Gleichmäßige Grenzwerte stetiger Funktionen

David Wörgötter

15. Juni 2020

Ziel des Vortrags ist es, die Stetigkeit von gleichmäßigen Grenzwerten stetiger Funktion bezüglich verschiedener Topologien zu untersuchen.

Definition 1. *Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum. Eine Folge, reellwertiger Funktionen $f_n : X \to \mathbb{R}$ heißt gleichmäßig konvergent gegen $f : X \to \mathbb{R}$, falls*

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \forall n \geq n_0 \ \forall x \in X : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

gilt.
Die Folge $f_n : X \to \mathbb{R}$ heißt kompakt konvergent gegen $f : X \to \mathbb{R}$, wenn für alle kompakten Teilmengen K von X die Funktionenfolge $f_n\big|_K$ gleichmäßig gegen $f\big|_K$ konvergiert.

1 Gleichmäßige Grenzwerte in metrischen Räumen

Aus früheren Vorlesungen ist bekannt, dass in metrischen Räumen gleichmäßige Grenzwerte stetiger Funktionen wiederum stetig sind:

Satz 2. *Sei (X, d) ein metrischer Raum und $f_n : X \to \mathbb{R}$ eine Folge stetiger Funktionen, die gleichmäßig gegen $f : X \to \mathbb{R}$ konvergiert. Dann ist f stetig.*

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$ beliebig und $n \in \mathbb{N}$ so, dass für alle $x \in X$ gilt: $d(f_n(x), f(x)) < \varepsilon$. Sei $x \in X$ beliebig und $\delta > 0$ so, dass für alle $y \in U_\delta(x)$ gilt: $d(f_n(x), f_n(y)) < \varepsilon$. Dann folgt mit zweimaliger Anwendung der Dreiecksungleichung für alle $y \in U_\delta(x)$:

$$d(f(x), f(y)) \leq d(f(x), f_n(x)) + d(f_n(x), f_n(y)) + d(f_n(y), f(y)) < 3\varepsilon,$$

somit ist f stetig. □

Es gilt sogar etwas mehr:

Satz 3. *Sei (X, d) ein metrischer Raum und $f_n : X \to \mathbb{R}$ eine Folge stetiger Funktionen, die kompakt gegen $f : X \to \mathbb{R}$ konvergiert. Dann ist f stetig.*

Beweis. Aus Satz 2 folgt, dass für alle kompakten Teilmengen K von X die Funktion $f\big|_K : K \to \mathbb{R}$ stetig ist. Somit gilt: Für alle abgeschlossenen $B \subseteq \mathbb{R}$ und alle kompakten $K \subseteq X$ ist $f\big|_K^{-1}(B) = f^{-1}(B) \cap K$ abgeschlossen in X. Wir wollen zeigen: Falls für alle kompakten $K \subseteq X$ die Menge $f^{-1}(B) \cap K$ abgeschlossen ist, dann ist $f^{-1}(B)$ abgeschlossen.

Sei dazu $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge aus $f^{-1}(B)$ mit Grenzwert $x \in X$. Die Menge $D := \{x_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{x\}$ ist kompakt in X. Angenommen $x \notin f^{-1}(B)$. Da für alle kompakten $k \subseteq X$ die Menge $f^{-1}(B) \cap K$ abgeschlossen ist, wäre dann aber $f^{-1}(B) \cap D = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ abgeschlossen. Es folgt somit $x \in f^{-1}(B)$ und damit, dass $f^{-1}(B)$ abgeschlossen ist.

Insgesamt gilt also: $f^{-1}(B)$ ist abgeschlossen für alle abgeschlossenen Teilmengen B von $\mathbb{R}$. Somit ist f stetig. □

2 Gleichmäßige Grenzwerte in hemikompakten normalen topologischen Räumen

Als nächstes wollen wir die Situation in etwas allgemeineren topologischen Räumen untersuchen.

Definition 4. *Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum. $(X, \mathcal{T})$ heißt normal, wenn einpunktige Mengen abgeschlossen sind, und wenn es zu je zwei disjunkten, abgeschlossenen Mengen $A, B \subseteq X$ disjunkte, offene Mengen $U, V \subseteq X$ mit $A \subseteq U$ und $B \subseteq V$ gibt.*

$(X, \mathcal{T})$ heißt hemikompakt, wenn es eine Folge $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von kompakten Teilmengen von X gibt, sodass

$$\forall \text{ kompakten } K \subseteq X \ \exists n \in \mathbb{N} : K \subseteq K_n.$$

Da alle einpunktigen Teilmengen von X kompakt sind, folgt daraus insbesondere, dass $(X, \mathcal{T})$ auch σ-kompakt ist.

Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum. Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus X heißt konvergent gegen unendlich ($\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$), wenn es für jede kompakte Menge $K \subseteq X$ eine natürliche Zahl n_0 gibt, sodass $x_n \notin K$ für alle $n \geq n_0$.

In normalen Räumen lassen sich reellwertige, stetige Funktionen von abgeschlossenen Teilmengen auf den ganzen Raum fortsetzen:

Satz 5. *(Fortsetzungssatz von Tietze)*
Sei A eine abgeschlossene Teilmenge eines normalen Raumes $(X, \mathcal{T})$ und $f : A \to \mathbb{R}$ sei stetig und beschränkt. Dann gibt es eine stetige und beschränkte Funktion $F : X \to \mathbb{R}$ mit $F\big|_A = f$ und $\|F\|_\infty = \|f\|_\infty$.

Es gilt nun folgender Satz:

Satz 6. *Sei $(X, \mathcal{T})$ ein hemikompakter, normaler topologischer Raum, welcher eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ enthält, die gegen unendlich konvergiert und einen Häufungspunkt in X hat. Dann gilt: Es gibt eine Folge von stetigen Funktionen $f_n : X \to \mathbb{R}$, die kompakt gegen eine Funktion $f : X \to \mathbb{R}$ konvergiert, welche* ***nicht*** *stetig ist.*

Beweis. Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge aus X, die gegen unendlich konvergiert und dennoch einen Häufungspunkt $p \in X$ hat. Die Existenz einer Folge, die gegen unendlich konvergiert, impliziert, dass $(X, \mathcal{T})$ kein kompakter Raum sein kann. Da $(X, \mathcal{T})$ als hemikompakt vorausgesetzt wurde, existiert eine Folge $(\widetilde{K_n})_{n\in\mathbb{N}}$ von kompakten Teilmengen von X mit

$$\forall \text{ kompakten } K \subseteq X \ \exists n \in \mathbb{N} : K \subseteq \widetilde{K_n}.$$

OBdA gelte $p \in \widetilde{K_1}$. Definiere eine Folge $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ durch

$$K_n := \bigcup_{k=1}^{n} \widetilde{K_k}.$$

Dann gilt: $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine aufsteigende Folge kompakter Teilmengen von X, $p \in K_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und für alle kompakten $K \subseteq X$ existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$, sodass $K \subseteq K_n$ für alle $n \geq n_0$.
Für alle $n \in \mathbb{N}$ sei $E_n := \{x_k : k \in \mathbb{N}\} \cap (K_{n+1} \setminus K_n)$. Da $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen unendlich konvergiert, ist jedes E_n endlich.
Sei $f_1 : X \to \mathbb{R}$ die konstante Nullfunktion. Sei $n \in \mathbb{N}$ und sei bereits eine stetige Funktion f_n definiert. Dann sei $g_{n+1} : K_n \cup E_n \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$g_{n+1}(x) = \begin{cases} f_n(x), & x \in K_n \\ n, & x \in E_n. \end{cases}$$

Da $K_n \cup E_n$ abgeschlossen ist, kann g_{n+1} mithilfe des Fortsetzungssatzes von Tietze zu einer stetigen Funktion $f_{n+1} : X \to \mathbb{R}$ fortgesetzt werden. Wir erhalten somit eine Folge stetiger Funktionen $f_n : X \to \mathbb{R}$, sodass für alle $k \geq n$ gilt: $f_k\big|_{K_n} = f_n\big|_{K_n}$. Da es für alle kompakten Mengen $K \subseteq X$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt, mit $K \subseteq K_n$ für alle $n \geq n_0$, folgt, dass die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ kompakt gegen ein $f : X \to \mathbb{R}$ konvergiert. Weiters gilt: $f(p) = 0$ und $\forall x \in E_n : f(x) = n$.
Da p ein Häufungspunkt von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $f(p) = 0$, folgt wegen $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \infty$, dass $f : X \to \mathbb{R}$ nicht stetig ist. $\square$

3 Gleichmäßige Grenzwerte in Banachräumen

Aus dem ersten Abschnitt folgt offenbar, dass für einen Banachraum X der Grenzwert einer kompakt konvergente Folge von (norm-)stetigen Funktionen $f_n : X \to \mathbb{R}$ wiederum stetig bezüglich der Norm ist. Es stellt sich die Frage, ob diese Aussage auch gilt, wenn wir X mit der schwachen Topologie versehen. Dazu definieren wir:

Definition 7. *Sei X ein Banachraum, $\sigma(X, X')$ sei die schwache Topologie auf X. Eine Funktion $f : X \to \mathbb{R}$ heißt schwach stetig, falls sie stetig von $(X, \sigma(X, X'))$ nach $\mathbb{R}$ (versehen mit der Standardtopologie) ist.*
Eine Folge von Funktionen $f_n : X \to \mathbb{R}$ heißt schwach kompakt konvergent gegen $f : X \to \mathbb{R}$, falls für alle schwach kompakten Teilmengen K von X die Funktionenfolge $f_n\big|_K$ gleichmäßig gegen $f\big|_K$ konvergiert.

Zunächst wollen wir untersuchen, ob Banachräume in das topologische Setting von vorhin passen. Im Allgemeinen tun sie das nicht, denn es gilt folgender Satz:

Satz 8. *Sei X ein Banachraum. X versehen mit der schwachen Topologie ist genau dann hemikompakt, wenn X reflexiv ist.*

Bevor wir zum Beweis kommen, geben wir zwei Hilfsresultate an:

Lemma 9. *Sei X ein Banachraum. Es gilt: X ist reflexiv genau dann, wenn die abgeschlossene Einheitskugel $K_1^X(0)$ schwach kompakt ist.*

Weiters gilt:

Lemma 10. *Sei X ein Banachraum. Jede schwach kompakte Teilmenge von X ist beschränkt.*

Beweis. Sei $A \subseteq X$ schwach kompakt. Mit der kanonischen Einbettung $\iota : X \to X''$ gilt für alle $x' \in X'$:

$$\iota(A)(x') = \{\iota(a)(x') : a \in A\} = \{x'(a) : a \in A\} = x'(A) \subseteq \mathbb{C}.$$

Da x' schwach stetig und A schwach kompakt ist, folgt, dass $x'(A)$ eine kompakte, und damit insbesondere beschränkte Teilmenge von $\mathbb{C}$ ist. Somit sind die Funktionale $\{\iota(a) : a \in A\}$ punktweise beschränkt. Da ι isometrisch ist, folgt mit dem Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit, dass für alle $a \in A$ gilt:

$$\|a\| = \|\iota(a)\| \leq C$$

für ein $C > 0$. Somit ist A beschränkt. □

Nun zum Beweis von Satz 8:

Beweis. (Von Satz 8):
Sei X reflexiv und $A \subseteq X$ eine schwach kompakte Menge. Da schwach kompakte Mengen beschränkt sind, existiert ein $C > 0$ mit $A \subseteq K_C^X(0)$. Da X reflexiv ist, ist $K_C^X(0)$ schwach kompakt. Mit der Folge $(K_n^X(0))_{n\in\mathbb{N}}$ von schwach kompakten Teilmengen von X folgt, dass X versehen mit der schwachen Topologie hemikompakt ist.

Sei nun X versehen mit der schwachen Topologie hemikompakt und sei $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von schwach kompakten Teilmengen von X mit der Eigenschaft, dass es für jede kompakte Menge $K \subseteq X$ eine natürliche Zahl n gibt mit $K \subseteq K_n$. Daraus folgt, da alle einpunktigen Mengen kompakt sind:

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n.$$

Da alle schwach abgeschlossenen Mengen auch abgeschlossen bezüglich der Norm sind, folgt, dass es eine Menge K_n, ein $\alpha > 0$ und ein $x_0 \in X$ gibt mit $x_0 + \alpha\ K_1^X(0) \subseteq K_n$. Wäre dem nämlich nicht so, dann wäre $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge abgeschlossener Mengen mit leerem Inneren. Laut dem Satz von Baire müsste dann auch X leeres Inneres haben, was aber nicht der Fall ist.
Da abgeschlossene und konvexe Mengen auch schwach abgeschlossen sind, folgt, dass $x_0 + \alpha\ K_1^X(0)$ (und damit auch $K_1^X(0)$) schwach kompakt ist. Somit ist X reflexiv. □

Bemerkung 11. *Der obige Beweis funktioniert genauso, wenn wir in Satz 8 Hemikompaktheit durch σ-Kompaktheit ersetzen.*
Wir haben also implizit mitbewiesen: Für Banachräume X versehen mit der schwachen Topologie sind die Begriffe hemikompakt und σ-kompakt äquivalent.

Somit lassen sich die im vorigen Abschnitt hergeleiteten Ergebnisse über hemikompakte normale Räume nicht auf Banachräume mit der schwachen Topologie übertragen. Es gilt aber trotzdem:

Satz 12. *Sei X ein Banachraum mit $dim(X) = \infty$. Dann gibt es eine Folge von schwach stetigen Funktionen $f_n : X \to \mathbb{R}$, die schwach kompakt gegen eine Funktion $f : X \to \mathbb{R}$ konvergiert, welche **nicht** schwach stetig ist.*

Um diesen Satz zu beweisen benötigen wir einige Vorbereitungen.

3.1 P-Konvergenz

Definition 13. *Sei $P : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{R}_0^+$ (quasi eine unendliche Matrix mit nichtnegativen Einträgen) mit*

$$\sum_{m=1}^{\infty} p_{n,m} = 1 \text{ für alle } n \in \mathbb{N},$$

und

$$\lim_{n\to\infty} p_{n,m} = 0 \text{ für alle } m \in \mathbb{N}.$$

Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von reellen Zahlen heißt P-konvergent gegen 0, falls

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{m=1}^{\infty} p_{n,m} a_m = 0.$$

In diesem Fall schreiben wir auch P-lim $a_n = 0$.
Sei weiters X ein Banachraum und $1 \leq p < \infty$. Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus X heißt schwach (P,p)-konvergent gegen 0, falls für alle $f \in X'$ die Folge $|f(x_n)|^p$ P-konvergent gegen 0 ist. In diesem Fall schreiben wir auch $w(P,p)$-lim $x_n = 0$.

Zunächst einige Eigenschaften der P-Konvergenz:

Lemma 14. *Sei X ein Banachraum, $1 \leq p < \infty$, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge aus X und $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zwei Folgen aus $\mathbb{R}$ und $P : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{R}_0^+$. Dann gilt:*

1. *Falls $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, dann folgt P-lim $a_n = 0$.*
2. *Falls P-lim $a_n = 0$ und P-lim $b_n = 0$, dann folgt P-lim $(a_n + b_n) = 0$.*
3. *Falls $a_n \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und P-lim $a_n = 0$, dann ist 0 ein Häufungspunkt der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.*
4. *Falls $w(P,p)$-lim $x_n = 0$, dann ist 0 ein schwacher Häufungspunkt von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.*

Beweis. Ad 1.: Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge und $\varepsilon > 0$ beliebig. Sei $m_0 \in \mathbb{N}$ so, dass $|a_n| < \varepsilon$ für alle $n \geq m_0$ und $C > 0$ so, dass $|a_n| \leq C$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Es folgt

$$\left|\sum_{m=1}^{\infty} p_{n,m} a_m\right| \leq \sum_{m=1}^{m_0} p_{n,m}|a_m| + \sum_{m=m_0+1}^{\infty} p_{n,m}|a_m| < C \sum_{m=1}^{m_0} p_{n,m} + \varepsilon.$$

Da

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{m=1}^{m_0} p_{n,m} = 0, \tag{1}$$

gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$, sodass für alle $n \geq n_0$ gilt: $C \sum_{m=1}^{m_0} p_{n,m} < \varepsilon$. Insgesamt also für alle $n \geq n_0$:

$$\left|\sum_{m=1}^{\infty} p_{n,m} a_m\right| < 2\varepsilon,$$

und somit folgt P-lim $a_n = 0$.

Ad 2.: Folgt unmittelbar durch Nachrechnen.

Ad 3.: Angenommen 0 wäre kein Häufungspunkt, d.h.

$$\exists \varepsilon > 0 \; \exists m_0 \in \mathbb{N} \; \forall m \geq m_0 : a_m \geq \varepsilon.$$

Es folgt für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
\sum_{m=1}^{\infty} p_{n,m} a_m &= \sum_{m=1}^{m_0-1} p_{n,m} a_m + \sum_{m=m_0}^{\infty} p_{n,m} a_m \\
&\geq \sum_{m=1}^{m_0-1} p_{n,m} a_m + \varepsilon \sum_{m=m_0}^{\infty} p_{n,m} \\
&\geq \varepsilon \sum_{m=m_0}^{\infty} p_{n,m}.
\end{aligned}$$

Da $\sum_{m=1}^{\infty} p_{n,m} = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ folgt mit (1):

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} \; \forall n \geq n_0 : \sum_{m=m_0}^{\infty} p_{n,m} \geq \frac{1}{2}.$$

Insgesamt also für alle $n \geq n_0$:

$$\sum_{m=1}^{\infty} p_{n,m} a_m \geq \varepsilon \sum_{m=m_0}^{\infty} p_{n,m} \geq \frac{\varepsilon}{2},$$

dies ist ein Widerspruch zu P-lim $a_n = 0$. Also muss 0 ein Häufungspunkt von $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sein.

Ad 4.: Sei $m \in \mathbb{N}$ beliebig und sei $\{f_1, f_2, \cdots, f_m\} \subseteq X'$. Da $w(P,p)$-lim $x_n = 0$, gilt per Definition für alle $k \in \{1, 2, \cdots, m\}$:

$$\text{P-}\lim_n |f_k(x_n)|^p = 0.$$

Aus 2. folgt

$$\text{P-}\lim_n \sum_{k=1}^{m} |f_k(x_n)|^p = 0,$$

und aus 3. folgt, dass 0 ein Häufungspunkt der Folge $(\sum_{k=1}^{m} |f_k(x_n)|^p)_{n \in \mathbb{N}}$ ist. Sei nun U eine oBdA offene Nullumgebung in X (bezüglich der schachen Topologie). Da vermöge

$$\left\{ f^{-1}(O) : f \in X', O \subseteq \mathbb{C}, O \text{ offen} \right\}$$

eine Subbasis der schwachen Topologie gegeben ist, folgt: Es gibt $f_1, f_2, \cdot, f_m \in X'$ und ein $\varepsilon > 0$ sodass

$$U \supseteq \left\{ x \in X : \sum_{k=1}^{m} |f_k(x)|^p < \varepsilon \right\}.$$

Da 0 ein Häufungspunkt von $(\sum_{k=1}^{m} |f_k(x_n)|^p)_{n \in \mathbb{N}}$ ist, folgt dass 0 ein Häufungspunkt von $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist. $\square$

3.2 Unbeschränkte Folgen mit Null als schwachem Häufungspunkt

Wir können die Ergebnisse zur P-Konvergenz verwenden, um folgende Eigenschaft von Hilberträumen zu beweisen:

Satz 15. *Sei H ein unendlichdimensionaler Hilbertraum und $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge positiver reeller Zahlen mit $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^{-2} = \infty$. Dann gilt: Es gibt eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus H mit $\|x_n\| = a_n$ und 0 ist schwacher Häufungspunkt von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.*

Beweis. Sei $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge normierter, paarweise orthogonaler Elemente aus H und sei $x_n := a_n e_n$. Offenbar gilt $\|x_n\| = a_n$. Definiere $P : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{R}_0^+$ durch

$$p_{n,m} = \frac{a_m^{-2}}{\sum_{i=1}^{n} a_i^{-2}},$$

falls $m \leq n$ und $p_{n,m} = 0$ sonst. Es gilt für alle festen $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{m=1}^{\infty} p_{n,m} = \frac{\sum_{m=1}^{n} a_m^{-2}}{\sum_{i=1}^{n} a_i^{-2}} = 1,$$

und für jedes feste $m \in \mathbb{N}$:

$$\lim_{n\to\infty} p_{n,m} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_m^{-2}}{\sum_{i=1}^{n} a_i^{-2}} = 0.$$

Mit der Besselschen Ungleichung folgt für alle $y \in H$:

$$\sum_{m=1}^{\infty} p_{n,m} |\langle x_m, y\rangle|^2 = \frac{\sum_{m=1}^{n} |\langle e_m, y\rangle|^2}{\sum_{i=1}^{n} a_i^{-2}} \leq \frac{\|y\|^2}{\sum_{i=1}^{n} a_i^{-2}} \longrightarrow 0 \text{ für } n \to \infty.$$

Mit dem Darstellungssatz von Fréchet-Riesz gilt also, dass für alle $f \in H'$ die Folge $|f(x_n)|^2$ P-konvergent gegen 0 ist, d.h. $w(P,2)$-lim $x_n = 0$. Mit Lemma 14 folgt, dass 0 ein schwacher Häufungspunkt von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist. ☐

Bemerkung 16. *Wenn wir zum Beispiel $a_n := \sqrt{n}$ wählen, erkennen wir, dass es in jedem unendlichdimensionalen Hilbertraum eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gibt, sodass $\lim_{n\to\infty} \|x_n\| = \infty$ und 0 trotzdem schwacher Häufungspunkt von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist.*

Obiges Ergebnis gilt nicht nur für Hilberträume, sondern analog auch für alle unendlichdimensionalen Banachräume:

Satz 17. *Sei X ein unendlichdimensionaler Banachraum und $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge positiver reeller Zahlen mit $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^{-2} = \infty$. Dann gilt: Es gibt eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus X mit $\|x_n\| = a_n$ und 0 ist schwacher Häufungspunkt von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.*

Wir wollen den Beweis zu diesem Satz nur skizzieren. Dazu benötigen wir den Begriff der *endlichen Darstellbarkeit von Banachräumen*:

Definition 18. *Seien X und Y zwei Banachräume. X heißt endlich darstellbar in Y, falls für alle endlichdimensionalen Unterräume X_0 von X und alle $\varepsilon > 0$ ein endlichdimensionaler Unterraum Y_0 von Y und ein Isomorphismus $T \in L_b(X_0, Y_0)$ existiert mit*

$$\|T\|\|T^{-1}\| < 1 + \varepsilon.$$

Bemerkung 19. *Seien X und Y zwei isomorphe Banachräume (d.h. es existiert ein linearer, bijektiver und beschränkter Operator $T : X \to Y$). Aufgrund des Satzes von der offenen Abbildung ist dann auch T^{-1} beschränkt. Der Ausdruck*

$$\delta(X,Y) := \inf\left\{\|T\|\|T^{-1}\| : T \textit{ ist Isomorphismus von } X \textit{ nach } Y\right\}$$

heißt Banach-Mazur-Abstand von X und Y. Wegen $1 = \|I\| = \|TT^{-1}\| \leq \|T\|\|T^{-1}\|$ folgt $\delta(X,Y) \in [1,\infty)$.
Falls X und Y isometrisch isomorph sind, folgt offenbar $\delta(X,Y) = 1$. (Die Umkehrung gilt allerdings nicht, es gibt Banachräume X und Y mit $\delta(X,Y) = 0$, ohne dass X und Y isometrisch isomorph sind!). Eine Interpretation des Banach-Mazur-Abstandes ist, dass er angibt, "wie viel zur isometrischen Isomorphie von X und Y fehlt".

Die endlichdimensionale Darstellbarkeit eines Banachraums X in Y lässt sich somit informell so interpretieren, dass Y lokal eine nahezu isometrisch isomorphe Kopie von X enthält. (Man sagt, dass Y eine Eigenschaft lokal erfüllt, wenn jeder endlichdimensionale Unterraum von Y diese Eigenschaft erfüllt.)

Es ist im Allgemeinen keine leichte Aufgabe zu entscheiden, ob ein Banachraum X in Y endlich darstellbar ist. Es gilt aber folgendes bemerkenswerte Resultat:

Satz 20. *(Satz von Dvoretzky, 1961) Der Hilbertraum $\ell^2(\mathbb{N})$ ist in jedem unendlichdimensionalen Banachraum endlich darstellbar.*

Wir sind nun in der Lage, den Beweis von Satz 17 zu skizzieren. Der Beweis orientiert sich am Beweis für Hilberträume, allerdings benötigen wir eine Alternative zur Folge paarweise orthogonaler Vektoren und zur Besselschen Ungleichung. Mit der endlichen Darstellbarkeit von ℓ^2 in einem unendlichdimensionalen Banachraum können diese Probleme umgangen werden.

Beweis. (Beweisskizze zu Satz 17):
Wähle eine Folge natürlicher Zahlen $0 = n_1 < n_2 < n_3 < \cdots$ so, dass gilt

$$\lim_{k\to\infty} \sum_{j=n_k+1}^{n_{k+1}} a_j^{-2} = \infty.$$

Definiere $P : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{R}_0^+$ durch

$$p_{k,m} = \frac{a_m^{-2}}{\sum_{i=n_k+1}^{n_{k+1}} a_i^{-2}},$$

falls $n_k + 1 \leq m \leq n_{k+1}$ und $p_{k,m} = 0$ sonst. Sei $k \in \mathbb{N}$ und $\epsilon > 0$ beliebig. Betrachte

$$A := \operatorname{span}\{\delta_{n_k+1}, \delta_{n_k+2}, \cdots, \delta_{n_{k+1}}\} \subseteq \ell^2(\mathbb{N}),$$

wobei δ_n die Folge sei, die an der n-ten Stelle 1 und sonst überall 0 ist. Offenbar ist A ein endlichdimensionaler Unterraum von ℓ^2, und da ℓ^2 in X endlich darstellbar ist, existiert ein endlichdimensionaler Unterraum B von X und ein linearer Homöomorphismus $T_k : A \to B$ mit $\|T\|\|T^{-1}\| < 1 + \varepsilon$. (Durch Multiplikation von T mit einem geeigneten Skalar können wir sogar oBdA $\|T\| = 1$ fordern). Definiere nun für $i \in \{n_k + 1, n_k + 2, \cdots, n_{k+1}\}$

$$e_i := T\delta_i.$$

Indem wir das für alle $k \in \mathbb{N}$ machen, erhalten wir eine Folge $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in X. Man kann zeigen: Für jedes $f \in X'$ gibt es ein $C > 0$, sodass für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\sum_{i=n_k+1}^{n_{k+1}} |f(e_i)|^2 \leq C.$$

Weiters gilt $1 \leq \frac{1}{\|e_n\|} \leq 1 + \varepsilon$ für alle natürlichen Zahlen n, somit können wir die Folge $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ normieren und behalten dabei die obige gleichmäßige Beschränktheitseigenschaft. Sei also oBdA $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ normiert. Definiere $x_n = a_n e_n$. Dann gilt $\|x_n\| = a_n$ und für alle $f \in X'$ und alle $k \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{m=1}^{\infty} p_{k,m}|f(e_m)|^2 = \frac{\sum_{m=n_k+1}^{n_{k+1}} |f(e_m)|^2}{\sum_{i=n_k+1}^{n_{k+1}} a_i^{-2}} \leq \frac{C}{\sum_{i=n_k+1}^{n_{k+1}} a_i^{-2}} \longrightarrow 0 \text{ für } n \to \infty.$$

Somit folgt $w(P,2)$-lim $x_n = 0$, und mit Lemma 14, dass 0 ein schwacher Häufungspunkt von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist. □

3.3 Schwach kompakt konvergente Funktionenfolgen ohne schwach stetigen Grenzwert

Wir können nun endlich Satz 12 beweisen. Zur Erinnerung: Wir wollen beweisen, dass es in jedem unendlichdimensionalen Banachraum eine schwach kompakt konvergente Funktionenfolge bestehend aus schwach stetigen Funktionen f_n gibt, deren Grenzwert nicht schwach stetig ist.

Beweis. (von Satz 12)
Sei und$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge aus X mit 0 als schwachem Häufungspunkt und $\|x_n\| = \sqrt{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Sei $j \in \mathbb{N}$ beliebig, und

$$E_j := \operatorname{span}\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}.$$

Gemäß dem Trennungssatz von Hahn-Banach gibt es $x'_j \in X'$ und $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{R}$ mit

$$\operatorname{Re} x'_j(x) \leq \gamma_1 < \gamma_2 \leq \operatorname{Re} x'_j(x_{j+1}) \text{ für alle } x \in K^X_{\sqrt{j}}(0).$$

Seien $\alpha_j > 0, \beta_j \in \mathbb{R}$ so, dass die affin lineare Funktion $f(x) = \alpha_j x + \beta_j$ bei γ_1 eine Nullstelle, und bei $\operatorname{Re} x'_j(x_{j+1})$ den Wert $j+1$ hat. Dann gilt nämlich $\alpha_j \operatorname{Re} x'_j(x_{j+1}) + \beta_j = j+1$ und

$$\alpha_j \operatorname{Re} x'_j(x) + \beta_j \leq 0 \text{ für alle } x \in K^X_{\sqrt{j}}(0).$$

Es folgt, dass die Funktion $h_j : X \to [0, \infty)$, $h_j(x) := \max\{0, \alpha_j \operatorname{Re} x'_j(x) + \beta_j\}$ schwach stetig ist. Weiters gilt $h_j(x) = 0$ für alle x mit $\|x\| \leq \sqrt{j}$ und $h(x_{j+1}) = j+1$.

Betrachte die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, wobei $f_n := h_1 + h_2 + \cdots + h_n$. Für alle $n \geq j \in \mathbb{N}$ und alle x mit $\|x\| \leq \sqrt{j}$ gilt $f_n(x) = f_j(x)$. Es folgt, dass $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ punktweise gegen eine Funktion $f : X \to \mathbb{R}$ konvergiert, und dass dieser Grenzwert auf beschränkten Mengen sogar gleichmäßig ist. Da jede schwach kompakte Menge beschränkt ist, folgt, dass $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ schwach kompakt gegen f konvergiert. Wir wollen zeigen, dass f nicht schwach stetig ist: Die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ war so gewählt, dass sie bei 0 einen schwachen Häufungspunkt hat. D.h. es existiert ein Teilnetz $(x_{n(j)})_{j\in J}$ dieser Folge, welches schwach gegen 0 konvergiert. Allerdings gilt für alle $j \in \mathbb{N}$, dass $f(x_j) \geq j$. Somit kann $(f(x_{n(j)}))_{j\in J}$ nicht gegen 0 konvergieren. Wegen $f(0) = 0$ folgt, dass f nicht schwach stetig ist.

□

Referenzen

1. Beer G.: *Uniform convergence on weakly compact subsets.* J. Math. Anal. Appl. 391(2012) 526-529.

2. Kadets V.M.: *Weak cluster points of a sequence and coverings by cylinders.* Matematicheskaya fizika, analiz, geometriya 2004, v.11, No. 2, p.161-168.

3. Albiac F., Kalton N.J.: *Topics in Banach space theory.* Springer, 2016.