SEMINARARBEIT

Analysis
Existenz der Ableitungen von Verteilungsfunktionen

ausgeführt am

Institut für
Analysis und Scientific Computing
TU Wien

unter der Betreuung von

Ao.Univ.Prof. Dipl.-Ing. Dr.techn.

Michael KALTENBÄCK

durch

Riel BLLAKCORI

Wien, am 29.6.2020

Vorwort

Vielen Dank!

Abstract

coming soon

Inhaltsverzeichnis

1 Verteilungsfunktionen

Im folgenden Abschnitt soll der aus der Maßtheorie bereits gut studierte Begriff der Verteilungsfunktion sowie dessen wichtigste Eigenschaften eingeführt werden.

1.1. Definition. Eine Funktion $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt Verteilungsfunkton eines Lebesgue Stieltjes Maßes $\mu : {}^1\mathbb{A}(\tau_1) \to [0,+\infty]$, wenn $\mu(a,b] = F(b) - F(a)$ für alle $a,b \in \mathbb{R}, a \leq b$ gilt.

1.2. Lemma. *Ist F die Verteilungsfunktion eines Lebesgue-Stieltjes Maßes* μ *auf auf* $(\mathbb{R},\mathbb{A}(\tau_1))$*, so gilt*

- *F ist monoton steigend, also aus* $x < y$ *folgt* $F(x) \leq F(y)$
- *F ist rechtsstetig, also:* $F_+(x) := \lim_{h_n \searrow 0} F(x+h_n) = F(x) \quad$ *für alle* $x \in \mathbb{R}$

Beweis.
Für $x < y$ gilt $F(y) - F(x) = \mu(x,y] \geq 0$.

Mit $h_n \searrow 0$ und somit $(x,x+h_n] \to (x,x]$ schließt man gemeinsam mit der Stetigkeit von oben für Lebesgue Stieltjes Maße, dass

$$\lim_{h_n \searrow 0}(F(x+h_n) - F(x)) = \lim_{h_n \searrow 0} \mu(x,x+h_n] = \mu(x,x] = \mu(\emptyset) = 0$$

□

1.3. Satz. *Ist* $\mu : \mathbb{A}(\tau_1) \to [0,+\infty]$ *ein Lebesgue-Stieltjes Maß, so gibt es immer eine dazugehörige Verteilungsfunktion F, die bis auf eine additive Konstante eindeutig, monoton steigend und rechtsstetig ist.*
Umgekehrt gibt es zu jeder monoton steigenden und rechtsstetigen Funktion $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *ein eindeutig bestimmtes Maß* μ_F *auf* $(\mathbb{R},\mathbb{A}(\tau_1))$*, sodas F die Verteilungsfunktion von* μ_F *ist.*

Beweisskizze. Definiere $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ folgendermaßen:

$$F(x) := sgn(x)\mu(min(0,x), max(0,x)] = \begin{cases} \mu(0,x], & x \geq 0, \\ -\mu(x,0], & x < 0 \end{cases}$$

Sind nun F und G zwei Verteilungsfunktionen von μ auf $(\mathbb{R},\mathbb{A}(\tau_1))$, so folgt unmittelbar

$$\begin{aligned} \mu(a,b] &= F(b) - F(a) \\ &= G(b) - G(a) \\ \Rightarrow c := F(a) - G(a) &= F(b) - G(b) \qquad \text{für alle } a < b \end{aligned}$$

[1] $\mathbb{A}(\tau_1)$ soll vorübergehend (bis ich die geeigneten Symbole finde :)) die eindimensionalen Borelmengen bezeichnen

Mit Lemma 1.2 folgt die Monotonie und die Rechtsstetigkeit.

Umgekehrt definiere man die Mengenfunktion $\mu_F(a,b] := F(b) - F(a)$ auf dem Mengensystem der halboffenen Intervalle $\mathfrak{J}$. Wir werden zeigen, dass auf dem durchschnittsstabilen System $\mathfrak{J}$ für μ_F alle Eigenschaften eines Lebesgue-Stieltjes Maßes erfüllt sind, womit dann gemeinsam mit der Maßerweiterung Gewünschtes auf ganz $\mathbb{A}(\tau_1)$ gilt.

- $\mu_F(\emptyset) = \mu_F(a,a] = F(a) - F(a) = 0$
- $\mu_F(a,b] = F(b) - F(a) \geq 0$ für alle $(a,b] \in \mathfrak{J}$
- Seien $(a_1,b_1],(a_2,b_2]$ disjunkte Intervalle, dessen Vereinigung wieder ein Intervall ist (oBdA $b_1 = a_2$), dann folgt

$$\begin{aligned} \mu_F((a_1,b_1] \cup (a_2,b_2]) &= F(b_2) - F(a_1) \\ &= F(b_2) - F(a_2) + F(a_2) - F(a_1) \\ &= F(b_2) - F(a_2) + F(b_1) - F(a_1) \\ &= \mu_F(a_1,b_1] + \mu_F(a_2,b_2] \end{aligned}$$

- Für die σ-Additivität sei $((a_n,b_n])_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge disjunkter Intervalle, wobei $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}(a_n,b_n] = (a,b]$, so folgt die Ungleichung

$$\mu_F(a,b] = \mu_F(\bigcup_{n\in\mathbb{N}}(a_n,b_n]) \geq \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu_F(a_n,b_n]$$

aus der Monotonie von Inhaltsfunktionen und die andere Seite

$$\mu_F(a,b] = \mu_F(\bigcup_{n\in\mathbb{N}}(a_n,b_n]) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu_F(a_n,b_n]$$

zeigt man unter Zuhilfenahme der Rechtsstetigkeit von F, der Subadditivität und dem Satz von Heine Borel (ohne auf die technischen Einzelheiten näher eingehen zu wollen).

$\square$

2 Absolute Stetigkeit

In der Analysis stellt der Begriff der absoluten Stetigkeit eine Verschärfung [2] der Stetigkeit dar. Dieser Abschnitt soll ihr gewidmet sein, da sich die absolute Stetigkeit als ganz nützlich für die Existenz von Ableitungen und zur Charaktersisierung von Lebesgue Integralen erweisen wird und uns bei der Beantwortung folgender zentraler Fragen in der Analysis und Maßtheorie behilflich sein wird.

(i). Unter welchen Voraussetzungen ist $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ als Lebesgue Integral $F(x) = F(a) + \int_{[a,b]} f d\lambda$ mit $f \in \mathscr{L}_1$ darstellbar und welcher Zusammenhang hat F' mit f?

(ii). Welche λ fast überall differenzierbaren Funktionen F sind das Lebesgue Integral ihrer Ableitungen?

2.1. Definition. Eine auf einem endlichen, reelen Intevall definierte Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ist von beschränkter Variation, wenn es eine obere reele Schranke M gibt, sodass für alle endlichen Partitionen $\{a = x_0, ..., x_n = b\}$ von $[a,b]$ gilt:

$$\sum_{j=1}^{n} |f(x_j) - f(x_{j-1})| \leq M$$

Definiere mit

$$V_a^b f := \sup\{\sum_{j=1}^{n} |f(x_j) - f(x_{j-1})| : a = x_0 < \cdots < x_n = b; n \in \mathbb{N}\}$$

die sogenannte Totalvariation und bezeichne mit $\mathscr{BV}(a,b) := \{f : [a,b] \to \mathbb{R} : V_a^b f < +\infty\}$ den Raum aller Funktionen mit beschränkter Variation.

2.2. Lemma. *Ist $f \in \mathscr{BV}(a,b)$, so gilt $V_a^b f = V_a^c f + V_c^b f \quad \forall c \in (a,b)$.*

Beweis. Die Ungleichung $V_a^b f \geq V_a^c f + V_c^b f$ folgt unmittelbar durch Einsetzen der Definition der Totalvariation. Andererseits batrachtet man eine beliebige Partition $a = x_0 < \cdots < x_n = b$ des Intervalls $[a,b]$ mit $j := \min_{x_k \geq c} k$, so gilt

$$\sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})| = \sum_{k=1}^{j-1} |f(x_k) - f(x_{k-1})| + |f(x_j) - f(x_{j-1})| + \sum_{k=j+1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})|$$

$$\leq (\sum_{k=1}^{j-1} |f(x_k) - f(x_{k-1})| + |f(c) - f(x_{j-1})|) + (|f(x_j) - f(c)| + \sum_{k=j+1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})|)$$

$$\leq V_a^c f + V_c^b$$

[2] Jede absolut stetige Funktion ist natürlich stetig. Die Umkehrung gilt jedoch nicht. Dazu sei auf die Literatur [**E**] (Kapitel 7) verwiesen. Beispielsweise ist die Cantorfunktion stetig aber nicht absolut stetig.

Da die Partition beliebig war, folgt die Ungleichung insbesondere fürs Supremum aller endlichen Partitionen von $[a,b]$, womit die Behauptung gezeigt wurde.

□

2.3. Lemma. *Ist $f \in \mathscr{BV}(a,b)$, so gilt für die Funktionen $v(x) := V_a^x f$ sowie $w(x) := v(x) - f(x)$, dass sie monoton steigend sind.*

Beweis. Mit Lemma 2.2 folgt unmittelbar mit $y > x$ und $V_a^y = V_a^x + V_x^y$, dass $V_a^y \geq V_a^x$ gilt, also Montonie.

Außerdem folgt mit Lemma 2.2 $f(y) - f(x) = |f(y) - f(x)| \leq V_x^y = V_a^y - V_a^x = v(y) - v(x) \Leftrightarrow w(x) \leq w(y)$

□

2.4. Satz. *Die Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ist von beschränkter Variation genau dann, wenn es zwei monoton steigende Funktionen v und w gibt, sodass $f = v - w$ gilt.*

Beweis. Für die eine Richtung des Beweises, wähle man v und w genau wie in Lemma 2.3. Das Lemma liefert die Behauptung. Für die andere Richtung, wähle man eine beliebige Partition $a = x_0 < \cdots < x_n = b$ des Intervalls $[a,b]$. Wir zeigen, dass f von beschränkter Variation ist, mittels

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})| &= \sum_{k=1}^{n} (v(x_k) - v(x_{k-1})) - \sum_{k=1}^{n} (w(x_k) - w(x_{k-1})) \\ &= v(b) - v(a) - w(b) - w(a) < +\infty\end{aligned}$$

wobei man sich die Betragsstriche aufgrund der Monotonie der Funktionen sparen konnte und man insgesamt somit eine von der Partition unabhängige Teleskopsumme bekommt.

□

2.5. Bemerkung.

1. Satz 2.4 gibt eine Analogie zwischen signierten Maßen und Funktionen beschränkter Variation, die als Differenzen monotoner Funktionen gechrieben werden können. Eine ähnliche Aussage könnte man auch im Folgenden für absolut stetige Funktionen formulieren.

2. Ist $f \in \mathscr{BV}(a,b)$ mit $f = F - G$ als Differenz zweier monoton steigender Funktionen, so kann man die Unstetigkeitsstellen von F und G (von denen man zeigen kann, dass es nur abzählbar viele gibt) durch den jeweiligen rechtsseitigen Grenzwert ersetzen und erhält somit Verteilungsfunktionen F_+, G_+ von Lebesgue Stieltjes Maßen, wobei $f_+ := F_+ - G_+$ dann λ fast überall mit f übereinstimmt.

Nun widmen wir uns dem zentralen Konzept dieses Abschnitts, der absoluten Stetigkeit.

2.6. Definition. Eine Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ heißt absolut stetig, wenn für alle $\varepsilon > 0$ ein δ existiert, sodass für alle endlichen Familien von disjunkten Intervallen $(a_i, b_i)_{i \in \{1,\dots,n\}}$ aus $[a,b]$ gilt

$$\sum_{i=1}^{n} (b_i - a_i) < \delta \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} |f(b_i) - f(a_i)| < \varepsilon.$$

2.7. Lemma. *Ist $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine absolut stetige Funktion, so ist f auch gleichmäßig stetig und von beschränkter Variation.*

Beweis. Wähle $n = 1$ und man sieht unmittelbar aus der Defintion, dass f gleichmäßig stetig sein muss.
Wir wissen also $\sum_{i=1}^{n}(b_i - a_i) < \delta \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} |f(b_i) - f(a_i)| < \varepsilon$. Für jede endliche Partition $a = x_0 < \cdots < x_n = b$ des Intervalls $[a,b]$ mit $\max_{1 \leq i \leq n}(x_i - x_{i-1}) < \delta$ gilt dann $V_{x_{i-1}}^{x_i} f < \varepsilon$, womit gemeinsam mit Lemma 2.2 $V_a^b f = \sum_{i=1}^{n} V_{x_{i-1}}^{x_i} f \leq n\varepsilon$ folgt. □

2.8. Satz. *Ist $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ absolut stetig, so ist auch $v(x) := V_a^x f$ absolut stetig.*

Beweis. Sei zu $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ so gewählt, dass $\sum_{i=1}^{n}(b_i - a_i) < \delta \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} |f(b_i) - f(a_i)| < \varepsilon$ gilt und zerlegt jede disjunkte Teilmenge (a_i, b_i) durch eine beliebige Partition $a_i = x_{0,i} < \cdots < x_{m_i} = b_i$, so folgt $\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m_i} |f(x_{i,j}) - f(x_{i,j-1})| < \varepsilon$, da $\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m_i} (x_{i,j} - x_{i,j-1}) = \sum_{i=1}^{n} (b_i - a_i) < \delta$
In Summe folgt dann $\sum_{i=1}^{n} |v(b_i) - v(a_i)| < \varepsilon$, wenn man das Supremum über alle Partitionen nimmt. Also ist v absolut stetig.

□

2.9. Korollar. *Jede absolut stetige Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ist die Differenz zweier monoton steigender und absolut stetiger Funktionen F und G.*

Beweis. Da f absolut stetig ist, wissen wir gemeinsam mit Satz 2.8, dass auch $w(x) := v(x) - f(x)$ absolut stetig ist.

□

Im Folgenden legen wir das Hauptaugenmerk auf den folgenden Satz, der die Frage (i) am Anfang des Abschnitts beantworten wird. Für den Beweis benötigen wir jedoch noch ein paar Vorbereitungen.

2.10. Satz. *Eine Funktion $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ ist genau dann das Lebesgue Integral einer Funktion $f \in \mathscr{L}_1([a,b], \mathbb{A}(\tau_1) \cap [a,b], \lambda)$, wenn F absolut stetig ist.*

2.11. Definition. Sei $(\Omega, \mathscr{A})$ ein Messraum und μ und ν zwei komplexe, signierte oder positive Maße auf Ω.
Das Maß ν heißt absolut stetig bezüglich μ, in Zeichen $\nu \ll \mu$, wenn jede μ Nullmenge auch eine ν Nullmenge ist.

Folgende $\varepsilon - \delta$ Charakterisierung der absoluten Stetigkeit für endliche Maße wird sich als nützlich erweisen.

Ein endliches Maß ν auf dem Maßraum $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ ist absolut stetig bezüglich μ genau dann, wenn für alle $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, sodass

$$\mu(A) < \delta \Rightarrow \nu(A) < \varepsilon$$

für alle $A \in \mathscr{A}$ gilt.

2.12. Satz. *Ist F die Verteilungsfunktion eines Lebesgue Stieltjes Maßes μ auf $([a,b], \mathbb{A}(\tau_1) \cap [a,b])$, so ist F genau dann absolut stetig, wenn $\mu \ll \lambda$.*

Beweis. Aus der Maßtheorie wissen wir, dass Lebesgue Stieltjes Maße auf $[a,b]$ endlich sind, also mit $\mu \ll \lambda$ wissen wir, dass $\lambda(A) < \delta \Rightarrow \mu(A) < \varepsilon$ für alle $A \in \mathbb{A}(\tau_1) \cap [a,b]$ gilt. Wählt man nun $A = \bigcup_{i=1}^n (a_i, b_i]$ als die Vereinigung disjunkter Intervalle für die $\lambda(A) = \sum_{i=1}^n (b_i - a_i) < \delta$ gilt, so folgt

$$\sum_{i=1}^n |F(b_i) - F(a_i)| = \sum_{i=1}^n (F(b_i) - F(a_i)) = \mu(A) < \varepsilon.$$

Also ist F absolut stetig.
Für die andere Richtung setzen wir also voraus, dass F als Verteilungsfunktion absolut stetig ist, womit für $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, sodass $\sum_{i=1}^n (b_i - a_i) < \delta \Rightarrow \sum_{i=1}^n |F(b_i) - F(a_i)| < \varepsilon$. Aus der Theorie der Maßerweiterung wissen wir, dass für $A \in \mathbb{A}(\tau_1) \cap [a,b]$ gilt

$$\lambda(A) = \inf\{\sum_{i=1}^\infty (b_i - a_i) : A \subseteq \bigcup_{i \in \mathbb{N}} (a_i, b_i], \text{ paarweise disjunkt }\}.$$

Für die λ Nullmenge N gibt es somit disjunkte Intervalle $(a_i, b_i]$ mit $\sum_{i=1}^\infty (b_i - a_i) < \delta$ und $N \subseteq \bigcup_{i \in \mathbb{N}} (a_i, b_i]$, womit aus unserer Voraussetzung $\sum_{i=1}^n (F(b_i) - F(a_i)) < \varepsilon$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Also schließen wir insgesamt

$$\mu(N) \leq \mu(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} (a_i, b_i]) = \sum_{i=1}^\infty (F(b_i) - F(a_i)) \leq \varepsilon.$$

□

Nun können wir uns wieder Satz 2.10 zuwenden.

Beweis. Ist f eine Lebesgue integrierbare Funktion, so werden durch

$$\mu^+(A) := \int_A f^+ d\lambda$$

und

$$\mu^-(A) := \int_A f^- d\lambda$$

zwei bezüglich λ absolut stetige Maße definiert, sodass nach Satz 2.12 die zugehörigen Verteilungsfunktionen F^+ und F^- absolut stetig sind. Somit ist auch

$$F(x) := F^+(x) - F^+(a) - F^-(x) + F^-(a) = \int_{(a,x]} f d\lambda$$

absolut stetig als Linearkombination absolut stetiger Funktionen.

Umgekehrt wenn F absolut stetig ist, so existieren nach Korollar 2.9 monoton steigende, absolut stetige Funktionen G und H mit $F = G - H$. Für die wie in Satz 1.3 konstruierten dazugehörigen Lebesgue Stieltjes Maße μ_G und μ_H wissen wir dank Satz 2.12 wiederum, dass sie bezüglich λ absolut stetig sind, womit nach Satz von Radon Nikodym folgende Dichten definiert werden können:

$$g := \frac{d\mu_G}{d\lambda} \text{ und } h := \frac{d\mu_H}{d\lambda} \text{ mit}$$

$$\mu_G(A) = \int_A g d\lambda \text{ bzw. } \mu_H(A) = \int_A h d\lambda \text{ für alle } A \in \mathbb{A}(\tau_1) \cap [a,b].$$

Insgesamt folgt also

$$F(x) - F(a) = \int_{(a,b]} g - h d\lambda.$$

□

3 Existenz der Ableitung λ fast überall

3.1. Definition. Ist $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$, so werden die rechten (bzw. linken) oberen und unteren Ableitungszahlen [3] von $x \in I$ definiert durch

$$D^+ f(x) := \limsup_{h \to 0^+} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}, \quad D_+ f(x) := \liminf_{h \to 0^+} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$
$$D^- f(x) := \limsup_{h \to 0^+} \frac{f(x) - f(x-h)}{h}, \quad D_- f(x) := \liminf_{h \to 0^+} \frac{f(x) - f(x-h)}{h}$$

wobei sie als Elemente von $[-\infty, +\infty]$ zu verstehen sind, insofern die Grenzwerte existieren.

Offenbar gilt stets $D^+ f(x) \geq D_+ f(x)$ und $D^- f(x) \geq D_- f(x)$ und eine Funktion f ist im Punkt $x \in I$ genau dann differenzierbar, wenn alle vier Ableitungszahlen endlich sind und übereinstimmen.

Ziel dieses Abschnitts wird der Beweis des folgenden Satzes sowie einige Anwendungen davon sein, für den wir wiederum einige Vorbereitungen brauchen.

3.2. Satz. *Ist $f : I \to \mathbb{R}$ von beschränkter Variation, so ist f λ fast überall auf $[a,b]$ differenzierbar. Setzt man $f'(x) := 0$ für alle $x \in [a,b]$, in denen f nicht differenzierbar ist, so ist $f \in \mathscr{L}_1([a,b])$ und*

$$\int_a^b f'(x) dx \leq f(b) - f(a)$$

3.3. Definition. Sei $A \subset \mathbb{R}$ eine Teilmenge der reelen Zahlen und $\mathbf{F}$ eine Familie von abgeschlossenen reelen Intervallen $I \subset \mathbb{R}$ mit $\lambda(I) > 0$. Dann nennen wir $\mathbf{F}$ eine Vitali Überdeckung von A, wenn es für jedes $x \in A$ und für jedes $\varepsilon > 0$ ein $I \in \mathbf{F}$ gibt, sodass $x \in I$ und $\lambda(I) < \varepsilon$ gilt.

3.4. Satz. [4] *Ist $A \subset \mathbb{R}$ eine (nicht notwendigerweise messbare) Menge mit endlichen äußeren Maß und $\mathbf{F}$ eine Vitali Überdeckung von A, so gibt es für alle $\varepsilon > 0$ endlich viele disjunkte Intervalle $I_1, ..., I_n \in \mathbf{F}$, sodass*

$$\mu^*(A \setminus \bigcup_{k=1}^{n} I_k) < \varepsilon.$$

Beweis. Wir widmen uns nun dem Beweis von Satz 3.2.

Zunächst zeigen wir, dass die Menge aller $x \in (a,b)$ mit $D^+ f(x) > D_- f(x)$ eine λ Nullmenge ist. Dazu reicht es zu zeigen, dass $A_{r,s} := [D^+ f(x) > s > r > D_- f(x)]$[5]

[3] In anderen Literaturen spricht man oft auch von den sogenannten Dini Ableitungen

[4] μ^* bezeichne das äußere Maß.

[5] Die Klammern [ ] stehen hier für die Maß typische Schreibweise für Urbilder.

für alle $r,s \in \mathbb{Q}, r < s$ eine λ Nullmenge ist, da $\mathbb{Q}$ dicht in $\mathbb{R}$ ist und die abzählbare Vereinigung von Nullmengen wieder eine Nullmenge ist.
Es sei angenommen, dass $\alpha := \lambda(A_{r,s})$ größer als 0 ist. Weiters wähle $\varepsilon > 0$ und eine offene Menge U mit

$$A_{r,s} \subset U \subset (a,b) \text{ sodass } \lambda(U) < \alpha + \varepsilon.$$

Da $\lambda(U) > 0$ und U abgeschlossen ist, existiert nach der Definiton von $A_{r,s}$ und der Definition der linken unteren Ableitungszahl ein $h > 0$ mit

$$[x-h,x] \subset U \text{ und } f(x) - f(x-h) < rh.$$

Dieses System der abgeschlossenen Intervalle $[x-h,x]$ bildet bezüglich $A_{r,s}$ eine Vitali Überdeckung, sodass nach Satz 3.4 endlich viele Intervalle $I_m = [x_m - h_m, x_m] \subset U$, $m = 1,...,p$ existieren, sodass

$$\mu^*(A_{r,s} \backslash (\bigcup_{m=1}^{p} I_m)) < \varepsilon$$

und weiters

$$\sum_{m=1}^{p} (f(x_m) - f(x_m - h_m)) < r \sum_{m=1}^{p} h_m = r\lambda(\bigcup_{m=1}^{p} I_m) = r(\alpha + \varepsilon).$$

Analog dazu betrachten wir für jedes $y \in I_m^\circ \cap A_{r,s}$, $m = 1,...,p$ das Intervall $[y, y+k] \subset I_m^\circ$, sodass gemäß der Definition von $A_{r,s}$ und der linken oberen Ableitungszahl $f(y+k) - f(y) > sk$ gilt. Dieses System von Intervallen bildet wiederum eine Vitali Überdeckung von $A_{r,s} \cap \bigcup_{m=1}^{p} I_m^\circ$, sodass nach dem Satz 3.4 endlich viele disjunkte Intervalle $J_n = [y_n, y_n + k_n]$, $n = 1,...,q$ existieren mit

$$\mu^*((A_{r,s} \cap \bigcup_{m=1}^{p} I_m^\circ) \backslash \bigcup_{n=1}^{q} J_n) < \varepsilon$$

und

$$\mu^*(A_{r,s} \backslash (\bigcup_{n=1}^{q} J_n)) \leq \mu^*(A_{r,s} \backslash (\bigcup_{m=1}^{p} I_m^\circ)) + \mu^*((A_{r,s} \cap \bigcup_{m=1}^{p} I_m^\circ) \backslash \bigcup_{n=1}^{q} J_n) < 2\varepsilon$$

Insgesamt folgt

$$\sum_{n=1}^{q} (f(y_n + k_n) - f(y_n)) > s \sum_{n=1}^{q} k_n = s\lambda(\bigcup_{n=1}^{q} j_n) \geq s(\alpha - 2\varepsilon).$$

Wir wissen zu festgehaltenen m sind alle J_n in I_m enthalten. Aufgrund der Monotonie von f und weil alle J_n disjunkt sind, folgt durch Aufsummieren

$$\sum_{n\in\mathbb{N}:J_n\subset I_m}(f(y_n+k_n)-f(y_n))\leq f(x_m)-f(x_m-h_m).$$

Weiters folgt durch aufsummieren aller $m=1,...,p$

$$\sum_{n=1}^{q}(f(y_n+k_n)-f(y_n))\leq\sum_{m=1}^{p}(f(x_m)-f(x_m-h_m)).$$

In Summe erhalten wir

$$s(\alpha-2\varepsilon)<\sum_{n=1}^{q}(f(y_n+k_n)-f(y_n))\leq\sum_{m=1}^{p}(f(x_m)-f(x_m-h_m))<r(\alpha+\varepsilon).$$

Insbesondere würde somit für $\varepsilon\to 0$ folgen, dass $s\alpha<r\alpha$ gilt. Wir erhalten also einen Widerspruch zur Konstruktion unserer $A_{r,s}$, wo nur $r<s$ betrachtet wurden. Also ist $\alpha=0$ und wir haben somit $D^+f(x)\leq D_-f(x)$ λ fast überall gezeigt.

Nun wenden wir das Gezeigte auf $-f(a+b-x)$ an , was $D^-f(x)\leq D_+f(x)$ impliziert. Also stimmen alle vier Ableitungszahlen λ fast überall überein und existieren vorerst in $[-\infty,+\infty]$ λ fast überall. Definiere also

$$g(x):=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

und $g(x):=0$ für alle x wo der obige Limes nicht in $[-\infty,+\infty]$ existiert. Außerdem setzen wir $f(x)=f(b)$ für $x\geq b$ und definieren

$$g_n(x):=n(f(x+\frac{1}{n})-f(x)).$$

Mit dem Lemma von Fatou erhalten wir

$$\begin{aligned}\int_a^b g(x)dx&=\int_a^b\liminf_{n\to\infty}g_n(x)dx\leq\liminf_{n\to\infty}\int_a^b g_n(x)dx\\&=\liminf_{n\to\infty}\int_a^b g_n(x)dx\\&=\liminf_{n\to\infty}\int_a^b n(f(x+\frac{1}{n})-f(x))dx\\&=\liminf_{n\to\infty}(n\int_b^{b+\frac{1}{n}}f(x)dx-n\int_a^{a+\frac{1}{n}}f(x)dx)\\&=\liminf_{n\to\infty}(f(b)-n\int_a^{a+\frac{1}{n}}f(x)dx)\leq f(b)-f(a)\end{aligned}$$

womit die Behauptung gezeigt wurde.

□

Als nächstes schauen wir welche Resultate uns Satz 3.2 liefert.

3.5. Korollar. *Ist F Verteilungsfunktion eines Lebesgue Stieltjes Maßes, so ist F λ fast überall differenzierbar.*

Beweis. Als Verteilungsfunktion ist F insbesondere monoton steigend, also auch von beschränkter Variation und es gilt die Behauptung nach Satz 3.2.

□

3.6. Bemerkung. Man könnte sich jetzt, nachdem wir die Existenz der Ableitung einer Verteilungsfunktion nachgewiesen haben, überlegen welche Gestalt eine solche haben muss und würde drauf kommen, dass F' mit der Radon Nikodym Dichte $\frac{d\mu_{F_c}}{d\lambda}$ des absolut stetigen Teils der Lebesgue Zerlegung und sogar mit $\frac{d\mu_F}{d\lambda}$ fast überall übereinstimmt, da der singuläre Teil wegfällt. Hierfür sei auf [**K**] (Kapitel 12.3) verwiesen, da die sehr technischen Beweise (unter anderem Riesz' Satz der aufgehenden Sonne :)) den Rahmen dieser Arbeit sprengen würden.

Mit unserem Wissen über absolute stetige Funktionen und Ableitungen von Funktionen beschränkter Variation kann man auch eine Verschärfung des Satzes 2.10 formulieren. In der Analysis und der Maßtheorie ist folgender Satz besser bekannt unter den Namen 'Hauptsatz der Differential- und Intergralrechnung fürs Lebesgue Integral'.

3.7. Satz. *Ist $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine Lebesgue integrierbare Funktion, so ist $F(x) := \int_{(a,x]} f d\lambda$ absolut stetig und λ fast überall differenzierbar mit $F' = f$ λ fast überall.*

Ist $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ absolut stetig, so besitzt F λ fast überall eine Ableitung F',die Lebesgue integrierbar ist und für die gilt

$$F(x) = F(a) + \int_{(a,x]} F'(t) d\lambda(t) \text{ für alle } x \in [a,b].$$

Beweis. Sei oBdA $f \geq 0$ und monoton steigend. Wegen $\mu(A) := \int_A f d\lambda \ll \lambda$ ist F als zugehörige Verteilungsfunktion absolut stetig und mit Bemerkung 3.6 gilt $F' = \frac{d\mu_F}{d\lambda} = f$ λ fast überall.

Ist andererseits F absolut stetig, so auch das zugehörige Maß μ und wir erhalten wieder gemeinsam mit Bemerkung 3.6 gilt

$$F' = \frac{d\mu_F}{d\lambda} \ \lambda - \text{fü} \quad \Rightarrow \quad \int_A F' d\lambda = \int_A \frac{d\mu_F}{d\lambda} d\lambda = \mu(A)$$

für alle $A \in \mathbb{A}(\tau_1)$. Mit $A := (a,x]$ folgt die Behauptung.

□

Literatur

[**E**] Elstrodt, Jurgen : Maß- und Integrationstheorie, 4., korrigierte Aufl.; Berlin, Heidelberg, New York: Springer, 2005, ISBN: 3-540-21390-2

[**K**] Kusolitsch, Norbert : Maß- und Wahrscheinlichkeitstheorie, 2., korrigierte Aufl.; Wien : Springer, 2013, ISBN: 978-3-642-45386-1