ ein Maß auf einem Messraum $(\Omega, \mathfrak{F})$, wobei $\Omega$ ein topologischer Raum un $\mathfrak{F}$ die borelsche Sigmaalgebra bezüglich seiner Topologie ist. Sei $(O_i)_{i \in I}$ die Familie der offenen Nullmengen bezüglich $\mu$. Dann ist der *Träger* von $\mu$ definiert als

$$\operatorname{supp}(\mu) := \Omega \setminus \left( \bigcup_{i \in I} O_i \right),$$

**Definition 2.2** Sei $f : \Omega \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $A \subseteq \Omega$. Man bezeichnet mit

$$\omega_f(A) := \sup_{x \in A} f(x) - \inf_{x \in A} f(x)$$

die *Oszillation* von $f$ auf $A$.

**Definition 2.3** Sei $\mathbb{R}[u, v]$ die Menge der Polynome zu in zwei Variablen $u, v$ mit reellen Koeffizienten $x_{ij} \in \mathbb{R}$. Definiere $\phi : \mathbb{R}[u, v] \to \mathbb{R}$ als

$$\phi(p) := \sum_{i,j=1}^{n} x_{ij} m_{ij} \text{ für } p(u, v) = \sum_{i,j=1}^{n} x_{ij} u^i v^j.$$

Insbesondere hat man also $\phi(u^i v^j) = m_{ij}$.

**Satz 2.4** Sei $M$ ein $\mathbb{R}$-Vektorraum aus reellwertigen Funktionen, die auf einer Menge $\Omega$ definiert sind. Sei $\Omega_0 \subseteq \Omega$, $M_0$ Untervektorraum von $M$ und gelte

$$\forall y \in M \; \exists x_1, x_2 \in M_0 : x_1(t) \leq y(t) \leq x_2(t), \; t \in \Omega_0.$$

Weiters sei $\phi_0$ ein lineares Funktional auf $M_0$, sodass

$$x(t) \geq 0 \text{ in } \Omega_0 \Rightarrow \phi_0(x) \geq 0.$$

Dann gibt es eine lineare Fortsetzung $\phi$ von $\phi_0$ auf $M$ (das heißt $\phi|_{M_0} = \phi_0$), sodass für $y \in M$ gilt

$$y(t) \geq 0 \text{ in } \Omega_0 \Rightarrow \phi(y) \geq 0.$$

**Beweis:** Wir verwenden in diesem Beweis das Auswahlaxiom: Dieses (und der Wohlordnungssatz) garantiert nämlich, dass es eine Basis $(y_a + M_0)_{a \in A}$ des Vektorraums $M/M_0$ gibt, wobei $A$ mit einer Wohlordnung $\preceq$ versehen ist. Man definiere nun eine Fortsetzung $\tilde{\phi}$ von $\phi$ (transfinit) induktiv über Mengen $M_b := \operatorname{span}(M_0 \cup \{y_a : a \preceq b\})$.

Sei $c \in A$ und $\phi$ bereits auf $M_b,\ b \prec c$ definiert, so definieren wir die Fortsetzung $\tilde{\phi}$ auf $M_c$ wie folgt:

Sei $x \in M_c$, so gibt es eine eindeutige Darstellung $x = x_b + u \cdot y_c$ wobei $x_b \in M_b$ für ein $b \prec c$, $u \in \mathbb{R}$.

Setze nun

$$\tilde{\phi}(x) = \tilde{\phi}(x_b + uy_c) := \phi(x_b) + ur_c,$$

mit einer noch zu bestimmenden Konstante $r_c$. Nach Konstruktion ist die Fortsetzung wieder linear und wohldefiniert, da jedes $x \in M_c$ eine eindeutige Darstellung hat. Es bleibt $r_c$ so zu wählen, dass die Positivität erhalten bleibt.

Falls etwa $x_0'(t) \leq y_c(t) \leq x_0''(t)$ für $t \in \Omega_0$, $x_0, x_0'' \in M_b$, so sollte auch

$$\phi(x_0') = \tilde{\phi}(x_0') \leq \tilde{\phi}(y_c) \leq \tilde{\phi}(x_0'') = \phi(x_0'')$$

gelten. Dies motiviert, dass man $r_c$ so wählt, dass

$$\sup_{\substack{x(t) \leq y_c(t) \text{ in } \Omega_0 \\ x \in M_b}} \phi(x) \leq r_c \leq \inf_{\substack{x(t) \geq y_c(t) \text{ in } \Omega_0 \\ x \in M_b}} \phi(x).$$

Da es nach Voraussetzung $x_1, x_2 \in M_0 \subseteq M_b$ gibt, sodass $x_1(t) \leq y_c(t) \leq x_2(t)$ für $t \in \Omega_0$, folgt, dass die betrachteten Mengen beim Supremum und Infimum nicht leer sind. Aus der Positivität von $\phi$ folgt weiters, dass das Supremum kleiner gleich dem Infimum ist.

Wir zeigen nun, dass die Fortsetzung ebenfalls positiv ist:
Sei also $x(t) = x_b(t) + uy_c(t) \geq 0$ in $\Omega_0$. Sei zunächst $u \geq 0$, so ist $y_c(t) \geq -\frac{1}{u}x_b(t)$ in $\Omega_0$ und nach Konstruktion $\tilde{\phi}(y_c) \geq -\frac{1}{u}\tilde{\phi}(x_b)$. Also auch $\phi(x) \geq 0$. Falls $u < 0$, so erhält man, dass $y_c(t) \leq -\frac{1}{u}x_b(t)$ und erhält wieder $\phi(x) \geq 0$.

Dadurch wurde $\tilde{\phi}$ rekursiv definiert. $\square$

Man könnte sich fragen, ob $\phi$ auf $M$ eine Art von Stetigkeit erfüllt. Wir zeigen nun, dass das der Fall ist: Konvergiert nämlich eine Funktion $f_n$ in $M$ gleichmäßig gegen eine Funktion $f$, so gilt auch $\phi(f_n) \to \phi(f)$. Man beachte allerdings, dass man $M$ im Allgemeinen nicht mit der Supremumsnorm versehen kann, da die Elemente von $M$ nicht beschränkt sein müssen.

**Lemma 2.5** Sei $M$ ein $\mathbb{R}$-Vektorraum aus reellwertigen Funktionen auf einer Menge $\Omega$ mit $1 \in M$ und sei $\phi : M \to \mathbb{R}$ ein positives lineares Funktional, das heißt $f(t) \geq 0$ in $\Omega$ impliziert $\phi(f) \geq 0$. Seien außerdem $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}, f \in M$ wobei $f_n \to f$ gleichmäßig in $\Omega$. Dann gilt $\phi(f_n) \to \phi(f)$.

**Beweis:** Da $f_n$ gleichmäßig gegen $f$ konvergiert, gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \ \forall t \in \Omega : |f_n(t) - f(t)| < \varepsilon, \ n > n_0$$

Dies kann aber äquivalent umgeformt werden zu:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \ : f_n - f < \varepsilon \cdot \mathbb{1}_\Omega \text{ und } f_n - f > -\varepsilon \cdot \mathbb{1}_\Omega, \quad n > n_0$$

Da $\phi$ monoton ist, folgt, dass $-\varepsilon\phi(1) = \phi(-\varepsilon\mathbb{1}_\Omega) \leq \phi(f_n - f) \leq \phi(\varepsilon\mathbb{1}_\Omega) = \varepsilon\phi(1)$
Also: $\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 : |\phi(f_n - f)| < \phi(1) \cdot \varepsilon, \ n > n_0$, was bedeutet, dass $\phi(f_n) \to \phi(f)$. □

**Definition 2.6** Sei $\mu$ Maß in $\mathbb{R}^n$. Ein Quader $I = \prod_{i=1}^n [a_i, b_i]$ heißt *Stetigkeitsquader* von $\mu$, falls für $I_\delta^\pm := \{x : a_i \mp \delta < x_i < b_i \mp \delta\}$ gilt:

$$\mu(I_\delta^\pm) \xrightarrow{\delta \to 0} \mu(I).$$

Dies ist äquivalent dazu, dass die Verteilungsfunktion $F_\mu(x, y) = \mu(] - \infty, x] \times ] - \infty, y])$ stetig an den Punkten $a_i, b_i$ ist.

Für den folgenden Satz gibt es verschiedene Beweise, die unterschiedliche Ideen verwenden. Hier wurde der Beweis von M. Riesz gewählt.

**Satz 2.7** Sei $(m_{ij})_{i,j\in\mathbb{N}_0}$ eine Folge reeller Zahlen; $\mathcal{S} \subseteq \mathbb{R}^2$ abgeschlossen und $\phi$ wie in Definiton 2.3 . Dann hat das Momentenproblem

$$m_{ij} = \int_\mathcal{S} u^i v^j d\mu, \ i, j \in \mathbb{N}_0$$

genau dann eine Lösung, wenn für beliebige Polynome $p(u, v) = \sum_{i,j=1}^n x_{i,j} u^i v^j$ mit $p(u, v) \geq 0$ in $\mathcal{S}$ folgt, dass $\phi(p) \geq 0$.

**Beweis:** "⇒": Sei $\mu$ eine Lösung und sei $p(u, v) \geq 0$ auf $\mathcal{S}$. Dann gilt

$$\begin{aligned}\phi(p) = \phi\left(\sum_{i,j=1}^n x_i y_j u^i v^j\right) &= \sum_{i,j=1}^n x_{i,j}\phi(u^i v^j) = \sum_{i,j=1}^n x_{i,j} m_{ij} = \sum_{i,j=1}^n x_{i,j} \int_\mathcal{S} x_{i,j} d\mu \\ &= \sum_{i,j=1}^n \int_\mathcal{S} x_{i,j} u^i v^j d\mu = \int_\mathcal{S} \sum_{i,j=1}^n x_{i,j} u^i v^j d\mu = \int_\mathcal{S} p(u, v) d\mu \geq 0.\end{aligned}$$

"⇐": Ziel ist es, ein Maß $\mu$ zu finden, das eine Lösung des Momentenproblems ist. Wir werden versuchen ein geeignetes Maß mit Hilfe des Funktionals $\phi$ zu definieren.
Sei $M := \{f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : \exists r \in \mathbb{N}, A, B > 0 : f(u, v) \leq A(u^{2r} + v^{2r}) + B\}$. Dann ist $M$ ein Vektorraum, der alle reellwertigen Polynome enthält. Setzt man $M_0$ als den Raum der reellen Polynome und $\Omega_0 = \mathcal{S}$, so sind alle Voraussetzungen von Satz 2.4 erfüllt, sodass $\phi$ auf $M$ erweitert werden kann. Diese Erweiterung $\tilde{\phi}$ wollen wir nun ebenfalls mit $\phi$ bezeichnen.

Da $\phi$ positiv auf $M$ ist, folgt insbesondere, dass $\phi(\mathbb{1}_C) \geq 0$ für alle $C$ der Form $C = ]c_1, d_1]\times]c_2, d_2]$. Außerdem definieren wir eine Funktion $G(x, y) := \phi(\mathbb{1}_{]-\infty,x]\times]-\infty,y]})$

Wir definieren nun eine Funktion $F_\mu$ wie folgt:

$$F_\mu(x_0, y_0) := \begin{cases} G(x_0, y_0), & \text{falls } G(x_0, y_0) \text{ stetig bei } (x_0, y_0), \\ \lim_{\substack{x\to x_0+ \\ y\to y_0+}} G(x, y), & \text{sonst.} \end{cases}$$

Da $G(x, y)$ monoton in $x$ und $y$ ist, existiert dieser Limes. Außerdem ist $F_\mu$ rechtsstetig und stimmt mit $G$ und auf seinen Stetigkeitspunkten überein.

Für $x_0 \leq x_1, y_0 \leq y_1$, sodass $(x_0, y_0), (x_0, y_1), (x_1, y_0)$ und $(x_1, y_1)$ Stetigkeitspunkte in $\mathcal{S}$ sind, ist

$$\begin{gathered} F\mu(x_1, y_1) - F_\mu(x_0, y_1) - F_\mu(x_1, y_0) + F(x_0, y_0) = \\ \phi(\mathbb{1}_{]-\infty,x_1]\times]-\infty,y_1]}) - \phi(\mathbb{1}_{]-\infty,x_0]\times]-\infty,y_1]}) - \phi(\mathbb{1}_{]-\infty,x_1]\times]-\infty,y_0]}) \\ +\phi(\mathbb{1}_{]-\infty,x_0]\times]-\infty,y_0]}) = \phi(\mathbb{1}_{]x_0,x_1]\times]y_0,y_1]}) \geq 0. \end{gathered}$$

Die Funktion $F_\mu$ erfüllt die Bedingungen aus [G, Satz 3.3], weshalb es ein Maß $\mu$ gibt, sodass $F_\mu$ seine Verteilungsfunktion ist.

Wir behaupten nun, dass $\mu$ eine Lösung für unser Momentenproblem ist. Es ist also zu zeigen, dass

1. $\mathrm{supp}(\mu) \subseteq \mathcal{S}$
2. $\int_{\mathbb{R}^2} u^i v^j d\mu = m_{ij}$

**Ad 1.:** Es genügt zu zeigen, dass $(u_0, v_0) \in \mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{S} \Rightarrow (u_0, v_0) \in \mathbb{R}^2 \setminus \mathrm{supp}(\mu)$. Sei nun $(u_0, v_0) \in I_0 \subset \mathbb{R} \setminus \mathcal{S}$, wobei $I_0$ Stetigkeitsquader ist. So ein Quader existiert, da sonst die Verteilungsfunktion von $\mu$ überabzählbar viele Unstetigkeitsstellen hätte.

Da $\mathbb{1}_{I_0} \equiv 0$ in $\mathcal{S}$ ist, haben wir $\mathbb{1}_{I_0} \leq 0$ und $\mathbb{1}_{I_0} \geq 0$ in $\mathcal{S}$ und es folgt aufgrund der Positivität von $\phi$, dass

$$\phi(\mathbb{1}_{I_0}) = 0.$$

Also gilt $\phi(\mathbb{1}_{I_0}) = 0 \Rightarrow \mu(I_0) = 0 \Rightarrow I_0 \subseteq \mathrm{supp}(\mu)^c$.

**Ad 2.:** Seien $\varepsilon, \varepsilon_1 > 0$, seien $i, j \in \mathbb{N}$ fix und $r \in \mathbb{N}$ ebenfalls fix mit $r \geq i, j$, und sei $I_0$ (abhängig von $i, j, \varepsilon$ und $r$) ein Stetigkeitsquader mit $I_0 \supseteq [-\frac{1}{\varepsilon}, \frac{1}{\varepsilon}]$, sodass gilt:

$$|u^i v^j| < \varepsilon(u^{2r} + v^{2r}) \text{ auf } \mathbb{R}^2 \setminus I_0. \tag{6}$$

Da $I_0$ beschränkt ist, gibt es disjunkte Intervalle $I_1, ..., I_n$, sodass $\bigcup_{k=1}^n I_k = I_0$, $\omega_{u^i v^j}(I_k) < \varepsilon_1$ und sodass der Durchmesser von $I_k < \varepsilon_1$ ist. Die Quader $I_k$ können wieder oBdA als Stetigkeitsquader gewählt werden.

Wir wählen für $k = 1, ..., n$ einen beliebigen Punkt $(u_k, v_k) \in I_k$ und definieren die Funktion

$$y(u,v) := \begin{cases} u_k^i v_k^j, & (u,v) \in I_k, \\ 0, & \text{sonst}, \end{cases}$$

das heißt $y = \sum_{k=1}^n u_k^i v_k^j \mathbb{1}_{I_k}$. Aus der Konstruktion folgt, dass

$$y(u,v) - \varepsilon_1 < u^i v^j < y(u,v) + \varepsilon_1, \ (u,v) \in I_0.$$

Gemeinsam mit (6) folgt, dass für alle $(u,v) \in \mathbb{R}^2$, insbesondere aus $\mathcal{S}$, gilt:

$$y(u,v) - \varepsilon_1 - \varepsilon(u^{2r} + v^{2r}) < u^i v^j < y(u,v) + \varepsilon_1 + \varepsilon(u^{2r} + v^{2r}).$$

Da $\phi$ positiv und linear ist, folgt

$$\phi(y) - \varepsilon_1 \phi(1) - \varepsilon \phi(u^{2r} + v^{2r}) \leq \phi(u^i v^j) \leq \phi(y) + \varepsilon_1 \phi(1) + \varepsilon \phi(u^{2r} + v^{2r}).$$

Dies ist nach Definition von $\phi$ äquivalent zu

$$\phi(y) - \varepsilon_1 m_{00} - \varepsilon(m_{2r,0} + m_{0,2r}) \leq m_{ij} \leq \phi(y) + \varepsilon_1 m_{00} + \varepsilon(m_{2r,0} + m_{0,2r}).$$

Außerdem gilt nach Definition von $y$ und wegen der Wahl von $I_k$ als Stetigkeitsquader:

$$\phi(y) = \phi\left(\sum_{k=1}^n u_k^i v_k^j \mathbb{1}_{I_k}\right) = \sum_{k=1}^n u_k^i v_k^j \phi(\mathbb{1}_{I_k}) = \sum_{k=1}^n u_k^i v_k^j \mu(I_k) \tag{7}$$

Es gilt, dass

$$\lim_{\varepsilon_1 \to 0} y(u,v) = u^i v^j$$

punktweise in $I_0$. Aus dem Satz der dominierten Konvergenz folgt, dass

$$\sum_{k=1}^n u_k^i v_k^j \mu(I_k) = \int_{I_0} y(u,v) d\mu \xrightarrow{\varepsilon_1 \to 0} \int_{I_0} u^i v^j d\mu.$$

Der Satz der dominierten Konvergenz ist anwendbar, da $I_0$ ein beschränkter Quader ist. Deshalb folgt:

$$\int_{I_0} u^i v^j d\mu - \varepsilon(m_{2r,0} + m_{0,2r}) \leq m_{ij} \leq \int_{I_0} u^i v^j d\mu + \varepsilon(m_{2r,0} + m_{0,2r}).$$

Bildet man nun den Grenzwert $\varepsilon \to 0$, so gilt $I_0 \uparrow \mathbb{R}^2$ und da $u^i v^j \in L^1(\mu)$ folgt

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{I_0} u^i v^j = \int_{\mathbb{R}^2} u^i v^j d\mu.$$

Damit haben wir

$$\int_{I_0} u^i v^j d\mu \leq m_{ij} \leq \int_{I_0} u^i v^j d\mu.$$

$\square$

## 2.2 Hamburger-Momentenproblem

Das Hamburger-Momentenproblem (2) hat genau dann eine Lösung, wenn die Voraussetzungen von Satz 2.7 erfüllt sind. Diese Voraussetzungen nachzuprüfen kann mühsam sein, weshalb wir an einfacheren äquivalenten Bedingungen interessiert sind. Im eindimensionalen Fall ist es tatsächlich möglich solche anzugeben.

**Definition 2.8** Sei $(m_k)_{k=0,...,2n}$ eine Familie reeller Zahlen. Die Matrix

$$\begin{pmatrix} m_0 & m_1 & \cdots & m_n \\ m_1 & m_2 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_n & \cdots & \cdots & m_{2n} \end{pmatrix}$$

wird die *Hankel-Matrix* von

$$(m_k)_{k=0,...,2n}$$

genannt.

Weiters bezeichnen wir mit $[m_0, ..., m_{2n}]$ die Determinante der Hankel-Matrix von $(m_k)_{k=0,...,2n}$:

$$[m_0, ..., m_{2n}] := \begin{vmatrix} m_0 & m_1 & \cdots & m_n \\ m_1 & m_2 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_n & \cdots & \cdots & m_{2n} \end{vmatrix}.$$

**Satz 2.9** Sei $(m_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ eine Folge reeller Zahlen. Das Hamburger-Momentenproblem

$$m_n = \int_{\mathbb{R}} t^n d\mu, \ n \in \mathbb{N}_0$$

besitzt genau dann eine Lösung, wenn für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$[m_0, ..., m_{2n}] \geq 0$$

Im Beweis von Satz 2.9 verwenden wir folgendes Lemma:

**Lemma 2.10** Sei $p \in \mathbb{R}[t]$ ein Polynom und gelte $p(t) \geq 0, \ t \in \mathbb{R}$. Dann existieren Polynome $q_1, q_2 \in \mathbb{R}[t]$, sodass

$$p(t) = q_1(t)^2 + q_2(t)^2.$$

**Beweis:** Aus dem Fundamentalsatz der Algebra folgt, dass für alle Polynome $p(t)$ gilt:

$$p(t) = a_n \cdot \prod_{k=1}^{n} (t - \lambda_k),$$

wobei $a_n \geq 0$ der Führungskoeffizeint von $p(t)$ und $\lambda_k \in \mathbb{C}$ die Nullstellen von $p(t)$ sind. Falls $p(t) \geq 0$ gilt sogar, dass

$$p(t) = a_n \cdot \prod_{k=1}^{\frac{n}{2}} (t - \lambda_k) \cdot (x - \bar{\lambda}_k). \tag{8}$$

Man kann nämlich die folgenden 2 Fälle unterscheiden:

1. $\lambda_k \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$: Wegen $p(\overline{z}) = \overline{p(z)}$ folgt, dass $\bar{\lambda}_k$ ebenfalls eine Nullstelle ist.
2. $\lambda_k \in \mathbb{R}$: Die Darstellung ist dann möglich, wenn $\lambda_k$ eine gerade Vielfachheit hat. Falls die Vielfachheit ungerade ist, so gibt es ein $l$, sodass $p^{(m)}(\lambda_k) = 0, m < 2l - 1$ und $p^{(2l-1)}(\lambda_k) \neq 0$. Dies ist aber ein Widerspruch dazu, dass $p(\lambda_k) = 0$ globales Minimum längs $\mathbb{R}$ ist.

Es folgt also aus (8), dass $p(t) = q(t) \cdot \overline{q(t)}$ mit dem komplexen Polynom $q(t) = \sqrt{a_n} \prod_{k=1}^{\frac{n}{2}} (x - \lambda_k)$. Schreibe $q(t) = q_1(t) + iq_2(t)$ mit reellen Polynomen $q_1$ und $q_2$, wobei $q_1(t) = \Re(q(t))$, $q_2(t) = \Im(q(t))$. Dann folgt

$$p(t) = q(t) \cdot \overline{q(t)} = (q_1(t) + iq_2(t)) \cdot (q_1(t) - iq_2(t)) = q_1(t)^2 + q_2(t)^2.$$

$\square$

**Beweis:** (Von Satz 2.9) Wir wollen Satz 2.7 verwenden. Sei $\phi$ positives Funktional wie in Definition 2.3 und Satz 2.7.

**"$\Rightarrow$":** Sei $\mu$ eine Lösung. Nach Satz 2.7 ist $\phi(p) \geq 0$ für alle Polynome $p(t)$, für die gilt $p(t) \geq 0, t \in \mathbb{R}$. Insbesondere gilt dies für Polynome der Gestalt

$$q(t) = (x_0 + x_1 t + x_2 t^2 + ... + x_n t^n)^2,$$

da offensichtlich $q(t) \geq 0$ ist. Es folgt:

$$0 \leq \phi(q) = \phi((x_0 + x_1 t + x_2 t^2 + ... + x_n t^n)^2) = \phi\left(\sum_{k,j=0}^{n} x_k x_j t^{k+j}\right)$$

$$= \sum_{k,j=0}^{n} x_k x_j \phi(t^{k+j}) = \sum_{k,j=0}^{n} x_k x_j m_{k+j} = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} m_0 & m_1 & \cdots & m_n \\ m_1 & m_2 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_n & \cdots & \cdots & m_{2n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Da $x_0, ..., x_n \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$ beliebig sind, folgt, dass alle Hankel-Matrizen positiv semidefinit sind.

**"$\Leftarrow$":** Seien nun alle Hankel-Matrizen positiv semidefinit. Da man wegen Lemma 2.10 alle positiven Polynome als Summe zweier quadratischen Polynome darstellen kann, das heißt $p(t) = p_1(t)^2 + p_2(t)^2$, kann man die obige Rechnung von rechts nach links durchführen und erhält, dass $\phi(p_1^2) \geq 0$ und $\phi(p_2^2) \geq 0$. Also folgt für positive Polynome

$$\phi(p) = \phi(p_1^2 + p_2^2) = \phi(p_1^2) + \phi(p_2^2) \geq 0$$

$\square$

**Korollar 2.11** Sei $(m_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ eine Folge reeller Zahlen,und $\mu$ eine Lösung des Hamburger Momentenproblems.

Falls es ein $n \in \mathbb{N}$ gibt, sodass $[m_0, ..., m_{2n}] = 0$, so ist $\operatorname{card}(\operatorname{supp}(\mu)) \leq n$, also besteht das Spektrum von $\mu$ aus höchstens $n$ Punkten.

**Beweis:** Ist $[m_0, ..., m_{2n}] = 0$, so gibt es $x_0, ..., x_n$ mit $(x_0, ..., x_n) \neq 0$, sodass

$$0 = \sum_{k,j=0}^{n} x_k x_j m_{k+j} = \int\limits_{]-\infty,\infty[} \sum_{k,j=0}^{n} x_k x_j t^{k+j} d\mu = \int\limits_{]-\infty,\infty[} (x_0 + x_1 t + ... + x_n t^n)^2 d\mu.$$

Also folgt, dass $p(t) = (x_0 + x_1 t + ... + x_n t^n)^2 = 0$ $\mu$-fast-überall. Das Polynom $p(t)$ hat aber höchstens $n$ Nullstellen, also ist $\operatorname{card}(\operatorname{supp}(\mu)) \leq n$. $\square$

## 2.3 Stieltjes-Momentenproblem

**Satz 2.12** Sei $(m_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ eine Folge reeller Zahlen. Das Stieltjes-Momentenproblem

$$m_n = \int_{[0,\infty[} t^n d\mu, \ n \in \mathbb{N}_0,$$

besitzt genau dann eine Lösung, wenn für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt:

$$[m_1, ..., m_{2n+1}], [m_0, ..., m_{2n}] \geq 0$$

Wir gehen ähnlich wie in Satz 2.9 vor und zeigen zunächst eine Aussage über positive Polynome auf $[0, \infty[$.

**Lemma 2.13** Sei $p \in \mathbb{R}[t]$ ein Polynom und gelte $p(t) \geq 0$, $t \in [0, \infty[$. Dann existieren Polynome $p_1, p_2 \in \mathbb{R}[t]$, sodass

$$p(t) = p_1(t)^2 + t \cdot p_2(t)^2.$$

**Beweis:** Ist $\deg(p) = 1$, so gilt die Aussage klarerweise.

Für $\deg(p) = 2$ gilt $p(t) = at^2 + bt + c$. Sei oBdA $a = 1$. Da offensichtlich gelten muss, dass $c \geq 0$, folgt, $p(t) = (t - \sqrt{c})^2 + (b + 2\sqrt{c})t$. Da $\sqrt{c} \geq 0$, muss $p(\sqrt{c}) \geq 0$ sein, woraus man erhält, dass $b \geq -2\sqrt{c}$ ist.

Seien nun $p(t) = p_1^2 + tp_2^2$, $q(t) = q_1^2 + tq_2^2$ so folgt

$$\begin{aligned} p \cdot q &= p_1^2 q_1^2 + tp_1^2 q_2^2 + tp_2^2 q_1^2 + t^2 p_2^2 q_2^2 \\ &= p_1^2 q_1^2 + t2p_1p_2q_1q_2 + t^2 p_2^2 q_2^2 + tp_1^2 q_2^2 - t2p_1p_2q_1q_2 + tp_2^2 q_1^2 \\ &= (p_1q_1 + tp_2q_2)^2 + t(p_1q_2 - p_2q_1)^2. \end{aligned}$$

Also kann man das Produkt von zwei Polynomen wieder in der gewünschten Form darstellen. Es genügt zu zeigen, dass jedes auf den positiven reellen Zahlen positive Polynom mit Grad $> 2$ als Produkt zweier positiver Polynome mit Grad $\geq 1$ darstellbar ist.

Sei $\deg(p) \geq 3$ und $\lambda$ eine beliebige Nullstelle von $p(t)$. Es können nun folgende Fälle eintreten:

1. $\lambda$ ist rein komplex. So ist $\bar{\lambda}$ ebenfalls eine Nullstelle und $(t-\lambda)\cdot(t-\bar{\lambda})$ ist ein reelles Polynom mit Grad 2, das in $[0, \infty[$ sogar $> 0$ ist. Es gilt $p(t) = (t - \lambda) \cdot (t - \bar{\lambda}) \cdot q(t)$ für ein geeignetes Polynom $q(t)$, für das $q(t) \geq 0$ für $t \in [0, \infty[$ gilt. Man kann also $p(t)$ als Produkt zweier positiver Polynome darstellen.

2. $\lambda \in ]-\infty, 0]$: Die Behauptung folgt unmittelbar, da $(t - \lambda) \geq 0$ in $[0, \infty[$.

3. $\lambda \in \mathbb{R}^+$: Es gibt $q \in \mathbb{R}[t]$ sodass

$$0 \leq p(t) = q(t) \cdot (t - \lambda), \ t \in [0, \infty[.$$

Da für $t \in [0, \infty[$ gelten muss, dass aus $t - \lambda < 0$ folgt, dass $q(t) < 0$ und aus $t - \lambda > 0$, folgt, dass $q(t) > 0$, so erhält man insgesamt, dass $q(t)$ eine Nullstelle bei $\lambda$ besitzt. Es folgt damit: $q(t) = (t - \lambda) \cdot \tilde{q}(t)$ und insbesondere

$$p(t) = (t - \lambda)^2 \cdot \tilde{q}(t).$$

□

**Beweis:**(Von Satz 2.12) Wir verwenden wieder Satz 2.7. Sei $\phi$ das Funktional wie in Definition 2.3 und Satz 2.7. Ähnlich zu Satz 2.9 genügt es zu zeigen, dass aus $p(t) \geq 0$ in $[0, \infty]$ folgt, dass es $p_1(t)$, $p_2(t)$ gibt, sodass $p(t) = p_1(t)^2 + t \cdot p_2(t)^2$

**"⇒":** Sei $\mu$ eine Lösung. Nach Satz 2.7 ist $\phi(p) \geq 0$ für alle Polynome $p(t)$, für die gilt $p(t) \geq 0, t \in [0, \infty[$. Insbesondere gilt dies für Polynome der Gestalt

$$\begin{aligned} q_1(t) &= (x_0 + x_1 t + x_2 t^2 + ... + x_n t^n)^2, \\ q_2(t) &= t(x_0 + x_1 t + x_2 t^2 + ... + x_n t^n)^2, \end{aligned}$$

da offensichtlich $q_1(t), q_2(t) \geq 0$ auf $\mathbb{R}^+$ ist.

Es folgt:

$$0 \leq \phi(q_1) = \phi((x_0 + x_1 t + x_2 t^2 + ... + x_n t^n)^2) = \phi\left(\sum_{k,j=0}^{n} x_k x_j t^{k+j}\right)$$

$$= \sum_{k,j=0}^{n} x_k x_j \phi(t^{k+j}) = \sum_{k,j=0}^{n} x_k x_j m_{k+j} = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} m_0 & m_1 & \cdots & m_n \\ m_1 & m_2 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_n & \cdots & \cdots & m_{2n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Und ebenso:

$$\begin{aligned} 0 \leq \phi(q_2) &= \phi(t(x_0 + x_1 t + x_2 t^2 + ... + x_n t^n)^2) \\ &= \phi\left(\sum_{k,j=0}^{n} x_k x_j t^{k+j+1}\right) = \sum_{k,j=0}^{n} x_k x_j \phi(t^{k+j+1}) \end{aligned}$$

$$= \sum_{k,j=0}^{n} x_k x_j m_{k+j+1} = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} m_1 & m_2 & \cdots & m_{n+1} \\ m_2 & m_3 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{n+1} & \cdots & \cdots & m_{2n+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Da $x_0, ..., x_n \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$ beliebig sind, folgt, dass alle Hankel-Matrizen positiv semidefinit sind.

**"$\Leftarrow$":** Seien nun alle Hankel-Matrizen positiv semidefinit. Wegen Lemma 2.13 gilt für $p \in \mathbb{R}[t]$ mit $p(t) \geq 0,\ t \in [0, \infty[$ , dass es $p_1, p_2 \in \mathbb{R}[t]$ gibt mit $p(t) = p_1(t)^2 + tp_2(t)$. Man kann nun die obigen Rechnungen von rechts nach links durchführen und erhält, dass $\phi(p_1^2) \geq 0$ und $\phi(tp_2^2) \geq 0$. Also folgt:

$$\phi(p) = \phi(p_1^2 + tp_2^2) = \phi(p_1^2) + \phi(tp_2^2) \geq 0.$$

□

## 2.4 Hausdorff-Momentenproblem

Bevor wir auf das Hausdorff-Momentenproblem eingehen, untersuchen wir die Bernsteinpolynome.

**Definition 2.14** Sei $f(t)$ eine reellwertige Funktion, so nennt man

$$B_n(f)(t) := \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k}$$

das $n$-te Bernsteinpolynom für die Funktion $f$.

**Bemerkung 2.15** Bernstein-Polynome besitzen einige sehr bemerkenswerte Eigenschaften. Man kann zeigen, dass die Bernsteinpolynome für jede stetige Funktion gleichmäßig gegen sie konvergieren. Bernstein selbst gab in [BS] einen konstruktiven Beweis für den Satz von Stone-Weierstrass an. Im folgenden Lemma zeigen wir, dass die Bernstein-Approximation für Polynome gleichmäßig ist.

**Lemma 2.16** Sei $p(t)$ Polynom mit Grad $m$, $m \leq n$, so gilt:

$$B_n(p)(t) = p(t) + \sum_{k=1}^{m-1} \frac{p_k(t)}{n^k}. \tag{9}$$

Wobei $p_k(t)$ ein Polynom mit Grad kleiner gleich $m$ ist.

**Beweis:** Es genügt dieses Lemma für Monome $t^m$ zu zeigen, da jedes Polynom endliche Linearkombination aus Monomen ist. Sei nun $n \geq k$.
Zuerst stellen wir fest, dass $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} = (p+q)^n$. Leitet man beide Seiten nach $p$ ab und multipliziert anschließend mit $\frac{p}{n}$, so erhält man

$$\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} k p^{k-1} q^{n-k} = n(p+q)^{n-1} \;\Leftrightarrow\; \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \frac{k}{n} p^k q^{n-k} = p(p+q)^{n-1}.$$

Führt man diese Schritte (nach $p$ ableiten, anschließend mit $\frac{p}{n}$ multiplizieren) nun noch weitere $m-1$ mal durch, so erhält man unter Anwendung der Produktregel

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{k}{n}\right)^m p^k q^{n-k} = \sum_{k=1}^{m} \frac{n!}{n^m (n-k)!} P_k(p)(p+q)^{n-k}.$$

Wobei $P_k(p)$ Polynom in $p$ mit Grad $k$ ist. Insbesondere gilt $P_m(p) = p^m$. Nun setzen wir $p = t, q = (1-t)$ und verwenden, dass

$$\frac{n!}{n^m (n-k)!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-(k-1))}{n^k n^{m-k}} = \frac{1}{n^{m-k}} \prod_{l=0}^{k-1} (1 - \frac{l}{n}).$$

Somit erhalten wir

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{k}{n}\right)^m t^k (1-t)^{n-k} = \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{n^{m-k}} \prod_{l=0}^{k-1} (1 - \frac{l}{n}) \cdot P_k(t) 1^{n-k}.$$

Wir stellen nun folgendes fest: Es gibt auf der rechten Seite genau einen Term, der nicht durch eine Potenz von $n$ dividiert wird, nämlich $P_m(t) = t^m$. Alle anderen Terme der rechten Seite sind außerdem Polynome in $t$ mit Grad kleiner gleich $m$ und werden mit $(\frac{1}{n})^k$, $k = 1, \ldots, m-1$ multipliziert. Also gibt es Polynome $\widetilde{P}_k(t)$ mit Grad kleiner gleich $m$, sodass gilt:

$$t^m + \sum_{k=1}^{m-1} \frac{\widetilde{P}_k(t)}{n^k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{k}{n}\right)^m t^k (1-t)^{n-k} = B_n(t^m)(t).$$

$\square$

Es fehlt noch eine letzte Definition, bevor wir das Hausdorff-Problem untersuchen können:

**Definition 2.17** Sei $(m_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ eine Folge reeller Zahlen und $\phi$ wie in Definiton 2.3. Wir definieren den Differenzenoperator $\Delta^j m_k$ wie folgt:

$$\Delta^0 m_k := m_k = \phi(t^k)$$
$$\Delta^1 m_k := m_k - m_{k+1} = \phi(t^k(1-t))$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$\Delta^j m_k := m_k - \binom{j}{1} m_{k+1} + \binom{j}{2} m_{k+2} - ........ + (-1)^j m_{k+j} = \phi(t^k(1-t)^j).$$

**Satz 2.18** Sei $(m_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ eine Folge reeller Zahlen. Das Hausdorff-Momentenproblem

$$m_n = \int_{[0,1]} t^n d\mu, \ n \in \mathbb{N}_0,$$

besitzt genau dann eine Lösung, wenn für alle $k, j \in \mathbb{N}_0$ gilt:

$$\Delta^j m_k \geq 0.$$

**Beweis: "$\Rightarrow$":** Sei $\mu$ eine Lösung, so gilt:

$$\Delta^j m_k = m_k - \binom{j}{1} m_{k+1} + \binom{j}{2} m_{k+2} - ... + (-1)^j m_{k+j}$$
$$= \int_{[0,1]} t^k - \binom{j}{1} t^{k+1} + \binom{j}{2} t^{k+2} - ... + (-1)^j t^{k+j} d\mu = \int_{[0,1]} t^k (1-t)^j d\mu \geq 0.$$

**"$\Leftarrow$":** Sei nun $\Delta^j m_k \geq 0$ und $\phi$ wie in Definition 2.3. Nach Satz 2.7 genügt es zu zeigen, dass für $p \in \mathbb{R}[t]$ mit $p(t) \geq 0, \ t \in [0,1]$ gilt, dass $\phi(p) \geq 0$. Aus Definition von $\Delta^j$ folgt, dass $\phi(t^k(1-t)^j) \geq 0$ für alle $k, j \in \mathbb{N}_0$. Also gilt für alle reellwertigen Funktionen $f(t)$ mit $f(t) \geq 0, \ t \in [0,1]$:

$$\phi(B_n(f)) \geq 0.$$

Wegen Lemma 2.16 gilt für $m = \deg(p)$ und $n > m$:

$$B_n(p)(t) = p(t) + \sum_{k=1}^{m-1} \frac{p_{m,k}(t)}{n^k}.$$

Da $\phi$ linear ist, folgt

$$0 \leq \phi(B_n(p)) = \phi(p) + \sum_{k=1}^{m-1} \frac{\phi(p_{m,k})}{n^k}.$$

Lässt man nun $n \to \infty$, so erhält man

$$0 \leq \phi(p),$$

wobei uns Lemma 2.5 garantiert, dass dieser Limes existiert. $\square$

# 3 Stieltjes-Momentenproblem für signierte Maße

## 3.1 Stieltjes-Momentenproblem für signierte Maße

**Satz 3.1** Sei $(m_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ eine Folge reeller Zahlen, so gibt es ein signiertes Maß $\mu$, sodass

$$m_n = \int\limits_{[0,\infty]} t^n d\mu,\ n \in \mathbb{N}_0.$$

**Beweis:** Aus der Maßtheorie ist bekannt, dass ein signiertes Maß als Differenz zweier Maße dargestellt werden kann. Das Ziel ist, die Folge $(m_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ als Differenz zweier Folgen $m_n = \lambda_n - \nu_n$ darzustellen, wobei $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(\nu_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ den Voraussetzungen von Satz 2.12 genügen. Wir definieren beide Folgen induktiv:

Zuerst wählen wir positive reelle Zahlen $\lambda_0, \nu_0, \lambda_1$ und $\nu_1$, sodass $m_0 = \lambda_0 - \nu_0$ und $m_1 = \lambda_1 - \nu_1$.

Seien nun bereits $\lambda_k, \nu_k$ für $k \leq 2n-1$ gewählt und seien außerdem für $k \leq n-1$ die Determinanten

$$[\lambda_0, ..., \lambda_{2k}] > 0,\ [\lambda_1, ..., \lambda_{2k+1}] > 0,\ [\nu_0, ..., \nu_{2k}] > 0,\ [\nu_1, ..., \nu_{2k+1}] > 0.$$

Für Matrizen $A = (a_{ij})_{i,j=1...n}$ besagt der Laplace'sche Entwicklungssatz, dass bei der Entwicklung nach der $j$-ten Spalte $\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \cdot \det A_{ij}$, wobei $A_{ij}$ Untermatrix von $A$ ist, die durch Streichen der $i$-ten Zeile und $j$-ten Spalte entsteht. Falls wir nun nach der $n$-ten Spalte entwickeln, ergibt sich, dass

$$[\lambda_0, ..., \lambda_{2n}] = \lambda_{2n} \cdot [\lambda_0, ..., \lambda_{2n-2}] + P(\lambda_0, ...\lambda_{2n-1}).$$

Wobei $P$ ein Polynom bezeichne, das nur von $\lambda_0, ...\lambda_{2n-1}$ abhängt. Genauso zeigt man, dass

$$[\nu_0, ..., \nu_{2n}] = \nu_{2n} \cdot [\nu_0, ..., \nu_{2n-2}] + P(\nu_0 ... \nu_{2n-1})$$

Da nach Voraussetzung gilt, dass $[\lambda_0, ..., \lambda_{2n-2}] > 0$ und $\cdot[\nu_0, ..., \nu_{2n-2}] > 0$, kann man $\nu_{2n}$ und $\lambda_{2n}$ so groß wählen, dass $[\nu_0, ..., \nu_{2n}] > 0$, $[\lambda_0, ..., \lambda_{2n}] > 0$ und ebenfalls $m_{2n} = \lambda_{2n} - \nu_{2n}$ gilt.

Analog findet man $\lambda_{2n+1}$ und $\nu_{2n+1}$, sodass $[\lambda_1, ..., \lambda_{2n+1}] > 0, [\nu_1, ..., \nu_{2n+1}] > 0$ und $m_{2n+1} = \lambda_{sn+1} - \nu_{2n+1}$.

Es gibt also nach Satz 2.12 Maße $\lambda$ und $\nu$, sodass

$$\lambda_n = \int\limits_{[0,\infty[} t^n d\lambda,\quad \nu_n = \int\limits_{[0,\infty[} t^n d\nu,\ n \in \mathbb{N}_0.$$

Damit folgt

$$m_n = \lambda_n - \nu_n = \int\limits_{[0,\infty[} t^n d\lambda - \int\limits_{[0,\infty[} t^n d\nu = \int\limits_{[0,\infty[} t^n d(\lambda - \nu),\ n \in \mathbb{N}_0.$$

Das heißt $\mu := \lambda - \nu$ ist unser gesuchtes Maß. $\square$

## 3.2 Schnell steigende Folgen

**Satz 3.2** Sei $(m_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ Folge reeller Zahlen und gelte $m_0 \geq 1$, sowie $m_n \geq (nm_{n-1})^n$. Dann erfüllt $(m_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ die Bedingungen aus Satz 2.12.

**Beweis:** Dieser Beweis lehnt sich stark am Beweis von Satz 3.1 an. Es folgt durch Entwicklung nach der $n$-ten Spalte, dass

$$[m_0, ..., m_{2n}] = m_{2n}[m_0, ..., m_{2n-2}] + \sum_{k=n}^{2n-1} (-1)^{n+k} m_k |D_k|, \tag{10}$$

$$[m_1, ..., m_{2n+1}] = m_{2n+1}[m_1, ..., m_{2n-1}] + \sum_{k=n+1}^{2n} (-1)^{n+k} m_k |D'_k|. \tag{11}$$

Wobei $D_k$ und $D'_k$ die entsprechenden Untermatrizen bezeichne, die nur von $m_0, ..., m_{2n-1}$ bzw $m_0, ..., m_{2n}$ abhängen.
Wir zeigen nun induktiv, dass

$$[m_0, ..., m_{2k}] \geq 1, \quad [m_1, ..., m_{2k+1}] \geq 1.$$

Sei die Behauptung bereits für $k \leq n-1$ gezeigt. Aus den Voraussetzungen folgt, dass für $l \geq 2$ gilt:

$$m_l \geq (lm_{l-1})^l > 2(\frac{l}{2})^{\frac{l+4}{4}} m_{l-1}^{\frac{l+2}{2}}.$$

Insbesondere folgt damit, dass

$$m_{2n} > 1 + n^{\frac{n+2}{2}} m_{2n-1}^{n+1}, \quad m_{2n+1} > 1 + n^{\frac{n+2}{2}} m_{2n}^{n+1}. \tag{12}$$

Aus den Voraussetzungen folgt ebenfalls, dass $m_k \geq m_{k-1}, \ k \in \mathbb{N}$, woraus wiederum folgt, dass die einzelnen Einträge der Matrix $D_k$ kleiner gleich $m_{2n-1}$ und die der Matrix $D'_k$ kleiner gleich $m_{2n}$ sind.
Falls man zeigen kann, dass

$$|D_k| \leq m_{2n-1}^n n^{\frac{n}{2}}, \quad |D'_k| \leq m_{2n}^n n^{\frac{n}{2}}, \tag{13}$$

erhält man mit (10), (12), (13) und der Induktionsvoraussetzung:

$$[m_0, ..., m_{2n}] \overset{10,IV}{\geq} m_{2n} - \sum_{k=n}^{2n-1} m_k |D_k| \geq m_{2n} - \sum_{k=n}^{2n-1} m_{2n-1} |D_k| \overset{12}{\geq} m_{2n} - m_{2n-1}^{n+1} n^{1+\frac{n}{2}} \overset{13}{>} 1.$$

Analog zeigt man, dass $[m_1, ..., m_{2n+1}] \geq m_{2n+1} - m_{2n}^{n+1} n^{1+\frac{n}{2}} > 1$. Um den Beweis abzuschließen bleib noch die Behauptung (13) zu zeigen, dies ist aber ein unmittelbares Anwenden von Korollar 3.4.

□

**Satz 3.3 (Hadamard-Ungleichung)** Sei $B \in \mathbb{C}^{n\times n}, B = (b_1, ...b_n)$ mit $b_k \in \mathbb{C}^n$ und bezeichne $\|.\|_2$ die euklidische Norm, so gilt

$$\det M \leq \prod_{k=1}^{n} \|b_k\|_2.$$

**Beweis:** Aus der Leibnizformel oder dem Laplace-Entwicklungssatz folgt, dass $\det(c \cdot b_1, ..., b_n) = c \det(b_1, ...b_n)$, also insbesondere auch

$$\det(b_1, ..., b_n) = \prod_{k=1}^{n} \|b_k\|_2 \det\left(\frac{b_1}{\|b_1\|_2}, ..., \frac{b_n}{\|b_m\|_2}\right).$$

Es bleibt noch zu zeigen, dass für eine Matrix $A = (a_1, ...a_n)$ mit $\|a_k\|_2 \leq 1$ gilt, dass $\det A \leq 1$.

Wegen dem Determinantenmultiplikationssatz gilt, dass $\det(A^*A) = \det(A^*) \cdot \det(A) = \det(A)^2$. Außerdem gilt für die Eigenwerte $\lambda_k$ der Matrix $A^*A$: $\det(A^*A) = \prod_{k=1}^n \lambda_k$ und $\mathrm{spur}(A^*A) = \sum_{k=1}^n \lambda_k$.

Fassen wir diese Erkenntnisse zusammen und verwenden die Ungleichung von geometrischen und arithmetischen Mittel so folgt

$$\begin{aligned}\det(A^*A) = \prod_{k=1}^{n} \lambda_k &= \left(\prod_{k=1}^{n} \lambda_k\right)^{\frac{n}{n}} \leq \left(\frac{\sum_{k=1}^n \lambda_k}{n}\right)^n = \left(\frac{1}{n}\mathrm{spur}(A^*A)\right)^n \\ &= \left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k^T a_k\right)^n = \left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \|a_k\|^2\right)^n \leq \left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} 1\right)^n = 1^n = 1.\end{aligned}$$

Wir erhalten $\det(A) \leq 1$, was zu zeigen war. □

**Korollar 3.4** Sei $A = (a_{ij})_{i,j=1,...n}$ eine Matrix mit $|a_{ij}| \leq c$, so folgt

$$\det(A) \leq n^{\frac{n}{2}} c^n.$$

**Beweis:** Sei $A = (a_1, ..., a_n)$, $a_k \in \mathbb{C}^n$ so gilt nach Voraussetzung

$$\|a_k\| = c\left\|\frac{a_k}{c}\right\|_2 = c\left(\sum_{l=1}^{n}\left(\frac{a_{kl}}{c}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq c\left(\sum_{l=1}^{n} 1^2\right)^{\frac{1}{2}} = c \cdot n^{\frac{1}{2}}.$$

Mit Satz 3.3 folgt nun:

$$\det(A) \leq \prod_{k=1}^{n} \|a_k\|_2 \leq \prod_{k=1}^{n} cn^{\frac{1}{2}} = c^n n^{\frac{n}{2}}.$$

□

# 4 Eindeutigkeit von Lösungen

Wir betrachten zunächst wie in Satz 2.7 den allgemeinen Fall und untersuchen die Lösungen auf Eindeutigkeit.

**Definition 4.1** Betrachte den Vektorraum

$$M := \{f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : \exists r \in \mathbb{N}, A, B > 0 : f(u,v) \leq A(u^{2r} + v^{2r}) + B, f \text{ stetig}\}$$

Sei $\phi$ wie in Satz 2.7 und bezeichne mit $M_p := \{f \in M : f \text{ Polynom}\}$ den Untervektorraum aller Polynome. Definiere für $y \in M$ zwei Funktionale

$$\overline{\phi}(y) := \sup_{\substack{p(u,v) \leq y(u,v) \text{ in } \Omega_0 \\ p \in M_p}} \phi(p); \qquad \underline{\phi}(y) := \inf_{\substack{p(u,v) \geq y(u,v) \text{ in } \mathcal{S} \\ p \in M_p}} \phi(p) \quad .$$

Es gilt, dass $\overline{\phi}$ und $\underline{\phi}$ linear sind mit $\underline{\phi}(y) \leq \overline{\phi}(y)$, da $\phi$ positiv ist.

**Satz 4.2** Sei $y \in M$ fest, $\mathcal{S} \subseteq \mathbb{R}^2$ abgeschlossen; $(m_{i,j})_{i,j \in \mathbb{N}_0}$ eine reelle Folge, die die Bedingungen von Satz 2.7 erfüllt. Sei außerdem $(\mu_t)_{t \in T}$ die Familie aller Lösungen dieses Momentenpoblems mit $\text{supp}(\mu_j) \subseteq \mathcal{S}$. So gilt:

$$A := \left\{ \int_{\mathbb{R}^n} y(u,v) d\mu_t | t \in T \right\} = [\underline{\phi}(y), \overline{\phi}(y)], \; y \in M.$$

In Worten: das Integral $\int_{\mathbb{R}^n} y(u,v) d\mu_t$ nimmt für Lösungen des Momentenproblems alle Werte des Intervalls $[\underline{\phi}(y), \overline{\phi}(y)]$ an.

**Beweis:** Sei $t \in T$ fest aber beliebig, $p(u,v) \in M_p$ mit $p(u,v) \leq y(u,v)$, $(u,v) \in \mathcal{S}$. Dann gilt ebenfalls für alle $\mu_t$:

$$\int_{\mathbb{R}^n} y(u,v) d\mu_t \geq \int_{\mathbb{R}^n} p(u,v) d\mu_t.$$

Da diese Ungleichung für alle $p \in M_p$ mit $p(u,v) \leq y(u,v)$, $(u,v) \in \mathcal{S}$ gilt, folgt, dass

$$\underline{\phi}(y) \leq \int_{\mathbb{R}^n} y(u,v) d\mu_t.$$

Analog zeigt man $\int_{\mathbb{R}^n} y(u,v) d\mu_t \leq \overline{\phi}(y)$. Da $t$ beliebig war, folgt $A \subseteq [\underline{\phi}(y), \overline{\phi}(y)]$.

Es bleibt noch $A \supseteq [\underline{\phi}(y), \overline{\phi}(y)]$ zu zeigen:
Sei $l \in [\underline{\phi}(y), \overline{\phi}(y)]$ beliebig. Wir suchen nun ein $\mu_{t_0}$, sodass $\int_{\mathbb{R}^n} y(u,v) d\mu_{t_0} = l$ gilt. Der Beweis wird hier nur skizziert, die fehlenden Teile beweist man analog zu Satz 2.7:

Wegen Lemma 2.4 kann man $\phi$ auf $M$ so fortsetzen, dass $\phi(y) = l$ gilt.

Jetzt muss man nur noch wie in Satz 2.7 zeigen, dass

$$\int_{\mathbb{R}^n} y(u,v)d\mu_{t_0} = \phi(y) = l$$

Wobei man im Beweis nur $x_{ij}u^iv^j$ durch $y(u,v)$ ersetzen muss und feststellen muss, dass aus der Definition von $M$ folgt, dass es $c > 0$ gibt, sodass $|\phi(y)| \leq c$ (Es gibt ein Polynom $\tilde{p}$ mit $\tilde{p} \geq |y|$ in $\mathcal{S}$, also folgt $|\phi(y)| \leq \phi(\tilde{p})$ ). □

Aus Satz 4.2 und dem Fundamentallemma der Variationsrechnung [BL, Lemma 6.1.1] folgt unmittelbar:

**Korollar 4.3** Eine Lösung des Momentenproblems ist genau dann eindeutig, wenn $\forall y \in M : \overline{\phi}(y) = \underline{\phi}(y)$.

## 4.1 Eindeutigkeit im Hausdorff-Fall

Das Hausdorff-Momentenproblem ist bezüglich Eindeutigkeit besonders einfach zu untersuchen. Es gilt nämlich:

**Korollar 4.4** Eine Lösung des Hausdorff-Momentenproblems ist immer eindeutig.

Nach dem Satz von Stone-Weierstrass liegen die Polynome dicht im Raum der stetigen Funktionen, der aber Obermenge von $M$ ist. Also folgt mit Satz 2.5:

$$\forall y \in M : \overline{\phi}(y) = \underline{\phi}(y).$$

## 4.2 Eindeutigkeit von Lösungen des signierten Momentenproblems

**Satz 4.5** Sei $(m_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ eine reelle Zahlenfolge. Es gibt immer mehrere Lösungen des signierten Momentenproblems aus Satz 3.1.

**Beweis:** Im Beweis zu Satz 3.1 erkennt man, dass man die konstruierten Folgen $\lambda_n$ und $\nu_n$ beliebig schnell steigen lassen kann. Es genügt außerdem zu zeigen, dass eine Lösung des Stieltjes-Momentenproblems für $\lambda_n$ nicht eindeutig ist.

Sei $m_n$ derart, dass

$$m_0 \geq 1,\ m_n \geq (nm_{n-1})^n,\ m_2 \geq (2m_1 + 2)^2. \tag{14}$$

Setze zunächst $\eta_k := m_k$ für $k \neq 1$ und $\eta_1 := m_1 + 1$, so erfüllen sowohl $(m_n)_{n \in \mathbb{N}}$ als auch $(\eta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ die Voraussetzungen von Satz 3.2, das heißt es gibt Maße $\mu$ und $\eta$, sodass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\int_{[0,\infty[} t^{2n} d\mu = m_{2n} = \eta_{2n} = \int_{[0,\infty[} t^{2n} d\eta.$$

Man kann in den Integralen $u := t^2$ substituieren und erhält so Maße $\tilde{\mu}$, $\tilde{\eta}$, sodass

$$\int\limits_{[0,\infty[} t^{2n} d\mu = \int\limits_{[0,\infty[} u^n d\tilde{\mu}, \quad \int\limits_{[0,\infty[} t^{2n} d\eta = \int\limits_{[0,\infty[} u^n d\tilde{\eta}.$$

$\tilde{\mu}$ unterscheidet sich von $\tilde{\eta}$, da

$$\int\limits_{[0,\infty[} u^{\frac{1}{2}} d\tilde{\eta} = \eta_1 = 1 + m_1 = 1 + \int\limits_{[0,\infty[} u^{\frac{1}{2}} d\tilde{\mu}.$$

$\tilde{\mu}$ und $\tilde{\eta}$ sind jedoch beides Lösungen des Stieltjes-Momentenproblems für die Folge $(m_{2n})_{n\,\in\,\mathbb{N}}$, weshalb eine Lösung für das signierte Momentenproblem nicht eindeutig sein kann, da man im Beweis von Satz 3.1 die Folge $\lambda_n$ so wählen kann, dass die Bedingungen (14) erfüllt sind. $\square$

**Bemerkung 4.6** Mit Hilfe von Satz 3.1 und 4.5 kann man auch Aussagen über das signierte Hamburger-Momentenproblem

$$m_n = \int_{\mathbb{R}} t^n d\mu, \ n \in \mathbb{N}_0$$

treffen, wobei auch hier signierte Maße zugelassen werden. Da laut Satz 3.1 immer eine Maß $\mu$ mit $\operatorname{supp}(\mu) \subseteq [0, \infty[$ existiert, hat auch das Hamburger-Problem eine Lösung. Und da eine Lösung des Stieltjes-Problems nie eindeutig ist, kann auch eine Lösung des signierten Hamburger-Problems nie eindeutig sein.

## 4.3 Eindeutigkeit im Hamburger/Stieltjes Fall

Es gibt Folgen $(m_n)_{n\,\in\,\mathbb{N}_0}$ deren Stieltjes-Momentenproblem nicht eindeutig lösbar ist. Dadurch besitzt auch das Hamburger-Problem für die selbe Folge mehrere Lösungen

**Beispiel 4.7** Betrachte für $|a| < 1$, $k \in \mathbb{Z}$ eine Zufallsvariablen $X_a$ mit Dichte

$$f_x(t) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}t} e^{\frac{-\log(t)^2}{2}} (1 + a\sin(2k\pi\log(t)), \ t > 0.$$

Für den Fall $a = 0$ hat man die Dichte einer Log-Normalverteilung.

Diese Zufallsvariablen besitzen alle die selben Momente, das heißt für $a$ mit $|a| < 1$ gilt: $\mathbb{E}(X_a^n) = \mathbb{E}(X_0^n), \ n \in \mathbb{N}_0$. Es gilt:

$$\mathbb{E}(X_a^n) = \int_{[0,\infty[} t^n f(t) dt = \int_{[0,\infty[} t^n \frac{1}{\sqrt{2\pi}t} e^{\frac{-\log(t)^2}{2}} (1 + a\sin(2k\pi\log(t))).$$

Es genügt zu zeigen, dass für beliebige $a$ gilt, dass

$$\int_{[0,\infty[} t^n \frac{1}{\sqrt{2\pi}t} e^{\frac{-\log(t)^2}{2}} a\sin(2k\pi\log(t)) = 0.$$

Durch Substitution erhält man:

$$
\begin{aligned}
&\int_{[0,\infty[} t^n \frac{1}{\sqrt{2\pi} t} e^{\frac{-\log(t)^2}{2}} a \sin(2k\pi \log(t))dt = \int_{\mathbb{R}} e^{tn} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-t^2}{2}} a \sin(2k\pi t)dt \\
&= \int_{\mathbb{R}} \frac{a}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2-2tn+n^2-n^2}{2}} \sin(2k\pi t)dt = \int_{\mathbb{R}} \frac{ae^{-\frac{n^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(t-n)^2}{2}} \sin(2k\pi t)dt \\
&= \int_{\mathbb{R}} \frac{ae^{-\frac{n^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} \sin(2k\pi(t+n))dt = \int_{\mathbb{R}} \frac{ae^{-\frac{n^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} \sin(2k\pi t)dt = 0.
\end{aligned}
$$

Da die Sinusfunktion ungerade und $e^{-\frac{t^2}{2}}$ gerade ist, folgt, dass das Integral verschwindet.

Falls man Kriterien für Eindeutigkeit benötigt, kann folgende Bemerkung aufschlussreich sein:

**Bemerkung 4.8** Sei $(m_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ eine Folge reeller Zahlen, sodass das entsprechende Hamburger- oder Stieltjes Momentenproblem eine Lösung besitzt. Betrachte die Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k m_k}{k!}.$$

Falls es ein $r > 0$ gibt, sodass diese Reihe für alle $t \in U_r(0) \subseteq \mathbb{C}$ konvergiert, so ist eine Lösung des Momentenproblems eindeutig. Sei nämlich $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$ Wahrscheinlichkeitsraum, so wählt man eine Zufallsvariable $X_\mu$ sodass $X_\mu \stackrel{d}{=} \frac{[\mu]}{m_0}$, also $\mathbb{P}(X_\mu \leq t) = \frac{\mu(]-\infty,t])}{m_0}$. Die Streckung mit $m_0$ erfolgt, damit $\mathbb{P}(X_\mu \in \mathbb{R}) = 1$. Damit ist $X_\mu$ Zufallsvariable, deren charakteristische Funktion

$$\mathbb{E}(e^{iX_\mu t}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{i^k \mathbb{E}(X_\mu^k) t^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{i^k t^k m_k}{k!}$$

in einer Nullumgebung existiert. Aus der Maßtheorie ist bekannt, dass eine Zufallsvariable eindeutig durch ihre charakteristische Funktion bestimmt ist. Man kann also von der eindeutigen Lösung sprechen.

**Bemerkung 4.9** Falls eine Folge $(m_n)_{n \in \mathbb{N}}$ die Bedingung (14) aus Satz 4.5 erüllt, so ist das zugehörige Stieltjes-Momentenproblem (und damit auch das Hamburger-Problem) nicht eindeutig lösbar. Man kann die Rechnung analog von oben übernehmen.

**Bemerkung 4.10** Es gibt weitere Kriterien für die eindeutige Bestimmtheit von Lösungen, wie zum Beispiel "Carlemans Condition", die beispielsweise für das Hamburger-Momentenproblem (2) besagt, dass eine Lösung dann eindeutig ist, falls

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{m_{2n}}\right)^{\frac{1}{2n}} = \infty.$$

Für das Stieltjes-Problem lautet die Bedingung

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{m_n}\right)^{\frac{1}{2n}} = \infty.$$

Dies ist nur eine hinreichende Bedingung. Der Beweis für diese Bedingung ist aufwendig, weshalb in dieser Seminararbeit darauf verzichtet wird. Man findet ihn beispielsweise in [S, Theorem 1.10.].

# Literatur


[S] J. A. Shohat and J. D. Tamarkin(1943) *The problem of moments* American Mathematical Society, NY,

[A] N. I Akhiezer(1965) *The classical moment problem and some related questions in analysis* Oliver & Boyd, Edinburgh and London,

[B] R.P. Boas(1939) *The Stieltjes moment Problem for functions of bounded variation* Bulletin of the American Mathematical Society 46, NY, **399-404**

[G] K. Grill *Maß- und Wahrscheinlichkeitstheorie* Vorlesungsskript 2018, Version 0.2018.1

[BS] S.N. Bernstein(1912/1913) *Démonstration du théorème de Weierstrass fondée sur le calcul des probabilités* Commun. Soc. Math. Kharkov, Vol. 12, No. 2, **1-2**

[BL] M. Blümlinger *Analysis 3* Vorlesungsskript September 2017