SEMINARARBEIT

Satz von Orlicz-Pettis

ausgeführt am

Institut für
Analysis und Scientific Computing
TU Wien

unter der Anleitung von

Ao.Univ.Prof. Dipl.-Ing. Dr.techn. Kaltenbäck Michael

durch

Benedikt Fegerl
Matrikelnummer: 12102606
Kurzbauergasse 4
1020 Wien

Wien, am 19. Februar 2024

Inhaltsverzeichnis

1 Vorwort

In dieser Arbeit werden der Satz von Orlicz-Pettis und viele der zugrundeliegenden Resultate aus der Funktionalanalysis hergeleitet.
Zunächst werden unbedingte Konvergenz und Teilreihenkonvergenz eingeführt, um den Satz von Orlicz-Pettis formulieren zu können. Dabei werden wir unter anderem die Äquivalenz von unbedingter und absoluter Konvergenz in $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ sowie die Äquivalenz von Teilreihenkonvergenz und unbedingter Konvergenz in Banachräumen zeigen.
Im Kapitel 2 beweisen wir, dass schwach kompakte Teilmengen eines normierten Raumes auch schwach folgenkompakt sind. Zusammen mit dem Satz von Schur den wir direkt im Anschluss herleiten, erhalten wir die Äquivalenz zwischen schwacher Kompaktheit und Normkompaktheit in ℓ^1. Dies ist ein zentrales Resultat für den Beweis von Orlicz-Pettis.
Anschließend werden schwache Kompaktheit und Normkompaktheit von Operatoren behandelt. Als Vorarbeit beweisen wir den Satz von Arzelà-Ascoli, über den wir den Satz von Schauder herleiten. Dieser beschreibt die Äquivalenz zwischen Normkompaktheit eines Operators und der Normkompaktheit seines dualen Operators. Im Anschluss wird der Satz von Gantmacher bewiesen, der das Analogon für schwache Kompaktheit von Operatoren darstellt. Diese beiden Sätze liefern in Kombination mit dem Satz von Schur die Äquivalenz zwischen Normkompaktheit und schwacher Kompaktheit für Operatoren auf c_0.
Danach führen wir WUC-Reihen ein, die in engem Zusammenhang mit der Beschränktheit von Operatoren auf c_0 stehen und kommen anschließend zum eigentlichen Beweis von Orlicz-Pettis. Zum Schluss werden noch schwach vollständige Banachräume behandelt und der Satz von Orlicz-Pettis auf diesen verschärft.
In dieser Arbeit betrachten wir nur Vektorräume über $\mathbb{C}$, wenngleich alle Ergebnisse analog für Vektorräume über $\mathbb{R}$ gelten.

2 Reihenkonvergenz

Die unbedingte Reihenkonvergenz, die im Folgenden definiert wird, unterscheidet sich grundlegend von der herkömmlichen Konvergenz einer Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$, welche die Konvergenz der Partialsummen $\left(\sum_{n=1}^{N} x_n\right)_{N\in\mathbb{N}}$ bedeutet. Unbedingte Konvergenz geht im Gegensatz dazu nicht von einer Ordnung der Indexmenge aus und basiert stattdessen auf Netze, die in [Kal14, Kapitel 5.3] behandelt werden.

Definition 2.1. *Für einen topologischen Vektorraum $(X, \mathcal{T})$ und $(x_i)_{i\in I} \in X^I$ notieren wir mit $\sum_{i\in I} x_i$ einerseits das Netz $(\sum_{i\in A} x_i)_{A\in\mathcal{E}(I)}$, wobei $\mathcal{E}(I) := \{A \subseteq I : |A| < \infty\}$ durch Mengeninklusion geordnet ist. Andererseits auch dessen Grenzwert, sofern das Netz konvergiert, in welchem Fall man $\sum_{i\in I} x_i$ als (unbedingt) konvergent bezeichnet. Wir nennen $\sum_{i\in I} x_i$ zudem (unbedingt) absolut konvergent wenn $\sum_{i\in I} \|x_i\|$ konvergiert.*

Aus der unbedingten Konvergenz von $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$ folgt unmittelbar für beliebige Permutationen σ auf $\mathbb{N}$ die Konvergenz der Teilfolge $(\sum_{n\in\sigma(\{1,\ldots,N\})} x_n)_{N\in\mathbb{N}}$, also von $\sum_{n=1}^{\infty} x_{\sigma(n)}$.
Als monoton wachsendes Netz ist $\sum_{n\in\mathbb{N}} \|x_n\|$ hingegen genau dann unbedingt konvergent, wenn $\sup_{A\in\mathcal{E}(\mathbb{N})} \sum_{n\in A} \|x_n\| < +\infty$. Analog ist $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ absolut konvergent genau dann wenn $\sup_{N\in\mathbb{N}} \sum_{n=1}^{N} \|x_n\| < +\infty$. Wegen $\sup_{A\in\mathcal{E}(\mathbb{N})} \sum_{n\in A} \|x_n\| = \sup_{N\in\mathbb{N}} \sum_{n=1}^{N} \|x_n\|$, sind absolute Konvergenz von $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$ und $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ äquivalent.
Für einen metrischen Raum (Y, d) und eine gerichtete Menge $(J, \preceq)$ nennt man $(y_j)_{j\in J} \in Y^J$ ein Cauchynetz, wenn

$$\forall\varepsilon > 0 \exists j_0 \in J \forall j_1, j_2 \succeq j_0 : d(y_{j_2}, y_{j_1}) \leq \varepsilon.$$

Daraus folgt unmittelbar

$$\forall\varepsilon > 0 \exists j_0 \in J \forall j \succeq j_0 : d(y_j, y_{j_0}) \leq \varepsilon.$$

Aus dieser Bedingung lässt sich wiederum für beliebiges $\varepsilon > 0$ ein $j_0 \in J$ wählen mit $d(y_j, y_{j_0}) \leq \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $j \succeq j_0$, wodurch $d(y_{j_2}, y_{j_1}) \leq d(y_{j_2}, y_{j_0}) + d(y_{j_1}, y_{j_0}) \leq \varepsilon$ für alle $j_2, j_1 \succeq j_0$ gilt. Beide Bedingungen sind also äquivalent, insbesondere erfüllt $(\sum_{i\in A} x_i)_{A\in\mathcal{E}(I)}$ genau dann die Cauchybedingung, wenn

$$\forall\varepsilon > 0 \exists A_0 \in \mathcal{E}(I) \forall A \in \mathcal{E}(I) : A \supseteq A_0 \Rightarrow \|\sum_{i\in A} x_i - \sum_{i\in A_0} x_i\| = \|\sum_{i\in A\setminus A_0} x_n\| \leq \varepsilon$$

beziehungsweise

$$\forall\varepsilon > 0 \exists A_0 \in \mathcal{E}(I) \forall A \in \mathcal{E}(I) : A \cap A_0 = \emptyset \Rightarrow \|\sum_{i\in A} x_i\| \leq \varepsilon$$

Analog zu Folgen erfüllen konvergente Netze stets die Cauchybedingung und Cauchynetze in vollständigen metrischen Räumen sind auch immer konvergent. Für Beweise sei wieder auf [Kal14, Lemma 5.3.11] verwiesen.
Folgendes Ergebnis dürfte für herkömmliche Reihen bekannt sein.

Proposition 2.2. *In einem Banachraum $(X, \|\cdot\|)$ ist jede absolut konvergente Reihe $\sum_{i\in I} x_i$ auch unbedingt konvergent.*

Beweis. Für absolut konvergentes $\sum_{i\in I} x_i$ erfüllt $\sum_{i\in I} \|x_i\|$ die Cauchybedingung. Für beliebiges $\varepsilon > 0$ lässt sich also $A_0 \in \mathcal{E}(I)$ mit $\|\sum_{i\in A} x_i\| \leq \sum_{i\in A} \|x_i\| \leq \varepsilon$ für alle $A \in \mathcal{E}(I), A \cap A_0 = \emptyset$, wählen. Somit ist $\sum_{i\in I} x_i$ ein Cauchynetz in einem vollständigen metrischen Raum und infolge unbedingt konvergent. □

Proposition 2.3. *Für Banachräume $(X, \|\cdot\|)$ und $(x_i)_{i\in I} \in X^I$, folgt aus der Konvergenz von $\sum_{i\in I} x_i$ die Konvergenz von $\sum_{i\in J} x_i$ für alle $J \subseteq I$.*

Beweis. Ist $\sum_{i\in I} x_i$ konvergent, so erfüllt sie die Cauchybedingung. Für beliebiges $\varepsilon > 0$ existiert also ein $A_0 \in \mathcal{E}(I)$ derart, dass $\|\sum_{i\in A} x_i\| \leq \varepsilon$ für $A \in \mathcal{E}(I)$ mit $A \cap A_0 = \emptyset$ und daher für $A \in \mathcal{E}(J)$ mit $A \cap (A_0 \cap J) = \emptyset$. Folglich ist $\sum_{i\in J} x_i$ ein Cauchynetz und in weiterer Folge unbedingt konvergent. □

Satz 2.4. *Für $(x_i)_{i\in I} \in (\mathbb{C}^N)^I$ sind unbedingte Konvergenz und absolute Konvergenz von $\sum_{i\in I} x_i$ äquivalent.*

Beweis. Dass absolute Konvergenz die unbedingte impliziert, wissen wir bereits aus Proposition 2.2.
Für die andere Richtung beobachten wir einerseits, dass Projektion auf eine Komponente sowie Im und Re stetige lineare Abbildungen sind, wodurch die unbedingte Konvergenz von $\sum_{i\in I} x_i$ ebendiese für $\sum_{i\in I} \operatorname{Re} x_{i,n}$ und $\sum_{i\in I} \operatorname{Im} x_{i,n}$ für alle $n \leq N$ impliziert. Andererseits ist es wegen $\sum_{i\in I} \|x_i\| \leq \sum_{n=1}^{N} \sum_{i\in I} |\operatorname{Re} x_{i,n}| + |\operatorname{Im} x_{i,n}|$ hinreichend, die absolute Konvergenz von $\sum_{i\in I} \operatorname{Re} x_{i,n}$ und $\sum_{i\in I} \operatorname{Im} x_{i,n}$ für alle $n \leq N$ zu zeigen. Also reicht, es die Implikation für reellwertige Reihen zu zeigen.
Für $(a_i)_{i\in I} \in \mathbb{R}^I$ derart, dass $\sum_{i\in I} a_i$ unbedingt konvergiert, definieren wir die beiden Mengen $I^\pm = \{i \in I : a_i \gtrless 0\}$, sowie $a_i^+ = \max\{0, a_i\}$ und $a_i^- = \min\{0, a_i\}$. Nach Proposition 2.3 sind $\sum_{i\in I^\pm} a_i$ unbedingt konvergent. Infolge konvergieren deren Teilnetze

$$\sum_{i\in I} a_i^\pm = \Big(\sum_{i\in A} a_i^\pm\Big)_{A\in\mathcal{E}(I)} = \Big(\sum_{i\in A\cap I^\pm} a_i\Big)_{A\in\mathcal{E}(I)}$$

und in weiterer Folge auch $\sum_{i\in I} |a_i| = \sum_{i\in I} (a_i^+ - a_i^-)$. □

Satz 2.4 gilt auch allgemeiner für endlichdimensionale normierte Räume $(X, \|\cdot\|)$, da diese topologisch und algebraisch isomorph zu $\mathbb{C}^{\dim X}$ sind, siehe [WKB17, Satz 2.2.1]. An dieser Stelle sei aber betont, dass diese Äquivalenz keinesfalls für alle Banachräume zutrifft.
Wir werden im Weiteren nur Reihen über $\mathbb{N}$ betrachten. Es sei angemerkt, dass dies keine wirkliche Einschränkung für die Analyse unbedingter Konvergenz ist, da unbedingt konvergente Reihen $\sum_{i\in I} x_i$ insbesondere Cauchynetze sind, wodurch für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein $E_n \in \mathcal{E}(I)$ existiert mit $\|x_j\| = \|\sum_{i\in E_n\cup\{j\}} x_i - \sum_{i\in E_n} x_i\| < \frac{1}{n}$ für alle $j \in I \setminus E_n$ Für jedes $j \in I, x_j \neq 0$ existiert nun $n \in \mathbb{N}$ mit $\|x_j\| \geq \frac{1}{n}$, also $x_j \in E_n$. Der Träger $\{i \in I : x_i \neq 0\}$ ist also Teilmenge von $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$ und folglich abzählbar, lässt sich also mit $\mathbb{N}$ identifizieren.

Definition 2.5. *Ist $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Vektorraum und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X^{\mathbb{N}}$, so nennen wir $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ teilreihenkonvergent, wenn für alle Teilfolgen $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ die dazugehörige Teilreihe $\sum_{k=1}^{\infty} x_{n_k}$ konvergiert.*

Proposition 2.6. *Für Banachräume $(X, \|\cdot\|)$ und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X^{\mathbb{N}}$ ist Teilreihenkonvergenz von $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ äquivalent zur unbedingten Konvergenz von $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$.*

Beweis. Aus der unbedingten Konvergenz von $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$ folgt gemäß Proposition 2.3 für jede Teilfolge $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ die Konvergenz von $\sum_{n\in\{n_k:k\in\mathbb{N}\}} x_n$ und in weiterer Folge die Konvergenz dessen Teilfolge $\sum_{k=1}^{\infty} x_{n_k}$.
Wir zeigen die Rückrichtung durch Kontraposition. Dazu sei $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$ nicht konvergent, weshalb die Cauchybedingung nicht erfüllt ist. Also existiert ein $\varepsilon > 0$ mit

$$\forall A_0 \in \mathcal{E}(\mathbb{N}) \exists A \in \mathcal{E}(\mathbb{N}) : A \cap A_0 = \emptyset \wedge \| \sum_{n\in A} x_n \| \geq \varepsilon.$$

Wir definieren $B_0 = \emptyset$ und wählen rekursiv B_{N+1} mit $B_{N+1} \cap \{1, ..., \max B_n\} = \emptyset$, also $B_{N+1} > \max B_N$, und $\| \sum_{n\in B_{N+1}} x_n \| \geq \varepsilon$. Setzt man $M_N := \bigcup_{n=1}^{N} B_n, N \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, und bezeichnet $(n_k)_{n\in\mathbb{N}}$ die streng monoton wachsende Abzählung von M_∞, so gilt

$$\| \sum_{k=1}^{|M_{N+1}|} x_{n_k} - \sum_{k=1}^{|M_N|} x_{n_k} \| = \| \sum_{n\in B_{N+1}} x_n \| \geq \varepsilon,$$

weshalb $\sum_{k=1}^{\infty} x_{n_k}$ nicht konvergieren kann. □

Nach Satz 2.4 und Proposition 2.6 sind Teilreihenkonvergenz und absolute Konvergenz äquivalent in $\mathbb{C}^N$.

Definition 2.7 (ℓ^p, c_0 & c_{00})**.** *Wir definieren*

$$\begin{aligned}
\ell^p &:= \{(a_n)_{n=1}^{\infty} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} : \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^p < +\infty\}, \ p \in [1;\infty), \qquad && \|a\|_p := \Big(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^p\Big)^{\frac{1}{p}}, \ a \in \ell^p, \\
\ell^\infty &:= \{(b_n)_{n=1}^{\infty} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} : \sup_{n\in\mathbb{N}} |b_n| < +\infty\}, && \|b\|_\infty := \sup_{n\in\mathbb{N}} |b_n|, \ b \in \ell^\infty, \\
c_0 &:= \{(a_n)_{n=1}^{\infty} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} : \lim_{n\to\infty} a_n = 0\}, \\
c_{00} &:= \{(a_n)_{n=1}^{\infty} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} : \exists N \in \mathbb{N} \forall n \geq N : a_n = 0\}.
\end{aligned}$$

In all diesen Räumen notiert $e_k = (\delta_{n,k})_{n=1}^{\infty}, k \in \mathbb{N}$, die sogenannte Standardbasis.

Wie sich elementar nachweisen lässt, sind $(\ell^p, \|\cdot\|_p)$ für $p \in [1;\infty]$ normierte Vektorräume und $c_{00} \leq c_0 \leq \ell^\infty$.
Wir sammeln einige nützliche Eigenschaften dieser Räume, auf die wir beim den Beweis vom Satz von Orlicz-Pettis zurückgreifen werden. Sollte dem Leser der Begriff der L^p-Räume, $(L^1)' \cong L^\infty$ für σ-additive Maße und der Satz von Riesz-Markov bekannt sein, ergeben sich die Unterpunkte (3) und (4) durch Wahl des Zählmaßes beziehungsweise der diskreten Topologie.

Proposition 2.8. *Folgende Aussagen treffen auf die in Definition 2.7 eingeführten Räume zu.*

1. *Für $a \in c_0$ konvergiert $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n e_n$ unbedingt gegen a in der Norm.*
2. *Für $a \in \ell^1$ konvergiert $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n e_n$ unbedingt gegen a in der Norm.*
3. *$\iota : \ell^1 \to (c_0)', a \mapsto (c \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} a_n c_n)$ ist ein isometrischen Isomorphismus.*
4. *$\kappa : \ell^\infty \to (\ell^1)', b \mapsto (a \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} b_n a_n)$ ist ein isometrischen Isomorphismus.*
5. *Für $b \in \ell^\infty$ konvergiert $\sum_{n\in\mathbb{N}} b_n e_n$ schwach* unbedingt gegen b.*
6. *$c_0 = \overline{c_{00}}^{\|\cdot\|_\infty}$*
7. *$\ell^\infty = \overline{span\,\{\mathbb{1}_M : M \subseteq \mathbb{N}\}}^{\|\cdot\|_\infty}$*

Beweis. 1: Für $a \in c_0$ existiert zu beliebigem $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ mit $a_n \leq \varepsilon$ für alle $n \geq N$, wodurch $\|a - \sum_{n\in A} a_n e_n\|_\infty \leq \varepsilon$ für alle $A \supseteq \{1, ..., N-1\}$.
2: Ist $a \in \ell^1$, so existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ mit $\sum_{n=N}^{\infty} |a_n| \leq \varepsilon$. Für $A \supseteq \{1, ..., N-1\}$ folgt $\|a - \sum_{n\in A} a_n e_n\|_1 \leq \sum_{n=N}^{\infty} |a_n| \leq \varepsilon$.
3: Wegen $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n c_n| \leq \|a\|_1 \|c\|_\infty$ für $a \in \ell^1$ und $c \in c_0$ ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n c_n$ absolut konvergent und ι somit wohldefiniert, wobei $|\iota(a)c| \leq \|a\|_1\|c\|_\infty$. Also ist das offenbar lineare ι eine Kontraktion. Für $f \in (c_0)'$ gilt weiters

$$\sum_{n=1}^{\infty} |fe_n| = \sup_{N\in\mathbb{N}} \sum_{n\leq N, f(e_n)\neq 0} |fe_n| = \sup_{N\in\mathbb{N}} f\Big(\sum_{n\leq N, fe_n\neq 0} \frac{|fe_n|}{fe_n} e_n\Big) \leq \|f\|,$$

wodurch $(fe_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell^1$ mit $\|(fe_n)_{n=1}^{\infty}\|_1 \leq \|f\|$ und wegen vorigem Unterpunkt

$$\iota((fe_n)_{n=1}^{\infty})c = \sum_{n=1}^{\infty} (fe_n)c_n = f\big(\sum_{n=1}^{\infty} c_n e_n\big) = fc, c \in c_0,$$

also $f = \iota((fe_n)_{n=1}^{\infty})$. Folglich ist ι surjektiv und für $a \in \ell^1$ erhalten wir mit $f = \iota(a)$

$$\|a\|_1 = \|(\iota(a)e_n)_{n=1}^{\infty}\|_1 \leq \|\iota(a)\| \leq \|a\|_1.$$

4: Analog zu (3) ist κ ein wohldefinierter Homomorphismus mit $\|\kappa\| \leq 1$. Es gilt auch $\sup_{n\in\mathbb{N}} |fe_n| \leq \|f\|$ für $f \in (\ell^1)'$, also $(fe_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell^\infty$ mit $\|(fe_n)_{n=1}^{\infty}\|_\infty \leq \|f\|$ und $\kappa((fe_n)_{n=1}^{\infty})a = \sum_{n=1}^{\infty} fe_n a_n = fa$ für $a \in \ell^1$, woraus sich wieder Surjektivität und Isometrie ergeben.
5: Für $b \in \ell^\infty$ und $a \in \ell^1$ ist $\lim_{A\in\mathcal{E}(\mathbb{N})} \langle a, \kappa(\sum_{n\in A} b_n e_n)\rangle = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n b_n$ absolut konvergent, wie wir bereits gesehen haben.
6: Aus (1) folgt unmittelbar $c_0 \leq \overline{c_{00}}^{\|\cdot\|_\infty}$. Für $a \in \overline{c_{00}}^{\|\cdot\|_\infty}$ lässt sich zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $c \in c_{00}$ mit $\|a - c\|_\infty \leq \varepsilon$ wählen, für welches wiederum ein $N \in \mathbb{N}$ mit $c_n = 0$ für alle $n \geq N$ existiert. Infolge ist $|a_n| = |a_n - c_n| \leq \|a - c\|_\infty \leq \varepsilon$ für $n \geq N$, also $a \in c_0$. Also gilt $c_0 = \overline{c_{00}}^{\|\cdot\|_\infty}$.

7: Für $b \in \ell^\infty \cap [0;\infty)^{\mathbb{N}}$ und beliebiges $N \in \mathbb{N}$ liefert

$$M_k := \{n \in \mathbb{N} : k\|b\|_\infty \leq Nb_n < (k+1)\|b\|_\infty\}, k = 0, ..., N,$$

eine disjunkte Überdeckung von $\mathbb{N}$ und wir erhalten

$$\|b - \sum_{k=0}^{N} \frac{k\|b\|_\infty}{N} \mathbb{1}_{M_k}\|_\infty = \frac{1}{N}\|\sum_{k=0}^{N}(Nb - k\|b\|_\infty)\mathbb{1}_{M_k}\|_\infty \leq \frac{\|b\|_\infty}{N},$$

wodurch $\ell^\infty \cap [0,\infty)^{\mathbb{N}} \subseteq \overline{\text{span}\ \{\mathbb{1}_M : M \subseteq \mathbb{N}\}}^{\|\cdot\|_\infty}$ und weiter

$$\ell^\infty = \text{span}\ (\ell^\infty \cap [0,\infty)^{\mathbb{N}}) = \overline{\text{span}\ \{\mathbb{1}_M : M \subseteq \mathbb{N}\}}^{\|\cdot\|_\infty}.$$

$\square$

Es gilt also $(c_0)' \cong \ell^1$ und $(\ell^1)' \cong \ell^\infty$. Insbesondere sind ℓ^1 und ℓ^∞ vollständig und c_0 als abgeschlossener Unterraum von ℓ^∞ ebenso. In Zukunft werden wir Elemente $a \in \ell^1$ und $b \in \ell^\infty$ automatisch mit $\iota(a)$ beziehungsweise $\kappa(b)$ identifizieren.
Für $a \in c_0 \setminus \ell^1$, wie zum Beispiel $a = (\frac{1}{n})_{n=1}^\infty$, konvergiert außerdem $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n e_n$ unbedingt, aber nicht absolut. Schon dieses einfache Beispiel demonstriert, dass in unendlich dimensionalen Banachräumen die unbedingte Konvergenz nicht mehr die absolute bedingt.

3 Folgenkompaktheit und Satz von Schur

Im Weiteren wird grundlegendes Wissen über Funktionalanalysis vorausgesetzt, wie der Satz von Banach-Steinhaus, Hahn-Banach, Goldstine und Banach-Alaoglu. Diese können in [WKB17] nachgelesen werden. Auch basieren die folgenden Ergebnisse und Beweise auf [WKB17, Kapitel 5.7]

Definition 3.1 (Folgenkompaktheit, Metrisierbarkeit & Separabilität)**.** *Wir nennen einen topologischen Raum $(K, \mathcal{T})$ folgenkompakt, wenn jede Folge in K eine in K konvergente Teilfolge besitzt. Weiters nennen wir ihn metrisierbar, wenn eine Metrik auf K existiert, die $\mathcal{T}$ induziert, und separabel, wenn er eine abzählbare dichte Teilmenge besitzt.*

In diesem Kapitel wollen wir zunächst herleiten, dass alle schwach kompakten Teilmengen normierter Räume auch folgenkompakt bezüglich der schwachen Topologie sind. Für metrische Räume sind Folgenkompaktheit und Kompaktheit bekanntlich äquivalent, siehe [Kal14, Satz 12.13.3]. Es ist also naheliegend, eine Metrisierung der Restriktion der schwachen Topologie auf das Kompaktum zu konstruieren. Folgendes Lemma liefert die Grundlage hierfür.

Lemma 3.2. *Kompakte topologische Räume $(K, \mathcal{T})$ mit punktetrennender Familie $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in C(K)^{\mathbb{N}}$ sind metrisierbar.*

Beweis. Definiere $d : K \times K \to [0, \infty)$ durch $d(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|f_n(y)-f_n(x)|}{2^n \|f_n\|_\infty}$. Sichtlich ist d wohldefiniert, symmetrisch und, da $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ punktetrennend ist, gilt auch $d(x, y) > 0$ für $x \neq y$. Die Dreiecksungleichung ergibt sich aus

$$d(x, z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|f_n(z) - f_n(x)|}{2^n \|f_n\|_\infty} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|f_n(z) - f_n(y)| + |f_n(y) - f_n(x)|}{2^n \|f_n\|_\infty} = d(x, y) + d(y, z).$$

Somit ist d eine Metrik und als absolut konvergente Reihe in $(C(K \times K), \|\cdot\|_\infty)$, wobei $K \times K$ mit $\mathcal{T} \times \mathcal{T}$ versehen ist, wieder stetig. Insbesondere ist $d_x : K \to \mathbb{R}$ definiert durch $d_x(y) = d(x, y)$ für alle $x \in K$ stetig. Bezeichnet $U_\varepsilon^d(0)$ die offene ε-Kugel um x bezüglich der Metrik d und $\mathcal{T}_d$ die durch d induzierte Topologie, so gilt $U_\varepsilon^d(x) = d_x^{-1}((-\infty, \varepsilon)) \in \mathcal{T}$ und daher $\mathcal{T}_d \subseteq \mathcal{T}$. Infolge bildet id_K das Kompaktum $(K, \mathcal{T})$ stetig in den Hausdorff-Raum $(K, \mathcal{T}_d)$ ab und ist somit ein Homöomorphismus, weshalb $\mathcal{T}_d = \mathcal{T}$. □

Wir werden häufig die Folgerung [WKB17, Korollar 5.2.4] aus dem Satz von Hahn-Banach anwenden. Unterpunkt (i) von diesem besagt, dass für einen normierten Raum $(X, \|\cdot\|)$ und $x \in X$ ein $x' \in X'$ mit $x'x = \|x\|$ existiert. Für einen Unterraum $Y \leq X$ und ein Funktional $y' \in Y'$ hat Unterpunkt (ii) die Existenz einer Fortsetzung $x' \in X', y' = x' \restriction_Y$ mit $\|x\| = \|y\|$ zum Inhalt.

Satz 3.3. *In separablen normierten Vektorräumen* $(X, \|\cdot\|)$ *sind schwach kompakte Mengen* $K \subseteq X$ *schwach metrisierbar.*

Beweis. Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X^{\mathbb{N}}$ so, dass $\{x_n | n \in \mathbb{N}\}$ dicht in X bezüglich der Normtopologie liegt, und wähle nach [WKB17, Korollar 5.2.4(i)] $x'_n \in K_1^{X'}(0)$ mit $x'_n x_n = \|x_n\|$. Für $x \in X$ gilt $\sup_{n\in\mathbb{N}} |x'_n x| \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} \|x'_n\|\|x\| = \|x\|$ und für $y, z \in X$ in weiterer Folge

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} |x'_n z| - \sup_{n\in\mathbb{N}} |x'_n y| \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} |x'_n z| - |x'_n y| \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} |x'_n (z-y)| \leq \|z-y\|$$

und aus Symmetriegründen sogar $|\sup_{n\in\mathbb{N}} |x'_n z| - \sup_{n\in\mathbb{N}} |x'_n y|| \leq \|z-y\|$. Die Funktion $x \mapsto \sup_{n\in\mathbb{N}} |x'_n x|$ ist daher stetig bezüglich der Norm und stimmt wegen

$$\|x_k\| = |x'_k x_k| \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} |x'_n x_k| \leq \|x_k\|$$

für $k \in \mathbb{N}$ auf der dichten Teilmenge $\{x_n | n \in \mathbb{N}\}$ sogar mit der Norm überein, wodurch $\sup_{n\in\mathbb{N}} |x'_n x| = \|x\|$ aus Stetigkeitsgründen für alle $x \in X$ gilt. Insbesondere agiert $(x'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ punktetrennend auf X und $(x'_n \restriction_K)_{n\in\mathbb{N}}$ infolge punktetrennend auf K, welches nach Lemma 3.2 somit schwach metrisierbar ist. $\square$

Wie sich beispielsweise aus [Kal14, Korollar 12.5.3] ergibt, ist die Restriktion der schwachen Topologie eines normierten Raumes $(X, \|\cdot\|)$ auf einen Unterraum $Y \leq X$ genau die Initialtopologie bezüglich der $x' \restriction_Y, x' \in X'$. Klarerweise ist $x' \restriction_Y \in Y'$ für $x' \in X'$. Nach [WKB17, Korollar 5.2.4(ii)] existiert weiters zu jedem $y' \in Y'$ ein $x' \in X'$ mit $y' = x' \restriction_Y$. Die Restriktion der schwachen Topologie von X auf Y ist folglich nichts Weiteres als die schwache Topologie von Y.
Eine weitere nützliche Folgerung aus dem Satz von Hahn-Banach, die wir fortan verwenden werden, ist [WKB17, Satz 5.3.8], wonach insbesondere für konvexe Teilmengen normierter Räume der schwache Abschluss dem Normabschluss entspricht.

Korollar 3.4. *Für einen normierten Raum* $(X, \|\cdot\|)$ *sind schwach kompakte Teilmengen* $K \subseteq X$ *schwach folgenkompakt.*

Beweis. Für beliebiges $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in K^{\mathbb{N}}$ bildet $(\overline{\operatorname{span}\{x_n | n \in \mathbb{N}\}}^{\|\cdot\|}, \|\cdot\|)$ wegen

$$\overline{\operatorname{span}\{x_n | n \in \mathbb{N}\}}^{\|\cdot\|} = \overline{\left\{\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n | (a_n)_{n=1}^{\infty} \in c_{00} \cap (\mathbb{Q}^{\mathbb{N}} + i\mathbb{Q}^{\mathbb{N}})\right\}}^{\|\cdot\|},$$

einen separabler Banachraum. Weiters ist $\overline{\operatorname{span}\{x_n | n \in \mathbb{N}\}}^{\|\cdot\|}$ nach [WKB17, Satz 5.3.8] schwach abgeschlossen und damit $\overline{\operatorname{span}\{x_n | n \in \mathbb{N}\}}^{\|\cdot\|} \cap K$ schwach kompakt bezüglich der Restriktion der schwachen Topologie von X auf $\overline{\operatorname{span}\{x_n | n \in \mathbb{N}\}}^{\|\cdot\|}$, also der schwachen Topologie auf $\overline{\operatorname{span}\{x_n | n \in \mathbb{N}\}}^{\|\cdot\|}$. Nach Satz 3.3 ist $\overline{\operatorname{span}\{x_n | n \in \mathbb{N}\}}^{\|\cdot\|} \cap K$ schwach metrisierbar, weshalb $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine in K schwach konvergente Teilfolge hat. $\square$

Definition 3.5 (Schur-Eigenschaft)**.** *Wir sagen, ein normierter Raum* $(X, \|\cdot\|)$ *erfüllt die Schur-Eigenschaft, wenn*

$$\forall (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X^{\mathbb{N}} \forall x \in X : x_n \xrightarrow{w} x \Leftrightarrow x_n \xrightarrow{\|\cdot\|} x$$

Der Grund, wieso uns diese Eigenschaft hier interessiert, ist folgende Proposition.

Proposition 3.6. *Erfüllt ein normierter Raum $(X, \|\cdot\|)$ die Schur-Eigenschaft, so sind für $K \subseteq X$ schwache Kompaktheit und Normkompaktheit äquivalent.*

Beweis. Da die Normtopologie feiner ist, folgt aus der Normkompaktheit von K unmittelbar die schwache Kompaktheit.
Ist umgekehrt K schwach kompakt, so ist K nach Korollar 3.4 auch schwach folgenkompakt. Jede Folge in K besitzt daher eine in K schwach konvergente Teilfolge, die gemäß der Schur-Eigenschaft sogar in der Norm konvergiert. Infolge ist K folgenkompakt bezüglich der Norm, also normkompakt. □

Satz 3.7 (Satz von Schur)**.** *Der Raum ℓ^1 erfüllt die Schur Eigenschaft. Insbesondere sind schwache Kompaktheit und Normkompaktheit für Teilmengen von ℓ^1 äquivalent.*

Beweis. Wir nehmen indirekt an, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (\ell^1)^{\mathbb{N}}$ schwach aber nicht normkonvergent ist. Durch Abziehen des schwachen Grenzwertes von der Folge und Übergang zu einer Teilfolge können wir sogar $a_n \overset{w}{\to} 0$ und $\|a_n\| \geq 5\varepsilon$ für ein gewisses $\varepsilon > 0$ annehmen. Wir definieren rekursiv zwei Folgen $(m_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ und $(n_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ durch $m_0, n_0 = 0$ und die Wahl von $n_{k+1} > n_k$ mit $\sum_{j=1}^{m_k} |a_{n_{k+1},j}| = \sum_{j=1}^{m_k} |\langle a_{n_{k+1}}, e_j\rangle| \leq \varepsilon$, was möglich ist wegen $a_n \overset{w}{\to} 0$, sowie $m_{k+1} > m_k$ mit $\sum_{j=m_{k+1}+1}^{\infty} |a_{n_{k+1},j}| \leq \varepsilon$, was wegen $a_{n+1} \in \ell^1$ möglich ist, womit $\|\mathbb{1}_{\mathbb{N}\setminus\{m_k+1,\dots,m_{k+1}\}} a_{n_{k+1}}\|_1 \leq 2\varepsilon$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Definieren wir zusätzlich $b \in K_1^{\ell^\infty}(0)$ durch

$$b_j := \begin{cases} \frac{|a_{n_k,j}|}{a_{n_k,j}}, & \text{wobei } k \in \mathbb{N} \text{ mit } m_{k-1} < j \leq m_k, \text{ falls } a_{n_k,j} \neq 0, \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases}$$

so folgt für alle $k \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \langle a_{n_k}, b\rangle = &\sum_{j=m_{k-1}+1}^{m_k} |a_{n_k,j}| + \langle \mathbb{1}_{\mathbb{N}\setminus\{m_{k-1}+1,\dots,m_k\}} a_{n_k}, b\rangle \\ \geq &\|a_{n_k}\|_1 - \|\mathbb{1}_{\mathbb{N}\setminus\{m_{k-1}+1,\dots,m_k\}} a_{n_k}\|_1 - \|\mathbb{1}_{\mathbb{N}\setminus\{m_{k-1}+1,\dots,m_k\}} a_{n_k}\|_1 \|b\|_\infty \geq \varepsilon, \end{aligned}$$

also $\langle a_n, b\rangle \nrightarrow 0$, was der schwachen Konvergenz gegen 0 widerspricht. □

4 Kompakte Operatoren

Im Weiteren verwenden wir für normierte Räume $(X, \|\cdot\|)$ die sogenannte kanonische Einbettung $\iota_X : X \to X''$ definiert durch $\iota(x)x' = x'x$ für $x \in X$ und $x' \in X'$. Sie weist also jedem Element in X das zugehörige Auswertungsfunktional zu. $\iota_X : X \to \iota_X(X)$ ist ein isometrischer Isomorphismus bezüglich $\|\cdot\|$ und der Operatornorm auf X'' und zudem ein schwach-schwach* Homöomorphismus, siehe [WKB17, Lemma 5.5.2 & Bemerkung 5.5.3].
Zu einem beschränkten Operator $T : X \to Y$ wird durch $T' : Y' \to X', y' \mapsto y' \circ T$ der duale Operator definiert. Nach [WKB17, Korollar 5.2.4(i)] gilt

$$\|T'\| = \sup_{x \in K_1^X(0), y \in K_1^{Y'}(0)} |\langle x, T'y\rangle| = \sup_{x \in K_1^X(0), y \in K_1^{Y'}(0)} |\langle Tx, y\rangle| = \sup_{x \in K_1^X(0)} \|Tx\| = \|T\|,$$

insbesondere ist T' beschränkt. Für den bidualen Operator gilt für alle $x \in X$ und $y' \in Y'$

$$\langle y', T''\iota_X x\rangle = \langle x, T'y'\rangle = \langle y', \iota_Y Tx\rangle,$$

woraus $T''\iota_X = \iota_Y T$ folgt. Der biduale Operator lässt sich also in einem gewissen Sinn als Fortsetzung des ursprünglichen Operators auf den Bidualraum interpretieren. Außerdem erhalten wir die schwach*-Stetigkeit von $\iota_X(x) \circ T' = T''\iota_X x = \iota_Y(Tx)$ für alle $x \in X$ und infolge die schwach*-schwach*-Stetigkeit von T'.

Definition 4.1. *Seien $(X, \|\cdot\|)$ und $(Y, \|\cdot\|)$ zwei normierte Räume. Wir nennen ein lineares $T : X \to Y$ normkompakt, wenn $T(K_1^X(0))$ relativ normkompakt ist und schwach kompakt, wenn $T(K_1^X(0))$ relativ schwach kompakt ist.*

Nach [WKB17, Satz 5.3.8] gilt $\overline{T(K_1^X(0))}^w = \overline{T(K_1^X(0))}^{\|\cdot\|}$. Da die Normkompaktheit dieser Menge sofort die Kompaktheit bezüglich der gröberen schwachen Topologie impliziert, zieht die Normkompaktheit eines Operators die schwache Kompaktheit nach sich. Diese liefert wiederum die schwach* Kompaktheit und damit die punktweise Beschränktheit von $\iota_Y \overline{T(K_1^X(0))}^w$. Nach dem Satz von Banach-Steinhaus ist dann $\iota_Y \overline{T(K_1^X(0))}^w$ gleichmäßig beschränkt und wegen der Isometrieeigenschaft von ι_Y auch $\overline{T(K_1^X(0))}^w$, wodurch T beschränkt ist.
Zunächst werden wir den Satz von Arzelà-Ascoli behandeln, mit dessen Hilfe wir die Äquivalenz der Normkompaktheit eines Operators und der Normkompaktheit seines dualen Operators beweisen werden. Dieser beschreibt relative Kompaktheit von Teilmengen des Funktionenraumes $(C(K), \|\cdot\|_\infty)$ für kompakte topologische Räume $(K, \mathcal{T})$ über folgende beiden Begriffe.

Definition 4.2. *Für einen topologischen Raum $(X, \mathcal{T})$ bezeichnen wir $F \subseteq C(X)$ als gleichgradig stetig, wenn für alle $x \in X$ und $\varepsilon > 0$ eine Umgebung V von x derart existiert, dass $f(V) \subseteq K_\varepsilon^{\mathbb{C}}(f(x))$ für alle $f \in F$, und als punktweise beschränkt, wenn für alle $x \in X$ die Menge $\{f(x) : f \in F\}$ beschränkt ist.*

Für folgende beiden Sätze, bedienen wir uns der Äquivalenz von Totalbeschränktheit und relativ Kompaktheit für Teilmengen vollständiger Räume, siehe [Kal14, Satz 12.13.3].

Satz 4.3 (Arzelà-Ascoli). *Für einen kompakten topologischen Raum $(K, \mathcal{T})$ ist $F \subseteq C(K)$ genau dann relativ kompakt in $(C(K), \|\cdot\|_\infty)$, wenn F gleichgradig stetig und punktweise beschränkt ist.*

Beweis. Relativ kompakte F sind auch beschränkt bezüglich der Supremumsnorm, und daher auch punktweise beschränkt. Weil F totalbeschränkt ist, gibt es zu beliebigem $\varepsilon > 0$ Funktionen $f_1, ..., f_N$ mit $F \subseteq \bigcup_{n=1}^N K_\varepsilon^{\|\cdot\|_\infty}(f_n)$. Für jedes $x \in K$ und $n \leq N$ lässt sich gemäß der Stetigkeit eine Umgebung W_n von x mit $f_n(W_n) \subseteq K_\varepsilon^{\mathbb{C}}(f_n(x))$ wählen, womit auch $W := \bigcap_{n=1}^N W_n$ eine Umgebung von x ist. Schließlich existiert zu jedem $f \in F$ ein $n \leq N$ mit $f \in K_\varepsilon^{\|\cdot\|_\infty}(f_n)$, wodurch $f(W) \subseteq f_n(W) + K_\varepsilon^{\mathbb{C}}(0) \subseteq K_{2\varepsilon}^{\mathbb{C}}(f_n(x)) \subseteq K_{3\varepsilon}^{\mathbb{C}}(f(x))$. Folglich ist F auch gleichgradig stetig.
Ist hingegen F gleichgradig stetig und punktweise beschränkt, so existiert für ein festes $\varepsilon > 0$ zu jedem $x \in K$ eine offene Umgebung V_x mit $f(V_x) \subseteq K_\varepsilon^{\mathbb{C}}(f(x))$ für alle $f \in F$. Dies liefert eine offene Überdeckung $\bigcup_{x \in K} V_x$ des Kompaktums K, wodurch ein endliches $E \subseteq K$ mit $\bigcup_{x \in E} V_x = K$ existiert. Da F punktweise beschränkt ist, bildet $\{f\restriction_E : f \in F\}$ eine beschränkte Teilmenge von $\mathbb{C}^E$, die nach dem Satz von Heine-Borel relativ kompakt beziehungsweise totalbeschränkt ist. Folglich lassen sich $f_1, ..., f_N \in F$ mit $\{f\restriction_E : f \in F\} \subseteq \bigcup_{n=1}^N K_\varepsilon^{\mathbb{C}^E}(f_n\restriction_E)$ wählen. Also existiert zu jedem $f \in F$ ein $n \leq N$ mit $f\restriction_E \in K_\varepsilon^{\mathbb{C}^E}(f_n\restriction_E)$ und zu jedem $x \in K$ ein $y \in E$ mit $x \in V_y$, wodurch

$$f(x) \in f(V_y) \subseteq K_\varepsilon^{\mathbb{C}}(f\restriction_E(y)) \subseteq K_{2\varepsilon}^{\mathbb{C}}(f_n\restriction_E(y)) \subseteq K_{3\varepsilon}^{\mathbb{C}}(f_n(x)).$$

Wir erhalten $f \in K_{3\varepsilon}^{\|\cdot\|_\infty}(f_n)$ und in weiterer Folge $F \subseteq \bigcup_{n=1}^N K_{3\varepsilon}^{\|\cdot\|_\infty}(f_n)$. Somit ist F totalbeschränkt. □

Satz 4.4 (Satz von Schauder). *Für einen normierten Raum $(X, \|\cdot\|)$ und einen Banachraum $(Y, \|\cdot\|)$ ist die Normkompaktheit eines Operators $T : X \to Y$ äquivalent zur Normkompaktheit von T'.*

Beweis. Ist T normkompakt, so definieren wir $K := \overline{T(K_1^X(0))}^{\|\cdot\|}$. Für den linearen Operator $\Phi : Y' \to C(K), y' \mapsto y'\restriction_K$, wobei K mit der Restriktion der Normtopologie versehen ist, gilt

$$\|T'y'\| = \sup_{x \in K_1^X(0)} |\langle Tx, y' \rangle| = \sup_{y \in T(K_1^X(0))} |\langle y, y' \rangle| = \sup_{y \in K} |y'\restriction_K y| = \|\Phi y'\|_\infty.$$

Folglich wird durch $\iota(\Phi y') := T'y'$ eine lineare und isometrische Bijektion $\iota : \operatorname{ran} \Phi \to \operatorname{ran} T'$ definiert. Klarerweise ist $\Phi(K_1^{Y'}(0))$ gleichgradig stetig und punktweise beschränkt und, als Folge von Satz 4.3, totalbeschränkt. $T'(K_1^{Y'}(0)) = \iota\Phi(K_1^X(0))$ ist als Bild unter der isometrischen Abbildung ebenso totalbeschränkt. Als Teilmenge eines vollständigen metrischen Raumes ist diese auch relativ kompakt.
Ist T' normkompakt, so auch T'' und folglich $\iota_Y T(K_1^X(0)) = T''\iota_X(K_1^X(0))$ totalbeschränkt. Wegen der Isometrieeigenschaft von ι_Y ist $T(K_1^X(0))$ totalbeschränkt im Banachraum Y und somit relativ kompakt. □

Satz 4.5 (Satz von Gantmacher)**.** *Für einen normierten Raum* $(X, \|\cdot\|)$*, einen Banachraum* $(Y, \|\cdot\|)$ *und einen beschränkten Operator* $T : X \to Y$ *sind folgende Aussagen äquivalent.*

1. *ran* $T'' \subseteq$ *ran* ι_Y.
2. T *ist schwach kompakt.*
3. T' *ist schwach kompakt.*

Beweis. $2 \Rightarrow 1$: Für schwach kompaktes T ist $\iota_Y \overline{T(K_1^X(0))}^w$ in Y'' schwach* abgeschlossen, da $\iota_Y : Y \to \iota_Y(Y)$ ein schwach-schwach*-Homöomorphismus ist. Dies liefert mit dem Satz von Goldstine und der schwach*-schwach*-Stetigkeit von T''

$$T''(K_1^{X''}(0)) = T''\overline{\iota_X(K_1^X(0))}^{w^*} \subseteq \overline{T''\iota_X(K_1^X(0))}^{w^*} = \overline{\iota_Y T(K_1^X(0))}^{w^*} \subseteq \iota_Y \overline{T(K_1^X(0))}^{w}.$$

Daraus erhalten wir ran $T'' = \operatorname{span} T''(K_1^{X''}(0)) \subseteq \operatorname{ran} \iota_Y$.
$1 \Rightarrow 3$: Im Fall ran $T'' \subseteq$ ran ι_Y liegt $x'' \circ T' = T''x''$ für alle $x'' \in X''$ in ran ι_Y und ist daher schwach* stetig, wodurch T' schwach*-schwach stetig ist. Da $K_1^{Y'}(0)$ gemäß dem Satz von Banach-Alaoglu schwach* kompakt ist, ergibt dies die schwache Kompaktheit von $T'(K_1^{Y'}(0))$.
$3 \Rightarrow 2$: Für schwach kompaktes T' ist T'' nach den beiden vorherigen Beweisschritten schwach kompakt.
Weiters ist $\overline{T(K_1^X(0))}^{\|\cdot\|}$ als abgeschlossene Teilmenge eines vollständig metrischen Raumes auch vollständig, genauso wie $\iota_Y \overline{T(K_1^X(0))}^{\|\cdot\|}$. Insbesondere ist $\iota_Y \overline{T(K_1^X(0))}^{\|\cdot\|}$ normabgeschlossen und nach [WKB17, Satz 5.3.8] sogar schwach abgeschlossen. Wegen

$$\iota_Y \overline{T(K_1^X(0))}^{\|\cdot\|} \subseteq \overline{\iota_Y T(K_1^X(0))}^{\|\cdot\|} = \overline{T''\iota_X(K_1^X(0))}^{\|\cdot\|} \subseteq \overline{T''(K_1^{X''}(0))}^{\|\cdot\|} = \overline{T''(K_1^{X''}(0))}^{w}$$

ist $\iota_Y \overline{T(K_1^X(0))}^{\|\cdot\|}$ schwach abgeschlossene Teilmenge einer schwach kompakten Menge und daher schwach* kompakt. Aufgrund der schwach-schwach* Homöomorphie von $\iota_Y : Y \to \iota_Y(Y)$ ist $\overline{T(K_1^X(0))}^w = \overline{T(K_1^X(0))}^{\|\cdot\|}$ schwach kompakt. $\square$

Korollar 4.6. *Für Banachräume* $(X, \|\cdot\|)$ *und beschränkte Operatoren* $T : c_0 \to X$ *sind schwache Kompaktheit und Normkompaktheit äquivalent.*

Beweis. Für einen beschränkten Operator $T : c_0 \to X$ ist nach Satz 4.5 die schwache Kompaktheit von T äquivalent zur schwachen Kompaktheit von T'. Als Operator nach $(c_0)' \cong \ell^1$ hinein ist die schwache Kompaktheit von T' gemäß Satz 3.7 äquivalent zur Normkompaktheit von T', die gemäß Satz 4.4 wiederum äquivalent zur Normkompaktheit von T ist. $\square$

5 Satz von Orlicz-Pettis

Definition 5.1 (WUC-Reihe). *Für einen Banachraum X und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X^{\mathbb{N}}$ nennen wir $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$ WUC ("weakly unconditionally Cauchy"), wenn $\sum_{n\in\mathbb{N}} x'x_n$ für alle $x' \in X'$ unbedingt konvergiert.*

WUC-Reihen $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$ konvergieren nicht notwendigerweise schwach, da kein $x \in X$ mit $x'x = \sum_{n\in\mathbb{N}} x'x_n, x' \in X'$ existieren muss. In c_0 ist beispielsweise $\sum_{n\in\mathbb{N}} e_n$ zwar WUC aber nicht schwach konvergent.
Folgendes Lemma gibt diesem neuen Begriff im Zusammenhang mit dem Satz von Orlicz-Pettis Bedeutung.

Lemma 5.2. *Für einen Banachraum $(X, \|\cdot\|)$ und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X^{\mathbb{N}}$ impliziert schwache Teilreihenkonvergenz von $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$, dass $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$ WUC ist.*

Beweis. Für schwach teilreihenkonvergentes $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ ist $\sum_{n=1}^{\infty} x'x_n$ für jedes $x' \in X'$ teilreihenkonvergent und nach Proposition 2.6 $\sum_{n\in\mathbb{N}} x'x_n$ unbedingt konvergent. □

Proposition 5.3. *Sei $(X, \|\cdot\|)$ ein Banachraum und $(x_n)_{n=1}^{\infty} \in X^{\mathbb{N}}$. $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$ ist genau dann WUC, wenn ein beschränkter Operator $T : c_0 \to X$ mit $Te_n = x_n, n \in \mathbb{N}$, existiert. Für diesen gilt $Ta = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n x_n$ im Sinne der unbedingten Normkonvergenz und $T'x' = (\langle x_n, x'\rangle)_{n\in\mathbb{N}}$. Insbesondere ist ein solches T eindeutig.*

Beweis. Sei $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$ WUC und definiere $\tilde{T} : c_{00} \to X, a \mapsto \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n x_n$, wobei c_{00} als Teilraum von c_0 mit $\|\cdot\|_\infty$ versehen ist. Dieser erfüllt für $x' \in X'$ und $a \in K_1^{c_{00}}(0)$

$$\iota_X(\tilde{T}a)x' = \langle \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n x_n, x'\rangle = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n \langle x_n, x'\rangle = \langle a, (\langle x_n, x'\rangle)_{n\in\mathbb{N}}\rangle \leq \|(\langle x_n, x'\rangle)_{n\in\mathbb{N}}\|_1.$$

Folglich ist $\iota_X\tilde{T}(K_1^{c_{00}}(0))$ eine punktweise beschränkte Menge von Funktionalen. Nach dem Satz von Banach-Steinhaus ist diese dann gleichmäßig beschränkt, weshalb sich $\tilde{T}$ als beschränkt herausstellt. Da c_{00} dicht in c_0 liegt, kann $\tilde{T}$ stetig zu einem Operator T auf c_0 fortgesetzt werden und dieser erfüllt $Te_n = x_n, n \in \mathbb{N}$.
Existiert hingegen ein derartiger beschränkter Operator T, so gilt nach Proposition 2.8 für alle $a \in c_0$

$$Ta = T\big(\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n e_n\big) = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n Te_n = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n x_n$$

und infolge für alle $x' \in X'$

$$\langle a, T'x'\rangle = \langle \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n x_n, x'\rangle = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n \langle x_n, x'\rangle.$$

Insbesondere haben wir $\langle e_n, T'x'\rangle = \langle x_n, x'\rangle$ und wegen $(c_0)' \cong \ell^1$ muss $(\langle x_n, x'\rangle)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^1$. Damit ist einerseits $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$ WUC und andererseits $\langle a, T'x'\rangle = \langle a, (\langle x_n, x'\rangle)_{n\in\mathbb{N}}\rangle$, also $T'x' = (\langle x_n, x'\rangle)_{n\in\mathbb{N}}$. □

Der folgende Beweis ist größtenteils aus [AK06, Theorem 2.4.14].

Satz 5.4 (Satz von Orlicz-Pettis)**.** *Für Banachräume $(X, \|\cdot\|)$ und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X^{\mathbb{N}}$ sind folgende Aussagen äquivalent.*

1. *$\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ ist schwach teilreihenkonvergent.*
2. *$T : c_0 \to X, a \mapsto \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n x_n$ ist wohldefiniert im Sinne der unbedingten Normkonvergenz, beschränkt und erfüllt ran $T'' \subseteq$ ran ι_X.*
3. *Für $a \in \ell^\infty$ konvergiert $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n x_n$ unbedingt in der Norm.*
4. *$\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$ konvergiert unbedingt in der Norm.*

Beweis. 1 $\Rightarrow$ 2: Ein schwach teilreihenkonvergentes $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ ist nach Lemma 5.2 auch WUC und nach Proposition 5.3 ist T wohldefiniert und beschränkt. Für beliebiges $M \subseteq \mathbb{N}$ wähle man die streng monoton wachsende Abzählung $(n_k)_{k=1}^{|M|}$, wodurch $\sum_{k=1}^{|M|} x_{n_k}$ voraussetzungsgemäß schwach konvergiert. Einerseits konvergiert dann $\sum_{k=1}^{|M|} \iota_X x_{n_k}$ schwach* gegen $\iota_X \sum_{k=1}^{|M|} x_{n_k}$ in X''. Andererseits konvergiert $\sum_{k=1}^{|M|} \iota_{c_0} e_{n_k}$ nach Proposition 2.8 schwach* in $\ell^\infty \cong (\ell^1)' \cong (c_0)''$ gegen $\mathbb{1}_M$, wodurch

$$T''\mathbb{1}_M = \sum_{k=1}^{|M|} T''\iota_{c_0} e_{n_k} = \sum_{k=1}^{|M|} \iota_X T e_{n_k} = \sum_{k=1}^{|M|} \iota_X x_{n_k}$$

und zwar schwach*. Also erhalten wir $T''\mathbb{1}_M = \iota_X \sum_{k=1}^{|M|} x_{n_k} \in$ ran ι_X. Definieren wir $E := \{\mathbb{1}_M : M \subseteq \mathbb{N}\}$, so gilt nach Proposition 2.8 und wegen der Vollständigkeit von ran $\iota_X \cong X$

$$\operatorname{ran} T'' = T''\overline{\operatorname{span} E}^{\|\cdot\|_\infty} \subseteq \overline{\operatorname{span} T''E}^{\|\cdot\|} \subseteq \overline{\operatorname{span} \operatorname{ran} \iota_X}^{\|\cdot\|} = \operatorname{ran} \iota_X.$$

2 $\Rightarrow$ 3: Ist T wohldefiniert und beschränkt, so folgt aus ran $T'' \subseteq$ ran ι_X gemäß Satz 4.5 die schwache Kompaktheit und nach Korollar 4.6 dann die Normkompaktheit von T. Für $a \in \ell^\infty$ liefert uns Satz 4.4 die Normkompaktheit von $K := \overline{T''K^{\ell^\infty}_{\|a\|_\infty}(0)}^{\|\cdot\|}$.
Weil $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n \iota_{c_0} e_n$ nach Proposition 2.8 schwach* gegen a konvergiert, haben wir ebenfalls im schwach* Sinne

$$T''a = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n T''\iota_{c_0} e_n = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n \iota_X T e_n = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n \iota_X x_n.$$

Außerdem gilt $\|\sum_{n\in A} a_n \iota_{c_0} e_n\|_\infty \leq \|a\|_\infty$ für jedes $A \in \mathcal{E}(\mathbb{N})$, wodurch

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n \iota_X x_n = \big(\sum_{n\in A} a_n \iota_X x_n\big)_{A\in\mathcal{E}(\mathbb{N})} = \big(T''\big(\sum_{n\in A} a_n \iota_{c_0} e_n\big)\big)_{A\in\mathcal{E}(\mathbb{N})}$$

ein konvergentes Netz in $(K, \mathcal{T}_{w*}\restriction_K)$ ist, wobei $\mathcal{T}_{w*}$ die schwach* Topologie bezeichnet. Zudem sei $\mathcal{T}_{\|\cdot\|}$ die Normtopologie. id_K bildet dann eine stetige Funktion vom kompakten $(K, \mathcal{T}_{\|\cdot\|}\restriction_K)$ in den hausdorffschen Raum $(K, \mathcal{T}_{w*}\restriction_K)$ und ist infolge ein Homöomorphismus.

Wir erhalten $\mathcal{T}_{w*}\restriction_K = \mathcal{T}_{\|\cdot\|}\restriction_K$, weshalb $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n \iota_X x_n$ sogar bezüglich der Operatornorm konvergiert. Gemäß der Isometrieeigenschaft von ι_X ist $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n x_n$ ebenso normkonvergent.
$3 \Rightarrow 4$: Dafür setze man einfach $a = \mathbb{1}_{\mathbb{N}}$.
$4 \Rightarrow 1$: Nach Proposition 2.6 ist $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ sogar teilreihenkonvergent in der Norm. □

Definition 5.5. *Für einen Banachraum $(X, \|\cdot\|)$ nennen wir $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X^{\mathbb{N}}$ eine schwache Cauchyfolge, wenn $(x'x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ für alle $x' \in X'$ konvergiert. Weiters nennen wir X schwach vollständig, wenn jede schwache Cauchyfolge schwach konvergiert.*

Für solche Räume kann Satz 5.4 nochmals verschärft werden. Ehe wir das zeigen, wollen wir den Begriff dadurch motivieren, dass eine wichtige Klasse von Banachräumen schwach vollständig ist.

Proposition 5.6. *Jeder reflexive Banachraum $(X, \|\cdot\|)$, d.h. Banachraum mit $\iota_X(X) = X''$, ist schwach vollständig.*

Beweis. Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X^{\mathbb{N}}$ eine beliebige schwache Cauchyfolge. $\iota(x_n)$ ist punktweise konvergent, da $(\iota_X(x_n)x')_{n\in\mathbb{N}} = (x'x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ für alle $x' \in X'$. Nach dem Satz von Banach-Steinhaus liegt der Grenzwert im Bidualraum, ist also gemäß der Reflexivität von der Form $\iota_X(x)$ für ein $x \in X$. Aus $\iota_X(x_n) \xrightarrow{w^*} \iota_X(x)$ folgt schließlich $x_n \xrightarrow{w} x$. □

Korollar 5.7. *Für schwach vollständige Banachräume $(X, \|\cdot\|)$ und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X^{\mathbb{N}}$ ist die Reihe $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$ genau dann WUC, wenn sie unbedingt in der Norm konvergiert.*

Beweis. Dass unbedingte Normkonvergenz die WUC-Eigenschaft impliziert, gilt natürlich allgemein.
Ist $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$ andererseits eine WUC-Reihe, so konvergiert $\sum_{k=1}^{\infty} x'x_{n_k}$ für beliebige Teilfolgen $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ und jedes $x' \in X'$. Gemäß der schwachen Vollständigkeit ist $\sum_{k=1}^{\infty} x_{n_k}$ schwach konvergent und nach Satz 5.4 ist $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$ somit normkonvergent. □

Korollar 5.8. *Für schwach vollständige Banachräume $(X, \|\cdot\|)$ sind Beschränktheit und Normkompaktheit eines Operators $T : c_0 \to X$ äquivalent.*

Beweis. Aus Normkompaktheit folgt immer die Beschränktheit.
Für beschränktes T ist $\sum_{n\in\mathbb{N}} Te_n$ nach Proposition 5.3 WUC und gemäß Korollar 5.7 unbedingt konvergent in der Norm. Aus Satz 5.4 und Satz 4.5 erhalten wir schließlich die Normkompaktheit von T. □

Zum Abschluss wollen wir noch eine zentrale Anwendung von Satz 5.4 aus der Vektormaßtheorie angeben.

Definition 5.9 (Vektormaß)**.** *Für eine σ-Algebra Σ und einen Banachraum $(X, \|\cdot\|)$ bezeichnen wir eine Mengenfunktion $\mu : \Sigma \to X$ als σ-additives Vektormaß, wenn $\mu(\emptyset) = 0$ und $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$ in der Norm gegen $\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n)$ konvergiert.*

Korollar 5.10. *Für einen Banachraum $(X, \|\cdot\|)$ und eine σ-Algebra Σ ist eine Funktion $\mu : \Sigma \to X$ genau dann ein σ-additives Vektormaß, wenn $x' \circ \mu$ für jedes $x' \in X'$ ein komplexes Maß abgibt.*

Beweis. Ist $x' \circ \mu$ für jedes $x' \in X'$ ein komplexes Maß, so folgt $x'\mu(\emptyset) = 0$ für alle $x' \in X'$. Aus [WKB17, Korollar 5.2.4(i)] ergibt sich $\mu(\emptyset) = 0$. Für beliebige $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \Sigma^{\mathbb{N}}$ und jede Teilfolge $(A_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ und jedes $x' \in X'$ gilt auch $\sum_{k=1}^{\infty} x'\mu(A_{n_k}) = x'\mu(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_{n_k})$, also die schwache Teilreihenkonvergenz von $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$. Aus Satz 5.4 folgt die Normkonvergenz von $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$. □

Literaturverzeichnis

[AK06] Fernando Albiac and Nigel J Kalton. *Topics in Banach space theory*. Graduate texts in mathematics. Springer, New York, NY, 2006.

[Kal14] Michael Kaltenbäck. *Fundament Analysis*, volume 26 of *Berliner Studienreihe zur Mathematik [Berlin Study Series on Mathematics]*. Heldermann Verlag, Lemgo, 2014.

[WKB17] Harald Woracek, Michael Kaltenbäck, and Martin Blümlinger. Funktionalanalysis. Skriptum zu Funktionalanalysis 1, 2017.