Seminararbeit aus Analysis

Der Satz von Leech

Alexander Freißlinger

18. Dezember 2019

Inhaltsverzeichnis

0 Einleitung

0.1 Überblick

In dieser Seminararbeit wird die Faktorisierung und Majorisierung linearer Operatoren auf Hilberträumen behandelt. Dies wird in Kapitel 2 beschrieben und ausgeführt. Ziel dieser Arbeit ist es, den Satz von Leech zu formulieren und zu beweisen, was in Kapitel 3 geschieht. Um diese Resultate zu behandeln, braucht man zunächst ein hilfreiches Werkzeug, den Quadratwurzelsatz, der in Kapitel 1 behandelt wird.

0.2 Notation, Definitionen, Resultate

In dieser Arbeit wird $\mathcal{H}$ immer einen Hilbertraum mit Skalarprodukt $(\cdot, \cdot)$ und Norm $\|\cdot\|$ bezeichnen. Weiters wird mit $L_b(\mathcal{H})$ der Raum aller beschränkten linearen Abbildungen von $\mathcal{H}$ in sich selbst, mit A^* die Adjungierte eines linearen Operators A und mit I die Identität bezeichnet. Folgende Begriffe sind aus der Funktionalanalysis bekannt, werden aber hier aufgrund ihrer Wichtigkeit in dieser Arbeit nochmals aufgeführt:

- Ein linearer Operator $A \in L_b(\mathcal{H})$ heißt positiver Operator, wenn A selbstadjungiert ist und $(Ax, x) \geq 0$ für alle $x \in \mathcal{H}$ erfüllt.
- Ein selbstadjungierter Operator $A \in L_b(\mathcal{H})$ heißt kleiner gleich als ein selbstadjungierter Operator $B \in L_b(\mathcal{H})$, i.Z. $A \leq B$, wenn $B - A$ positiv ist.
- Ein Operator $A \in L_b(\mathcal{H})$ heißt Kontraktion oder kontrahierend, falls $\|Ax\| \leq \|x\|$ für alle $x \in \mathcal{H}$ gilt.

1 Der Quadratwurzelsatz

In diesem Kapitel wird der Quadratwurzelsatz für selbstadjungierte, positive Operatoren formuliert und bewiesen. Dieser wird in den darauffolgenden Kapiteln von großem Nutzen sein. Wir benötigen dafür zwei Lemmata.

1.1 Lemma. (Cauchyprodukt für Operatoren) Seien $A_n, B_n \in L_b(\mathcal{H})$, $n \in \mathbb{N}$. Die Reihen

$$A = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \quad \text{und} \quad B = \sum_{n=0}^{\infty} B_n$$

seien konvergent, wobei mindestens eine davon absolut konvergiert. Setzen wir

$$C_n = \sum_{k=0}^{n} A_k B_{n-k}, \quad n \in \mathbb{N},$$

dann gilt $\sum\limits_{n=0}^{\infty} C_n = AB$.

Beweis: Wir nehmen zunächst an, dass $A = \sum\limits_{n=0}^{\infty} A_n$ absolut konvergiert und setzen

$$S_n := \sum_{k=0}^{n} A_n, \quad T_n := \sum_{k=0}^{n} B_n \quad \text{und} \quad R_n := \sum_{k=0}^{n} C_n.$$

Wegen

$$\sum_{k=0}^{n} A_k T_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \sum_{j=0}^{n-k} A_k B_j = \sum_{\substack{0 \le j,k \le n \\ j+k \le n}} A_k B_j = \sum_{d=0}^{n} \sum_{k=0}^{d} A_k B_{d-k} = R_n \tag{1}$$

gilt

$$AB - R_n = (A - S_n)B + \sum_{k=0}^{n} A_k (B - T_{n-k}). \tag{2}$$

Da B beschränkt ist, konvergiert der Ausdruck $(A - S_n)B$ für $n \to \infty$ gegen 0. Wir schreiben

$$\sum_{k=0}^{n} A_k (B - T_{n-k}) = P_n + Q_n$$

mit

$$P_n := \sum_{k=0}^{N} A_k (B - T_{n-k}) \quad \text{und} \quad Q_n := \sum_{k=N+1}^{n} A_k (B - T_{n-k}), \quad \text{wobei} \quad N = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor.$$

Dabei gilt

$$\|P_n\| \le \sum_{k=0}^{N} \|A_k\| \, \|B - T_{n-k}\| \le \max_{N \le j \le n} \|B - T_j\| \sum_{k=0}^{N} \|A_k\|$$

Da die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} A_n$ absolut konvergiert, ist die Summe auf der rechten Seite der obigen Ungleichung beschränkt. Da T_n gegen B konvergiert, folgt $\max\limits_{N \leq j \leq n} \|B - T_j\| \to 0$ für $n \to \infty$. Somit konvergiert P_n gegen 0.

Wegen $\lim\limits_{k\to\infty} B - T_k = 0$ existiert ein $C \geq 0$ derart, dass $\|B - T_k\| \leq C$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Aus der absoluten Konvergenz von $\sum\limits_{n=0}^{\infty} A_n$ folgt auch

$$\|Q_n\| \leq \sum_{k=N+1}^{n} \|A_k\| \, \|B - T_{n-k}\| \leq C \sum_{k=N+1}^{n} \|A_k\| \to 0 \quad \text{für } n \to \infty.$$

Insgesamt konvergiert der Ausdruck in (2) gegen 0.

Für absolut konvergentes $B = \sum_{n=0}^{\infty} B_n$ gilt in Analogie zu (2)

$$AB - R_n = A(B - T_n) + \sum_{k=0}^{n} (A - S_{n-k}) B_k.$$

Der Beweis für $AB - R_n \to 0$ verläuft nun ähnlich wie im Fall der absoluten Konvergenz von $A = \sum\limits_{n=0}^{\infty} A_n$.

$\square$

1.2 Lemma. Es sei $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(z) = \sqrt{1-z}$. Dann lässt sich f auf ganz $[0,1]$ in eine Potenzreihe $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ entwickeln, wobei

a) $c_0 = 1,\ c_1 = -\frac{1}{2},\ c_n = -\frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-3)}{2^n \cdot n!}$,

b) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |c_n| < +\infty$,

c) $c_0 = 1,\ 2c_0c_1 = -1,\ \sum\limits_{k=0}^{n} c_k c_{n-k} = 0$ für $n \geq 2$,

d) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n = 0$.

Beweis: Nach dem Beweis von Lemma 12.15.5 in [3] kann man f auf $[0,1]$ in seine Taylorreihe $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n$ entwickeln. Mit $c_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$ erhalten wir d), wenn wir $z = 1$ setzen. Wir zeigen mit vollständiger Induktion, dass

$$f^{(n)}(z) = -\frac{1}{2^n} \prod_{i=1}^{n-1} (2i-1)(1-z)^{\frac{1-2n}{2}} \tag{3}$$

für $n \geq 2$. Aus

$$f'(z) = -\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{1-z}},$$

folgt für $n = 2$

$$f''(z) = (-\frac{1}{2}) \cdot (-\frac{1}{2}) \cdot (1-z)^{-\frac{3}{2}} \cdot (-1) = -\frac{1}{4}(1-z)^{-\frac{3}{2}}.$$

Gilt (3) für $n > 2$, so folgt

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(z) &= \Big(-\frac{1}{2^n}\prod_{i=1}^{n-1}(2i-1)(1-z)^{\frac{1-2n}{2}}\Big)' \\ &= -\frac{1}{2^n}\prod_{i=1}^{n-1}(2i-1)(\frac{1-2n}{2})(1-z)^{\frac{1-2n}{2}-1} \cdot (-1) \\ &= -\frac{1}{2^{n+1}}\prod_{i=1}^{n}(2i-1)(1-z)^{\frac{-1-2n}{2}}, \end{aligned}$$

und somit (3) für alle $n \geq 2$. Für $z = 0$, folgt a) aus (3). Da für $n \geq 2$ die c_n negatives Vorzeichen haben, ist auch b) gezeigt. Für $z \in [0,1]$ gilt

$$1 - z = \sqrt{1-z} \cdot \sqrt{1-z} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \sum_{k=0}^{n} c_k c_{n-k}.$$

Durch Koeffizientenvergleich erhalten wir $c_0 = 1$, $2c_0c_1 = -1$ und $\sum_{k=0}^{n} c_k c_{n-k} = 0$ für $n \geq 2$; siehe Korollar 6.8.9 in [3]. Somit ist auch c) bewiesen.

$\square$

1.3 Satz. (Quadratwurzelsatz) Sei $A \in L_b(H)$ selbstadjungiert und positiv. Dann gibt es einen eindeutigen Operator $B \in L_b(\mathcal{H})$, der ebenfalls selbstadjungiert und positiv ist, mit $B^2 = A$.

Beweis: Wir nehmen o.B.d.A. $\|A\| \leq 1$ an. Mit I und A ist auch $I - A$ selbstadjungiert. Gemäß Korollar 6.6.13 in [2] gilt

$$\|I - A\| = \sup_{\|x\|=1} |((I-A)x, x)| = \sup_{\|x\|=1} |1 - (Ax, x)|.$$

Aus $\|A\| \leq 1$ und der Tatsache, dass A positiv ist, folgt die Beziehung $(Ax, x) \in [0,1]$ für alle x mit $\|x\| = 1$. Also gilt

$$\|I - A\| = \sup_{\|x\|=1} |1 - (Ax, x)| = \sup_{\|x\|=1} (1 - (Ax, x)) \leq 1.$$

Aus dieser Abschätzung erhalten wir mit den Koeffizienten c_n aus Lemma 1.2, dass die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(I-A)^n$ absolut konvergiert. Den Grenzwert dieser Reihe bezeichnen wir mit B. Mit Lemma 1.1 und Lemma 1.2 folgt

$$B^2 = \left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n(I-A)^n\right)^2 = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} c_k c_{n-k}\right)(I-A)^n = (I-A)^0 - (I-A)^1 = A.$$

Da die c_n reell sind, und $(I-A)^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ selbstadjungiert ist, folgt aus der Biliniearität von $(\cdot,\cdot)$, dass auch jede Partialsumme $\sum\limits_{k=0}^{n} c_k(I-A)^k$ selbstadjungiert ist. Mit der Stetigkeit von $(\cdot,\cdot)$ erhalten wir die Selbstadjungiertheit von B.

Wir wollen nun zeigen, dass für einen positiven Operator T auch alle Potenzen T^n, $n \in \mathbb{N}$, positiv sind. Sei zunächst n gerade, also $n = 2k$ mit einem $k \in \mathbb{N}$. Aus der Selbstadjungiertheit von T folgt für ein $x \in \mathcal{H}$

$$(T^{2k}x, x) = (T^k x, T^k x) = \left\|T^k x\right\|^2 \geq 0.$$

Für $n = 2k+1$ gilt wegen der Positivität von T

$$(T^{2k+1}x, x) = (T^{k+1}x, T^k x) = (T(T^k x), T^k x) \geq 0.$$

Mit diesem Resultat und der Abschätzung $\|I-A\| \leq 1$ folgt $((I-A)^n x, x) \in [0,1]$ für alle $x \in \mathcal{H}$ mit $\|x\| = 1$. Wegen $((I-A)^0 x, x) = 1$ und $c_n < 0$ für $n \geq 1$ gilt für alle x mit $\|x\| = 1$

$$(Bx, x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n((I-A)^n x, x) \geq \sum_{n=0}^{\infty} c_n = 0.$$

Die letzte Gleichheit folgt aus Lemma 1.2. Aus der Linearität von B und $(\cdot,\cdot)$ folgt, dass $(Bx, x) \geq 0$ auch für alle $x \in \mathcal{H}$ gilt, womit B positiv ist.

Für die Eindeutigkeit zeigen wir zunächst, dass aus $TA = AT$ mit $T \in L_b(\mathcal{H})$ auch $TB = BT$. In der Tat impliziert $TA = AT$, dass T auch mit $I-A$ und infolge mit $(I-A)^n$ für beliebiges $n \in \mathbb{N}$ kommutiert. Also gilt

$$T\sum_{n=0}^{N} c_n(I-A)^n = \sum_{n=0}^{N} c_n T(I-A)^n = \sum_{n=0}^{N} c_n(I-A)^n T$$

und nach Grenzübergang $N \longrightarrow \infty$ schließlich $TB = BT$.

Ist $C \in L_b(\mathcal{H})$ ein weiterer selbstadjungierter, positiver Operator mit $C^2 = A$, so kommutiert C mit A und infolge auch mit B. Daher gilt

$$\begin{aligned}(B-C)B(B-C) + (B-C)C(B-C) &= ((B-C)B + (B-C)C)(B-C) \\ &= (B^2 - CB + BC - C^2)(B-C) = 0.\end{aligned} \tag{4}$$

Mit B und C sind auch die Operatoren $(B-C)B(B-C)$, $(B-C)C(B-C)$ und $B-C$ selbstadjungiert. Wegen

$$((B-C)B(B-C)x,x) = (B(B-C)x,(B-C)x) \geq 0$$

ist $(B-C)B(B-C)$ positiv. Entsprechendes gilt für $(B-C)C(B-C)$. Aus (4) folgt für alle $x \in \mathcal{H}$

$$((B-C)B(B-C)x,x) + ((B-C)C(B-C)x,x) = 0,$$

womit

$$((B-C)B(B-C)x,x) = ((B-C)C(B-C)x,x) = 0.$$

Also gilt $(B-C)B(B-C) = (B-C)C(B-C) = 0$ und daher auch

$$(B-C)^4 = \big[(B-C)B(B-C) - (B-C)C(B-C)\big](B-C) = 0.$$

Wegen

$$\begin{aligned}\big\|(B-C)^4\big\| &= \sup_{\|x\|=1} |\big((B-C)^4x,x\big)| = \sup_{\|x\|=1} \big\|(B-C)^2x\big\|^2 = \big\|(B-C)^2\big\|^2 \\ &= \sup_{\|x\|=1} |\big((B-C)^2x,x\big)|^2 = \sup_{\|x\|=1} \|(B-C)x\|^4 = \|B-C\|^4\end{aligned}$$

folgt schließlich $B = C$.

$\square$

2 Douglas Faktorisierung

Mit dem Quadratwurzelsatz können wir uns dem hauptsächlichen Thema dieser Arbeit, der Faktorisierung und Majorisierung von Operatoren, widmen.

2.1 Satz. (Douglas Faktorisierung) Für $A, B \in L_b(\mathcal{H})$ sind folgende Aussagen äquivalent.

a) $\operatorname{ran} A \subseteq \operatorname{ran} B$.

b) $AA^* \leq \lambda^2 BB^*$ für ein $\lambda \geq 0$.

c) Es gibt ein $C \in L_b(\mathcal{H})$ mit $A = BC$.

Beweis:
"(c) $\Rightarrow$ (a)": Aus $y \in \operatorname{ran} A$ folgt, dass es ein $x \in \mathcal{H}$ gibt mit $y = Ax = B(Cx)$, wodurch $y \in \operatorname{ran} B$.

"(c) $\Rightarrow$ (b)": Der Operator $B(\|C\|^2 I - CC^*)B^*$ ist positiv da für $x \in \mathcal{H}$

$$\begin{aligned}\big(B(\|C\|^2 I - CC^*)B^* x, x\big) &= \big((\|C\|^2 I - CC^*)B^* x, B^* x\big) \\ &= \|C\|^2 (B^* x, B^* x) - (C^* B^* x, C^* B^* x) \\ &= \|C^*\|^2 \|B^* x\|^2 - \|C^* B^* x\|^2 \geq 0.\end{aligned}$$

Wir erhalten für $\lambda = \|C\| \geq 0$

$$AA^* = BCC^*B^* = \|C\|^2 BB^* - B(\|C\|^2 I - CC^*)B^* \leq \lambda^2 BB^*.$$

"(a) $\Rightarrow$ (c)": Wegen $B \in L_b(\mathcal{H})$ ist $\ker B$ als Urbild der einpunktigen Menge $\{0\}$ unter einer stetigen Abbildung abgeschlossen. Somit gilt $\mathcal{H} = \ker B \oplus \ker B^\perp$. Aus $\operatorname{ran} A \subseteq \operatorname{ran} B$ folgern wir für ein $x \in \mathcal{H}$

$$Ax \in \operatorname{ran} B = B(\mathcal{H}) = B(\ker B \oplus \ker B^\perp) = B(\ker B^\perp).$$

Also gibt es ein $y \in \ker B^\perp$ mit $Ax = By$. Definieren wir eine Abbildung C_1 durch $C_1 x = y = (B_{|\ker B^\perp})^{-1}(Ax)$, so ist diese wohldefiniert und linear, da B auf $\ker B^\perp$ injektiv ist. Somit gilt $BC_1 x = By = Ax$.
Es bleibt zu zeigen, dass C_1 stetig ist. Dazu reicht es nach dem Satz vom abgeschlossenen Graphen, Satz 4.4.2 in [2], die Abgeschlossenheit von $graph(C_1)$ nachzuweisen.
Dazu sei $(x_n; y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $graph(C_1)$ mit $(x_n; y_n) \longrightarrow (x; y)$ für $n \longrightarrow \infty$. Da A und B stetig sind, folgt

$$\lim_{n\to\infty} Ax_n = Ax, \quad \lim_{n\to\infty} By_n = By.$$

Wegen $(x_n; y_n) \in graph(C_1)$ folgt $Ax_n = By_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Somit gilt auch $Ax = By$. Weil alle y_n in $\ker B^\perp$ liegen, tut es auch y. Infolge gilt $y = (B_{|\ker B^\perp})^{-1} Ax$, also $(x, y) \in graph(C_1)$.

"(b) $\Rightarrow$ (c)": $D := \{(B^*x; A^*x) : x \in \mathcal{H}\}$ bildet einen linearen Unterraum von $\operatorname{ran} B^* \times \operatorname{ran} A^* \leq \mathcal{H} \times \mathcal{H}$, also eine lineare Relation. Betrachten wir den Unterraum $mul(D) := \{y \in \operatorname{ran} A^* : (0; y) \in D\}$, so ist D genau dann der Graph eines wohldefinierten Operators, wenn $mul(D) = \{0\}$.
Für $y \in mul(D) \subseteq \operatorname{ran} A^*$ folgt aus $(0; y) \in D$ die Existenz eines $x \in \mathcal{H}$ mit $A^*x = y$ und $B^*x = 0$. Voraussetzungsgemäß erhalten wir

$$\|A^*x\|^2 = (AA^*x, x) \leq \lambda^2(BB^*x, x) = \lambda^2 \|B^*x\|^2 ,$$

womit auch $y = A^*x = 0$, also $mul(D) = \{0\}$.

D ist auf seinem Definitionsbereich $\{B^*x : x \in \mathcal{H}\}$ beschränkt, da für $x \in \mathcal{H}$

$$\|D(B^*x)\|^2 = \|A^*x\|^2 = (AA^*x, x) \leq \lambda^2(BB^*x, x) = \lambda^2 \|B^*x\|^2 ,$$

also $\|D\| \leq \lambda$. Wir setzen D stetig auf $\overline{\operatorname{ran} B^*}$ fort, und definieren $D = 0$ auf $\operatorname{ran} B^{*\perp}$. Damit ist D auf ganz $\mathcal{H}$ definiert und beschränkt. Definieren wir $C = D^*$, so ist auch C stetig und es gilt $A = (A^*)^* = (DB^*)^* = BC$.

□

2.2 Korollar. Es gelte (a), (b) und (c) aus Satz 2.1. Dann gibt es einen Operator $C \in L_b(\mathcal{H})$, welcher $A = BC$ erfüllt, mit den zusätzlichen Eigenschaften $\|C\|^2 = \min\{\mu \geq 0 : AA^* \leq \mu BB^*\}$, $\ker A = \ker C$, $\operatorname{ran} C \subseteq \overline{\operatorname{ran} B^*}$.

Beweis: Es seien C und D wie im Beweis von Satz 2.1, "(b) $\Rightarrow$ (c)".
Sei $M := \{\mu \geq 0 : AA^* \leq \mu BB^*\}$. Aus dem Beweis von "(b) $\Rightarrow$ (c)" folgt für jedes $\mu \in M$

$$\|C\|^2 = \|D\|^2 \leq \mu.$$

Also ist $\|C\|^2$ eine untere Schranke für M. Wie wir im Beweisteil "(c) $\Rightarrow$ (b)" gesehen haben, folgt

$$AA^* \leq \|C\|^2 BB^*,$$

womit $\|C\|^2 \in M$, also $\|C\|^2 = \min M$.

Aus der Definition und der Stetigkeit von D folgt

$$\overline{\operatorname{ran} D} = \overline{D(\mathcal{H})} = \overline{D(\overline{\operatorname{ran} B^*})} = \overline{D(\operatorname{ran} B^*)} = \overline{\{DB^*x : x \in \mathcal{H}\}} = \overline{\{A^*x : x \in \mathcal{H}\}} = \overline{\operatorname{ran} A^*},$$

und damit gilt auch $\ker C = \operatorname{ran} D^\perp = \operatorname{ran} A^{*\perp} = \ker A$.

Es gilt schließlich

$$\operatorname{ran} B^{*\perp} \subseteq \ker D = \operatorname{ran} C^\perp$$

und damit
$$\operatorname{ran} C \subseteq \overline{\operatorname{ran} B^*}.$$

$\square$

2.3 Lemma. Aus $A = BC = BE$ für $A, B, C, E \in L_b(\mathcal{H})$ mit $\operatorname{ran} C \subseteq \overline{\operatorname{ran} B^*}$ und $\operatorname{ran} E \subseteq \overline{\operatorname{ran} B^*}$ folgt $C = E$. Insbesondere ist der Operator C mit den Eigenschaften in Korollar 2.2 eindeutig.

Beweis: Aus $E^*B^* = A^* = C^*B^*$ folgt $E^*x = C^*x$ für alle $x \in \overline{\operatorname{ran} B^*}$. Also stimmt E^* auf $\overline{\operatorname{ran} B^*}$ mit C^* überein. Aus $\operatorname{ran} E \subseteq \overline{\operatorname{ran} B^*}$ folgt $\operatorname{ran} B^{*\perp} \subseteq \operatorname{ran} E^\perp = \ker E^*$. Genauso gilt $\operatorname{ran} B^{*\perp} \subseteq \ker C^*$, wodurch $E^*x = 0 = C^*x$ für alle $x \in \operatorname{ran} B^{*\perp}$.
Also gilt $E^* = C^*$ auch auf $\operatorname{ran} B^{*\perp}$. Wegen $\mathcal{H} = \overline{\operatorname{ran} B^*} \oplus \operatorname{ran} B^{*\perp}$ folgt daraus $C = E$ auf ganz $\mathcal{H}$.

$\square$

Aus Satz 2.1 und Korollar 2.2 erhalten wir

2.4 Korollar. Für $A, B \in L_b(\mathcal{H})$ gilt $AA^* \leq BB^*$ genau dann, wenn es eine Kontraktion $C \in L_b(\mathcal{H})$ mit $A = BC$ gibt.

3 Der Satz von Leech

Um den Satz von Leech zu formulieren, benötigen wir den Begriff des Shiftoperators.

3.1 Definition. Ein Operator $S \in L_b(\mathcal{H})$ heißt Isometrie, falls $(Sx, Sy) = (x, y)$ für alle $x, y \in \mathcal{H}$ gilt. Eine Isometrie $S \in L_b(\mathcal{H})$ heißt Shiftoperator, wenn $\lim\limits_{n\to\infty} \|(S^*)^n x\| = 0$ für alle $x \in \mathcal{H}$.

3.2 Beispiel. Sei $S \in L_b(\ell^2(\mathbb{N}))$ definiert durch

$$S(x_1, x_2, \dots) = (0, x_1, x_2, \dots).$$

Für die Adjungierte gilt

$$S^*(x_1, x_2, \dots) = (x_2, x_3, \dots),$$

wodurch $\ker S^* = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2(\mathbb{N}) : x_n = 0,\ n \geq 2\}$. Für ein $m \in \mathbb{N}$ gilt dann $\ker(S^*)^m = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2(\mathbb{N}) : x_n = 0,\ n \geq m+1\}$ sowie für $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell(\mathbb{N})$

$$\|(S^*)^m (x_n)_{n\in\mathbb{N}}\|^2 = \|(x_{m+1}, x_{m+2}, \dots)\|^2 = \sum_{n=m+1}^{\infty} |x_n|^2.$$

Da die Summe der Quadrate der x_n konvergiert, konvergiert der obige Ausdruck für $m \to \infty$ gegen 0. Damit ist der herkömmliche Shiftoperator auf dem Folgenraum auch ein Shiftoperator gemäß Definition 3.1.

3.3 Definition. Sei $S \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ ein Shiftoperator. Ein $A \in L_b(\mathcal{H})$ heißt S-analytisch, wenn $AS = SA$.

Um den Satz von Leech zu beweisen, benötigen wir noch einige Resultate über Isometrien und Shiftoperatoren.

3.4 Lemma. Für ein isometrisches $S \in L_b(\mathcal{H})$ gelten folgende Aussagen:

a) $S^*S = I$

b) Für ein $n \in \mathbb{N}$ ist $S^n(S^*)^n$ die orthogonale Projektion auf $\operatorname{ran} S^n$.

c) $S^n(S^*)^n$ konvergiert stark gegen die orthogonale Projektion Q auf den abgeschlossenen Unterraum $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} \operatorname{ran}(S^n(S^*)^n) = \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} \operatorname{ran} S^n$, also $\lim\limits_{n\to\infty} S^n(S^*)^n x = Qx$ für alle $x \in \mathcal{H}$.

Beweis: ad (a): Für alle $x, y \in \mathcal{H}$ gilt

$$(S^*Sx, y) = (Sx, Sy) = (x, y) = (Ix, y),$$

womit $S^*S = I$.

ad (b): Aus (a), angewandt auf das isometrische S^n, folgt

$$(S^n(S^*)^n)^2 = S^n((S^*)^n S^n)(S^*)^n = S^n(S^*)^n.$$

Damit ist $S^n(S^*)^n$ eine Projektion. Wegen $[S^n(S^*)^n]^* = S^n(S^*)^n$ ist dieser Operator sogar eine orthogonale Projektion. Es gilt $\operatorname{ran} S^n \subseteq \operatorname{ran}(S^n(S^*)^n)$. Da gemäß (a) der Operator S^* surjektiv ist, gilt sogar $\operatorname{ran}(S^n(S^*)^n) = \operatorname{ran} S^n$.

ad (c): Wegen

$$\operatorname{ran} S^{n+1}(S^*)^{n+1} = \operatorname{ran} S^{n+1} = S^n(\operatorname{ran} S) \subseteq \operatorname{ran} S^n = \operatorname{ran} S^n(S^*)^n$$

ist $(\operatorname{ran} S^n(S^*)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine absteigende Folge von linearen Unterräumen, die abgeschlossen sind, da $S^n(S^*)^n$ eine orthogonale Projektion abgibt.

Aus

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \operatorname{ran} S^n(S^*)^n = \Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \operatorname{ran}(S^n(S^*)^n)^\perp\Big)^\perp$$

folgt

$$\operatorname{ran} Q^\perp = \overline{\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \operatorname{ran}(S^n(S^*)^n)^\perp\Big)}, \tag{5}$$

wobei $\bigcup \operatorname{ran}(S^n(S^*)^n)^\perp$ ein dichter linearer Unterraum von $\operatorname{ran} Q^\perp$ ist.
Sei $x \in \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} \operatorname{ran}(S^n(S^*)^n)^\perp \subseteq \operatorname{ran} Q^\perp$. Da $(\operatorname{ran}(S^n(S^*)^n)^\perp)_{n\in\mathbb{N}}$ aufsteigend ist, gibt es ein $m \in \mathbb{N}$, so dass $x \in \operatorname{ran}(S^n(S^*)^n)^\perp$, also $S^n(S^*)^n x = 0$, für alle $n \geq m$. Insbesondere gilt $\lim\limits_{n\to\infty} S^n(S^*)^n x = 0 = Qx$.

Für $x \in \operatorname{ran} Q^\perp$ und beliebiges $\epsilon > 0$ gibt es wegen (5) ein $n \in \mathbb{N}$ und ein $y \in \operatorname{ran}(S^n(S^*)^n)^\perp$ mit $\|x-y\| < \epsilon$. Wegen $y \in \operatorname{ran}(S^n(S^*)^n)^\perp \subseteq \operatorname{ran}(S^m(S^*)^m)^\perp$ gilt $S^m(S^*)^m y = 0$ für alle $m \geq n$. Aus der Tatsache, dass $S^m(S^*)^m$ als orthogonale Projektion Abbildungsnorm 1 hat, folgt

$$\|S^m(S^*)^m x\| = \|S^m(S^*)^m x - S^m(S^*)^m y\| \leq \|x-y\| < \epsilon.$$

Da $\epsilon > 0$ beliebig war, gilt

$$\lim_{n\to\infty} S^n(S^*)^n x = 0 = Qx$$

Für $x \in \operatorname{ran} Q = \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} \operatorname{ran} S^n(S^*)^n$ gilt $x \in \operatorname{ran} S^n(S^*)^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, womit

$$\lim_{n\to\infty} S^n(S^*)^n x = \lim_{n\to\infty} x = x = Qx.$$

Wegen $\operatorname{ran} Q \oplus \operatorname{ran} Q^\perp = \mathcal{H}$ folgt $S^n(S^*)^n x \to Qx$ auf ganz $\mathcal{H}$.

$\square$

3.5 Proposition. Sei $S \in L_b(\mathcal{H})$ ein Shiftoperator, $\mathcal{C} = \ker S^* = \operatorname{ran} S^\perp$ und P_0 die orthogonale Projektion auf $\mathcal{C}$, also $P_0 = I - SS^*$. Dann gilt $\mathcal{H} = \bigoplus\limits_{n=0}^{\infty} S^n(\mathcal{C})$, wobei wir mit P_n die orthogonale Projektion auf $S^n(\mathcal{C})$ bezeichnen. Zudem gibt es für alle $x \in \mathcal{H}$ eine eindeutige Folge $(k_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ aus $\mathcal{C}$ derart, dass

$$x = \sum_{n=0}^{\infty} S^n(k_n).$$

Beweis: Wir wollen zeigen, dass der Operator $S^n P_0 (S^*)^n$ die orthogonale Projektion auf $S^n(\mathcal{C})$ ist. Wegen

$$(S^n P_0(S^*)^n)^2 = S^n P_0(S^*)^n S^n P_0(S^*)^n = S^n P_0^2(S^*)^n = S^n P_0(S^*)^n$$

ist $S^n P_0(S^*)^n$ eine Projektion, welche auch selbstadjungiert ist. Also ist $S^n P_0(S^*)^n$ eine orthogonale Projektion mit Bildbereich

$$\operatorname{ran} S^n P_0(S^*)^n = \operatorname{ran} S^n P_0 = S^n(P_0(\mathcal{H})) = S^n(\mathcal{C}).$$

Für $n, k \in \mathbb{N}$, mit $n < k$, und $x, y \in \mathcal{C}$ erhalten wir

$$(S^k x, S^n y) = (S^k P_0 x, S^n P_0 y) = (S^{k-n} P_0 x, P_0 y) = 0,$$

wobei die letzte Gleichheit wegen $S^{k-n}P_0 x \in \operatorname{ran} S$ und $P_0 y \in \ker S^* = \operatorname{ran} S^\perp$ gilt. Also stehen die Räume $S^n(\mathcal{C})$ paarweise orthogonal aufeinander.

Sei Q die orthogonale Projektion auf $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} \operatorname{ran} S^n$ wie in Lemma 3.4.
Da mit S auch S^n eine Isometrie ist, folgt für $x \in \mathcal{H}$

$$\|Qx\| = \lim_{n\to\infty} \|S^n(S^*)^n x\| = \lim_{n\to\infty} \|(S^*)^n x\| = 0,$$

also $Q = 0$.
Für $x \in \mathcal{H}$ gilt

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} S^k P_0 (S^*)^k x &= \sum_{k=0}^{n} S^k(I - SS^*)(S^*)^k x = \sum_{k=0}^{n} S^k(S^*)^k x - S^{k+1}(S^*)^{k+1} x \\ &= S^0(S^*)^0 x - S^{n+1}(S^*)^{n+1} x \longrightarrow (I-Q)x = x \quad \text{für } n \to \infty.\end{aligned}$$

Also ist $\mathcal{H}$ orthogonale Summe der Unterräume $S^n(\mathcal{C})$.

□

Nun haben wir genug Vorarbeit geleistet, um die zentrale Aussage dieser Arbeit, den Satz von Leech, zu formulieren und zu beweisen.

3.6 Satz. (Leech) Für einen Shiftoperator $S \in L_b(\mathcal{H})$ und S-analytische Kontraktionen $A, B \in L_b(\mathcal{H})$ gilt

$$AA^* \leq BB^* \Leftrightarrow \exists C \in L_b(\mathcal{H}) \text{ } S\text{-analytisch, kontrahierend mit } A = BC.$$

Beweis: In diesem Beweis sei $\mathcal{C} = \ker S^* = \operatorname{ran} S^\perp$ wie in Proposition 3.5 definiert. Es genügt, „$\Rightarrow$“ zu beweisen, da die andere Richtung direkt aus Korollar 2.4 folgt.
Sei also $AA^* \leq BB^*$. Aus dem Quadratwurzelsatz erhalten wir ein positives, selbstadjungiertes $D \in L_b(\mathcal{H})$, so dass $D^2 = BB^* - AA^*$. Wegen $DD^* \leq BB^*$ können wir Korollar 2.3 anwenden, und erhalten eine Kontraktion $T \in L_b(\mathcal{H})$ mit $D = BT$. Es folgt

$$BB^* - AA^* = D^2 = DD^* = BTT^*B^*.$$

Als orthogonale Projektion ist P_0 positiv und infolge auch AP_0A^*. Da A und B S-analytisch sind, gilt

$$\begin{aligned}
BB^* - AA^* &\leq BB^* - AA^* + AP_0A^* \\
&= BB^* - AA^* + A(I - SS^*)A^* \\
&= BB^* - AA^* + AA^* - ASS^*A^* \\
&= BB^* - BSS^*B^* + BSS^*B^* - ASS^*A^* \\
&= B(I - SS^*)B^* + S(BB^* - AA^*)S^* \\
&= BP_0B^* + SBTT^*B^*S^* \\
&= B(P_0 + STT^*S^*)B^*
\end{aligned} \tag{6}$$

Wegen $\operatorname{ran} P_0 = \mathcal{C} = kerS^*$ gilt $S^*P_0 = 0$ und damit

$$\begin{aligned}
(P_0 + STS^*)(P_0 + ST^*S^*) &= P_0^2 + (ST^*S^*P_0)^* + STS^*P_0 + STS^*ST^*S^* \\
&= P_0 + STT^*S^*.
\end{aligned}$$

Also können wir (6) schreiben als

$$D^2 = BB^* - AA^* \leq B(P_0 + STS^*)(P_0 + ST^*S^*)B^*.$$

Wieder mit Korollar 2.3 finden wir eine Kontraktion $U \in L_b(\mathcal{H})$ mit

$$B(P_0 + STS^*)U = D = BT.$$

Wir konstruieren nun die Folge $(V_n)_{n\in\mathbb{N}\cup\{0\}}$ von Operatoren induktiv durch $V_0 = T$, $V_{n+1} = (P_0 + SV_nS^*)U$.

Wir zeigen einige Eigenschaften dieser Folge mittels vollständiger Induktion.

- $BT = BV_n$:
  Für $n = 0$ ist die Aussage klar. Gilt sie für $n - 1$, dann folgt

  $$\begin{aligned}
  BV_n &= (BP_0 + BSV_{n-1}S^*)U = (BP_0 + SBV_{n-1}S^*)U \\
  &= (BP_0 + BSTS^*)U = B(P_0 + STS^*)U = BT.
  \end{aligned}$$

- $V_n^*V_n \leq I$:
  $V_0 = T$ ist kontraktiv, was die Aussage für $n = 0$ zeigt. Gilt $V_{n-1}V_{n-1}^* \leq I$, also

$\|V_{n-1}\| \leq 1$, so folgt wegen $S^*P_0 = 0$

$$\begin{aligned}
\|V_n\|^2 &= \|(P_0 + SV_{n-1}S^*)U\|^2 \leq \|P_0 + SV_{n-1}S^*\|^2 = \sup_{\|x\|=1} \|P_0x + SV_{n-1}S^*x\|^2 \\
&= \sup_{\|x\|=1} \big((P_0x, P_0x) + (P_0x, SV_{n-1}S^*x) \\
&\qquad + (SV_{n-1}S^*x, P_0x) + (SV_{n-1}S^*x, SV_{n-1}S^*x)\big) \\
&= \sup_{\|x\|=1} \big(((I - SS^*)x, x) + (S^*P_0x, V_{n-1}S^*x) \\
&\qquad + (V_{n-1}S^*x, S^*P_0x) + (V_{n-1}S^*x, V_{n-1}S^*x)\big) \\
&\leq \sup_{\|x\|=1} \big((x,x) - (S^*x, S^*x) + (S^*x, S^*x)\big) = \sup_{\|x\|=1} \|x\|^2 = 1.
\end{aligned}$$

- $V_n = \sum_{k=0}^{n-1} S^kP_0(US^*)^kU + S^nT(S^*U)^n$:
  Für $n = 0$ ist die Aussage richtig. Gilt sie für n, so folgt

$$\begin{aligned}
V_{n+1} &= (P_0 + SV_nS^*)U = P_0U + S\sum_{k=0}^{n-1} S^kP_0(US^*)^kUS^*U + S^{n+1}T(S^*U)^{n+1} \\
&= S^0P_0(US^*)^0U + \sum_{k=0}^{n-1} S^{k+1}P_0(US^*)^{k+1}U + S^{n+1}T(S^*U)^{n+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n} S^kP_0(US^*)^kU + S^{n+1}T(S^*U)^{n+1}.
\end{aligned}$$

Wir setzen $P_N = S^NP_0(S^*)^N$ für $N \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Gilt $n \geq N+1$, so folgt

$$\begin{aligned}
P_NV_n &= \sum_{k=0}^{n-1} S^NP_0(S^*)^NS^kP_0(US^*)^kU + S^NP_0(S^*)^NS^nT(S^*U)^n \\
&= \sum_{k=0}^{N} S^NP_0(S^*)^NS^kP_0(US^*)^kU + \sum_{k=N+1}^{n-1} S^NP_0S^{k-N}P_0(US^*)^kU \\
&\quad + S^NP_0S^{n-N}T(S^*U)^n \\
&= \sum_{k=0}^{N} S^NP_0(S^*)^NS^kP_0(US^*)^kU = P_NV_{N+1}.
\end{aligned}$$

Die vorletzte und letzte Gleichheit gilt wegen $P_0S = S^*P_0 = 0$. Wir wollen zeigen, dass $(V_n)_{n\in\mathbb{N}\cup\{0\}}$ konvergiert, wofür wir

$$K := \left\{ y \in \mathcal{H} : \text{ es existiert } N \in \mathbb{N} \text{ und } k_n \in \mathcal{C}, n = 1, \ldots, N \text{ mit } y = \sum_{n=0}^{N} S^nk_n \right\}$$

setzen. Nach Proposition 3.5 liegt K dicht in $\mathcal{H}$. Sei $x \in \mathcal{H}$ und $y = \sum_{n=0}^{N} S^nk_n \in K$. Da $(S^*)^n$ surjektiv ist, gibt es $y_0, \ldots y_N$ derart, dass $P_0k_j = k_j = (S^*)^jy_j$ und daher

$$y = \sum_{j=0}^{N} S^jP_0(S^*)^jy_j = \sum_{j=0}^{N} P_jy_j.$$

Für $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq N+1$ erhalten wir

$$(V_n x, y) = \sum_{j=0}^{N} (V_n x, P_j y_j) = \sum_{j=0}^{N} (P_j V_n x, y_j) = \sum_{j=1}^{N} (P_j V_{j+1} x, y_j).$$

Da die rechte Seite nicht mehr von n abhängt, konvergiert die Folge $\big((V_n x, y)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{C}$. Wir wollen nachweisen, dass diese Folge nicht nur für $y \in K$, sondern für alle $y \in \mathcal{H}$ und alle $x \in \mathcal{H}$ eine Cauchy-Folge bildet.

Dazu seien $x, z \in \mathcal{H}$ mit $x \neq 0$ und $\epsilon > 0$. Aufgrund der Dichtheit von K gibt es ein $y \in K$ mit $\|y - z\| < \frac{\epsilon}{4\|x\|}$. Da $\big((V_n x, y)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge ist, gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ mit $|((V_n - V_m)x, y)| < \frac{\epsilon}{2}$ für $n, m \geq N$. Es folgt

$$\begin{aligned}|((V_n - V_m)x, z)| &\leq |((V_n - V_m)x, z - y)| + |((V_n - V_m)x, y)| \\ &< (\|V_n\| + \|V_m\|) \cdot \|x\| \cdot \|z - y\| + \frac{\epsilon}{2} < \epsilon\end{aligned}$$

für $n, m \geq N$. Wobei hier verwendet wurde, dass $\|V_n\| \leq 1$ beziehungsweise $V_n^* V_n \leq I$. Für $x, y \in \mathcal{H}$ definieren wir g_{xy} als Grenzwert der Folge $\big((V_n x, y)\big)_{n\in\mathbb{N}}$. Wegen der Linearität des Grenzwerts und der Stetigkeit des Skalarprodukts ist $(x; y) \mapsto g_{xy}$ eine Sesquilinearform. Diese Abbildung ist sogar eine beschränkte Sesquilinearform, denn

$$|g_{xy}| = |\lim_{n\to\infty} (V_n x, y)| \leq \lim_{n\to\infty} \|V_n\| \, \|x\| \, \|y\| \leq \|x\| \, \|y\| \,.$$

Mit dem Satz von Lax-Milgram erhalten wir einen Operator $V \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ mit $g_{xy} = (Vx, y)$ für alle $x, y \in \mathcal{H}$ und $\|V\| \leq 1$. Das bedeutet aber nicht anderes, als dass $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ schwach gegen V konvergiert, wobei $V^* V \leq I$. Für beliebige $x, y \in \mathcal{H}$ gilt

$$\begin{aligned}(Vx, y) &= \lim_{n\to\infty} (V_n x, y) = \lim_{n\to\infty} ((P_0 + S V_{n-1} S^*) U x, y) \\ &= (P_0 U x, y) + \lim_{n\to\infty} (V_{n-1} S^* U x, S^* y) = (P_0 U x, y) + (V S^* U x, S^* y) \\ &= ((P_0 + S V S^*) U x, y),\end{aligned}$$

Wodurch $V = (P_0 + SVS^*)U$.Entsprechend folgt aus $BT = BV_n$, dass $BT = BV$. Weiters gilt

$$\begin{aligned}I - VV^* &= I - (P_0 + SVS^*) U U^* (P_0 + S V^* S^*) \\ &\geq I - (P_0 + SVS^*)(P_0 + S V^* S^*) \\ &= I - P_0 - P_0 S V^* S^* - S V S^* P_0 - S V V^* S^* \\ &= S S^* - S V V^* S^* = S(I - VV^*) S^*,\end{aligned}$$

wobei wir wieder $P_0 S = S^* P_0 = 0$ verwendet haben. Nun verwenden wir wieder die

S-Analytizität von A und B und die oben gezeigten Gleichheiten, um auf

$$\begin{aligned} AP_0^2A^* &= AP_0A^* = AA^* - ASS^*A^* + BB^* - BB^* \\ &= BB^* - ASS^*A^* - (BB^* - AA^*) \\ &= BB^* - ASS^*A^* - BSS^*B^* + BSS^*B^* - (BB^* - AA^*) \\ &= BP_0B^* + S(BB^* - AA^*)S^* - (BB^* - AA^*) \\ &= BP_0B^* + SBTT^*B^*S^* - BTT^*B^* \\ &= BP_0B^* + SBVV^*B^*S^* - BVV^*B^* = B(P_0 + SVV^*S - VV^*)B^* \\ &= B(I - SS^* - VV^* + SVV^*S^*)B^* = B\underbrace{(I - VV^* - S(I - VV^*)S^*)}_{\geq 0}B^* \end{aligned}$$

zu schließen. Wenden wir auf die obige Gleichung wieder Korollar 2.3 an, so erhalten wir eine Kontraktion $Q \in L_b(\mathcal{H})$ derart, dass $AP_0 = BR$ mit
$R = (I - VV^* - S(I - VV^*)S^*)^{\frac{1}{2}}Q$. Dabei gilt $AP_0 = AP_0P_0 = BRP_0$.

Für $n \leq m$ haben wir

$$\begin{aligned} \sum_{k=n}^{m} S^kRP_0R^*(S^*)^k \leq \sum_{k=n}^{m} S^kRR^*(S^*)^k &\leq \sum_{k=n}^{m} S^k(I - VV^* - S(I - VV^*)S^*)(S^*)^k \\ &= S^n(I - VV^*)(S^*)^n - S^{m+1}(I - VV^*)(S^*)^{m+1} \\ &\leq S^n(I - VV^*)(S^*)^n \leq S^n(S^*)^n, \end{aligned}$$

also $(\sum\limits_{k=n}^{m} S^kRP_0R^*(S^*)^kx, x) \leq (S^n(S^*)^nx, x)$ für alle $x \in \mathcal{H}$. Für ein $x \in \mathcal{H}$ gilt

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{k=n}^{m} S^kP_0R^*(S^*)^kx \right\|^2 &= \sum_{j=n}^{m}\sum_{k=n}^{m}(S^jP_0R^*(S^*)^jx, S^kP_0R^*(S^*)^kx) \\ &= \sum_{j=n}^{m}\sum_{k=n}^{m}(S^kRP_0(S^*)^kS^jP_0R^*(S^*)^kx, x). \end{aligned}$$

Wegen $S^*S = I$ und $P_0S = S^*P_0 = 0$ sind die Summanden in obiger Summe nur dann ungleich Null, wenn $k = j$, wodurch

$$\begin{aligned} &\sum_{j=n}^{m}\sum_{k=n}^{m}(S^kRP_0(S^*)^kS^jP_0R^*(S^*)^kx, x) \\ &= \sum_{k=n}^{m}(S^kRP_0R^*(S^*)^kx, x) \leq (S^n(S^*)^nx, x) = \|(S^*)^nx\|^2 \leq \|x\|^2. \end{aligned}$$

Da S ein Shiftoperator ist, konvergiert obiger Ausdruck für $n, m \to \infty$ gegen Null. Nach dem Cauchy-Kriterium konvergiert die Reihe $Ex := \sum\limits_{n=0}^{\infty} S^nP_0R^*(S^*)^nx$ für alle $x \in \mathcal{H}$, wobei $\|Ex\| \leq \|x\|$. Wir definieren $C := E^*$.

Wegen

$$\begin{aligned}
S^*E = S^* \sum_{n=0}^{\infty} S^n P_0 R^* (S^*)^n &= \sum_{n=1}^{\infty} S^{n-1} P_0 R^* (S^*)^n + S^* P_0 R^* \\
&= P_0 R^* S^* - P_0 R^* S^* + \sum_{n=1}^{\infty} S^{n-1} P_0 R^* (S^*)^n = P_0 R^* S^* + \sum_{n=2}^{\infty} S^{n-1} P_0 R^* (S^*)^n \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} S^n P_0 R^* (S^*)^{n+1} + P_0 R^* S^* = \sum_{n=0}^{\infty} S^n P_0 R^* (S^*)^{n+1} = ES^*
\end{aligned}$$

ist C S-analytisch. Zudem gilt

$$\begin{aligned}
EB^* = \sum_{n=0}^{\infty} S^n P_0 R^* (S^*)^n B^* &= \sum_{n=0}^{\infty} S^n P_0 R^* B^* (S^*)^n = \sum_{n=0}^{\infty} S^n (BRP_0)^* (S^*)^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} S^n P_0 A^* (S^*)^n = \sum_{n=0}^{\infty} S^n P_0 (S^*)^n A^* = \sum_{n=0}^{\infty} P_n A^* = IA^* = A^*.
\end{aligned}$$

Hier ist Proposition 3.5 und $AP_0 = BRP_0$ eingegangen. Somit gilt $A = BC$ und C hat alle gewünschten Eigenschaften, womit wir den zentralen Satz dieser Arbeit bewiesen haben.

□

Literatur

[1] R. G. Douglas. On Majorization, Factorization, and Range Inclusion of Operators on Hilbert Space. American Mathematical Society, 1966.

[2] M. Blümlinger H. Woracek, M. Kaltenbäck. Funktionalanalysis 1. Vorlesungsskript, 2016.

[3] Michael Kaltenbäck. Fundament Analysis. Heldermann Verlag, 2014.

[4] R. B. Leech. Factorization of analytic functions and operator inequalities. Integr. Equi. Oper. Theory 78, 71-73, 2014.