Seminararbeit aus Analysis

Nirgends differenzierbare Funktionen und der Satz von Kuratowski-Ulam

Anita Dolic

Betreuer
Ao.Univ.Prof. Dipl.-Ing. Dr.techn. Michael Kaltenbäck

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Stellt man sich eine auf dem Einheitsintervall stetige Funktion vor, so denkt man üblicherweise an eine an höchstens abzählbar vielen Stellen nicht differenzierbare Funktion. In dieser Seminararbeit werden wir jedoch beweisen, dass fast jede auf dem Einheitsintervall stetige Funktion nirgends differenzierbar ist.
Im darauffolgenden Kapitel wenden wir uns dem Satz von Kuratowski-Ulam zu, der ein topologisches Analogon zum Fubini-Theorem aus der Maßtheorie darstellt. Durch Einführung einer verallgemeinerten Art der Ableitung werden wir zudem zeigen, dass die Menge der stetigen Funktionen, die bezüglich der verallgemeinerten Ableitung fast nirgends auf $[0, 1]$ differenzierbar sind, in gewissem Sinne groß ist.
Im Wesentlichen bezieht sich diese Seminararbeit, wenn nicht anders angegeben, auf die Werke "Strange functions in real analysis" von Alexander Kharazishvili [1] und "A Course on Borel Sets" von Shashi Mohan Srivastava [4].

2 Grundlegende Definitionen und Sätze

Definition 2.1. Seien $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und M, U Teilmengen von X.

- M heißt *nirgends dicht*, wenn der Abschluss von M leeres Innere hat.
- M heißt *mager* oder von *erster Kategorie* in X, wenn sich M als abzählbare Vereinigung von nirgends dichten Mengen darstellen lässt.
- M heißt *mager in* U, wenn $M \cap U$ mager in U bezüglich der Spurtopologie $\mathcal{T}|_U$ ist.
- M heißt *comager* in X, wenn M das Komplement einer in X mageren Menge ist.
- M heißt *von zweiter Kategorie*, wenn M nicht mager ist.

Bemerkung 2.2. Teilmengen von nirgends dichten Mengen sind offenbar nirgends dicht, womit auch Teilmengen magerer Mengen wiede mager sind. Klarerweise ist die abzählbare Vereinigungen von mageren Mengen auch mager. Infolge sind Obermengen und abzählbare Durchschnitte von comageren Mengen comager.

Bemerkung 2.3. Ist $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum, in dem der Satz von Baire gilt, und M eine comagere Teilmenge von X, so lässt sich M^c als die abzählbare Vereinigung von nirgends dichten Mengen $A_n \subseteq X$ anschreiben, wobei natürlich $M^c \subseteq \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} \overline{A_n}$ und folglich

$M \supseteq \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} \overline{A_n}^{\mathrm{c}}$ gilt. Weil für alle $n \in \mathbb{N}$ das Innere von $\overline{A_n}$ leer ist, liegt $\overline{A_n}^{\mathrm{c}}$ dicht in X. Aus dem Satz von Baire schließen wir, dass M dicht ist.

Proposition 2.4. Für eine Teilmenge M eines topologischen Raumes $(X, \mathcal{T})$ sind die folgenden Aussagen äquivalent.

(i) M ist nirgends dicht.

(ii) Für alle $U \in \mathcal{T}\backslash\{\emptyset\}$ ist $M \cap U$ nicht dicht in $(U, \mathcal{T}|_U)$.

Beweis. Gelte (i), also $\overline{M}^\circ = \emptyset$ und sei U eine offene, nichtleere Teilmenge von X.
Weil das Innere von $\overline{M}$ leer ist, kann U nicht ganz in $\overline{M}$ enthalten sein. Somit gilt $U \cap (\overline{M}^{\mathrm{c}}) \neq \emptyset$, wobei $U \cap (\overline{M}^{\mathrm{c}}) \in \mathcal{T}|_U$. Da $M \cap U$ und $U \cap (\overline{M}^{\mathrm{c}})$ leeren Schnitt haben, ist $M \cap U$ nicht dicht in $(U, \mathcal{T}|_U)$.

Umgekehrt sei (ii) vorausgesetzt und U eine nichtleere, offene Teilmenge von X.
Weil $M \cap U$ nicht dicht in $(U, \mathcal{T}|_U)$ ist, finden wir eine Menge $V \in (\mathcal{T}|_U)\backslash\{\emptyset\}$, die leeren Schnitt mit M hat. Wegen $U \in \mathcal{T}$ gilt dabei $V \in \mathcal{T}$, weshalb sogar $\overline{M} \cap V = \emptyset$ folgt. Aufgrund von $V \subseteq U$ kann U nicht ganz in $\overline{M}$ liegen, womit $\overline{M}$ leeres Innere hat. $\square$

3 Der Raum $C[0, 1]$

Wir betrachten den Raum aller stetigen, reellwertigen Funktionen auf $[0, 1]$ versehen mit der Supremumsnorm $||.||_\infty$, also mit der Topologie der gleichmäßigen Konvergenz. Wir werden zeigen, dass die Menge aller nirgends differenzierbaren Funktionen comager in $C[0, 1]$ ist. Mit dem Satz von Baire können wir daraus folgern, dass diese Menge dicht in $C[0, 1]$ liegt; vergleiche Bemerkung 2.3.

Lemma 3.1. Seien $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum, $(Y, \mathcal{V})$ ein kompakter topologischer Raum und

$$\pi_1 : \begin{cases} X \times Y & \to X \\ (x, y) & \mapsto x \end{cases}$$

die Projektion von $X \times Y$ (versehen mit der Produkttopologie) nach X.
Dann ist π_1 eine abgeschlossene Abbildung ist, also ist $\pi_1(A)$ abgeschlossen, wenn A abgeschlossen ist.

Beweis. Sei $A \subseteq X \times Y$ abgeschlossen und $x \in \overline{\pi_1(A)}$. Wir wollen $x \in \pi_1(A)$ zeigen.
Das Gegenteil würde $(x, y) \notin A$ für alle $y \in Y$ bedeuten. Da A abgeschlossen ist, gibt es damit für alle $y \in Y$ eine offene Umgebung $W_{(x,y)}$ von (x, y) in $X \times Y$ mit $W_{(x,y)} \cap A = \emptyset$.

Wir können $W_{(x,y)}$ so wählen, dass $W_{(x,y)} = U_y(x) \times V(y)$, wobei $U_y(x)$ eine offene Umgebung von x und $V(y)$ eine offene Umgebung von y ist.
Weil Y kompakt ist, finden wir endlich viele $y_1, ..., y_n \in Y$ mit

$$Y = \bigcup_{i=1}^{n} V(y_i). \tag{3.1}$$

Die Menge $O(x) := \bigcap\limits_{i=1}^{n} U_{y_i}(x)$ ist dann eine offene Umgebung von x. Wegen $x \in \overline{\pi_1(A)}$ gilt $O(x) \cap \pi_1(A) \neq \emptyset$. Somit gibt es ein $(a_1, a_2) \in A$ mit $a_1 \in O(x)$.
Nach (3.1) existiert ein $j \in \{1, ..., n\}$ mit $a_2 \in V(y_j)$, woraus der Widerspruch $(a_1, a_2) \in U_{y_j}(x) \times V(y_j) = W_{(x,y_j)} \subseteq A^c$ folgt.

□

Satz 3.2. Die Menge aller auf $[0,1]$ stetigen, reellwertigen Funktionen, die nirgends differenzierbar sind, ist comager.

Beweis. Sei h eine rationale Zahl mit $0 < |h| < 1$ und n eine natürliche Zahl. Zudem betrachten wir $C[0,1]$ als Teilraum von $C[-1,2]$, indem wir jedes $f \in C[0,1]$ durch $f(t) = f(0)$ für $t \in [-1,0)$ und $f(t) = f(1)$ für $t \in (1,2]$ zu einer stetigen Funktion auf $[-1,2]$ fortsetzen. Diese Fortsetzungen sind bezüglich $||.||_\infty$ normtreu und gewährleisten, dass $f(x+\delta)$ für alle $x \in [0,1]$, $\delta \in [-1,+1]$ definiert ist.
Wir zeigen von der Menge

$$\Phi_{h,n} := \left\{ f \in C[0,1] \middle| \, \exists x \in [0,1] \; \forall \delta \colon (0 < |\delta| < |h| \Rightarrow \left| \frac{f(x+\delta) - f(x)}{\delta} \right| \leq n) \right\},$$

dass sie abgeschlossen ist und leeres Innere hat, womit sie auch nirgends dicht ist. Infolge ist $\bigcap\limits_{h \in \mathbb{Q}, n \in \mathbb{N}} \Phi_{h,n}^c$ und damit auch die Obermenge aller nirgends differenzierbaren Funktionen in $C[0,1]$ comager.
Für die Abgeschlossenheit von $\Phi_{h,n}$ definieren wir

$$Z_{h,n} := \left\{ (f,x) \in C[0,1] \times [0,1] \middle| \, \forall \delta \colon (0 < |\delta| < |h| \Rightarrow \left| \frac{f(x+\delta) - f(x)}{\delta} \right| \leq n) \right\}.$$

Sei $((f_k, x_k))_{k \in \mathrm{N}}$ eine Folge in $Z_{h,n}$, die gegen $(f,x) \in C[0,1] \times [0,1]$ bezüglich der Produkttopologie, die von der Summennorm induziert wird, konvergiert. Für δ mit $0 < |\delta| < |h|$ gilt

$$\begin{aligned} |f(x+\delta) - f_k(x_k+\delta)| &\leq |f(x+\delta) - f(x_k+\delta)| + |f(x_k+\delta) - f_k(x_k+\delta)| \leq \\ &\leq |f(x+\delta) - f(x_k+\delta)| + ||f - f_k||_\infty \end{aligned}$$

sowie

$$|f_k(x_k) - f(x)| \leq |f_k(x_k) - f(x_k)| + |f(x_k) - f(x)| \leq ||f_k - f||_\infty + |f(x_k) - f(x)|,$$

womit $f_k(x_k + \delta) \xrightarrow{k\to\infty} f(x+\delta)$ und $f_k(x_k) \xrightarrow{k\to\infty} f(x)$.
Daraus folgt

$$\begin{aligned}\Big|\frac{f(x+\delta)-f(x)}{\delta}\Big| &\leq \Big|\frac{f(x+\delta)-f_k(x_k+\delta)}{\delta}\Big| + \Big|\frac{f_k(x_k+\delta)-f_k(x_k)}{\delta}\Big| + \Big|\frac{f_k(x_k)-f(x)}{\delta}\Big| \leq \\ &\leq \underbrace{\Big|\frac{f(x+\delta)-f_k(x_k+\delta)}{\delta}\Big|}_{\xrightarrow{k\to\infty}0} + n + \underbrace{\Big|\frac{f_k(x_k)-f(x)}{\delta}\Big|}_{\xrightarrow{k\to\infty}0},\end{aligned}$$

also $(f,x) \in Z_{h,n}$, wodurch sich $Z_{h,n}$ als abgeschlossen erweist. Gemäß Lemma 3.1 ist $\pi_1(Z_{h,n}) = \Phi_{h,n}$ ebenfalls abgeschlossen.
Um zu zeigen, dass $\Phi_{h,n}$ leeres Inneres hat, sei $f \in C[0,1]$ und $\epsilon > 0$. Weil der Raum der Polynome $\mathcal{P}[0,1]$ nach Stone-Weierstrass dicht in $C[0,1]$ liegt, existiert ein $p \in \mathcal{P}[0,1]$ mit $||f-p||_\infty < \epsilon/3$.
Wir definieren eine stückweise lineare, nicht negative Funktion l auf $[0,1]$, sodass die Steigung in jedem linearen Teilstück betragsmäßig genau $||p'||_\infty + n + 1$ ist und $||l||_\infty \leq \epsilon/3$ gilt.
Dafür unterteilen wir die rechte Halbachse in Teilintervalle, wobei die Intervallränder gegeben sind durch $t_k := k \cdot \epsilon/3(||p'||_\infty + n + 1)$, $k \in \mathbb{N}_0$, und definieren für
$x \in \left[\frac{k\frac{\epsilon}{3}}{||p'||_\infty+n+1}, \frac{(k+1)\frac{\epsilon}{3}}{||p'||_\infty+n+1}\right) \cap [0,1]$

$$l(x) := \begin{cases} (||p'||_\infty + n + 1)x - k\frac{\epsilon}{3}, & k \text{ gerade,} \\ -(||p'||_\infty + n + 1)x + (k+1)\frac{\epsilon}{3}, & k \text{ ungerade.} \end{cases}$$

Die somit erhaltene Funktion l hat die oben genannten Eigenschaften.
Wir setzen $g(x) := l(x) + p(x)$ und erhalten für $x \in [0,1]$

$$|f(x) - g(x)| \leq |f(x) - p(x)| + |l(x)| \leq \frac{2\epsilon}{3},$$

womit $g \in \mathcal{U}_\epsilon^{||\cdot||_\infty}(f)$. Können wir $g \notin \Phi_{h,n}$ zeigen, so hat $\Phi_{h,n}$ leeres Inneres.
$g \in \Phi_{h,n}$ würde die Existenz eines $x \in [0,1]$ mit

$$\forall \delta\colon \Big(0 < |\delta| < |h| \Rightarrow \Big|\frac{g(x+\delta)-g(x)}{\delta}\Big| \leq n\Big)$$

bedeuten. Im Fall $x < 1$ wählen wir $\delta > 0$ so klein, dass $x, x+\delta \in [t_k, t_{k+1}] \cap [0,1]$ für ein gewisses $k \in \mathbb{N}_0$.
Mithilfe des Mittelwertsatzes finden wir ein $\zeta \in (x, x+\delta)$ derart, dass $p(x+\delta) - p(x) = p'(\zeta) \cdot \delta$. Wir erhalten den Widerspruch

$$\left|\frac{g(x+\delta)-g(x)}{\delta}\right| = \left|\frac{l(x+\delta)+p(x+\delta)-l(x)-p(x)}{\delta}\right| =$$
$$= \left|\frac{l(x+\delta)-l(x)}{\delta} + \frac{p(x+\delta)-p(x)}{\delta}\right| = |(||p'||_\infty + n + 1) + p'(\zeta)| \geq$$
$$\geq n+1.$$

Im Fall $x = 1$ wählen wir $\delta \in (-1, 0)$ und $k \in \mathbb{N}_0$ derart, dass $x + \delta, x \in [t_k, t_{k+1}]$, und erhalten genauso einen Widerspruch.

□

Bemerkung 3.3. Die Menge aller Funktionen, für die an jeder Stelle keine einseitige Ableitung als Element von $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ existiert, ist eine magere Menge; siehe [3]. Solche Funktionen werden auch *Besicovitch*-Funktionen genannt.

4 Der Satz von Kuratowski-Ulam

Der Satz von Kuratowski-Ulam stellt ein topologisches Analogon zum Fubini-Theorem dar.

Definition 4.1. Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und $A \subseteq X$. Man sagt, A besitzt die *Baire-Eigenschaft*, wenn es eine offene Menge $O \subseteq X$ derart gibt, dass $A \triangle O := (A \backslash O) \cup (O \backslash A)$ mager ist. Das heißt, A unterscheidet sich nur um eine magere Menge von einer offenen Menge.

Proposition 4.2. Für einen topologischen Raum $(X, \mathcal{T})$ bildet

$$\mathcal{D} := \{A \subseteq X |\ A \text{ besitzt Baire-Eigenschaft}\}$$

eine σ-Algebra.

Beweis. $\mathcal{D}$ ist unter abzählbarer Vereinigung abgeschlossen, denn zu $A_1, A_2, ... \in \mathcal{D}$ gibt es offene $O_1, O_2, ...$ derart, dass alle $A_n \triangle O_n$ mager sind. Mit der rechten Seite von

$$\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big) \triangle \Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} O_n\Big) \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (A_n \triangle O_n)$$

ist auch die linke eine magere Menge, also $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{D}$.

$\mathcal{D}$ ist unter Komplementenbildung abgeschlossen, da für $A \in \mathcal{D}$ und offenem O derart, dass $A \triangle O$ mager ist,

$$(X\backslash A)\triangle(X\backslash O)^\circ \subseteq \Big((X\backslash A)\triangle(X\backslash O)\Big)\bigcup\Big((X\backslash O)\backslash(X\backslash O)^\circ\Big) =$$
$$= (A\triangle O)\bigcup\Big((X\backslash O)\backslash(X\backslash O)^\circ\Big)$$

gilt. Für abgeschlossene Mengen ist der Rand eine nirgends dichte Menge. Also ist $(X\backslash O)\backslash(X\backslash O)^\circ$ nirgends dicht und folglich mager, womit $X\backslash A \in \mathcal{D}$. □

Bemerkung 4.3. Falls $A \subseteq X$ eine nicht magere Menge mit der Baire-Eigenschaft ist, dann gibt es eine offene Menge O, sodass $A\triangle O$ mager und zusätzlich $O \neq \emptyset$ nicht mager ist. In der Tat wäre mit O auch $(A\triangle O) \cup O$ und infolge auch $A \subseteq (A\triangle O) \cup O$ mager.

Proposition 4.4. Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und $U \in \mathcal{T}$. Ist $A \subseteq X$ mager in X, dann ist A mager in U. Im Fall $A \subseteq U$ gilt auch die Umkehrung.

Beweis. Zuerst sei vorausgesetzt, dass $A \subseteq X$ nirgends dicht in X ist.
Angenommen, A ist nicht nirgends dicht in U, also $(\overline{A \cap U}^U)^{\circ U} \neq \emptyset$. Wegen $U \in \mathcal{T}$ ist $(\overline{A \cap U}^U)^{\circ U}$ auch offen in X. Wegen $(\overline{A \cap U}^U)^{\circ U} \subseteq \overline{A \cap U}^U = \overline{A \cap U} \cap U \subseteq \overline{A}$ hat somit $\overline{A}$ nicht leeres Innere in X, was einen Widerspruch bedeutet.

Ist $A \subseteq X$ mager in X, so lässt sich A als abzählbare Vereinigung von in X nirgends dichten Mengen $A_n, n \in \mathbb{N}$, schreiben. Nach dem oben gezeigten sind die $A_n \cap U$ nirgends dicht in U, womit A mager in U ist.

Sei $A \subseteq U$ nirgends dicht in U. Für $\emptyset \neq O \in \mathcal{T}$ gilt im Fall $O \cap U = \emptyset$ auch $O \cap A = \emptyset$. Im Fall $O \cap U \neq \emptyset$ finden wir aufgrund der Voraussetzung und mithilfe von Proposition 2.4 ein $V \in \mathcal{T}|_{O\cap U}\backslash\{\emptyset\}$ mit $V \cap (A \cap U \cap O) = \emptyset$. Hier gilt $V \cap O \cap U \in \mathcal{T}|_O\backslash\{\emptyset\}$ wegen $U, O \in \mathcal{T}$. In jedem Fall ist $A \cap O$ nicht dicht in $(O, \mathcal{T}|_O)$, weshalb nach Proposition 2.4 A nirgends dicht in X ist.

Ist $A \subseteq U$ mager in U, so lässt sich A als die abzählbare Vereinigung von nirgends dichten Mengen in U und nach dem gezeigten auch in X anschreiben, womit A mager in X ist. □

Proposition 4.5. Seien $(X, \mathcal{T})$ und $(Y, \mathcal{V})$ topologische Räume und $A \subseteq X$, $B \subseteq Y$. Ist A mager in X oder B mager in Y, so ist $A \times B$ mager in $X \times Y$.

Beweis. Sei $G \in (\mathcal{T} \times \mathcal{V})\backslash\{\emptyset\}$. Für gewisse nichtleere $O_i \in \mathcal{T}$, $V_i \in \mathcal{V}$, $i \in I$, gilt $G = \bigcup\limits_{i\in I} O_i \times V_i$. Ist A nirgends dicht in X, so gilt gemäß Proposition 2.4

$$\forall i \in I\ \exists U_i \in \mathcal{T}|_{O_i}\backslash\{\emptyset\}\colon (A \cap O_i) \cap U_i = \emptyset$$

und folglich für jedes $i \in I$

$$U_i \times V_i \in (\mathcal{T} \times \mathcal{V})|_{O_i \times V_i}\backslash\{\emptyset\} \text{ sowie } (A \times B) \cap (U_i \times V_i) = \emptyset.$$

Wegen $U_i \times V_i = G \cap (U_i \times V_i)$ gilt $\bigcup\limits_{i\in I} U_i \times V_i \in (\mathcal{T} \times \mathcal{V})|_G\backslash\{\emptyset\}$, wobei $(A \times B) \cap (\bigcup\limits_{i\in I} U_i \times V_i) = \emptyset$. Nach Proposition 2.4 ist $A \times B$ nirgends dicht in $X \times Y$.

Ist A mager in X, so lässt sie sich als abzählbare Vereinigung von nirgends dichten Mengen A_n in X schreiben. Nach dem oben gezeigten sind alle $A_n \times B$ nirgends dicht in $X \times Y$. Wegen $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \times B = A \times B$ stellt sich $A \times B$ als mager in $X \times Y$ heraus. Entsprechend argumentiert man für mageres B. □

Satz 4.6 (Banach-Kategorien Satz)**.** Die Vereinigung von beliebig vielen offenen, mageren Mengen ist wieder mager.

Beweis. Sei $(G_i)_{i\in I}$ eine Familie von nichtleeren, offenen, mageren Mengen in einem topologischen Raum $(X, \mathcal{T})$ und $G := \bigcup_{i\in I} G_i$. Wir betrachten die Menge

$$\mathcal{Z} := \{\mathcal{R} \subseteq \mathcal{P}(X) |\ \mathcal{R} \text{ Menge von nichtleeren, offenen, paarweise disjunkten Mengen,} \\ \forall R \in \mathcal{R} \exists i \in I : R \subseteq G_i\}.$$

Nach dem Lemma von Zorn existiert ein maximales Element $\mathcal{R}$ in $\mathcal{Z}$.
Wäre die abgeschlossene Menge $\overline{G} \backslash \bigcup_{R\in\mathcal{R}} R$ nicht nirgends dicht, so gibt es eine offene, nichtleere Menge O, die ganz in $\overline{G} \backslash \bigcup_{R\in\mathcal{R}} R$ liegt. Somit existiert ein $j \in I$ mit $\emptyset \neq O \cap G_j \subseteq G_j$ und $O \cap G_j$ ist disjunkt zu allen $R \in \mathcal{R}$. Das ist ein Widerspruch zur Maximalität von $\mathcal{R}$ in $\mathcal{Z}$.

Weil jedes $R \in \mathcal{R}$ in einem G_i enthalten ist, ist es mager. Also existieren nirgends dichte Mengen N_R^n, $n \in \mathbb{N}$, mit $R = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} N_R^n$. Wir definieren für $n \in \mathbb{N}$ die Menge $N_n := \bigcup_{R\in\mathcal{R}} N_R^n$ und wollen mithilfe von Proposition 2.4 zeigen, dass sie nirgends dicht ist.
Sei $k \in \mathbb{N}$ und O eine offene, nichtleere Menge, die nichtleeren Schnitt mit N_k hat. Somit existiert ein $B \in \mathcal{R}$, sodass O mit N_B^k und folglich mit B nichtleeren Schnitt hat. Weil N_B^k nirgends dicht und $O \cap B$ offen ist, ist die Menge $V := (O \cap B) \backslash \overline{N_B^k}$ nichtleer, wobei $V \subseteq (O \cap B) \backslash N_B^k$. Gäbe es ein $C \in \mathcal{R} \backslash \{B\}$ mit $V \cap N_C^k \neq \emptyset$, so hätten B und C nichtleeren Schnitt, was ein Widerspruch zur Eigenschaft von $\mathcal{R}$ ist. Somit gilt $V \subseteq O \backslash N_k$ und folglich ist N_k nirgends dicht. Schließlich ist G mager, denn

$$G \subseteq \Big(\overline{G} \backslash \bigcup_{R\in\mathcal{R}} R\Big) \cup \bigcup_{R\in\mathcal{R}} R = \Big(\overline{G} \backslash \bigcup_{R\in\mathcal{R}} R\Big) \cup \bigcup_{n\in\mathbb{N}} N_n.$$

□

Für $E \subseteq X \times Y$ definieren wir die Mengen

$$E_x := \{y \in Y |\ (x, y) \in E\} \quad \text{und} \quad E^y := \{x \in X |\ (x, y) \in E\}$$

Lemma 4.7. Seien $(X, \mathcal{T})$ und $(Y, \mathcal{V})$ topologische Räume, wobei Y das zweite Abzählbarkeitsaxiom erfüllt; also besitzt $(Y, \mathcal{V})$ eine abzählbare Basis. Ist $A \subseteq X \times Y$ abgeschlossen und nirgends dicht, so ist

$$\{x \in X |\ A_x \text{ ist nirgends dicht}\}$$

comager.

Beweis. Sei $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine abzählbare Basis von $(Y,\mathcal{V})$ bestehend aus nichtleeren Mengen. Da A abgeschlossen und nirgends dicht ist, ist $U := A^{\mathrm{c}} \in \mathcal{T}\times\mathcal{V}$ wegen $\overline{U} = \overline{(X\times Y)\backslash A} = (X\times Y)\backslash A^{\circ} = X\times Y$ dicht.
Weil die Projektion $\pi_1\colon X\times Y \to X$ eine offene Abbildung ist, sind die Mengen $W_n := \{x\in X|\ U_x\cap V_n \neq \emptyset\} = \pi_x(U\cap(X\times V_n)), n\in\mathbb{N}$, offen. Wir wollen zeigen, dass alle W_n dicht in X liegen.
Wäre W_n für mindestens ein $n\in\mathbb{N}$ nicht dicht, so wäre $(X\backslash\overline{W_n})\times V_n$ nichtleer und offen. Weil U dicht ist, gilt $((X\backslash\overline{W_n})\times V_n)\cap U \neq \emptyset$. (x,y) aus diesem Schnitt erfüllt $x\in X\backslash\overline{W_n} \subseteq X\backslash W_n$, wodurch $U_x\cap V_n = \emptyset$, also $z\notin V_n$ für jedes $z\in Y$ mit $(x,z)\in U$. Das widerspricht jedoch $y\in V_n$ und $(x,y)\in U$.

Wegen $(\overline{W_n^{\mathrm{c}}})^{\circ} = X\backslash\overline{W_n} = \emptyset$ ist $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} W_n^{\mathrm{c}}$ mager, also $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} W_n$ comager.

Für $x\in X$ ist mit A auch A_x abgeschlossen. Wegen $U_x = (A^{\mathrm{c}})_x = A_x^{\mathrm{c}}$ und $\overline{U_x} = \overline{A_x^{\mathrm{c}}} = Y\backslash({A_x}^{\circ})$ ist A_x genau dann nirgends dicht, wenn U_x dicht in Y liegt, was wegen der Basiseigenschaft von $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ genau $V_n\cap U_x\neq\emptyset$ für alle $n\in\mathbb{N}$ und daher $x\in\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} W_n$ bedeutet. Also gilt $\{x\in X|\ A_x \text{ nirgends dicht}\} = \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} W_n$.

□

Lemma 4.8. Seien $(X,\mathcal{T})$ und $(Y,\mathcal{V})$ topologische Räume, wobei Y das zweite Abzählbarkeitsaxiom erfüllt. Hat $A\subseteq X\times Y$ die Baire-Eigenschaft, so sind die folgenden Aussagen äquivalent.

(*i*) A ist mager.

(*ii*) $\{x\in X|\ A_x \text{ ist mager }\}$ ist comager.

Beweis. Für nirgends dichtes $E\subseteq X\times Y$ ist $\overline{E}$ nirgends dicht und abgeschlossen. Aus $\overline{E_x}^{\circ} \subseteq \overline{(\overline{E})_x}^{\circ} = (\overline{E})_x{}^{\circ}$ folgt

$$\{x\in X|\ (\overline{E})_x \text{ nirgends dicht}\} \subseteq \{x\in X|\ E_x \text{ nirgends dicht}\}.$$

Nach Lemma 4.7 ist die Menge links und folglich auch die Menge rechts comager.

Gilt (*i*), so schreiben wir A als Vereinigung $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} E_n$ von nirgends dichten Mengen E_n in $X\times Y$ an, womit $A_x = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}}(E_n)_x$. Nach dem eingangs Gezeigten ist die Menge $\{x\in X|\ (E_n)_x \text{ nirgends dicht}\}$ comager. Aus

$$\{x\in X|\ A_x \text{ ist mager}\} \supseteq \bigcap_{n\in\mathbb{N}}\{x\in X|\ (E_n)_x \text{ nirgends dicht}\}$$

folgt, dass $\{x\in X|\ A_x \text{ ist mager}\}$ comager ist.

Sei nun (ii) vorausgesetzt und angenommen, dass A nicht mager ist. Weil A die Baire-Eigenschaft besitzt, existiert nach Bemerkung 4.3 eine nichtleere, offene, nicht magere Menge $G \subseteq X \times Y$ mit magerem $A \triangle G$. Nach Satz 4.6 existieren offene und nichtleere $O \subseteq X$ und $V \subseteq Y$ derart, dass $O \times V \subseteq G$ gilt und $O \times V$ nicht mager in $X \times Y$ ist. Nach Proposition 4.5 ist weder O mager in X noch V mager in Y.

Weil $A \triangle G$ mager in $X \times Y$ ist, folgt aus Proposition 4.4, dass die Menge

$$(A \triangle G) \cap (O \times V) = ((A \backslash G) \cup (G \backslash A)) \cap (O \times V) = (G \backslash A) \cap (O \times V) = (O \times V) \backslash A$$

mager in $O \times V$ und folglich $(O \times V) \cap A$ comager in $O \times V$ ist.

Als nächstes wollen wir zeigen, dass $A^{\triangle V} := \{x \in X | \ A_x \text{ nicht mager in } V\}$ comager in O ist. Da $(O \times V) \backslash A$ mager in $O \times V$ ist, folgt aus dem schon gezeigten Beweisschritt $(i) \Rightarrow (ii)$, dass $\{x \in O | \ ((O \times V) \backslash A)_x \text{ ist mager in } V\} = \{x \in O | \ ((O \times V) \cap A)_x \text{ ist comager in } V\}$ comager in O ist. Ist $((O \times V) \cap A)_x$ comager in V, dann ist die Menge nicht mager in V, denn wäre $((O \times V) \cap A)_x$ ebenfalls mager in V, so wäre V als Vereinigung von zwei mageren Mengen in V selbst mager in V und somit auch in X, was wir oben ausgeschlossen haben. Deshalb gilt

$$\begin{aligned}
&\{x \in O | \ ((O \times V) \cap A)_x \text{ ist comager in } V\} \\
&\qquad \subseteq \{x \in O | \ ((O \times V) \cap A)_x \text{ ist nicht mager in } V\} \\
&\qquad = \{x \in O | \ A_x \text{ ist nicht mager in } V\} = A^{\triangle V} \cap O.
\end{aligned}$$

Somit ist $A^{\triangle V}$ comager in O.

$A^{\triangle V}$ ist nicht mager in X ist, denn wäre die Menge mager in X so wäre sie auch mager in O. Somit könnte man O als Vereinigung von zwei mageren Mengen in O schreiben, womit O mager in O und folglich auch in X wäre, was einen Widerspruch bedeutet. Nach Proposition 4.4 gilt

$$A^{\triangle Y} = \{x \in X | \ A_x \text{ ist nicht mager in } Y\} \supseteq \{x \in X | \ A_x \text{ ist nicht mager in } V\} = A^{\triangle V}.$$

$A^{\triangle Y}$ ist als Obermenge einer nicht mageren Menge in X wiederum nicht mager in X, weshalb $(A^{\triangle Y})^{\mathrm{c}} = \{x \in X | \ A_x \text{ ist mager in } Y\}$ im Widerspruch zur Voraussetzung nicht comager in X ist. $\square$

Lemma 4.8 impliziert den folgenden

Satz 4.9 (Der Satz von Kuratowski-Ulam)**.** Seien $(X, \mathcal{T})$ und $(Y, \mathcal{V})$ topologische Räume, die das zweite Abzählbarkeitsaxiom erfüllen. Hat $A \subseteq X \times Y$ die Baire-Eigenschaft, so sind folgende Aussagen äquivalent.

(*i*) A ist mager (comager).

(*ii*) $\{x \in X |\ A_x$ ist mager (comager)$\}$ ist comager.

(iii) $\{y \in Y |\ A^y$ ist mager (comager)$\}$ ist comager.

Bemerkung 4.10. Setzt man im Satz von Kuratowski-Ulam für die Menge $A \subseteq X \times Y$ statt der Eigenschaft Baire zu sein, die Messbarkeit ein, und bedenkt die Analogie einer mageren Menge zu einer Nullmenge, sowie einer comagere Menge zu einer Menge mit vollem Maß, so erkennt man die eingangs erwähnte Analogie zum Fubini-Theorem angewendet auf die charakteristische Funktion zu A.

Wir kommen zu einer Anwendung des Satzes von Kuratowski-Ulam.

Satz 4.11. Seien E_1, E_2, E_3 topologische Räume, wobei E_1 und E_2 das zweite Abzählbarkeitsaxiom erfüllen. Weiters sei $Z \subseteq E_1 \times E_2$ und eine Abbildung

$$\Phi \colon Z \to E_3$$

mit folgenden Eigenschaften.

1) Φ erfüllt die Baire-Eigenschaft; das heißt, für jede offene Menge V von E_3 besitzt $\Phi^{-1}(V)$ die Baire-Eigenschaft in $E_1 \times E_2$.

2) Für alle $x \in E_1$ bis auf eine magere Menge ist der Definitionsbereich Z_x von $\Phi(x, .)$, gegeben durch

$$\Phi(x, .)(y) = \Phi(x, y),$$

mager in E_2.

Dann ist Z mager und $\{y \in E_2 |\ Z^y$ ist mager$\}$ ist comager.

Beweis. Wegen 1) hat $Z = \Phi^{-1}(E_3)$ die Baire-Eigenschaft. Wegen 2) ist die Menge $\{x \in E_1 |\ Z_x$ ist mager$\}$ comager. Nach dem Satz von Kuratowski-Ulam ist Z mager und $\{y \in E_2 |\ Z^y$ ist mager$\}$ comager. $\square$

Literaturverzeichnis

[1] A.B. Kharazishvili. *Strange functions in real analysis*, Marcel Dekker, New-York u.a 2000.

[2] J.C. Oxtoby. The Banach Category Theorem. In: *Measure and Category. Graduate Texts in Mathematics*, pp.62-63. Springer-Verlag, New-York 1971. URL: https://doi.org/10.1007/978-1-4615-9964-7_16

[3] S. Saks. On the functions of Besicovitch in the space of continuous functions. In: *Fundamenta Mathematicae* 19.1 (1932), pp.211-219. ISSN: 0016-2736 URL: http://matwbn.icm.edu.pl/ksiazki/fm/fm19/fm19118.pdf

[4] S.M. Srivastava. *A Course on Borel Sets*, Springer-Verlag, New-York u.a. 1998.