Kurze Einführung zu temperierten Distributionen

Jakob Deutsch

8. November 2021

Einleitung

Temperierte Distributionen tauchen in einer Reihe von Gebieten v.a. in der harmonischen und Fourier Analysis auf. Diese Seminarvorträge (+ Handout) sollen eine kurze Einführung zu diesem Thema sein. Sie richten sich strukturell lose nach dem ersten Kapitel *'Introduction to Fourier Analysis on Euclidean Spaces'* von Stein M. E. und Weiss. G. ([5]) mit ein paar inhaltlichen Spritzern aus *'The Analysis of Linear Partial Differential Operators I, Distribution Theory and Fourier Analysis'* von Hörmander L. ([4]) und *'Classical Fourier Analysis'* von Grafakos L. ([3])

1 Der Schwartz-Raum und sein Dualraum

Wir erinnern am Anfang an ein paar Notationen: Für einen Multiindex $\alpha = (\alpha_1, .., \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ setzen wir

$$x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$$

und

$$D^\alpha = \partial_1^{\alpha_1} \cdots \partial_n^{\alpha_n}.$$

Außerdem setzt man $|\alpha| := |\alpha_1| + ... + |\alpha_n|$, die Ordnung eines Multiindex α.
Wir beginnen mit der Einführung der Objekte unseres Interesses:

Definition 1. Bezeichne mit

$$\mathcal{S} := \{\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}) \mid \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}^n : \rho_{\alpha,\beta}(\varphi) < \infty\}$$

den *Schwartz-Raum*, wobei $\rho_{\alpha,\beta}(f) := \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |x^\alpha D^\beta \varphi|$.

Bemerkung 1. Die Definition des Schwartzraumes sorgt u.a. dafür, dass der Raum abgeschlossen ist unter Multiplikation von Polynomen und unter Differentiation.
Wir erinnern auch an die Tatsache, dass die Fouriertransformation, also

$$\mathcal{F}(\varphi)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(y) e^{-2\pi i y\cdot x} dy,$$

ein Isomorphismus auf $\mathcal{S}$ ist bzw. auch ein Algebra Isomorphismus von $(\mathcal{S}, *)$ nach $(\mathcal{S}, \cdot)$, wobei $*$ die Faltung und $\cdot$ die punkteweise Multiplikation bezeichnet.

Die Familie aller $\rho_{\alpha,\beta}$ ist offenbar eine Familie von Seminormen auf $\mathcal{S}$, die separierend ist. Wir erinnern an den folgenden Satz:

Satz 1. *Sei M eine separierende Familie von Seminormen auf einem Vektorraum X. Dann ist $(X, \mathcal{T}_M)$ ein lokalkonvexer Vektorraum, wobei $\mathcal{T}_M$ die initiale Topologie bzgl. der kanonischen Projektionen $\pi_\rho : X \to X/\rho^{-1}(\{0\})$, $\rho \in M$ ist.*
Eine konvexe Nullumgebungsbasis ist gegeben durch die endlichen Schnitte der 'offenen' ρ-Kugeln $V(\rho, \epsilon) = \{x \in \mathbb{R}^n : \rho(x) < \epsilon\}$. Ein Netz $(x_i)_{i\in I}$ konvergiert genau dann in $(X, \mathcal{T}_M)$ gegen x, wenn $\rho(x_i - x) \xrightarrow{i\in I} 0$ für alle $\rho \in M$.

Bemerkung 2. D.h. die Familie $(\rho_{\alpha,\beta})_{\alpha,\beta\in\mathbb{N}^n}$ induziert also eine Topologie auf $\mathcal{S}$, sodass $\mathcal{S}$ zu einem lokalkonvexen topologischen Vektorraum wird. Nachdem die betrachtete Familie von Seminormen abzählbar ist, ist $\mathcal{S}$ auch metrisierbar. Um dies einzusehen sei ρ_n eine Abzählung der Seminormen. Wir definieren eine Metrik auf $\mathcal{S}$ durch

$$d(\varphi,\psi) := \sum_{n\in\mathbb{N}} 2^{-n} \frac{\rho_n(\varphi-\psi)}{1+\rho_n(\varphi-\psi)}.$$

Man überprüft leicht, dass es sich auch tatsächlich bei d um eine Metrik handelt und dass Netzkonvergenz bzgl. d mit der Netzkonvergenz bzgl $\mathcal{T}_{(\rho_n)_{n\in\mathbb{N}}}$ übereinstimmt.

Bemerkung 3. Man stellt leicht fest, dass die Operationen $(\varphi \mapsto p\varphi)$ für ein Polynom p, $((\psi,\varphi)\mapsto \psi\varphi)$, also die punktweise Multiplikation, und $(\varphi \mapsto D^\beta\varphi)$ stetig auf S sind.

Wir wollen zeigen, dass $(\mathcal{S},d)$ vollständig ist, dazu erinnern wir an folgende Hilfaussage:

Lemma 1. *Sei $f_n \in C^1(\mathbb{R})$ und $f,g\in C(\mathbb{R})$ mit $f_n \xrightarrow{\infty} f$ und $f_n' \xrightarrow{\infty} g$. Dann ist $f\in C^1$ und $f' = g$.*

Satz 2. $(\mathcal{S},d)$ *ist vollständig.*

Beweis. Sei φ_n eine Cauchyfolge in $(\mathcal{S},d)$. Es folgt daraus sofort, dass $\varphi_n^{\alpha,\beta} = x^\alpha D^\beta \varphi_n$ eine Cauchyfolge in C_b ist. Damit konvergiert $\varphi_n^{\alpha,\beta}$ gleichmäßig gegen ein $g^{\alpha,\beta}\in C_b$. Eine Kombination aus Induktion und dem vorangegangenen Lemma liefern zuerst $g := g^{0,0}\in C^\infty$ und $D^\beta g = g^{0,\beta}$. Offenbar gilt dann aber auch $\varphi_n^{\alpha,\beta}(x) \xrightarrow{n\to\infty} x^\alpha D^\beta g(x)$ punktweise für $x\in\mathbb{R}^n$, was zusammen mit $\varphi_n^{\alpha,\beta} \xrightarrow{\infty} g^{\alpha,\beta}$ auch $g^{\alpha,\beta} = x^\alpha D^\beta g$ impliziert. Damit gilt also $\rho_{\alpha,\beta}(\varphi_n - g) \xrightarrow{n\to\infty} 0$ □

Satz 3. *Sei X ein normierter Raum und $L : \mathcal{S}\to X$ eine lineare Abbildung. Dann ist L genau dann stetig, wenn $C>0$ und $m,l\in\mathbb{N}$ existieren, sodass*

$$\|L\varphi\|_X \le C \sum_{|\alpha|\le l, |\beta|\le m} \rho_{\alpha,\beta}(\varphi)$$

für alle $\varphi\in\mathcal{S}$.

Beweis. $\Rightarrow$: Sei also L stetig. Definiere für $l,m\in\mathbb{N}$ und $\epsilon>0$

$$V(l,m,\epsilon) = \{\varphi\in\mathcal{S} : \sum_{|\alpha|\le l,|\beta|\le m} \rho_{\alpha,\beta}(\varphi) < \epsilon\}.$$

Offenbar bilden Mengen dieser Art eine Umgebungsbasis der 0 bzgl. der lokalkonvexen Topologie auf $\mathcal{S}$, denn für endlich viele $\alpha_i,\beta_i\in\mathbb{N}^n, \epsilon_i>0$, $i=1,..N$ gilt

$$V(\max_i\{|\alpha_i|\}, \max_i\{|\beta_i|\}, \min_i\{\epsilon_i\}) \subset \bigcap_{i=1}^N V(\rho_{\alpha_i,\beta_i},\epsilon_i).$$

Wegen der Stetigkeit von L existieren also $l,m\in\mathbb{N},\epsilon>0$ mit

$$L(V(l,m,\epsilon)) \subset B_1(0).$$

Definiere weiter $\rho(\varphi) := \sum_{|\alpha|\le l,|\beta|\le m}\rho_{\alpha,\beta}(\varphi)$. Offenbar gilt dann

$$\frac{\epsilon\varphi}{\rho(\varphi)} \in V(l,m,\epsilon),$$

woraus

$$\rho(\varphi) \le \frac{1}{\epsilon}\rho(\varphi)$$

folgt. Wenn wir jetzt $C=\frac{1}{\epsilon}$ setzen, ist die Aussage gezeigt.
$\Leftarrow$: Ist trivial. □

Satz 4. *Die Inklusionen* $\mathcal{S} \hookrightarrow L^p, 1 \leq p \leq \infty$ *sind stetig.*

Beweis. Die Einbettung für $p = \infty$ ist offensichtlich stetig. Wir bemerken für $\varphi \in \mathcal{S}$ und $1 \leq p < \infty$ zunächst:

$$\begin{aligned}\left\|D^\beta\varphi\right\|_{L^p} &\leq \left(\int_{B_1(0)} |D^\beta\varphi|^p dx + \int_{B_1(0)^c} |x|^{n+1}|x|^{-(n+1)}|D^\beta\varphi(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \left(V_n \left\|D^\beta\varphi\right\|_\infty^p + \left[\sup_{x\in B_1(0)^c}(|x|^{n+1}|D^\beta\varphi(x)|)^p\right]\int_{B_1(0)^c}|x|^{-(n+1)}dx\right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq C_{n,p}\left(\left\|D^\beta\varphi\right\|_\infty + \sup_{x\in B_1(0)^c}(|x|^{\lfloor\frac{n+1}{p}\rfloor+1}|D^\beta\varphi(x)|)\right).\end{aligned}$$

(Hier bezeichnet V_n das Volumen der n-dimensionalen Einheitskugel und $C_{n,p} = \max\{V_n, \int_{B_1(0)^c}|x|^{-(n+1)}dx\}^{\frac{1}{p}}$).
Nachdem weiters (wir setzen $m = \lfloor\frac{n+1}{p}\rfloor + 1$ zur besseren Lesbarkeit)

$$\sup_{x\in B_1(0)^c}(|x|^m|D^\beta\varphi|) \leq \sup_{x\in B_1(0)^c} C_{n,m}\sum_{|\alpha|=m}|x^\alpha D^\beta\varphi(x)| \leq C_{n,m}\sum_{|\alpha|\leq m}\rho_{\alpha,\beta}(\varphi)$$

gilt, erhalten wir also die Stetigkeit der Abbildung $(\varphi \mapsto D^\beta\varphi)$ von $\mathcal{S}$ in den L^p und damit auch die Aussage für $\beta = 0$. □

Definition 2. Wir bezeichnen, wie üblich, mit $\mathcal{S}'$ den topologischen Dualraum von S und versehen ihn mit der w^*-Topologie. Wir bezeichnen $\mathcal{S}'$ als den *Raum der temperierten Distributionen.*

Beispiel 1. Der Raum der temperierten Distributionen umfasst eine Reihe von unterschiedlichen bekannten Räumen: Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ messbar, $p \in [1,\infty]$ und $k \in \mathbb{N}$ mit

$$\frac{f(x)}{(1+|x|^2)^k} \in L^p(\mathbb{R}^n).$$

Dann definiert

$$L(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^n} f\varphi\ dx$$

ein stetiges lineares Funktional auf $\mathcal{S}$. Um das einzusehen, bemerkt man zunächst, dass $(\varphi \mapsto (1+|.|^2)^k\varphi)$ eine stetige Abbildung von $\mathcal{S}$ in sich selbst ist. Damit folgt aus $\mathcal{S} \hookrightarrow L^q$ für $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ kombiniert mit Hölder, also

$$L(\varphi) \leq \left\|\frac{f}{(1+|.|^2)^k}\right\|_{L^p}\left\|(1+|.|^2)^k\varphi\right\|_{L^q},$$

dass L tatsächlich ein stetiges lineares Funktional ist. Für $p = 1, \infty$ gelten analoge Abschätzungen. Wir nennen derartige Funktionen *temperierte L^p-Funktionen.*

Beispiel 2. Ähnlich argumentiert man, dass der Raum der temperierten Borelmaße in $\mathcal{S}'$ liegt. Ein Borelmaß μ heißt temperiertes Borelmaß, wenn ein $k \in \mathbb{N}$ existiert mit

$$\int_{\mathbb{R}^n}\frac{1}{(1+|x|^2)^k}d\mu(x) < \infty.$$

Beispiel 3. Klarerweise liegen für $x_0 \in \mathbb{R}^n$ und $\beta \in \mathbb{N}^n$ die Punktauswertungsfunktionale der Ableitungen, also

$$L(\varphi) = D^\beta\varphi(x_0),$$

in S'. Für $\beta = 0$ entsprechen diese einem Punktmaß, also einem endlichen Borelmaß, für $\beta \neq 0$ ist L kein Spezialfall der oberen Beispiele.

Bemerkung 4. Elementar stellt man fest, dass die Einbettungen $L^p \hookrightarrow S'$, $p \in [1,\infty]$ und $\mathcal{M}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow S'$ stetig sind. Hier bezeichnet $\mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ den Banachraum aller endlichen Borelmaßen.

2 Vererbung von Operationen über Dualität

Wir betrachten zunächst ein paar übliche Operationen auf $\mathcal{S}$:

Lemma 2. *1. Translationen τ_h und Reflexion $\tilde{\cdot}$ sind bzgl. $\mathcal{S}$ stetige Operationen.*

2. Es gilt $\tau_h\varphi \xrightarrow{h\to 0} \varphi$ bzgl. $\mathcal{S}$.

3. Die Differentialquotienten $\frac{1}{h}(\varphi - \tau_{he_i}\varphi)$ konvergieren gegen $\partial_i\varphi$ bzgl. $\mathcal{S}$.

4. Die Fouriertransformation $\mathcal{F} : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ ist ein Homöomorphismus.

5. Faltung ist eine stetige Operation auf $\mathcal{S}$.

Beweis. 1.) Reflexion, also $\tilde{\varphi}(x) = \varphi(-x)$, ist offenbar stetig, da $\rho_{\alpha,\beta}(\tilde{\varphi}) = \rho_{\alpha,\beta}(\varphi)$ für alle $\varphi \in \mathcal{S}$ gilt.
Für Translationen $\tau_h\varphi(x) = \varphi(x-h)$ stellen wir fest, dass

$$\begin{aligned}\rho_{\alpha,\beta}(\tau_h\varphi) &= \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |(x+h)^\alpha D^\beta\varphi(x)| \\ &\leq C\left(\sup_{x\in\mathbb{R}^n}(|x|^{|\alpha|}|D^\beta\varphi(x)|) + |h|^{|\alpha|}\left\|D^\beta\varphi\right\|_\infty\right) \end{aligned} \tag{1}$$

gilt, woraus die Stetigkeit von τ_h folgt. Vergleiche dazu Beweis von Satz 4 für die stetige Abhängigkeit von $\sup_{x\in\mathbb{R}^n}(|x|^{|\alpha|}|D^\beta\varphi(x)|)$ bzgl. der Topologie auf $\mathcal{S}$.
2.) Mittels Mittelwertsatz erhalten folgende Abschätzung für ein $\xi \in B(0,|h|)$:

$$\begin{aligned}|x^\alpha D^\beta(\tau_h\varphi(x) - \varphi(x))| &\leq |h||x|^{|\alpha|}|\nabla D^\beta\varphi(x+\xi)| \\ &\leq 2^{|\alpha|}|h|\left(|x+\xi|^{|\alpha|}|\nabla D^\beta\varphi(x+\xi)| + |h|^{|\alpha|}|\nabla D^\beta\varphi(x+\xi)|\right). \end{aligned} \tag{2}$$

Der Ausdruck $\left(|x+\xi|^{|\alpha|}|\nabla D^\beta\varphi(x+\xi)| + |h|^{|\alpha|}|\nabla D^\beta\varphi(x+\xi)|\right)$ ist offenbar unabhängig von $x \in \mathbb{R}^n$ beschränkt für eine Schwartzfunktion φ, solange wir $|h| < 1$ vorraussetzen. Daraus folgt $\rho_{\alpha,\beta}(\tau_h\varphi - \varphi) \xrightarrow{h\to 0} 0$, für alle $\alpha,\beta \in \mathbb{N}^n$, also $\tau_h\phi \xrightarrow{h\to 0} \phi$ in $\mathcal{S}$.
3.) Offenbar folgt mit der Abschätzung aus 2.):

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{h}(\varphi(x) - \tau_{he_i}\varphi(x)) - \partial_i\varphi(x)\right| &= \left|\frac{1}{h}\int_0^h \partial_i\varphi(x - te_i) - \partial_i\varphi(x)dt\right| \\ &\leq |h|\,\|\nabla(\partial_i\varphi)\|_\infty \end{aligned}$$

bzw. analog

$$\rho_{\alpha,\beta}(\frac{1}{h}(\varphi - \tau_{he_i}\varphi) - \partial_i\varphi) \leq C_{\alpha,\beta,\phi}|h|$$

für eine Konstante $C_{\alpha,\beta,\varphi}$, die nur von α,β und φ abhängt, womit $\frac{1}{h}(\varphi - \tau_{he_i}\varphi) \xrightarrow{h\to 0} \partial_i\varphi$ in $\mathcal{S}$ gezeigt wäre.
4.) Wir erinnern an die Beziehung zwischen Differentialoperatoren und Polynomen P unter der Fouriertransformation:

$$\begin{aligned}P(D)\mathcal{F}(\varphi)(x) &= \mathcal{F}(P(-2\pi it)\varphi(t))(x), \\ \mathcal{F}(P(D)\varphi)(x) &= P(2\pi ix)\mathcal{F}(\varphi(t))(x). \end{aligned}$$

Folglich gilt $\rho_{\alpha,\beta}(\mathcal{F}(\varphi)) = (2\pi)^{|\beta|-|\alpha|}\sup_{x\in\mathbb{R}^n}|\mathcal{F}(D^\alpha(t^\beta\varphi(t)))(x)|$. Nachdem für $f \in L^1$

$$\|\mathcal{F}(f)\|_\infty \leq \|f\|_{L^1}$$

gilt, $(\varphi \mapsto D^\alpha(t^\beta\varphi(t)))$ eine Zusammensetzung aus den bzgl. $\mathcal{S}$ stetigen Funktionen 'ableiten' und 'mit Polynom multiplizieren' ist und $\mathcal{S} \hookrightarrow L^1$, erhalten wir die Stetigkeit der Fouriertransformation bzgl. $\mathcal{S}$. Dieselben Argumente lassen exakt gleich auf die Rücktransformation anwenden, also ist $\mathcal{F}$ ein Homöomorphismus.
5.) Folgt direkt aus $* = \mathcal{F}^{-1} \circ \cdot \circ (\mathcal{F}, \mathcal{F})$, wobei $(\mathcal{F}, \mathcal{F})$ die Abbildung $(\varphi, \psi) \mapsto (\mathcal{F}(\varphi), \mathcal{F}(\psi)$ auf $\mathcal{S} \times \mathcal{S}$ darstellt, und der Stetigkeit der punktweisen Multiplikation $\cdot$ auf $\mathcal{S}$. □

Definition 3. Wir definieren folgende Operationen für $u \in \mathcal{S}'$ über Dualität punktweise für alle $\varphi \in \mathcal{S}$:

- Translation: $\langle \tau_h u, \varphi \rangle := \langle u, \tau_{-h}\varphi \rangle$
- Refexion: $\langle \tilde{u}, \varphi \rangle := \langle u, \tilde{\varphi} \rangle$
- Ableitungen: $\langle D^\alpha u, \varphi \rangle := (-1)^{|\alpha|}\langle u, D^\alpha \varphi \rangle$, für $\alpha \in \mathbb{N}^n$
- Multiplikation mit $\psi \in \mathcal{S}$: $\langle \psi u, \varphi \rangle := \langle u, \psi\varphi \rangle$
- Faltung mit $\psi \in \mathcal{S}$: $\langle u * \psi, \varphi \rangle := \langle u, \tilde{\psi} * \varphi \rangle$
- Fouriertransformation: $\langle \mathcal{F}u, \varphi \rangle := \langle u, \mathcal{F}\varphi \rangle$

Bemerkung 5. Um diese Definitionen zu motivieren, betrachten wir als Beispiel die Faltung. Angenommen $u, \psi, \varphi \in \mathcal{S}$ und wir identifizieren u und $u * \psi$ (Achtung, hier ist die klassische Faltung gemeint) mit den entsprechenden Distributionen. Dann gilt mit einer kurzen Anwendung von Fubini

$$\langle u * \psi, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} (u * \psi)(x)\varphi(x)dx = \int_{\mathbb{R}^n} u(y)(\tilde{\psi} * \varphi)(y)dy = \langle u, \tilde{\psi} * \varphi \rangle.$$

D.h. in diesem Fall kann die distributionelle Faltung mit der klassischen identifiziert werden.

Satz 5. *Für ein $u \in \mathcal{S}'$ und $\psi \in \mathcal{S}$ setze $f(x) = \langle u, \tau_x \tilde{\psi} \rangle)$. Dann gilt:*

- *f liegt in C^∞.*
- *f ist eine temperierte L^∞-Funktion.*
- *Die distributionelle Faltung $u * \psi$ kann mit f identfiziert werden.*

Beweis. Aus Lemma 2 Punkt 1 und 3 wissen wir, dass

$$\frac{1}{h}(\tau_{x+he_i}\tilde{\psi} - \tau_x\tilde{\psi}) \xrightarrow{h \to 0} -\tau_x \partial_i \tilde{\psi}$$

in $\mathcal{S}$, also erhalten wir wegen $u \in \mathcal{S}'$ folglich auch

$$\frac{1}{h}(f(x + he_i) - f(x)) = u\left(\frac{1}{h}(\tau_{x+he_i}\tilde{\psi} - \tau_x\tilde{\psi})\right) \xrightarrow{h \to 0} u(-\tau_x \partial_i \tilde{\psi}).$$

Nachdem f und $(x \mapsto -u(\tau_x \partial_i \tilde{\psi}))$ wegen Lemma 2 Punkt 2 stetig sind, gilt also $f \in C^1$ und mittels Induktion erhält man schließlich $f \in C^\infty$ und $D^\beta f = (-1)^{|\beta|}u(\tau_x D^\beta \tilde{\psi})$.
Um einzusehen, dass f eine temperierte L^∞-Funktion erinnern wir an Satz 3 und die Stetigkeit von $u : \mathcal{S} \to \mathbb{R}$. Wir erhalten $l, m \in \mathbb{N}$ mit

$$|f(x)| = |u(\tau_x\tilde{\psi})| \leq C \sum_{|\alpha| \leq m, |\beta| \leq l} \rho_{\alpha,\beta}(\tau_x\tilde{\psi}).$$

Wegen $\rho_{\alpha,\beta}(\tau_x\tilde{\psi}) \leq \tilde{C}(1+|x|^{|\alpha|})$ mit einer Konstanten $\tilde{C} > 0$ abh. von α und β (vgl. Abschätzung (1) in Lemma 2), wissen wir also, dass z.B. $\frac{f}{(1+|x|^2)^m}$ beschränkt ist.
Um den letzten Punkt nachzuweisen, beobachten wir für $\varphi \in \mathcal{S}$:

$$\begin{aligned}\langle u * \psi, \varphi\rangle &= \langle u, \tilde{\psi} * \varphi\rangle \\ &= \langle u, \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{\tau}_y\psi(.)\varphi(y)dy\rangle \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \langle u, \tilde{\tau}_y\psi\rangle\varphi(y)dy.\end{aligned}$$

Das heißt f kann mit der distributionellen Faltung $u * \psi$ identifiziert werden. Wir müssen also nur noch die letzte Gleichung argumentieren. Dafür betrachten wir für $h > 0$ und $N \in \mathbb{N}$ die punktweisen Riemannsummen

$$R_{h,N}(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^n\cap[-N,N]} \psi(x-hk)\varphi(hk)h^n,$$

$$R_h(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \psi(x-hk)\varphi(hk)h^n$$

und setzen für $\phi \in \mathcal{S}$

$$\phi_h(y) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \phi(hk)\chi_{hk+hW}(y)$$

wobei wir mit W den Einheitswürfel bezeichnen. Um Notation ein bisschen zu vereinfachen setzen wir weiters $\phi^x(y) = \phi(x-y)$. Offenbar liegt $R_{h,N}$ in $\mathcal{S}$, a priori ist aber nicht klar, wieso die Reihe R_h oder ϕ_h überhaupt existiert bzw. in welchem Sinn.
Da für $m \in \mathbb{N}$ eine Konstante $C_m > 0$ existiert mit $|\varphi(x)| \leq C_m(1+|x|^2)^{-m}$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$ erhalten wir:

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |D^\beta\psi(x-hk)\varphi(hk)h^n| \leq C_n \left\|D^\beta\psi\right\|_\infty \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \frac{h^n}{(1+h^2|k|^2)^n} < \infty.$$

bzw. analog

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |x^\alpha D^\beta\psi(x-hk)\varphi(hk)h^n| < \infty.$$

Mit einem analogen Argument wie im Beweis zur Vollständigkeit von $\mathcal{S}$ (vgl. Satz 2) erhalten wir also $R_{h,N} \xrightarrow{N\to\infty} R_h$ in $\mathcal{S}$ bzw. die absolute Konvergenz der Reihe in $\mathcal{S}$ an sich. Eine weitere Konsequenz ist außerdem, dass die Reihe $(\psi^x\varphi)_h(y) = \psi^x_h(y)\varphi_h(y)$ in L^1 liegt und

$$R_h(x) = \int_{\mathbb{R}^n} (\psi^x\varphi)_h(y)dy$$

für jedes $x \in \mathbb{R}^n$ gilt. Wir betrachten jetzt die Differenz bzgl. einer Seminorm $\rho_{\alpha,\beta}$ von R_h zu $\psi * \phi$ und erhalten

$$\begin{aligned}|x^\alpha D^\beta(R_h(x) - \psi * \varphi(x))| &= \left|\int_{\mathbb{R}^n} (x^\alpha D^\beta\psi^x\varphi)_h - (x^\alpha D^\beta\psi^x\varphi)dy\right| \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |x^\alpha D^\beta(\psi^x_h - \psi^x)\varphi_h|dy + \int_{\mathbb{R}^n} |x^\alpha D^\beta\psi^x(\varphi_h - \varphi)|dy \\ &\leq C\left(\left\||.|^{|\alpha|}D^\beta(\psi_h - \psi)\right\|_\infty \|\varphi_h\|_{L^1} + \left\|D^\beta\psi_h - \psi\right\|_\infty \left\||.|^{|\alpha|}\varphi_h\right\|_{L^1}\right. \\ &\left. + \left\||.|^{|\alpha|}D^\beta\psi\right\|_\infty \|\varphi_h - \varphi\|_{L^1} + \left\|D^\beta\psi\right\|_\infty \left\||.|^{|\alpha|}(\varphi_h - \varphi)\right\|_{L^1}\right).\end{aligned}$$

Wegen Abschätzung (2) erhalten wir $\left\| |.|^m D^\beta(\psi_h - \psi) \right\|_\infty \xrightarrow{h\to 0} 0$. Wegen $|y|^{|\alpha|}\varphi_h(y) \xrightarrow{h\to 0} |y|^{|\alpha|}\varphi(y)$ punktweise müssen wir nur eine integrierbare Majorante finden um auch L^1-Konvergenz zu folgern. Dafür beobachten wir für $h < 1$ zunächst, dass für alle $y \in hk + hW$

$$|y - hk| \leq \sqrt{n}$$

gilt. Wenn man sich in Erinnerung ruft, dass $|\varphi(x)| \leq C_{|\alpha|} \frac{1}{(1+\sqrt{n}+|x|)^{|\alpha|+n+1}}$ für ein Konstante $C_{|\alpha|} > 0$ und alle $x \in \mathbb{R}^n$ gilt, folgert man

$$\begin{aligned} ||y|^{|\alpha|}\varphi_h(y)| &= |y|^{|\alpha|}|\varphi(hk)| \\ &\leq C \frac{|y|^{|\alpha|}}{(1+\sqrt{n}+|hk|)^{|\alpha|+n+1}} \\ &\leq C \frac{|y|^{|\alpha|}}{(1+|y-hk|+|hk|)^{|\alpha|+n+1}} \\ &\leq C \frac{|y|^{|\alpha|}}{(1+|y|)^{|\alpha|+n+1}} \in L^1. \end{aligned}$$

Offenbar ist diese Abschätzung unabhängig vom gewählten Würfel, d.h. wir haben eine integrierbare Majorante gefunden und erhalten somit die gewünschte Konvergenz von $|.|^{|\alpha|}\varphi_h$ in L^1. □

Lemma 3. *Für $u \in \mathcal{S}'$ und $\varphi \in \mathcal{S}$ gilt: $\mathcal{F}(u * \varphi) \overset{(*)}{=} \mathcal{F}(u)\mathcal{F}(\varphi)$ in $\mathcal{S}'$.*

3 Translationinvariante Operatoren auf L^p

Beispiel 4. Eine Reihe von Operatoren kann durch ein Faltungsprodukt werden. Z.B. betrachten wir

$$\langle \delta_0, \varphi \rangle = \varphi(0),$$

dann sieht man

$$(\delta_0 * \varphi)(x) = \langle \delta_0, \tau_x \tilde{\varphi} \rangle = \tau_x \tilde{\varphi}(0) = \varphi(x).$$

Das Produkt $\delta_0 * \varphi$ ist also nichts anderes als die Identität auf $\mathcal{S}$.

Definition 4. Sei $p, q \in [1, \infty]$ und $T : L^p \to L^q$. Wir sagen, dass T mit Translationen kommutiert bzw. translationsinvariant ist, genau dann, wenn für alle $h \in \mathbb{R}^n : \tau_h T = T\tau_h$ gilt.

Beispiel 5. Wir erinnern, dass für $f \in L^1$ und $g \in L^p$ folgende Ungleichung gilt:

$$\|f * g\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^1} \|g\|_{L^p}.$$

Nachdem offenbar auch $\tau_h(f * g) = f * (\tau_h g)$ gilt, induziert jedes $f \in L^1$ durch $(g \mapsto f * g)$ einen translationsinvarianten, linearen, beschränkten Operator von L^p in sich selbst.

Beispiel 6. Offenbar gilt für $u \in \mathcal{S}'$ und $\varphi \in \mathcal{S}$:

$$\tau_h(u * \varphi)(x) = \langle u, \tau_{x-h}\tilde{\varphi} \rangle = \langle u, \tau_x \widetilde{\tau_h \varphi} \rangle = (u * (\tau_h \varphi))(x).$$

Insbesondere ist $(\varphi \mapsto u * \varphi)$ ein linearer, translationsinvarianter Operator, welcher allerdings nicht notwendigerweise Werte in L^q hat. Der nächste Satz stellt einen Bezug zwischen solchen Faltungsprodukten und translationsinvarianten, linearen, beschränkten Operatoren her:

Satz 6. *Sei $T : L^p \to L^q$ ein linearer, beschränkter, translationsinvarianter Operator. Dann existiert ein $u \in \mathcal{S}'$, sodass*

$$T(\varphi) = u * \varphi$$

für alle $\varphi \in \mathcal{S}$.

Um dies zu zeigen, sei zunächst an folgendes erinnert:

Definition 5. Sei $f, g \in L^p$ mit

$$\left\|\frac{1}{h}(f - \tau_{he_i} f) - g\right\|_{L^p} \xrightarrow{h \to 0} 0.$$

für $i = 1, .., n$. Dann nennen wir f stark differenzierbar (in Richtung e_i) in L^p und setzen $\partial_i f = g$. Analog definieren wir höhere Ableitungen.

Bemerkung 6. Es ist eine leichte Folgerung, dass aus der starken Differenzierbarkeit die schwache folgt. Eine bemerkenswerte Tatsache ist, dass, mit einer Ausnahme, die Umkehrung auch gilt. Wenn $p = \infty$, dann bieten z.B. stetige, stückweise affine Funktionen ein Beispiel für eine schwach differenzierbare Funktion, die nicht stark differenzierbar ist im L^∞.

Satz 7. *Sei $f \in L^1$ stark differenzierbar in Richtung e_i. Dann gilt:*

$$\widehat{\partial_i f}(x) = -2\pi i x_i \hat{f}(x).$$

Existieren alle Ableitungen bis zu $\alpha \in \mathbb{N}^n$, dann gilt also

$$\widehat{D^\alpha f}(x) = (-2\pi i)^{|\alpha|} x^\alpha \hat{f}(x).$$

Satz 8. *Sei $f, \hat{f} \in L^1$, dann gilt*

$$f(x) = \int_{R^n} \hat{f}(y) e^{2\pi i x \cdot y} dy.$$

(Die Gleichheit ist in L^1 zu verstehen.) Insbesondere kann f mit einer stetigen Funktion identifiziert werden.

Lemma 4. *Sei $f \in L^p$ stark differenzierbar bis zur Ordnung $n+1$. Dann kann f mit einer stetigen Funktion g identifiziert werden und es gilt*

$$|g(0)| \leq C \sum_{|\alpha| \leq n+1} \|D^\alpha f\|_{L^p},$$

wobei $C > 0$ unabhängig ist von f.

Beweis. Als erstes fixieren wir $p = 1$. Wir stellen fest, dass eine Konstante $\tilde{C} > 0$ existiert (nur von n abhängend) mit

$$(1 + |x|^2)^{\frac{n+1}{2}} \leq \tilde{C} \sum_{|\alpha| \leq n+1} |x^\alpha|$$

für alle $x \in \mathbb{R}^n$. Insbesondere erhalten wir also

$$\begin{aligned}
|\hat{f}(x)| \leq & \left(\tilde{C}(1 + |x|^2)^{-\frac{n+1}{2}} \sum_{|\alpha| \leq n+1} |x^\alpha|\right) |\hat{f}(x)| \\
=& \tilde{C}(1 + |x|^2)^{-\frac{n+1}{2}} \sum_{|\alpha| \leq n+1} |(2\pi)^{-|\alpha|} \widehat{D^\alpha f}(x)| \\
\leq & \tilde{C}(1 + |x|^2)^{-\frac{n+1}{2}} \sum_{|\alpha| \leq n+1} \|D^\alpha f\|_{L^1}.
\end{aligned}$$

Nachdem $(1 + |x|^2)^{-\frac{n+1}{2}}$ integrierbar ist, erhalten wir also die Integrierbarkeit von $\hat{f}$. Nach Satz 8 besitzt $f \in L^1$ einen stetigen Vertreter g. Die gesuchte Abschätzung folgt nun aus

$$|g(0)| = |\int_{\mathbb{R}^n} \hat{f} d\lambda^n| \leq \left\|\hat{f}\right\|_{L^1} \leq C \sum_{|\alpha| \leq n+1} \|D^\alpha f\|_{L^1},$$

wobei $C = C_1 \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |x|^2)^{-\frac{n+1}{2}} dx$.
Für $p > 1$ sei $\varphi \in C_c^\infty(B_2(0))$ mit $\|\varphi\|_\infty \le 1$ und $\varphi \equiv 1$ auf $B_1(0)$. Offenbar ist φf in L^1 wegen

$$\|\varphi f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \le \|f\|_{L^1(B_2(0))} \le C_p \|f\|_{L^p(B_2(0))} \le C_p \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$$

mit der Einbettungskonstante $C_p > 0$ von $L^p(B_2(0)) \hookrightarrow L^1(B_2(0))$. Wegen der Produktregel für Sobolevfunktionen und C_c^∞-Funktionen folgt die starke Differenzierbarkeit in L^1 bis zur Ordnung $n+1$ für $p < \infty$. Man sieht auch ein, dass diese für $p = \infty$ ebenfalls hält. Also existiert ein stetiger Vertreter h in der L^1-Klasse von φf mit

$$|h(0)| \le \sum_{|\alpha| \le n+1} \|D^\alpha(\varphi f)\|_{L^1} .$$

Betrachten wir die Einschränkung auf $B_1(0)$ stellen wir also fest, dass $f|_{B_1(0)}$ f.ü. gleich $g := h|_{B_1(0)}$ ist auf $B_1(0)$. Weiters können wir folgende Abschätzungen treffen

$$\begin{aligned}
\|D^\alpha(\varphi f)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} &\le \sum_{\beta \le \alpha} \binom{\alpha}{\beta} \left\|D^\beta \varphi D^{\alpha-\beta} f\right\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \\
&\le C_n \sum_{\beta \le \alpha} \left\|D^\beta \varphi\right\|_\infty \left\|D^{\alpha-\beta} f\right\|_{L^1(B_2(0))} \\
&\le C_n C_p (\max_{\beta \le \alpha} \left\|D^\beta \varphi\right\|_\infty) \sum_{\beta \le \alpha} \left\|D^{\alpha-\beta} f\right\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}
\end{aligned}$$

mit einer Konstanten $C_n > 0$ nur abh. von der Dimension. Insbesondere erhalten wir also mit $C := C_n C_p (\max_{\beta \le \alpha} \left\|D^\beta \varphi\right\|_\infty)$

$$|g(0)| = |h(0)| \le C \sum_{|\alpha| \le n+1} \|D^\alpha f\|_{L^p} .$$

Ersetzen wir φ durch $\varphi_\delta(x) = \varphi(\frac{x}{\delta})$ mit $\delta > 1$, dann bemerken wir als erstes die Unabhängigkeit von C bzgl. δ. Weiter lässt sich g mit denselben Argumenten offenbar auf die Kugel $B_\delta(0)$ stetig fortsetzen, es gilt also $f|_{B_\delta(0)} = g$ fast überall. Nachdem $\delta > 1$ beliebig war existiert eine stetige Fortsetzung g auf ganz $\mathbb{R}^n$, womit die L^1-Klasse von f einen stetigen Vertreter besitzt. □

Beweis von Satz 6. Sei $\varphi \in \mathcal{S}$. Nachdem

$$\frac{1}{h}(\varphi - \tau_{he_i}\varphi) \xrightarrow{h \to 0} \partial_i \varphi$$

bzgl. der Topologie auf $\mathcal{S}$ und damit auch bzgl. der L^p-Norm, erhalten wir:

$$\frac{1}{h}\left(T\varphi - \tau_{he_i} T\varphi\right) = T\left(\frac{1}{h}(\varphi - \tau_{he_i}\varphi)\right) \xrightarrow{h \to 0} T(\partial_i \varphi),$$

wobei letztere Konvergenz bzgl. der L^q-Norm zu verstehen ist. Insbesondere folgt also wegen $\varphi \in C^\infty$, dass $T\varphi$ unendlich oft stark differenzierbar ist in L^p mit $D^\alpha T\varphi = T(D^\alpha \varphi)$. Aus Lemma 4 folgt, dass $T\varphi$ f.ü. gleich einer stetigen Funktion g_φ ist mit

$$|g_\varphi(0)| \le C \sum_{|\alpha| \le n+1} \|D^\alpha f\|_{L^p} .$$

Daraus folgt insbesondere, dass $v = (\varphi \mapsto g_\varphi(0))$ ein stetiges Funktional auf $\mathcal{S}$ ist. Wir setzen $u = \tilde{v}$. Man sieht nun, dass

$$(u * \varphi)(x) = \langle u, \tau_x \tilde{\varphi} \rangle = \langle v, \tau_{-x}\varphi \rangle = g_{\tau_{-x}\varphi}(0) \overset{(*)}{=} \tau_{-x} g_\varphi(0) = g_\varphi(x) = T\varphi(x),$$

für fast alle $x \in \mathbb{R}^n$, wobei die Gleichung $(*)$ aus

$$g_{\tau_h \varphi} = T(\tau_h \varphi) = \tau_h T(\varphi) = \tau_h g_\varphi$$

in L^1 und der Eindeutigkeit des stetigen Vertreters einer L^1-Funktion folgt. □

Bemerkung 7. Betrachten wir die Menge

$$(L^p, L^q) := \{u \in \mathcal{S}' : \exists C > 0\ \forall \varphi \in \mathcal{S} : \|u * \varphi\|_{L^q} \leq C \|\varphi\|_{L^p}\}$$

für $1 \leq p, q \leq \infty$, dann stellen wir also eine 1 zu 1 Beziehung zwischen dieser Menge und den linearen, beschränkten und translationsinvarianten Operatoren $T : L^p \to L^q$ fest. Wir wollen nun diese Operatoren im Speziellen für $p = q = 2$ betrachten.

Lemma 5. *C_c^∞ liegt dicht in $\mathcal{S}$.*

Beweisskizze. Sei $\psi \in C_c^\infty$ mit $\psi_0 = 1$ auf $B_1(0)$. Für $\varphi \in \mathcal{S}$ definiere $\varphi_\epsilon(x) = \psi(\epsilon x)\varphi(x)$. Man sieht mit den üblichen Abschätzungen bzgl. der Seminormen (vgl. Lemma 2), dass $\varphi_\epsilon \xrightarrow{\epsilon \to 0} \varphi$ in $\mathcal{S}$. □

Satz 9. *Sei $u \in \mathcal{S}'$, dann gilt $u \in (L^2, L^2)$ genau dann wenn eine Funktion $b \in L^\infty$ existiert, sodass b mit $\mathcal{F}(u)$ identifiziert werden kann. Der Operator $T : L^2 \to L^2$ definiert auf $\mathcal{S}$ durch $T\varphi = u * \varphi$ für $\varphi \in \mathcal{S}$ hat dann die Abbildungsnorm $\|b\|_\infty$.*

Beweis. Sei zunächst $u \in (L^2, L^2)$. Wir setzen $\varphi_0 = e^{-\pi|x|^2}$ und erinnern an dieser Stelle, dass $\varphi_0 \in \mathcal{S}$ ein Fixpunkt der Fouriertransformation ist. Per Vorraussetzung liegt $u * \varphi_0$ in L^2. Für $\psi \in C_c^\infty$ und $\varphi \in \mathcal{S}$ stellen wir nun mithilfe Lemma 3 folgendes fest:

$$\begin{aligned}
\langle \mathcal{F}(u)\mathcal{F}(\varphi), \psi \rangle &= \langle \mathcal{F}(u), \mathcal{F}(\varphi)\psi \rangle \\
&= \langle \mathcal{F}(u), \varphi_0 \varphi_0^{-1} \mathcal{F}(\varphi)\psi) \rangle \\
&= \langle \mathcal{F}(u)\varphi_0, \varphi_0^{-1} \mathcal{F}(\varphi)\psi) \rangle \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}(u * \varphi_0)\varphi_0^{-1} \mathcal{F}(\varphi)\psi dx
\end{aligned}$$

Wir setzen $b = \mathcal{F}(u * \varphi_0)\varphi_0^{-1}$. Wenn wir $\varphi \in \mathcal{S}$ in obiger Gleichung so wählen, dass $\mathcal{F}(\varphi) = 1$ auf dem Träger von ψ gilt, erhalten wir sogar

$$\langle \mathcal{F}(u), \psi \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} b\psi dx.$$

Wegen der Dichtheit von C_c^∞ in $\mathcal{S}$ induziert b also ein Element in $\mathcal{S}'$, dass mit $\mathcal{F}(u)$ übereinstimmt. Weiters folgt $\mathcal{F}(u * \varphi) = b\mathcal{F}(\varphi)$ fast überall. Das folgt aus

$$\int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}(u * \varphi)\psi dx = \langle \mathcal{F}(u * \varphi), \psi \rangle = \langle \mathcal{F}(u)\mathcal{F}(\varphi), \psi \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} b\mathcal{F}(\varphi)\psi dx$$

für alle $\psi \in C_c^\infty$ und dem Fundamentalsatz der Variationsrechnung. Damit erhalten wir

$$\|b\mathcal{F}(\varphi)\|_{L^2} = \|\mathcal{F}(u * \varphi)\|_{L^2} = \|u * \varphi\|_{L^2} \leq C \|\varphi\|_{L^2},$$

wobei $C > 0$ die Abbildungsnorm von T bezeichnet. Insbesondere gilt also

$$\int_{\mathbb{R}^n} (C^2 - b^2)\varphi^2 dx \geq 0$$

für alle $\varphi \in C_c^\infty$. Mit einer Variation vom Fundamentalsatz der Variationsrechnung folgt offenbar $C^2 - b^2 \geq 0$ f.ü. bzw. $\|b\|_\infty \leq C$. Klarerweise muss dann auch $\|b\|_\infty = C$ gelten.
Nehmen wir umgekehrt an, dass $u \in \mathcal{S}'$ mit einem $b \in L^\infty$ identifiziert werden kann, dann kann nach obigen Überlegungen $\mathcal{F}(u * \varphi)$ mit $b\mathcal{F}(\varphi) \in L^2$ identifiziert werden. Insbesondere liegt auch $u * \varphi$ in L^2. Wir erhalten also

$$\|u * \varphi\|_{L^2} = \|\mathcal{F}(u * \varphi)\|_{L^2} = \|b\mathcal{F}(\varphi)\|_{L^2} \leq \|b\|_\infty \|\mathcal{F}(\varphi)\|_{L^2} = \|b\|_\infty \|\varphi\|_{L^2}.$$

Also liegt $u \in (L^2, L^2)$. Mit einer zum ersten Teil des Beweises analogen Begründung sieht man auch, dass die Abbildungsnorm von T gleich $\|b\|_\infty$ ist. □

Beispiel 7. Wir wenden uns nun zu einer expliziten Anwendung der bis jetzt besprochenen Theorie zu. Wir definieren die Hilberttransformation Hg einer Funktion g als

$$Hg(x) = p.v.\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}}\frac{g(y)}{x-y} = \lim_{\epsilon\to 0+}\frac{1}{\pi}\int_{\epsilon<|x-y|}\frac{g(y)}{x-y}dy = \int_{\epsilon<|x-y|}\frac{g(y)}{x-y}dy.$$

A priori ist nicht klar für welche Funktionen g die Hilberttransformation definiert ist, bzw. auf welchen Räumen sie Sinn macht. Wir wollen zeigen, dass H eine stetige Fortsetzung auf L^2 besitzt. Dafür betrachten wir als erstes

$$h(\varphi) = p.v.\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}}\frac{\varphi(y)}{y}dy$$

für $\varphi \in \mathcal{S}$. Wegen

$$\begin{aligned}
\lim_{\epsilon\to 0+}\frac{1}{\pi}\int_{\epsilon<|y|}\frac{\varphi(y)}{y}dy &= \lim_{\epsilon\to 0+}\frac{1}{\pi}\left(\int_{\epsilon<|y|\le 1}\frac{\varphi(y)}{y}dy + \int_{|y|>1}\frac{\varphi(y)}{y}dy\right)\\
&= \lim_{\epsilon\to 0+}\frac{1}{\pi}\left(\int_{\epsilon<|y|\le 1}\frac{\varphi(y)-\varphi(0)}{y}dy + \int_{|y|>1}\frac{\varphi(y)}{y}dy\right)\\
&\le \frac{1}{\pi}(2\left\|\varphi'\right\|_\infty + \left\|\varphi\right\|_{L^1})
\end{aligned}$$

ist h eine temperierte Distribution. Folglich ist

$$(h*\varphi)(x) = p.v.\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}}\frac{\tau_x\tilde{\varphi}(y)}{y}dy = p.v.\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}}\frac{\tau_x\tilde{\varphi}(y)}{y}dy = p.v.\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}}\frac{\varphi(y)}{x-y}dy = Hg(x)$$

H ein Operator, der durch eine Faltung $h*\varphi$ dargestellt werden kann. Insbesondere reduziert sich die Frage, ob H auf L^2 fortsetzbar ist auf die Frage, ob $\mathcal{F}(h)$ mit einer L^∞-Funktion identifiziert werden kann.
Berechnen wir also die Fouriertransformation von h

$$\begin{aligned}
\langle\mathcal{F}(h),\varphi\rangle &= h(\mathcal{F}(\varphi))\\
&= p.v.\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}}\frac{\mathcal{F}(\varphi)(y)}{y}dy\\
&= \frac{1}{\pi}\left(\lim_{\epsilon\to 0+}\int_{\epsilon<|y|}\frac{1}{y}\int_{\mathbb{R}}\varphi(x)e^{-2\pi ixy}\ dxdy\right)\\
&= \frac{1}{\pi}\left(\lim_{\epsilon\to 0+}\int_{\mathbb{R}}\int_{\epsilon<|y|}\frac{1}{y}\varphi(x)e^{-2\pi ixy}\ dydx\right)\\
&= -\frac{i}{\pi}\left(\lim_{\epsilon\to 0+}\int_{\mathbb{R}}\varphi(x)\int_{\epsilon<|y|}\frac{1}{y}\sin(2\pi xy)\ dydx\right).
\end{aligned}$$

Wegen der Integrierbarkeit von $\frac{\sin(y)}{y}$ sieht man leicht, dass

$$\psi_\epsilon(x) := \varphi(x)\int_{\epsilon<|y|}\frac{1}{y}\sin(2\pi xy)\ dy = \operatorname{sgn}(x)\varphi(x)\int_{\epsilon|x|<|y|}\frac{1}{y}\sin(2\pi y)\ dy$$

erstens punktweise für $x\in\mathbb{R}$ gegen $\varphi(x)\int_{\mathbb{R}}\frac{1}{y}\sin(2\pi xy)$ konvergiert und

$$|\psi_\epsilon| \le \left(\sup_{\delta>0}\int_{\delta<|y|}\frac{\sin(t)}{t}\right)|\varphi|$$

beschränkt ist durch eine integrierbare Funktion. Folglich erhalten wir also mit dem Satz der dominierten Konvergenz und Tatsache, dass $\int_{\mathbb{R}} \frac{\sin(y)}{y} dy = \pi$ gilt:

$$\langle \mathcal{F}(h), \varphi \rangle = -\frac{i}{\pi} \left(\int_{\mathbb{R}} \varphi(x) \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{y} \sin(2\pi xy) \; dydx \right) = \left(\int_{\mathbb{R}} (-i \; \mathrm{sgn}(x)) \varphi(x) dx \right).$$

Wir haben damit gezeigt, dass $\mathcal{F}(h)$ mit $-i$ sgn $\in L^\infty$ identifiziert werden kann. Also lässt sich H auf L^2 stetig fortsetzen. Es gilt außerdem nicht nur $\|H\| = \|\mathcal{F}(h)\|_\infty = 1$, sondern auch für $\varphi, \psi \in \mathcal{S}$:

$$(H\varphi, H\psi)_{L^2} = (\mathcal{F}(H\varphi), \mathcal{F}(H\psi))_{L^2} = (-i \,\mathrm{sgn}\, F(\varphi), -i \,\mathrm{sgn}\, F(\psi))_{L^2} = (F(\varphi), F(\psi))_{L^2} = (\varphi, \psi)_{L^2}.$$

D.h. insbesondere ist H ein unitärer Operator auf L^2.

Bemerkung 8.

- Mit ein bisschen komplexer Analysis kann man zeigen, dass H sogar stetig auf L^p fortsetzbar ist für $1 < p < \infty$. Siehe z.B. Kapitel 7.2 von [1].
- Lineare, translationsinvariante Operatoren (nicht notwendigerweise beschränkt) und ihre Multiplikatoren sind vor allem interessant in der Theorie der Pseudodifferentialoperatoren. Für Interessierte wird auf Kapitel 6 in [2] verwiesen.

Literatur

[1] Demengel G. Demengel F. *Functional Spaces for the Theory of Elliptic Partial Differential Equations.* Springer, 2021.

[2] Stein E.M. *Harmonic Analysis: Real-Variable Methods, Orthogonality and Oscillatory Integrals.* Princeton University Press, 1993.

[3] Grafakos L. *Classical Fourier Analysis, Third Edition.* Springer Science+Business Media New York, 2010.

[4] Hörmander L. *The Analysis of Linear Partial Differential Operators I, Distribution Theory and Fourier Analysis.* Springer-Verlag New York, Inc., 1998.

[5] Stein E.M. Weiss G. *Introduction to Fourier Analysis on Euclidean Spaces.* Princeton University Press, 1971.