Seminararbeit

Wold Zerlegung

Markus Fellner

22. September 2018

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Einleitung

Das Ziel dieser Arbeit ist die Aufarbeitung des Beweises der Wold Zerlegung und Präsentation einiger weiterführenden Resultate nach [RR].
Die hier betrachteten Räume sind allesamt Hilberträume mit Norm $\| \cdot \|$ und dem dazugehörigen Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Die Menge aller beschränkten linearen Operatoren von H_1 nach H_2 wird mit $L_b(H_1, H_2)$ bezeichnet, oder kurz $L_b(H)$, falls $H = H_1 = H_2$. Die Identität auf einem Hilbertraum H wird mit I notiert. Zudem sei in Erinnerung gerufen, dass $T \in L_b(H_1, H_2)$ eine Isometrie genannt wird, wenn $\langle T(x), T(y) \rangle = \langle x, y \rangle$ für alle $x, y \in H_1$. Äquivalent dazu ist $T^*T = I$, oder $\| T(x) \| = \| x \|$ für alle $x \in H_1$.
Um den Satz über die Wold Zerlegung formulieren zu können, benötigt man noch die nachfolgende Definition eines Shiftoperators.

Definition 1. *Ein Operator $S \in L_b(H)$ wird ein Shiftoperator genannt, wenn S eine Isometrie ist und für seine Adjungierte S^* gilt, dass $\| S^{*n} f \| \to 0$ für alle $f \in H$.*

Beispiel 1. Sei $l^2(\mathbb{C})$ der (Hilbert-)Raum von Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{C}$ mit $\sum_{n\in\mathbb{N}} |a_n|^2 < \infty$ und $S : l^2(\mathbb{C}) \to l^2(\mathbb{C})$ der sogenannte "Rechtsshift" mit $S : (x_1, x_2, \ldots) \mapsto (0, x_1, x_2, \ldots)$. Eine kurze Rechnung zeigt, dass S^* der "Linksshift" auf $l^2(\mathbb{C})$ ist, also
$S^* : (x_1, x_2, x_3, \ldots) \mapsto (x_2, x_3, \ldots)$:

$$\langle S(a), b \rangle = 0 \cdot b_1 + \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n \cdot \overline{b_{n+1}} = \langle a, S^*(b) \rangle$$

mit $a, b \in l^2(\mathbb{C})$ beliebig. Es gilt also $ker(S^*) = \{a \in l^2(\mathbb{C}) : a_n = 0, n \geq 2\}$ und daher $dim(kern(S^*)) = 1$. Da $\lim_{n\to\infty} S^*(a) = 0$ für alle $a \in l^2(\mathbb{C})$, ist der Rechtsshift S ein Shiftoperator nach Definition 1.

Jetzt kann der Satz über die Wold Zerlegung angegeben werden.

Satz 1. ***(Wold Zerlegung)***
Sei $L \in L_b(H)$ eine Isometrie. Dann gilt:

a) Es existieren zwei Unterräume $M, N \subseteq H$ mit[1] $H = M \oplus N$, sodass L von M und N reduziert wird. Das heisst für die orthogonale Projektionen auf N und M, $P_N : H \to N$ und $P_M : H \to M$, gilt $P_N L = L P_N$ und $P_M L = L P_M$. Des weiteren ist $L|_N$ ein Shiftoperator auf N und $L|_M$ unitär auf M.

[1] $\oplus$ notiert hier die direkte orthogonale Summe.

b) Mit $K = L(H)^{\perp}$ *ist* $(L^j(K))_{j\in\mathbb{N}}$ *eine orthogonale Familie von Unterräumen, sodass*

$$N = \bigoplus_{j=0}^{\infty} L^j(K) = \{f \in H : \ \|L^{*n} f\| \to 0\}$$

und

$$M = N^{\perp} = \bigcap_{j=0}^{\infty} L^j(H).$$

Dieser Satz besagt also, dass es genau zwei Prototypen von Isometrien gibt, nämlich unitäre Operatoren und Shiftoperatoren. Insbesondere für Shiftoperatoren werden aufbauend auf die Wold Zerlegung einige interessante Resultate in den hinteren Kapiteln dieser Arbeit gezeigt werden.
Die ersten Abschnitte befassen sich mit partiellen Isometrien und dem Beweis von Satz 1.

Kapitel 2

Partielle Isometrie

Definition 2. *Ein Operator $L \in L_b(H_1, H_2)$ wird eine partielle Isometrie genannt, wenn $L|_M$ eine Isometrie auf $M = ker(L)^\perp$ ist.*

Der in der obigen Definition vorkommende Raum M wird auch als Anfangsraum und der Raum $L(M)$ auch als Zielraum von L bezeichnet.

Lemma 1. *Für $L \in L_b(H_1, H_2)$ sind folgende Aussagen äquivalent.*

a) L ist eine partielle Isometrie mit Anfangsraum M und Zielraum $L(M)$.

b) L^*L ist eine orthogonale Projektion mit $L^*L(H_1) = M$.

Beweis.

$\Rightarrow$) Ist L eine partielle Isometrie mit Anfangsraum $M = ker(L)^\perp$, so gilt

$$\langle L^*L(x), y\rangle = \langle L(x), L(y)\rangle = \langle x, y\rangle \tag{2.1}$$

für alle $x, y \in M$.
Für beliebiges $y_0 \in ker(L)$ folgt $L(y + y_0) = L(y)$ und zusammen mit (2.1)

$$\langle L^*L(x), y + y_0\rangle = \langle L(x), L(y + y_0)\rangle = \langle x, y\rangle + \underbrace{\langle x, y_0\rangle}_{=0} = \langle x, y + y_0\rangle.$$

Also gilt $\langle L^*L(x), y\rangle = \langle x, y\rangle$ für alle $x \in M$ und $y \in H_1$, womit $L^*L|_M = id|_M$.
Wegen $M = ker(L)^\perp$ und $L^*L(ker(L)) = \{0\}$ folgt b).

$\Leftarrow$) Es gilt $L^*L(x) = x$ für alle $x \in M$ und somit

$$\langle L(x), L(y)\rangle = \langle L^*L(x), y\rangle = \langle x, y\rangle$$

für alle $y \in M$. Damit ist L eine Isometrie auf M. Wegen

$$\| L(y) \|^2 = \langle L^*L(y), y\rangle = 0$$

für alle $y \in M^\perp$, folgt a).

■

Satz 2. *Sei $L \in L_b(H_1, H_2)$ eine partielle Isometrie mit Anfangsraum M. Dann ist $L^* \in L_b(H_2, H_1)$ eine partielle Isometrie mit Anfangsraum $L(M)$ und Zielraum M.*

Beweis.
Seien $x, y \in L(M)$ beliebig, aber fest. Dann existieren $x_0, y_0 \in M$ mit $L(x_0) = x$ und $L(y_0) = y$. Nach Lemma 1 ist L^*L eine orthogonale Projektion auf M. Damit gilt

$$\langle L^*(x), L^*(y)\rangle = \langle L^*L(x_0), L^*L(y_0)\rangle = \langle x_0, y_0\rangle = \langle L(x_0), L(y_0)\rangle = \langle x, y\rangle.$$

Also ist L^* eine Isometrie auf $L(M)$, wobei $ker(L^*) = L(M)^\perp$.
Da $L|_M$ ein Isomorphismus von M nach $L(M)$ ist, folgt aus der Vollständigkeit von M, als abgeschlossene Teilmenge eines Banachraums, die Vollständigkeit von $L(M)$. $L(M)$ ist somit ebenfalls abgeschlossen und es gilt $(ker(L^*))^\perp = (L(M)^\perp)^\perp = L(M)$. Damit ist L^* eine partielle Isometrie mit Anfangsraum $L(M)$ und Zielraum $L^*L(M) = M$.

■

Kapitel 3

Wold Zerlegung

Der nachfolgende Satz über die Wold Zerlegung aus [RR], ist eine äquivalente Formulierung zu der in der Einleitung vorgestellten Version.

Satz 3. *(Wold Zerlegung)*
Sei $L \in L_b(H)$ eine Isometrie. Dann gilt:

a) $P_0 := I - LL^*$ *ist die orthogonale Projektion von* H *auf* $L(H)^\perp$.

b) Es existiert eine Projektion $P \in L_b(H)$, *sodass* $\lim_{n\to\infty} L^n L^{*n} = P$ *bezüglich der starken Operator Topologie.*

c) $P(H) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} L^n(H)$.

d) $\sum_{n=0}^{k} L^n P_0 L^{*n}$ *mit* $k \in \mathbb{N}$, *konvergiert für* $k \to \infty$ *gegen die Projektion* $Q = I - P$, *bezüglich der starken Operator Topologie.*

e) $Q(H) = \{f \in H : \lim_{n\to\infty} \|L^{*n}(f)\| = 0\}$.

f) $Q(H)$ *und* $P(H)$ *reduzieren* L *d.h.* $PL = LP$, *beziehungsweise* $QL = LQ$.

g) $L|_{P(H)}$ *ist ein unitärer Operator auf* $P(H)$.

h) $L|_{Q(H)}$ *ist ein Shiftoperator auf* $Q(H)$.

i) $I = P + \sum_{n=0}^{\infty} L^n P_0 L^{*n}$ *und* $H = P(H) \oplus \left(\bigoplus_{n=0}^{\infty} L^n P_0(H) \right)$.

Beweis.

a) Als Isometrie ist L insbesondere eine partielle Isometrie mit Anfangsraum H und Zielraum $L(H)$. Nach Satz 2 ist L^* ebenfalls eine partielle Isometrie, und LL^* ist nach Lemma 1 die orthogonale Projektion auf $L(H)$. Daraus folgt die Aussage.

b) Mit L ist auch L^n eine Isometrie. Gemäß Punkt a) ist $P_n := L^n L^{*n}$ die orthogonale Projektion auf $L^n(H)$ und es gilt

$$P_{n+1}(H) = L^{n+1}(H) = L^n \underbrace{L(H)}_{\subseteq H} \subseteq L^n(H) = P_n(H). \tag{3.1}$$

Die Räume $L^n(H)$ bilden also eine, bezüglich der Mengeninklusion, fallende Mengenfolge. Wir zeigen, dass die orthogonale Projektion P von H auf $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} P_n(H)$ die gewünschte Beziehung $\lim_{n\to\infty} L^n L^{*n}(x) = \lim_{n\to\infty} P_n(x) = P(x)$ erfüllt.

Fall $x \in P(H)$:
Für $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} P_n(H)$ gilt $x \in P_n(H)$ und somit $P_n(x) = x = P(x)$ für alle $n \in \mathbb{N}$, also $\lim_{n\to\infty} P_n(x) = P(x)$.

Fall $x \in P(H)^\perp$:
Sei zunächst $x \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} P_n(H)^\perp$. Nach (3.1) gilt $P_n(H)^\perp \subseteq P_{n+1}(H)^\perp$. Es existiert infolge ein $m \in \mathbb{N}$, sodass $x \in P_n(H)^\perp$ für alle $n \geqslant m$. Damit folgt $P_n(x) = 0$ für alle $n \geqslant m$ und daher $\lim_{n\to\infty} P_n(x) = 0$.
Aufgrund von

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} P_n(H) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \left(P_n(H)^\perp\right)^\perp = \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} P_n(H)^\perp\right)^\perp \tag{3.2}$$

liegt der Unterraum $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} P_n(H)^\perp$ dicht in $P(H)^\perp$. Also existiert für jedes beliebig kleine $\epsilon > 0$, ein $m \in \mathbb{N}$ und ein $y \in P_m(H)^\perp$, sodass $\|y - x\| < \epsilon$. Für alle $n \geqslant m$ folgt wegen $y \in P_n(H)^\perp$,

$$\|P_n(x)\| = \|P_n(x) - \underbrace{P_n(y)}_{=0}\| \leqslant \|x - y\| < \epsilon. \tag{3.3}$$

Also konvergiert $P_n(x)$ gegen $0 = P(x)$.

Wegen $P(H) \oplus P(H)^\perp = H$, gilt $\lim_{n\to\infty} L^n L^{*n}(x) = P(x)$ für alle $x \in H$.

c) Das folgt aus unserer Definition von P in Beweisteil b), siehe (3.1).

d) Wegen b) konvergiert

$$\sum_{n=0}^{k} L^n P_0 L^{*n} = \sum_{n=0}^{k} L^n (I - LL^*) L^{*n} = \sum_{n=0}^{k} \left(L^n L^{*n} - L^{n+1} L^{*n+1}\right) = \underbrace{L^0 L^{*0}}_{=I} - L^{k+1} L^{*k+1} \tag{3.4}$$

stark gegen $I - P = Q$ für $k \to \infty$.

e) Wegen Punkt b) gilt für $x \in H$ die Beziehung

$$\|P(x)\| = \lim_{n\to\infty} \|L^n L^{*n} x\| = \lim_{n\to\infty} \|L^{*n}(x)\|. \tag{3.5}$$

Dieser Ausdruck ist Null genau dann wenn $x \in ker(P) = Q(H)$.

f) Nach Lemma 1 ist L^*L die Projektion auf den Anfangsraum H von L, also $L^*L = I$. Die Gleichheit $LP = PL$ folgt durch Grenzübergang $n \to \infty$ in

$$L \underbrace{L^n L^{*n}}_{\to P} = L^{n+1} L^{*n} \underbrace{L^* L}_{=I} = \underbrace{L^{n+1} L^{*n+1}}_{\to P} L \tag{3.6}$$

gemäß Punkt b). Für Q folgt dann

$$LQ = L(I - P) = L - LP = L - PL = (I - P)L = QL. \tag{3.7}$$

g) Aus Punkt c) und der Injektivität von L folgt
$L(P(H)) = L\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} L^n(H)\right) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} L^{n+1}(H) = P(H)$. Die Funktion $L|_{P(H)} : P(H) \to P(H)$ ist somit bijektiv und isometrisch, also sogar unitär.

h) Die Aussage folgt direkt aus Punkt e) und der Definition eines Shiftoperators, sowie der Tatsache, dass die Adjungierte von $L|_{Q(H)} : Q(H) \mapsto Q(H)$ wegen f) gerade $L^*|_{Q(H)} : Q(H) \mapsto Q(H)$ ist.

i) Die Gleichheit $I = P + \sum_{n=0}^{\infty} L^n P_0 L^{*n}$ ist eine direkte Folgerung von Punkt d). Für die zweite Aussage ist damit nur noch die paarweise Orthogonalität der Unterräume $P(H), L^n P_0(H)$ für alle $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ zu zeigen:

- Um $\langle P(x), L^n P_0(y)\rangle = 0$ für alle $x, y \in H$ und $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ einzusehen, betrachte $x \in H$. Wegen $L^{*n}(H) = H$, existiert für jedes $y \in H$ ein $z \in H$, sodass $L^{*n}(z) = y$. Damit folgt aus $P_0 = I - LL^*$, dass

$$\langle P(x), L^n P_0(y)\rangle = \langle P(x), L^n P_0 L^{*n}(z)\rangle = \langle P(x), L^n L^{*n}(z) - L^{n+1} L^{*n+1}(z)\rangle.$$

Da $L^n L^{*n}$ die Projektion auf $L^n(H)$ ist und da $P(H) \subseteq L^n(H)$, folgt

$$\langle P(x), L^n L^{*n}(z) - L^{n+1} L^{*n+1}(z)\rangle$$

$$= \langle L^n L^{*n} P(x), L^n L^{*n}(z)\rangle - \langle L^{n+1} L^{*n+1} P(x), L^{n+1} L^{*n+1}(z)\rangle$$

$$= \langle L^n L^{*n} P(x), z\rangle - \langle L^{n+1} L^{*n+1} P(x), z\rangle$$

$$= \langle P(x), z\rangle - \langle P(x), z\rangle = 0.$$

- Um $\langle L^k P_0(x), L^n P_0(y)\rangle = 0$ für alle $x, y \in H$ und $n, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ mit $k \neq n$ zu zeigen, gelte ohne Beschränkung der Allgemeinheit $k > n$. Aus Punkt a) und der Tatsache, dass L nach Voraussetzung eine Isometrie ist, folgt

$$\langle L^k P_0(x), L^n P_0(y)\rangle = \langle \underbrace{L^{k-n} P_0(x)}_{\in L(H)}, \underbrace{P_0(y)}_{\in L(H)^\perp} \rangle = 0$$

für alle $x, y \in H$.

$\blacksquare$

Kapitel 4

Universal Model

Die Wold Zerlegung findet für den Beweis einiger interessanter Darstellungs- und Existenzsätze Anwendung. In diesem Kapitel wird einer von ihnen, der Beweis des sogenannten *Universalen Model* aus [RR], vorgestellt. Dieses besagt, dass jeder lineare beschränkte Operator, bis auf eine Multiplikative Konstante und unitäre Äquivalenz, als Adjungierte eines Shiftoperators dargestellt werden kann.

Definition 3. *Ein Operator $R \in L_b(H_1)$ ist unitär äquivalent zu einem Operator $T \in L_b(H_2)$, falls eine unitäre Abbildung $W \in L_b(H_1, H_2)$ existiert, sodass $R = W^{-1}TW$.*

Dem Shiftoperator kommt also im *Universalen Model* eine bedeutende Rolle zu. Als Spezialfall einer Isometrie gilt für diese Klasse an Operatoren nachfolgendes Resultat.

Korollar 1. *Ist $S \in L_b(H)$ ein Shiftoperator und $K = ker(S^*) = ran(S)^\perp$, so gilt*

a) $H = \bigoplus\limits_{n=0}^{\infty} S^n(K)$.

b) Jedes $f \in H$ besitzt eine eindeutige Darstellung $f = \sum\limits_{n=0}^{\infty} S^n(k_n)$ mit $k_n \in K$, für alle $n \in \mathbb{N}$. Für diese Darstellung gilt $\|f\|^2 = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \|k_n\|^2$ und $k_n = P_0 S^{*n}(f)$, wobei $P_0 = I - SS^*$.

Beweis.
Nach Satz 3 e) gilt mit der dortigen Notation für Shiftoperatoren $Q(H) = H$, beziehungsweise aufgrund der Definition eines Shiftoperators, $P \equiv 0$. Damit folgt die Aussage a) aus Satz 3 i). Zudem gilt $I = \sum\limits_{n=0}^{\infty} S^n P_0 S^{*n}$. Jedes $f \in H$ kann somit durch $f = \sum\limits_{n=0}^{\infty} S^n P_0 S^{*n}(f)$ dargestellt werden. Da die Räume $S^n P_0(H)$ paarweise orthogonal sind, gilt

$$\|f\|^2 = \|\sum_{n=0}^{\infty} S^n P_0 S^{*n}(f)\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \|S^n P_0 S^{*n}(f)\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \|P_0 S^{*n}(f)\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \|k_n\|^2$$

mit $k_n = P_0 S^{*n}(f)$, für alle $f \in H$.
Seien nun für $f \in H$, mittels $k_{n,1}, k_{n,2} \in H$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ zwei Darstellungen gegeben, sodass $f = \sum\limits_{n=0}^{\infty} S^n(k_{n,i})$ für $i \in \{1, 2\}$ gilt. Mit der paarweisen Orthogonalität der $S^n(k_{n,1} - k_{n,2})$ und

der Beziehung $0 = \sum\limits_{n=0}^{\infty} S^n(k_{n,1} - k_{n,2})$ folgt für alle $j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, dass

$$0 = \langle \sum_{n=0}^{\infty} S^n(k_{n,1} - k_{n,2}), S^j(k_{j,1} - k_{j,2}) \rangle = \langle S^j(k_{j,1} - k_{j,2}), S^j(k_{j,1} - k_{j,2}) \rangle = \| k_{j,1} - k_{j,2} \|^2.$$

Somit gilt $k_{j,1} = k_{j,2}$ und man erhält die Eindeutigkeit der Darstellung.

$\blacksquare$

Mit obigen Korollar kann der Satz über das Universal Model formuliert und bewiesen werden.

Definition 4. *Sei H ein Hilbertraum und $(e_i)_{i \in I}$ eine Orthonormalbasis von H. Dann definieren wir die Dimension[1] $dim(H)$ von H durch[2] $dim(H) := |I|$.*

Beispiel 2. Sei H ein Hilbertraum mit $dim(H)= k$ und $l^2(H)$ der Raum der H-wertigen Folgen $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $\sum\limits_{n \in \mathbb{N}} \| a_n \|^2 < \infty$. Der Rechtsshift S auf $l^2(H)$ sei definiert wie in Beispiel 1. Es lässt sich analog wie in Beispiel 1 zeigen, dass $S^* : (x_1, x_2, x_3, \dots) \mapsto (x_2, x_3, \dots)$ und damit $dim(kern(S^*)) = dim(H) = k$. Insbesondere gilt wieder $\lim\limits_{n \to \infty} S^*(a) = 0$ für alle $a \in l^2(H)$ und S ist somit auch hier ein Shiftoperator.

Satz 4. *(Universal Model)*
Sei $R \in L_b(H_1)$, sodass $\|R\| \leqslant 1$ und $\lim\limits_{n \to \infty} \|R^n f\| = 0$ für alle $f \in H_1$. Sei $S \in L_b(H_2)$ ein Shiftoperator[3] mit $dim(ker(S^*)) \geqslant dim(\overline{I - R^* R(H_1)})$. Dann existiert ein invarianter Unterraum[4] U von S^*, sodass R unitär äquivalent zu $S^*|_U$ ist.

Beweis.
Betrachte den selbstadjungierten Operator $I - R^*R$. Wegen

$$\langle (I - R^*R)x, x \rangle = \langle x, x \rangle - \langle R^*Rx, x \rangle \geqslant \|x\|^2 - \|R^*\| \|R\| \|x\|^2 = \|x\|^2 \left(1 - \underbrace{\|R^*\| \|R\|}_{\leqslant 1} \right) \geqslant 0$$

für $x \in H_1$ ist dieser positiv. Nach [WKB], Korollar 6.5.10. gilt somit für das Spektrum $\sigma(I - R^*R) \subseteq \mathbb{R}_0^+$ und der Spektralsatz für selbstadjungierte Operatoren liefert die Existenz einer selbstadjungierten Quadratwurzel $(I - R^*R)^{\frac{1}{2}}$ von $(I - R^*R)$.
Wir definieren die Sesquilinearform $[x, y] := \langle B^{\frac{1}{2}}(x), y \rangle$ mit $B := I - R^*R$. Diese ist für alle $x, y \in H_1$ wohldefiniert und positiv semidefinit. Aus der Cauchy- Schwarzen Ungleichung folgt

$$\|B^{\frac{1}{2}}(x)\|^2 = \langle B^{\frac{1}{2}}(x), B^{\frac{1}{2}}(x) \rangle = [x, B^{\frac{1}{2}}(x)]$$

$$\leq [x, x] \cdot [B^{\frac{1}{2}}(x), B^{\frac{1}{2}}(x)] = \langle B^{\frac{1}{2}}(x), x \rangle \cdot \langle B(x), B^{\frac{1}{2}}(x) \rangle \tag{4.1}$$

für beliebiges $x \in H_1$. Betrachtet man $x \in ker(B) = ker(I - R^*R)$, dann folgt aus (4.1), dass $x \in ker(B^{\frac{1}{2}})$. Also gilt $ker(B) \subseteq ker(B^{\frac{1}{2}}) = ker((I - R^*R)^{\frac{1}{2}})$ und da trivialerweise

[1] $dim(H)$ ist unabhängig von der Wahl der Orthonormalbasis $(e_i)_{i \in I}$.
[2] $|A|$ bezeichnet die Mächtigkeit einer Menge A.
[3] Für die Existenz dieses Operators siehe Beispiel 2.
[4] Also $S^*(U) \subseteq U$

$ker((I-R^*R)^{\frac{1}{2}}) \subseteq ker(I-R^*R)$, gilt sogar Gleichheit. Da die betrachteten Operatoren alle selbstadjungiert sind, lässt sich daraus auf die Gleichheit

$$\overline{(I-R^*R)^{\frac{1}{2}}(H_1)} = (ker((I-R^*R)^{\frac{1}{2}}))^{\perp} = (ker(I-R^*R))^{\perp} = \overline{(I-R^*R)(H_1)}$$

schließen und somit auf

$$dim\left(\overline{(I-R^*R)^{\frac{1}{2}}(H_1)}\right) = dim\left(\overline{I-R^*R(H_1)}\right) \leqslant dim(ker(S^*)). \tag{4.2}$$

Aufgrund von (4.2) existiert nun eine Isometrie J, die von $\overline{(I-R^*R)^{\frac{1}{2}}(H_1)}$ auf einen abgeschlossenen Teilraum $K \subseteq ker(S^*) \subseteq H_2$ abbildet. Mit dieser kann ein Operator $W: H_1 \to H_2$ definiert werden durch $W(f) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} S^n J(I-R^*R)^{\frac{1}{2}} R^n(f)$ für alle $f \in H_1$. Nach Korollar 1 gilt

$$\|W(f)\|_{H_2}^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \|J(I-R^*R)^{\frac{1}{2}} R^n(f)\|_{H_2}^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \|(I-R^*R)^{\frac{1}{2}} R^n(f)\|_{H_1}^2$$

$$= \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} \langle (I-R^*R)^{\frac{1}{2}} R^n(f), (I-R^*R)^{\frac{1}{2}} R^n(f) \rangle_{H_1}$$

$$= \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} \langle R^{*n}(I-R^*R)R^n(f), f\rangle_{H_1} = \lim_{N\to\infty} \langle \sum_{n=0}^{N} \underbrace{R^{*n}(I-R^*R)R^n}_{=R^{*n}R^n - R^{*n+1}R^{n+1}}(f), f\rangle_{H_1}$$

$$= \lim_{N\to\infty} \langle \underbrace{R^{*0}R^0}_{=I}(f) - R^{*N+1}R^{N+1}(f), f\rangle_{H_1} = \lim_{N\to\infty} \langle f, f\rangle_{H_1} - \langle R^{*N+1}R^{N+1}(f), f\rangle_{H_1}$$

$$= \langle f, f\rangle_{H_1} - \lim_{N\to\infty} \langle R^{N+1}(f), R^{N+1}(f)\rangle_{H_1} = \langle f, f\rangle_{H_1} = \|f\|_{H_1}^2.$$

Damit ist W isometrisch und infolge ein Isomorphismus von H_1 nach $W(H_1)$. Wir zeigen noch $S^*W(f) = WR(f)$ für alle $f \in H_1$:

$$S^*W(f) = \sum_{n=0}^{\infty} S^*S^n J(I-R^*R)^{\frac{1}{2}} R^n(f)$$

$$= S^* \underbrace{J(I-R^*R)^{\frac{1}{2}}(f)}_{\in ker(S^*)} + \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{S^*S}_{=I} S^{n-1} J(I-R^*R)^{\frac{1}{2}} R^n(f)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} S^n J(I-R^*R)^{\frac{1}{2}} R^n R(f) = WR(f)$$

Wegen $S^*W(H) = WR(H) \subseteq W(H)$ ist der Unterraum $W(H)$ invariant bezüglich S^* und $R = W^{-1}S^*W$ ist zu $S^*|_{W(H)}$ unitär äquivalent.

■

Literaturverzeichnis

[RR] Marvin Rosenblum and James Rovnyak: *Hardy Classes and Operator Theory*, Oxford University Press, New York 1985.

[WKB] Harald Woracek, Michael Kaltenbäck, Martin Blümlinger: *Funktionalanalysis*, Technische Universität Wien , 8. Auflage, Februar 2014.