Seminararbeit aus Analysis

Quaternionen

Ausgearbeitet am Institut für
Analysis und Scientific Computing
an der Technischen Universität Wien

Unter der Aufsicht von
Ao.Univ.Prof. Dipl.-Ing. Dr.techn. Michael Kaltenbäck

von

Sigrid Gerger

1 Motivation

Analog zur Idee, den rellen Zahlenbereich $\mathbb{R}$ um die imaginäre Einheit i zu erweitern, um in der Lage zu sein, Gleichungen wie $x^2 + 1 = 0$ zu lösen oder Phänomene der zweidimensionalen Geometrie zu beschreiben, verlieh im 19. Jahrhundert der Mathematiker **Sir William Rowan Hamilton**[1] dem weiterführenden Konzept der *Quaternionen* eine fundierte Struktur.

Wie schon der *Satz von Frobenius* und folgende Erkenntnisse über reelle Divisionsalgebren über $\mathbb{R}^n$ vermuten lassen, die besagen, dass diese nur für Dimensionen $n = 1, 2, 4$ und 8 existieren, stieß der Physiker und Mathematiker Hamilton bei seinen Überlegungen über die Hinzunahme nur einer weiteren neuen Einheit zum bisherigen Konzept der komplexen Zahlen auf ein nicht zu überbrückendes Hindernis, da eine sinnvolle Definition der Multiplikation nicht möglich war. Abhilfe schaffte die Idee eines drei-komponentigen Imaginärteils, der nun endlich ein brauchbares Fundament für eine Realisierung der Erweiterung der bisher bekannten Konstruktionen lieferte.

Abbildung 1: Sir William Rowan Hamilton, Physiker, Astronom und Mathematiker.

Mit der Entdeckung der Quaternionen entstand nicht nur eine interessante Weiterführung der Idee der komplexen Zahlen, sondern mit ihr auch eine neue und bis heute genützte Möglichkeit, Problemstellungen in der Quantenmechanik zu formulieren oder mit Rotationen im Dreidimensionalen bequem zu arbeiten.

2 Überblick

In dieser Seminararbeit soll das Konzept der Quaternionen vorgestellt werden. Grundlegende Definitionen werden in Abschnitt 3 postuliert, um eine Vorstellung des Raumes $\mathbb{H}$ der Quaternionen zu liefern und wichtige Eigenschaften und interessante Resultate werden gelistet, um eine grobe Idee über

[1] Irland, 1805-1865

deren Verhalten zu vermitteln. Durch die Definition einer Addition, eines inneren und äußeren Produkts werden wir aus der Menge der Quaternionen schließlich eine Struktur erhalten, die sich im Hauptresultat (Abschnitt 4) als Schiefkörper herausstellen wird.

3 Grundlagen

Betrachtet man den wohlbekannten Raum $\mathbb{R}^4$, wobei die Elemente $1, i, j$ und k seine Standardnormalbasis bezeichnen, so wird $\mathbb{R}^4$ zusammen mit der gewohnten, komponentenweisen Addition und Skalarmultiplikation zu einem linearen Raum. Verknüpft man diese Überlegungen mit Hamilton's Ideen, angelehnt an das Konstrukt der komplexen Zahlen $\mathbb{C}$, so gelangt man zu folgender

Definition 3.1. Der lineare Raum $\mathbb{R}^4$, versehen mit der komponentenweisen Addition und der Skalarmultiplikation, sei zusätzlich versehen mit der bilinearen Abbildung $\mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, dem sogenannten *quaternionischen Produkt*, welches definiert ist durch seine Wirkung auf den Basiselementen, zusammengefasst im *Hamilton Tableau*:

	1	**i**	**j**	**k**
1	1	i	j	k
i	i	-1	k	-j
j	j	-k	-1	i
k	k	j	-i	-1

Tabelle 1: Hamilton Tableau

in welchem das Ergebnis der Multiplikation des an m-ter Stelle angeführten Basiselements in der ersten Spalte mit dem an n-ter Stelle angeführten Basiselements der ersten Zeile des Tableaus im mn-ten Eintrag dieser Matrixdarstellung nachzulesen ist.

Für Elemente aus $\mathbb{R}^4$ versehen mit diesen Operationen schreiben wir auch $\mathbb{H}$. Die Elemente von $\mathbb{H}$ werden üblicherweise in der Form $x = x_0 1 + x_1 i + x_2 j + x_3 k$ dargestellt, wobei 1 oft weggelassen wird.

Bemerkung 3.1. Wie aus der linearen Algebra bekannt ist, lässt sich eine auf den Basiselementen eines Raumes definierte Abbildung in eindeutiger Weise zu einer linearen Abbildung auf den gesamten Raum fortsetzen; vgl. [2]. Explizit gilt für $x = x_0 + x_1 i + x_2 j + x_3 k$ und $y = y_0 + y_1 i + y_2 j + y_3 k$ aus $\mathbb{H}$:

$$
\begin{aligned}
xy = &(x_0y_0 - x_1y_1 - x_2y_2 - x_3y_3) \\
&+ (x_0y_1 + x_1y_0 + x_2y_3 - x_3y_2)i \\
&+ (x_0y_2 + x_2y_0 + x_3y_1 - x_1y_3)j \\
&+ (x_0y_3 + x_3y_0 + x_1y_2 - x_2y_1)k
\end{aligned} \tag{1}
$$

Satz 3.1. Die Multiplikation auf $\mathbb{H}$ ist assoziativ, jedoch nicht kommutativ.

Beweis. Wegen der Bilinearität der Multiplikation reicht es, die Assoziativität für die Basiselemente $1, i, j$ und k nachzuweisen. Um beispielsweise $(ij)k = i(jk)$ zu zeigen, entnehme dem Hamilton Tableau 1 einerseits, dass $ij = k$ und daher $(ij)k = kk = -1$, und andererseits $jk = i$, also $i(jk) = ii = -1$. Analog verfährt man mit den übrigen Kombinationen der Basiselemente, was schließlich die Assoziativität auf ganz $\mathbb{H}$ nachweist.

Die Nicht-Kommutativität wird durch ein Gegenbeispiel veranschaulicht. Seien dazu $i, j \in \mathbb{H}$ zwei der Basiselemente. Aus dem Hamilton Tableau 1 ist abzulesen, dass $ij = k$ und $ji = -k$, also $ij \neq ji$. $\square$

Definition 3.2. Der *Realteil* von $x = x_0 + x_1i + x_2j + x_3k \in \mathbb{H}$ ist definiert durch $\mathtt{Re}(x) = x_0$, sein *Imaginärteil* ist definiert durch $\mathtt{Im}(x) = x_1i + x_2j + x_3k$, als *Komplexteil* von x bezeichnet man $\mathtt{Co}(x) = x_0 + x_1i$. Ist $|x| = 1$ (vgl. Definition 3.6), so nennt man das Quaternion *normiert*.

Definition 3.3. $x \in \mathbb{H}$ heißt *Reines Quaternion*, falls $\mathtt{Re}(x) = 0$. x heißt *Reelles Quaternion*, falls $\mathtt{Im}(x) = 0$

Ein Kriterium dafür, ob es sich um ein reines Quaternion handelt, liefert folgendes

Lemma 3.1. Ein Quaternion x ist rein genau dann, wenn sein Quadrat eine nicht-positive, reele Zahl ist.

Beweis. Für die Richtung von links nach rechts betrachte das reine Quaternion $x = x_1i + x_2j + x_3k \in \mathbb{H}$. Dann gilt:

$$
\begin{aligned}
x^2 = &(x_1i + x_2j + x_3k)(x_1i + x_2j + x_3k) \\
= &x_1^2i^2 + x_1ix_2j + x_1ix_3k + x_2jx_1i + \\
&x_2^2j^2 + x_2jx_3k + x_3kx_1i + x_3kx_2j + x_3^2k^2 \\
= &-x_1^2 + x_1x_2ij + x_1x_3ik + x_2x_1ji - \\
&x_2^2 + x_2x_3jk + x_3x_1ki + x_3x_2kj - x_3^2 \\
= &-x_1^2 + x_1x_2k - x_1x_3j - x_2x_1k - x_2^2 + x_2x_3i + x_3x_1j - x_3x_2i - x_3^2 \\
= &-(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)
\end{aligned}
$$

Wegen $x_i \in \mathbb{R}$ für $i = 1, 2, 3$ gilt also $x^2 \in \mathbb{R}$ und $-(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) \leq 0$.

Sei umgekehrt $x = x_0 + x_1 i + x_2 j + x_3 k \in \mathbb{H}$ so, dass $x^2 \in \mathbb{R}_0^-$. Betrachte

$$\begin{aligned} x^2 &= (x_0 + x_1 i + x_2 j + x_3 k)(x_0 + x_1 i + x_2 j + x_3 k) \\ &= x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 + 2x_0 x_1 i + 2x_0 x_2 j + 2x_0 x_3 k \\ &= x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 + 2x_0(x_1 i + x_2 j + x_3 k) \end{aligned}$$

Da x^2 reell ist, folgt $2x_0(x_1 i + x_2 j + x_3 k) = 0$. Es muss also $x_0 = 0$ oder $(x_1 i + x_2 j + x_3 k) = 0$, also $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ gelten.
Fall 1: $x_0 = \mathtt{Re}(x) = 0$. Dann ist x ist reines Quaternion.
Fall 2: $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, $x_0 \neq 0$. Dann würde $x^2 \geq 0$ folgen, was zu einem Widerspruch führt.

$\square$

Wie in Satz 3.1 gezeigt wurde, ist die Multiplikation zweier Quaternionen im Allgemeinen nicht kommutativ. Im Folgenden wird jedoch die Teilmenge des Raumes $\mathbb{H}$ bestimmt, für welche die Kommutativität bezüglich der Multiplikation gilt.

Definition 3.4. Sei $(S, \cdot)$ eine Gruppe. Das *Zentrum* von $(S, \cdot)$ ist die Teilmenge $S^\times \subseteq S$ der Menge S, für die die Verknüpfung $\cdot$ kommutiert, d.h.

$$S^\times = \{x \in S | \; \forall s \in S : \quad s \cdot x = x \cdot s\}$$

Definition 3.5. Sei $x = x_0 \in \mathbb{R}$ ($x = x_0 + x_1 i \in \mathbb{C}$). Die *Einbettung der reellen Zahlen* (*der komplexen Zahlen*) in die Menge der Quaternionen ist definiert durch die Abbildung $\iota_\mathbb{R} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{H} : x \mapsto x_0 + 0i + 0j + 0k$ ($\iota_\mathbb{C} : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{H} : x \mapsto x_0 + x_1 i + 0j + 0k$).

Satz 3.2. Das Zentrum $\mathbb{H}^\times \subset \mathbb{H}$ der Menge der Quaternionen bezüglich des auf ihnen definierten quaternionischen Produkts entspricht $\mathbb{R}$, das heißt $\mathbb{H}^\times = \iota_\mathbb{R}(\mathbb{R})$.

Beweis. Für die eine Richtung gilt zu zeigen, dass $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{H}^\times$. Sei dazu $x_0 \in \mathbb{R}$ und $y = y_0 + y_1 i + y_2 j + y_3 k \in \mathbb{H}$. Vermöge der Einbettung $\iota_\mathbb{R}$ ergibt sich duch die Anwendung von Gleichung (1) und der Kommutativität der

Multiplikation in den reellen Zahlen $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
\iota_{\mathbb{R}}(x_0)\cdot y =&(x_0+0i+0j+0k)\cdot(y_0+y_1i+y_2j+y_3k)\\
=&(x_0y_0-0y_1-0y_2-0y_3)\\
&+(x_0y_1+0y_0+0y_3-0y_2)i\\
&+(x_0y_2+0y_0+0y_1-0y_3)j\\
&+(x_0y_3+0y_0+0y_2-0y_1)k\\
=&(y_0x_0-y_10-y_20-y_30)\\
&+(x_0y_1+y_00+y_30-y_20)i\\
&+(x_0y_2+y_00+y_10-y_30)j\\
&+(x_0y_3+y_00+y_20-y_10)k\\
=&(y_0+y_1i+y_2j+y_3k)\cdot(x_0+0i+0j+0k)=y\cdot\iota_{\mathbb{R}}(x_0)
\end{aligned}$$

womit gezeigt ist, dass die Mutiplikation eines Quaternions mit einer reellen Zahl kommutiert.

Um die umgekehrte Inklusion $\mathbb{H}^\times \subseteq \mathbb{R}$ zu zeigen, betrachte ein beliebiges Element $x = x_0 + x_1i + x_2j + x_3k \in \mathbb{H}^\times$ aus dem Zentrum von $\mathbb{H}$. Da x aus $\mathbb{H}^\times$ ist und daher mit allen $y \in \mathbb{H}$ kommutiert, kommutiert x insbesondere mit i und j. Betrachte die Multiplikation von x mit i:

$$\begin{aligned}
ix = xi \Rightarrow\ & ix - xi = 0\\
&\Rightarrow i(x_0+x_1i+x_2j+x_3k)-(x_0+x_1i+x_2j+x_3k)i=0\\
&\Rightarrow x_0i+x_1i^2+x_2ij+x_3ik-(x_0i+x_1i^2+x_2ji+x_3ki)=0\\
&\Rightarrow x_0i-x_1+x_2k-x_3j-(x_0i-x_1-x_2k+x_3j)=0\\
&\Rightarrow x_0i-x_1+x_2k-x_3j-x_0i+x_1+x_2k-x_3j=0\\
&\Rightarrow 2(x_2k-x_3j)=0
\end{aligned}$$

Da $x_2, x_3 \in \mathbb{R}$ und x_2k und x_3j linear unabhängig sind, folgt $x_2 = x_3 = 0$.

Betrachtet man die Multiplikation von x mit j, so ergibt sich:

$$\begin{aligned}
jx = xj \Rightarrow\ & jx - xj = 0\\
&\Rightarrow j(x_0+x_1i+x_2j+x_3k)-(x_0+x_1i+x_2j+x_3k)j=0\\
&\Rightarrow x_0j+x_1ji+x_2j^2+x_3jk-(x_0j+x_1ij+x_2j^2+x_3kj)=0\\
&\Rightarrow x_0j-x_1k-x_2+x_3i-(x_0j+x_1k-x_2-x_3i)=0\\
&\Rightarrow x_0j-x_1k-x_2+x_3i-x_0j-x_1k+x_2+x_3i\\
&\Rightarrow 2(x_3i-x_1k)=0
\end{aligned}$$

Da im vorherigen Teil des Beweises unter gegebenen Voraussetzungen bereits $x_3 = 0$ gezeigt wurde, impliziert letzte Gleichheit schließlich $x_1 = 0$. Da nun $x_i = 0$ für $i = 1, 2, 3$, folgt $\texttt{Im}(x) = 0$ und daher $x \in \mathbb{R}$. $\square$

Nun sollen am Ende dieses Abschnitts noch einige ausständige Grundbegriffe des Raumes der Quaternionen und deren Eigenschaften gelistet werden, um für das Hauptresultat im nächsten Abschnitt, nämlich die Schiefkörpereigenschaft der Quaternionen mit den auf ihr definierten Rechenoperationen, alle benötigten Werkzeuge zu Verfügung zu stellen. Seien dazu in weiterer Folge wieder $x = x_0+x_1i+x_2j+x_3k \in \mathbb{H}$, $y = y_0+y_1i+y_2j+y_3k \in \mathbb{H}$ und $\lambda \in \mathbb{R}$.

Definition 3.6. Das zu x *konjugierte Quaternion* ist definiert durch $\overline{x} = x_0 - x_1i - x_2j - x_3k$. Der *Betrag* eines Quaternions x ist definiert als $|x| = \sqrt{\overline{x}x} = \sqrt{x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$.

Lemma 3.2. Die Konjugation als Abbildung $\mathbb{H} \to \mathbb{H}, x \mapsto \overline{x}$ erfüllt für alle $x, y \in \mathbb{H}$ und alle $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\overline{x+y} = \overline{x} + \overline{y}, \quad \overline{\lambda x} = \lambda \overline{x}, \quad \overline{\overline{x}} = x \quad \text{und} \quad \overline{xy} = \overline{y}\,\overline{x}.$$

Beweis. Für die Linearität bezüglich der Addition betrachte

$$\begin{aligned}
\overline{x+y} &= \overline{x_0 + x_1i + x_2j + x_3k + y_0 + y_1i + y_2j + y_3k} \\
&= \overline{(x_0+y_0) + (x_1+y_1)i + (x_2+y_2)j + (x_3+y_3)k} \\
&= (x_0+y_0) - (x_1+y_1)i - (x_2+y_2)j - (x_3+y_3)k \\
&= x_0 + y_0 - x_1i - y_1i - x_2j - y_2j - x_3k - y_3k \\
&= \overline{x} + \overline{y}.
\end{aligned}$$

Die Eigenschaft der Konjugation, selbstinvers zu sein, wird ersichtlich durch

$$\begin{aligned}
\overline{\overline{x}} &= \overline{\overline{x_0 + x_1i + x_2j + x_3k}} \\
&= \overline{x_0 - x_1i - x_2j - x_3k} \\
&= x_0 + x_1i + x_2j + x_3k.
\end{aligned}$$

Zudem gilt:

$$
\begin{aligned}
\overline{y}\,\overline{x} =&(\overline{y_0+y_1i+y_2j+y_3k}\,)(\overline{x_0+x_1i+x_2j+x_3k})\\
=&(y_0-y_1i-y_2j-y_3k)(x_0-x_1i-x_2j-x_3k)\\
=&y_0x_0-y_0x_1i-y_0x_2j-y_0x_3k-y_1ix_0+y_1ix_1+i+y_1ix_2j+y_1ix_3k\\
&-y_2jx_0+y_2jx_1i+y_2jx_2j+y_2jx_3k-y_3kx_0+y_3kx_1i+y_3kx_2j+y_3kx_3k\\
=&y_0x_0-y_0x_1i-y_0x_2j-y_0x_3k-y_1x_0i+y_1x_1(-1)+y_1x_2k+y_1x_3(-j)\\
&-y_2x_0j+y_2x_1(-k)+y_2x_2(-1)+y_2x_3i-y_3x_0k+y_3x_1j+y_3x_2(-i)+y_3x_3(-1)\\
=&y_0x_0-y_0x_1i-y_0x_2j-y_0x_3k-y_1x_0i-y_1x_1+y_1x_2k-y_1x_3j\\
&-y_2x_0j-y_2x_1k-y_2x_2+y_2x_3i-y_3x_0k+y_3x_1j-y_3x_2i-y_3x_3\\
=&y_0x_0-y_1x_1-y_2x_2-y_3x_3+(-y_0x_1-y_1x_0+y_2x_3-y_3x_2)i+\\
&(-y_0x_2-y_1x_3-y_2x_0+y_3x_1)j+(-y_0x_3+y_1x_2-y_2x_1-y_3x_0)k\\
=&y_0x_0-y_1x_1-y_2x_2-y_3x_3-(y_0x_1+y_1x_0-y_2x_3+y_3x_2)i-\\
&(y_0x_2+y_1x_3+y_2x_0-y_3x_1)j-(y_0x_3-y_1x_2+y_2x_1+y_3x_0)k\\
=&\overline{x_0y_0-x_1y_1-x_2y_2-x_3y_3+(x_1y_0+x_0y_1-x_3y_2+x_2y_3)i+}\\
&\overline{(x_2y_0+x_3y_1+x_0y_2-x_1y_3)j+(x_3y_0-x_2y_1+x_1y_2+x_0y_3)k}\\
=&\overline{xy}.
\end{aligned}
$$

Schließlich gilt:

$$
\begin{aligned}
\overline{\lambda x} =&\overline{\lambda(x_0+x_1i+x_2j+x_3k)}\\
=&\overline{(\lambda x_0+\lambda x_1i+\lambda x_2j+\lambda x_3k)}\\
=&(\lambda x_0-\lambda x_1i-\lambda x_2j-\lambda x_3k)\\
=&\lambda(x_0-x_1i-x_2j-x_3k)\\
=&\lambda\overline{x}.
\end{aligned}
$$

□

4 Der Schiefkörper der Quaternionen

Da nun alle notwenigen Grundbegriffe in Zusammenhang mit dem Raum $\mathbb{H}$ im vorhergehenden Abschnitt behandelt, und einige Eigenschaften der auf ihm definierten Operationen aufgezeigt wurden, sind wir nun in der Lage zu zeigen, welche Struktur sich den Quaternionen zusammen mit definierten Rechenoperationen zuordnen lässt. Die fehlende Kommutativität bezüglich des quaternionischen Produkts liefert hierbei das ausschlaggebende Kriterium, welches bei fortschreitender Arbeit mit Quaternionen, wie beispielsweise bei der Betrachtung von Vektorräumen oder Hilberträumen über $\mathbb{H}$, dazu anhält, Vorsicht walten zu lassen.

Definition 4.1. Eine Menge S zusammen mit den zweistelligen Operationen $+ : S \times S \longrightarrow S$, $\cdot : S \times S \longrightarrow S$ und den ausgezeichneten Elementen $0 \in S$ und $1 \in S$ bilden einen *Schiefkörper* $(S, +, \cdot, 0, 1)$, wenn gilt, dass $(S, +, 0)$ eine abelsche Gruppe und $(S \setminus \{0\}, \cdot, 1)$ eine Gruppe ist und sie mit diesen Operationen das Distributivgesetz erfüllt, also wenn gilt:

$$
\begin{aligned}
&(x+y)+z = x+(y+z) && (\textbf{Assoziativität})\\
&(xy)z = x(yz) && \\
&x \cdot (y+z) = xy + xz && (\textbf{Distributivität})\\
&(x+y) \cdot z = xz + yz && \\
&x + y = y + x && (\textbf{Kommutativität bzgl. } +)\\
&\exists^* 0 \in S : x + 0 = 0 + x = x && (\textbf{Neutrales Element})\\
&\exists^* 1 \in S \setminus \{0\} : x \cdot 1 = 1 \cdot x = x && \\
&\exists^* - x \in S : -x + x = 0 && (\textbf{Inverses Element})\\
&\exists^* x^{-1} \in S \setminus \{0\} : xx^{-1} = x^{-1}x = 1 &&
\end{aligned}
$$

Bemerkung 4.1. Ein Schiefkörper unterscheidet sich von einem Körper also allein in der im Allgemeinen nicht vorherrschenden Kommutativität der Mutiplikation.

Nun folgt wie angekündigt schließlich der Satz, der zeigt, dass es sich bei der durch die Quaternionen, zusammen mit der auf ihnen definierten komponentenweisen Addition, Skalarmultiplikation und dem quaternionischen Produkt gebildeten Struktur um einen Schiefkörper handelt.

Satz 4.1. Sei $0 := 0 + 0i + 0j + 0k$ und $1 := 1 + 0i + 0j + 0k$. $(\mathbb{H}, +, \cdot, 0, 1)$ bildet zusammen mit den im vorherigen Abschnitt definierten Operationen einen Schiefkörper.

Beweis. Da $\mathbb{H}$ mit der Operation $+$ dem Vektorraum $\mathbb{R}^4$ entspricht, bildet $(\mathbb{H}, +)$ eine abelsche Gruppe.
Laut Satz 3.1 ist auch die Multiplikation assoziativ.

Das Distributivgesetz ist nichts anderes als die geforderte Bilinearität der Multiplikation.

Um zu zeigen, dass $1 = 1 + 0i + 0j + 0k$ das neutrale Element bezüglich der Multiplikation auf $\mathbb{H}$ ist, rechnen wir:

$$\begin{aligned}
x \cdot 1 =&(x_0 + x_1 i + x_2 j + x_3 k)(1 + 0i + 0j + 0k)\\
=&(x_0 \cdot 1 - x_1 \cdot 0 - x_2 \cdot 0 - x_3 \cdot 0)\\
&+ (x_0 \cdot 0 + x_1 \cdot 1 + x_2 \cdot 0 - x_3 \cdot 0)i\\
&+ (x_0 \cdot 0 + x_2 \cdot 1 + x_3 \cdot 0 - x_1 \cdot 0)j\\
&+ (x_0 \cdot 0 + x_3 \cdot 1 + x_1 \cdot 0 - x_2 \cdot 0)k\\
=&x_0 + x_1 i + x_2 j + x_3 k\\
=&x
\end{aligned}$$

Wegen Satz 3.2 folgt, dass 1 sowohl das rechts-, als auch das linksneutrale Element in $\mathbb{H}$ bezüglich der Multiplikation ist.

Des weiteren behaupten wir, dass $x^{-1} := \frac{\overline{x}}{|x|^2}$ das zu x inverse Element bezüglich der Multiplikation ist, was sich wieder durch einigen rechnerischen Aufwand folgendermaßen zeigen lässt:

$$\begin{aligned}
x \cdot \frac{\overline{x}}{|x|^2} =&(x_0 + x_1 i + x_2 j + x_3 k)\frac{x_0 - x_1 i - x_2 j - x_3 k}{x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}\\
=&x_0 \frac{x_0 - x_1 i - x_2 j - x_3 k}{x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} + x_1 i \frac{x_0 - x_1 i - x_2 j - x_3 k}{x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} +\\
&x_2 j \frac{x_0 - x_1 i - x_2 j - x_3 k}{x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} + x_3 k \frac{x_0 - x_1 i - x_2 j - x_3 k}{x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}\\
=&x_0 \frac{x_0}{x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} - x_0 \frac{x_1 i}{x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} - x_0 \frac{x_2 j}{x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} -\\
&x_0 \frac{x_3 k}{x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} + x_1 i \frac{x_0}{x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} - x_1 i \frac{x_1 i}{x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} -\\
&x_1 i \frac{x_2 j}{x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} - x_1 i \frac{x_3 k}{x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} + x_2 j \frac{x_0}{x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} -\\
&x_2 j \frac{x_1 i}{x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} - x_2 j \frac{x_2 j}{x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} - x_2 j \frac{x_3 k}{x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} +\\
&x_3 k \frac{x_0}{x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} - x_3 k \frac{x_1 i}{x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} - x_3 k \frac{x_2 j}{x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} -\\
&x_3 k \frac{x_3 k}{x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}
\end{aligned}$$

$$=\underbrace{\frac{x_0^2+x_1^2+x_2^2+x_3^2}{x_0^2+x_1^2+x_2^2+x_3^2}}_{=1}+$$

$$\underbrace{\left(-\frac{x_0x_1}{x_0^2+x_1^2+x_2^2+x_3^2}+\frac{x_0x_1}{x_0^2+x_1^2+x_2^2+x_3^2}-\frac{x_2x_3}{x_0^2+x_1^2+x_2^2+x_3^2}+\frac{x_2x_3}{x_0^2+x_1^2+x_2^2+x_3^2}\right)}_{=0}i+$$

$$\underbrace{\left(-\frac{x_0x_2}{x_0^2+x_1^2+x_2^2+x_3^2}+\frac{x_0x_2}{x_0^2+x_1^2+x_2^2+x_3^2}-\frac{x_1x_3}{x_0^2+x_1^2+x_2^2+x_3^2}+\frac{x_1x_3}{x_0^2+x_1^2+x_2^2+x_3^2}\right)}_{=0}j+$$

$$\underbrace{\left(-\frac{x_0x_3}{x_0^2+x_1^2+x_2^2+x_3^2}+\frac{x_0x_3}{x_0^2+x_1^2+x_2^2+x_3^2}-\frac{x_1x_2}{x_0^2+x_1^2+x_2^2+x_3^2}+\frac{x_1x_2}{x_0^2+x_1^2+x_2^2+x_3^2}\right)}_{=0}k$$

$$=1$$

Damit ist gezeigt, dass $\frac{\overline{x}}{|x|^2}$ das rechtsinverse Element in $\mathbb{H}$ bezüglich der Multiplikation ist. Durch analoge Rechnung erweist sich $\frac{\overline{x}}{|x|^2}$ ebenfalls als linksinverses Element:

$$\begin{aligned}
\frac{\overline{x}}{|x|^2}\cdot x =&\frac{x_0-x_1i-x_2j-x_3k}{x_0^2+x_1^2+x_2^2+x_3^2}(x_0+x_1i+x_2j+x_3k)\\
=&\frac{x_0-x_1i-x_2j-x_3k}{x_0^2+x_1^2+x_2^2+x_3^2}x_0+\frac{x_0-x_1i-x_2j-x_3k}{x_0^2+x_1^2+x_2^2+x_3^2}x_1i+\\
&\frac{x_0-x_1i-x_2j-x_3k}{x_0^2+x_1^2+x_2^2+x_3^2}x_2j+\frac{x_0-x_1i-x_2j-x_3k}{x_0^2+x_1^2+x_2^2+x_3^2}x_3k\\
=&\frac{x_0}{x_0^2+x_1^2+x_2^2+x_3^2}x_0-\frac{x_1i}{x_0^2+x_1^2+x_2^2+x_3^2}x_0-\frac{x_2j}{x_0^2+x_1^2+x_2^2+x_3^2}x_0-\\
&\frac{x_3k}{x_0^2+x_1^2+x_2^2+x_3^2}x_0+\frac{x_0}{x_0^2+x_1^2+x_2^2+x_3^2}x_1i-\frac{x_1i}{x_0^2+x_1^2+x_2^2+x_3^2}x_1i-\\
&\frac{x_2j}{x_0^2+x_1^2+x_2^2+x_3^2}x_1i-\frac{x_3k}{x_0^2+x_1^2+x_2^2+x_3^2}x_1i+\frac{x_0}{x_0^2+x_1^2+x_2^2+x_3^2}x_2j-\\
&\frac{x_1i}{x_0^2+x_1^2+x_2^2+x_3^2}x_2j-\frac{x_2j}{x_0^2+x_1^2+x_2^2+x_3^2}x_2j-\frac{x_3k}{x_0^2+x_1^2+x_2^2+x_3^2}x_2j+\\
&\frac{x_0}{x_0^2+x_1^2+x_2^2+x_3^2}x_3k-\frac{x_1i}{x_0^2+x_1^2+x_2^2+x_3^2}x_3k-\frac{x_2j}{x_0^2+x_1^2+x_2^2+x_3^2}x_3k-\\
&\frac{x_3k}{x_0^2+x_1^2+x_2^2+x_3^2}x_3k
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \underbrace{\frac{x_0^2+x_1^2+x_2^2+x_3^2}{x_0^2+x_1^2+x_2^2+x_3^2}}_{=1} + \\
&\underbrace{\left(-\frac{x_0x_1}{x_0^2+x_1^2+x_2^2+x_3^2}+\frac{x_0x_1}{x_0^2+x_1^2+x_2^2+x_3^2}-\frac{x_2x_3}{x_0^2+x_1^2+x_2^2+x_3^2}+\frac{x_2x_3}{x_0^2+x_1^2+x_2^2+x_3^2}\right)}_{=0} i+ \\
&\underbrace{\left(-\frac{x_0x_2}{x_0^2+x_1^2+x_2^2+x_3^2}+\frac{x_0x_2}{x_0^2+x_1^2+x_2^2+x_3^2}-\frac{x_1x_3}{x_0^2+x_1^2+x_2^2+x_3^2}+\frac{x_1x_3}{x_0^2+x_1^2+x_2^2+x_3^2}\right)}_{=0} j+ \\
&\underbrace{\left(-\frac{x_0x_3}{x_0^2+x_1^2+x_2^2+x_3^2}+\frac{x_0x_3}{x_0^2+x_1^2+x_2^2+x_3^2}-\frac{x_1x_2}{x_0^2+x_1^2+x_2^2+x_3^2}+\frac{x_1x_2}{x_0^2+x_1^2+x_2^2+x_3^2}\right)}_{=0} k \\
&=1
\end{aligned}
$$

Damit haben wir den Beweis erbracht, dass die Quaternionen zusammen mit den definierten Operationen tatsächlich einen Schiefkörper bildet.

$\square$

Literatur

[1] Ghiloni, Riccardo and Moretti, Valter and Perotti, Alessandro:
Spectral Representations of Normal Operators in Quaternionic Hilbert Spaces via Intertwining Quaternionic PVMS,
Department of Mathematics, University of Trento, (2010)

[2] Havlicek, Hans:
Lineare Algebra für Technische Mathematiker,
Berliner Studienreihe zur Mthematik Band 16, Heldermann Verlag, (3. Auflage, 2012)

[3] Zhang, Fuzhen:
Quaternions and Matrices of Quaternions,
Linear Algebra and its Applications, 251: 21–57 (1997)

[4] Alpay, Daniel and Shaprio, Michael:
Reproducing Kernel Quaternionic Pontryagin Spaces,
Integral Equations and Operator Theory, Birkhäuser Verlag, 50: 431–476 (2004)

[5] Ghiloni, Riccardo and Moretti, Valter and Perotti, Alessandro:
Continuous Slice Functional Calculus in Quaternionic Hilbert Spaces,
Mathematics Subject Classification (2010)

[6] Porteous, Ian R.:
Topological Geometry, Second Edition,
Cambridge University Press, (1981)

[7] Loring, Terry A.:
Factorization of matrices of quaternions,
SciVerse ScienceDirect, University of New Mexico, Department of Mathematics and Statistics, Albuquerque, Elsevier (2012)