TECHNISCHE UNIVERSITÄT WIEN

SEMINARARBEIT

Der Satz von Naimark

ausgeführt am

Institut für
Analysis und Scientific Computing
TU Wien

unter der Anleitung von

Ao.Univ.Prof.Dr Michael Kaltenbäck

durch

Florian Grünstäudl
Matrikelnummer: 12004126
Lienfeldergasse 73/17
1160 Wien

Wien, am 16. Mai 2023

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

In dieser Seminararbeit wird der Satz von Naimark bewiesen (engl.: Naimark's Dilation Theorem). Der Satz besagt, dass sich positive operatorwertige Maße zu Spektralmaßen erweitern lassen. Der in dieser Arbeit angegebene Beweis folgt jenem in [AG], S. 121- 126. Im Gegensatz zu anderen Beweisen wird dabei nicht auf den Satz von Stinespring (Stinespring's Dilation Theorem) zurückgegriffen. Als Anwendung des Satzes von Naimark wird noch ein Satz von Bela Sz.-Nagy bewiesen. Basis hierfür bildet [N].

2 Satz von Naimark

2.1 Definition. Sei $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra auf einer Menge Ω und H ein Hilbertraum. Wir bezeichnen mit $L_b(H)$ die Menge aller beschränkten linearen Abbildungen von H nach H. Eine Abbildung $E : \mathcal{A} \to L_b(H)$ heißt positives operatorwertiges Maß, falls:

- Für alle $\Delta \in \mathcal{A}$ ist $E(\Delta)$ ein positiver Operator, also gilt $(E(\Delta)x, x) \geq 0$ für alle $x \in H$.
- Für alle $(\Delta_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ mit $\Delta_i \cap \Delta_j = \varnothing$ für $i \neq j$ und $x \in H$ gilt

$$E\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Delta_n\right) x = \sum_{n\in\mathbb{N}} E(\Delta_n)x. \tag{1}$$

- $E(\varnothing) = 0$ und $E(X) = \mathrm{Id}$.

2.2 Bemerkung. Da jeder positve Operator auf einem Hilbertraum auch selbstadjungiert ist, ist für $\Delta \in \mathcal{A}$ der Operator $E(\Delta)$ selbstadjungiert.

2.3 Satz (von Naimark). *Sei $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra auf Ω, H ein Hilbertraum, $E : \mathcal{A} \to L_b(H)$ ein positives operatorwertiges Maß. Dann existiert ein Hilbertraum $\tilde{H} \supseteq H$ und ein Spektralmaß $F : \mathcal{A} \to L_b(\tilde{H})$ derart, dass*

$$E = P_H F\,|_H,$$

wobei P_H die Projektion von $\tilde{H}$ auf H bezeichnet.

Bevor wir den Satz beweisen, benötigen wir noch den Begriff einer positiv semidefiniten Abbildung auf einer Menge R.

2.4 Definition. Sei R eine Menge. Eine Abbildung $\phi : R\times R \to \mathbb{C}$ heißt positiv semidefinit falls

- $\phi(x, y) = \overline{\phi(y, x)}$ für alle $x, y \in R$,
- für $n \in \mathbb{N}; x_1, \ldots x_n \in R; \xi_1, \ldots \xi_n \in \mathbb{C}$ gilt

$$\sum_{i,k=1}^{n} \phi(x_i, x_k)\xi_i\overline{\xi_k} \geq 0. \tag{2}$$

Im Beweis des Satzes von Naimark werden wir folgende Lemmata verwenden.

2.5 Lemma. *Ist R eine Menge und $\phi : R \times R \to \mathbb{C}$ positiv semidefinit, dann existiert ein Hilbertraum $(H, \langle .,. \rangle)$ und ein $\gamma : R \to H$ derart, dass für alle $x, y \in R$*

$$\langle \gamma(x), \gamma(y) \rangle = \phi(x, y).$$

Beweis. Der Raum

$$c_{00}(R, \mathbb{C}) := \{f : R \to \mathbb{C} | \text{supp } f \text{ ist endlich}\}$$

versehen mit der punktweisen Addition und Skalarmultiplikation von Funktion bildet einen Vektorraum über $\mathbb{C}$.
Um aus $c_{00}(R, \mathbb{C})$ einen Skalarproduktraum zu konstruieren, definieren wir
$\langle .,. \rangle : c_{00}(R, \mathbb{C}) \times c_{00}(R, \mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ durch

$$\langle f, g \rangle := \sum_{x,y \in R} \phi(x, y) f(x) \overline{g(y)}.$$

Für $f, g, h \in c_{00}(R, \mathbb{C}), c \in \mathbb{C}$ gilt

$$\langle f, g \rangle = \sum_{x,y \in R} \phi(x, y) f(x) \overline{g(y)} = \overline{\sum_{x,y \in R} \overline{\phi(y, x)} g(y) \overline{f(x)}} = \overline{\langle g, f \rangle}$$

sowie

$$\begin{aligned} \langle cf + g, h \rangle &= \sum_{x,y \in R} \phi(x, y)(cf + g)(x) \overline{h(y)} \\ &= c \sum_{x,y \in R} \phi(x, y) f(x) \overline{h(x)} + \sum_{x,y \in R} \phi(x, y) g(x) \overline{h(x)} \\ &= c \langle f, h \rangle + \langle g, h \rangle . \end{aligned}$$

Wegen (2) gilt $\langle f, f \rangle \geq 0$. Allerdings können wir von $\langle f, f \rangle = 0$ nicht direkt auf $f = 0$ schließen. Um aus $c_{00}(R, \mathbb{C})$ tatsächlich einen Skalarproduktraum zu gewinnen, betrachten wir

$$N := \{f \in c_{00}(R, \mathbb{C}) | \langle f, f \rangle = 0\}. \tag{3}$$

Wegen $\langle cf, cf \rangle = |c|^2 \langle f, f \rangle$ ist N unter Skalarmultiplikation abgeschlossen. Um auch die Abgeschlossenheit unter Addition zu zeigen, verwenden wir die Ungleichung von Cauchy-Schwarz in deren Beweis die Eigenschaft, dass $\langle f, f \rangle = 0$ nur für $f = 0$ gilt, nicht verwendet wird; vgl. [WKB],3.1.2. Also gilt für $f, g \in N$

$$\begin{aligned} |\langle f + g, f + g \rangle| &= |\langle f, f \rangle + \langle f, g \rangle + \langle g, f \rangle + \langle g, g \rangle| \\ &= |\langle f, g \rangle + \overline{\langle f, g \rangle}| = 2\text{Re} |\langle f, g \rangle| \\ &\leq 2\text{Re} \langle f, f \rangle^{1/2} \langle g, g \rangle^{1/2} = 0, \end{aligned}$$

und N ist ein linearer Unterraum von $c_{00}(R, \mathbb{C})$.
Wir versehen den Raum $\hat{H} := c_{00}(R, \mathbb{C})/N$, mit dem Skalarprodukt

$$\langle [f]_N, [g]_N \rangle_{\hat{H}} := \langle f, g \rangle ,$$

welches wohldefiniert ist, da für $f_1, f_2, g_1, g_2 \in c_{00}(R, \mathbb{C})$ mit $f_1 \sim_N f_2, g_1 \sim_N g_2$ wieder wegen Cauchy-Schwarz

$$\begin{aligned}
|\langle f_1, g_1\rangle - \langle f_2, g_2\rangle| &= |\langle f_1, g_1\rangle - \langle f_1, g_2\rangle + \langle f_1, g_2\rangle - \langle f_2, g_2\rangle| \\
&= |\langle f_1, g_1 - g_2\rangle + \langle f_1 - f_2, g_2\rangle| \\
&\leq |\langle f_1, g_1 - g_2\rangle| + |\langle f_1 - f_2, g_2\rangle| \\
&\leq \langle f_1, f_1\rangle^{1/2} \langle g_1 - g_2, g_1 - g_2\rangle^{1/2} + \\
&\quad + \langle f_1 - f_2, f_1 - f_2\rangle^{1/2} \langle g_2, g_2\rangle^{1/2} = 0.
\end{aligned}$$

Schließlich definieren wir H als die Hilbertraum-Vervollständigung von $\hat{H}$ und $\gamma : R \to H$ durch $\gamma(r) = [\delta_r]_N$, wobei $\delta_r(x) = 1$ im Fall $x = r$ und $\delta_r(x) = 0$ sonst und erhalten

$$\langle \gamma(r), \gamma(q)\rangle = \langle [\delta_r], [\delta_q]\rangle_H = \langle \delta_r, \delta_q\rangle = \phi(r,q)\delta_r(r)\overline{\delta_q(q)} = \phi(r,q)$$

für $r, q \in R$. □

2.6 Bemerkung. Mit der Notation aus Lemma 2.5 kann jedes $f \in c_{00}(R)$ als $f = \sum_{x \in \operatorname{supp} f} f(x)\delta_x$ geschrieben werden. Also gilt $\operatorname{span}(\{\delta_r | r \in R\}) = c_{00}(R)$ und daher auch $\operatorname{span}(\{[\delta_r]_N | r \in R\}) = c_{00}(R)/N$, womit sich $\operatorname{span}(\{[\delta_r]_N | r \in R\})$ als dichter Unterraum von H herausstellt.

2.7 Lemma. *Sei Ω eine Menge, $n \in \mathbb{N}$, und $\Delta_1, \dots, \Delta_N \subseteq \Omega$. Definieren wir für $I \subseteq \{1, \dots, n\}$*

$$M_I := \bigcap_{i \in I} \Delta_i \setminus \bigcup_{j \in I^c} \Delta_j,$$

so sind die Mengen M_I für verschiedene I paarweise disjunkt und für $k, l \in \{1, \dots, n\}$ gilt

$$\Delta_l \cap \Delta_k = \bigcup_{\{l,k\} \subseteq I \subseteq \{1,\dots,n\}} M_I. \tag{4}$$

Beweis. Für $I \neq I'$ finden wir o.B.d.A. ein $m \in I$ mit $m \notin I'$, womit $\bigcap_{i \in I} \Delta_i \setminus \bigcup_{j \in I^c} \Delta_j \subseteq \Delta_m$ und $\bigcap_{i \in I'} \Delta_i \setminus \bigcup_{j \in I'^c} \Delta_j \subseteq \Delta_m^c$. Also gilt $M_I \cap M_{I'} = \emptyset$.
Die Inklusion " $\supseteq$ " in (4) gilt, da jede der Mengen, über die vereinigt wird, eine Teilmenge von $\Delta_l \cap \Delta_k$ ist. Für die Inklusion " $\subseteq$ " sei $x \in \Delta_l \cap \Delta_k$. Setzen wir $I := \{m \in \{1, \dots, n\} | x \in \Delta_n\}$, so gilt $\{l, k\} \subseteq I$ und $x \in M_I$, womit $x \in \bigcup_{\{l,k\} \subseteq I \subseteq \{1,\dots,n\}} M_I$. □

Nun können wir den Satz von Naimark beweisen:

2.1 Beweis des Satzes von Naimark

Beweis. (2.3 Satz von Naimark) Wir definieren $R := \mathcal{A} \times H$ sowie $\phi : R \times R \to \mathbb{C}$ durch

$$\phi((\Delta_1, x_1), (\Delta_2, x_2)) := \langle E(\Delta_1 \cap \Delta_2)x_1, x_2\rangle_H .$$

Wir zeigen als erstes, dass ϕ positiv semidefinit ist. Da für $\Delta \in \mathcal{A}$ durch $E(\Delta)$ ein selbstadjungierter Operator auf H definiert ist (vgl. Bemerkung 2.2) haben wir:

$$\begin{aligned}
\phi((\Delta_1, x_1), (\Delta_2, x_2)) &= \langle E(\Delta_1 \cap \Delta_2)x_1, x_2\rangle_H = \\
&= \langle x_1, E(\Delta_1 \cap \Delta_2)x_2\rangle_H = \overline{\langle E(\Delta_1 \cap \Delta_2)x_2, x_1\rangle_H} = \\
&= \overline{\phi((\Delta_2, x_2), (\Delta_1, x_1))}.
\end{aligned}$$

Für die Eigenschaft (2) seien $(\Delta_i, x_i) \in R, c_i \in \mathbb{C}$, $i = 1 \dots n$. Wir nehmen zunächst den Spezialfall an, dass

$$\Delta_i \neq \Delta_j \Rightarrow \Delta_i \cap \Delta_j = \varnothing \text{ für alle } i, j \in \{1, \dots, n\}.$$

Nach möglicherweise notwendigem Vertauschen der Indizes existieren $1 = j_1 < j_2 < \dots < j_l = n + 1$ mit

$$\Delta_i = \Delta_{j_k} \text{ für alle } j_k \leq i < j_{k+1}, k \in \{1, \dots l - 1\}$$

sowie

$$\Delta_{j_k} \cap \Delta_{j'_k} = \varnothing \text{ für alle } k \neq k' \in \{1, \dots l\},$$

womit

$$\begin{aligned}
\sum_{i,k=1}^{n} \phi((\Delta_i, x_i), (\Delta_k, x_k)) c_i \overline{c_k} &= \sum_{i,k=1}^{n} \langle E(\Delta_i \cap \Delta_k)x_i, x_k\rangle\, c_i \overline{c_k} = \\
&= \sum_{m=1}^{l-1} \sum_{i,k=j_m}^{j_{m+1}-1} \langle E(\Delta_i \cap \Delta_k)x_i, x_k\rangle\, c_i \overline{c_k} = \\
&= \sum_{m=1}^{l-1} \left\langle E(\Delta_{j_m}) \sum_{i=j_m}^{j_{m+1}-1} x_i c_i, \sum_{i=j_m}^{j_{m+1}-1} x_i c_i \right\rangle \geq 0,
\end{aligned}$$

wobei wir für die letzte Ungleichung verwendet haben, dass E positives operatorwertiges Maß ist.
Den allgemeinen Fall führen wir auf den Spezialfall zurück. Dazu seien $n \in \mathbb{N}$, $c_1, \dots c_n \in \mathbb{C}$, $(\Delta_1, x_1), \dots (\Delta_n, x_n) \in \mathcal{A} \times H$, beliebig. Wir definieren die Mengen M_I wie in Lemma 2.7 und erhalten mit dem eben bewiesenen Spezialfall

$$\begin{aligned}
\sum_{i,k=1}^{n} \langle E(\Delta_i \cap \Delta_k)x_i, x_k\rangle\, c_i \overline{c_k} &= \sum_{i,k=1}^{n} \sum_{i,k \in I \subseteq \{1, \dots n\}} \langle E(M_I)x_i, x_k\rangle\, c_i \overline{c_k} = \\
&= \sum_{I \subseteq \{1, \dots n\}} \sum_{i,k \in I} \langle E(M_I)x_i, x_k\rangle\, c_i \overline{c_k} \geq 0.
\end{aligned}$$

Da $\phi : R \times R \to \mathbb{C}$ positiv semidefinit ist, finden wir gemäß Lemma 2.5 einen Hilbertraum $(\tilde{H}, \langle ., . \rangle)$ mit $\phi(r, q) = \langle [\delta_r], [\delta_q] \rangle$ für alle $r, q \in R$.
Wir betrachten $\iota : H \to \tilde{H}$ definiert durch

$$\iota(x) := [\delta_{(\Omega, x)}].$$

Für $x, y \in H$ gilt

$$\left\langle [\delta_{(\Omega,x)}], [\delta_{(\Omega,y)}] \right\rangle_{\tilde{H}} = \left\langle \delta_{(\Omega,x)}, \delta_{(\Omega,y)} \right\rangle = \phi((\Omega, x), (\Omega, y)) = \langle E(\Omega)x, y \rangle_H = \langle x, y \rangle_H ,$$

womit ι isometrisch und daher injektiv ist. Um die Linearität von ι zu zeigen, weisen wir zunächst $\iota(x+y) = \iota(x) + \iota(y)$ nach:

$$\begin{aligned}
\|\iota(x+y) - \iota(x) - \iota(y)\|^2 &= \left\| [\delta_{(\Omega,x+y)}] - [\delta_{(\Omega,x)}] - [\delta_{(\Omega,y)}] \right\|^2 \\
&= \left\langle \delta_{(\Omega,x+y)}, \delta_{(\Omega,x+y)} \right\rangle - 2\mathrm{Re} \left\langle \delta_{(\Omega,x+y)}, \delta_{(\Omega,x)} \right\rangle - \\
&\quad - 2\mathrm{Re} \left\langle \delta_{(\Omega,x+y)}, \delta_{(\Omega,y)} \right\rangle + 2\mathrm{Re} \left\langle \delta_{(\Omega,x)}, \delta_{(\Omega,y)} \right\rangle + \\
&\quad + \left\langle \delta_{(\Omega,x)}, \delta_{(\Omega,x)} \right\rangle + \left\langle \delta_{(\Omega,y)}, \delta_{(\Omega,y)} \right\rangle \\
&= \phi((\Omega, x+y), (\Omega, x+y)) - 2\mathrm{Re}\phi((\Omega, x+y), (\Omega, x)) - \\
&\quad - 2\mathrm{Re}\phi((\Omega, x+y), (\Omega, y)) + 2\mathrm{Re}\phi((\Omega, x), (\Omega, y)) + \\
&\quad + \phi((\Omega, x), (\Omega, x)) + \phi((\Omega, y), (\Omega, y)) \\
&= \langle x+y, x+y \rangle_H - 2\mathrm{Re} \langle x+y, x \rangle_H - 2\mathrm{Re} \langle x+y, y \rangle_H + \\
&\quad + 2\mathrm{Re} \langle x, y \rangle_H + \langle x, x \rangle_H + \langle y, y \rangle_H \\
&= \langle x, x \rangle_H + 2\mathrm{Re} \langle x, y \rangle_H + \langle y, y \rangle_H - 2 \langle x, x \rangle_H - \\
&\quad - 2\mathrm{Re} \langle y, x \rangle_H - 2\mathrm{Re} \langle x, y \rangle_H - 2 \langle y, y \rangle_H + \\
&\quad + 2\mathrm{Re} \langle x, y \rangle_H + \langle x, x \rangle_H + \langle y, y \rangle_H = 0
\end{aligned}$$

Außerdem gilt für $c \in \mathbb{C}, x \in H$,

$$\begin{aligned}
\|\iota(cx) - c\iota(x)\|^2 &= \left\| [\delta_{(\Omega,cx)}] - c[\delta_{(\Omega,x)}] \right\|^2 \\
&= \left\langle \delta_{(\Omega,cx)}, \delta_{(\Omega,cx)} \right\rangle - 2\mathrm{Re}(\overline{c} \left\langle \delta_{(\Omega,cx)}, \delta_{(\Omega,x)} \right\rangle) + |c|^2 \left\langle \delta_{(\Omega,x)}, \delta_{(\Omega,x)} \right\rangle \\
&= \phi((\Omega, cx), (\Omega, cx)) - 2\mathrm{Re}(\overline{c}\phi((\Omega, cx), (\Omega, x))) + |c|^2\phi((\Omega, x), (\Omega, x)) \\
&= \langle cx, cx \rangle_H - 2\mathrm{Re}(\overline{c} \langle cx, x \rangle_H + |c^2| \langle x, x \rangle_H \\
&= |c|^2 \langle x, x \rangle_H - 2|c|^2 \langle x, x \rangle_H + |c|^2 \langle x, x \rangle_H = 0,
\end{aligned}$$

weshalb ι linear ist. Daher können wir H als Unterraum von $\tilde{H}$ betrachten. Da H selbst ein Hilbertraum und damit vollständig ist, ist H sogar abgeschlossen in $\tilde{H}$, womit $\tilde{H} = H \oplus H^\perp$. Im nächsten Schritt wollen wir für Elemente der Form $[\delta_{(\Delta,x)}]$ von $\tilde{H}$ die Projektion $P_H([\delta_{(\Delta,x)}])$ davon auf H berechnen. Wegen $\tilde{H} = H \oplus H^\perp$ ist P_H eine orthogonale Projektion, erfüllt also $H = \mathrm{ran}(P_H) \perp \ker(P_H) = \mathrm{ran}(I - P_H)$, weshalb

$$0 = \left\langle (I - P_H)([\delta_{(\Delta,x)}]), [\delta_{(\Omega,y)}] \right\rangle = \left\langle [\delta_{(\Delta,x)}], [\delta_{(\Omega,y)}] \right\rangle - \left\langle P_H([\delta_{(\Delta,x)}]), [\delta_{(\Omega,y)}] \right\rangle$$

für alle $[\delta_{(\Omega,y)}] \in H$. Wegen $P_H([\delta_{(\Delta,x)}]) \in H$ folgt $P_H([\delta_{(\Delta,x)}]) = [\delta_{(\Omega,z)}]$ mit einem gewissen $[\delta_{(\Omega,z)}] \in H$. Wir erhalten

$$\begin{aligned} 0 &= \left\langle [\delta_{(\Delta,x)}], [\delta_{(\Omega,y)}] \right\rangle_{\tilde{H}} - \left\langle [\delta_{(\Omega,z)}], [\delta_{(\Omega,y)}] \right\rangle_{\tilde{H}} = \\ &= \phi((\Delta,x),(\Omega,y)) - \phi((\Omega,z),(\Omega,y)) = \\ &= \langle E(\Delta)x, y\rangle_H - \langle z, y\rangle_H = \langle E(\Delta)x - z, y\rangle_H . \end{aligned}$$

Da diese Gleichheit für alle $y \in H$ gilt, folgt $E(\Delta)x = z$ und weiter $P_H([\delta_{(\Delta,x)}]) = [\delta_{(\Omega,E(\Delta)x)}]$.
Um ein Spektralmaß auf $\tilde{H}$ zu definieren, sei daran erinnert, dass gemäß Bemerkung 2.6 $\operatorname{span}(\{[\delta_{(\Delta,x)\}}]|(\Delta,x) \in \mathcal{A}\times H\}) = c_{00}(\mathcal{A}\times H)/N)$ dicht in $\tilde{H}$ liegt. Wir definieren zunächst $G_\Theta : c_{00}(\mathcal{A}\times H) \to \tilde{H}$ auf der Basis $\{\delta_{(\Delta,x)}|(\Delta,x) \in \mathcal{A}\times H\}$ von $c_{00}(\mathcal{A}\times H)$ durch

$$G_\Theta(\delta_{(\Delta,x)}) := [\delta_{(\Delta\cap\Theta,x)}] \in \tilde{H}$$

und setzen G_Θ linear auf $c_{00}(\mathcal{A}\times H)$ fort.
Können wir $N \subseteq \ker G_\Theta$ zeigen, so ist durch $F_\Theta([f]) := G_\Theta/N([f]) = G_\Theta(f)$ eine lineare Abbildung von $c_{00}(\mathcal{A}\times H)/N$ nach $\tilde{H}$ wohldefiniert.
Zunächst gilt für $A, B \in \mathcal{A}$ und $x \in H$

$$\langle E(A\cap B)x, x\rangle_H \le \langle E(A\cap B)x, x\rangle_H + \langle E(A\backslash B)x, x\rangle_H = \langle E(A)x, x\rangle_H .$$

Für $f = \sum_{i=1}^n c_i\delta_{(\Delta_i,x_i)} \in N$ erhalten wir damit

$$\begin{aligned} \|G_\Theta(f)\|_{\tilde{H}}^2 &= \left\langle \sum_{i=1}^n c_i[\delta_{(\Delta_i\cap\Theta,x_i)}], \sum_{j=1}^n c_j[\delta_{(\Delta_j\cap\Theta,x_j)}] \right\rangle_{\tilde{H}} = \sum_{i,j=1}^n c_i\overline{c_j}\,\langle E(\Delta_i\cap\Delta_j\cap\Theta)x_i, x_j\rangle_H \\ &= \sum_{I\subseteq\{1,\dots,n\}} \sum_{i,j\in I} c_i\overline{c_k}\,\langle E(M_I\cap\Theta)x_i, x_j\rangle_H = \sum_{I\subseteq\{1,\dots,n\}} \left\langle E(M_I\cap\Theta)(\sum_{i\in I} c_ix_i), \sum_{j\in I} c_jx_j \right\rangle_H \\ &\le \sum_{I\subseteq\{1,\dots,n\}} \left\langle E(M_I)(\sum_{i\in I} c_ix_i), \sum_{j\in I} c_jx_j \right\rangle_H = \sum_{I\subseteq\{1,\dots,n\}} \sum_{i,j\in I} c_i\overline{c_k}\,\langle E(M_I)x_i, x_j\rangle_H \\ &= \sum_{i,j=1}^n c_i\overline{c_j}\,\langle E(\Delta_i\cap\Delta_j)x_i, x_j\rangle_H = \langle f, f\rangle = 0, \end{aligned}$$

wobei M_I wie in Lemma 2.7 definiert ist. Also gilt $N \subseteq \ker G_\Theta$ und F_Θ ist wohldefiniert.
Für $[\delta_{(\Omega,x)}] \in H$ gilt

$$P_HF_\Theta([\delta_{(\Omega,x)}]) = P_H([\delta_{(\Theta,x)}]) = [\delta_{(\Omega,E(\Theta)x)}] = E(\Theta)x$$

Es bleibt noch zu zeigen, dass durch F ein Spektralmaß auf ganz $\tilde{H}$ definiert wird.
Sei dazu $\Theta \in \mathcal{A}$. Für Elemente der Form $[\delta_{(\Delta,x)}] \in \tilde{H}$ gilt

$$F_\Theta^2([\delta_{(\Delta,x)}]) = F_\Theta([\delta_{(\Delta\cap\Theta,x)}]) = [\delta_{(\Delta\cap\Theta,x)}] = F_\Theta(\Delta,x).$$

Also ist F_Θ eine Projektion auf $c_{00}(\mathcal{A} \times H)/N$. Um zu zeigen, dass F_Θ eine orthogonale Projektion ist, weisen wir nach, dass F_Θ selbstadjungiert ist:

$$\left\langle F_\Theta([\delta_{(\Delta_1,x_1)}]), [\delta_{(\Delta_2,x_2)}]\right\rangle_{\tilde{H}} = \left\langle [\delta_{(\Delta_1 \cap \Theta, x_1)}], [\delta_{(\Delta_2,x_2)}]\right\rangle_{\tilde{H}}$$

$$= \phi((\Theta \cap \Delta_1, x_1), (\Delta_2, x_2)) = \langle E(\Theta \cap \Delta_1 \cap \Delta_2)x_1, x_2\rangle_H$$

$$= \langle x_1, E(\Theta \cap \Delta_1 \cap \Delta_2)x_2\rangle = \overline{\phi((\Theta \cap \Delta_2, x_2), (\Delta_1, x_1))}$$

$$= \left\langle [\delta_{(\Delta_1,x_1)}], [\delta_{(\Delta_2 \cap \Theta, x_2)}]\right\rangle_{\tilde{H}} = \left\langle F_\Theta([\delta_{(\Delta_1,x_1)}]), F_\Theta([\delta_{(\Delta_2,x_2)}])\right\rangle_{\tilde{H}}$$

Also ist F_Θ eine orthogonale Projektion auf $c_{00}(\mathcal{A} \times H)/N$. Wegen

$$\|F_\Theta \tilde{x}\|^2 \le \|F_\Theta \tilde{x}\|^2 + \|(I - F_\Theta)\tilde{x}\|^2 = \|\tilde{x}\|^2$$

für alle $\tilde{x} \in c_{00}(\mathcal{A} \times H)/N$ ist F_Θ beschränkt, und wir können F_Θ in eindeutiger Weise linear und beschränkt auf ganz $\tilde{H}$ fortsetzen.
Wegen $\left\|[\delta_{(\varnothing,x)}]\right\|^2 = \phi((\varnothing, x), (\varnothing, x) = \langle E(\varnothing)x, x\rangle = 0$ gilt $[\delta_{(\varnothing,x)}] = 0 \in \tilde{H}$. Für Elemente der Form $[\delta_{(\Delta,x)}] \in \tilde{H}$ folgt aus

$$F_\Omega([\delta_{(\Delta,x)}]) = [\delta_{(\Delta,x)}],\ F_\varnothing([\delta_{(\Delta,x)}]) = [\delta_{(\varnothing,x)}] = 0$$

und der Linearität von F_Θ, dass $F_\Omega|_{c_{00}(\mathcal{A}\times H)/N} = I$ bzw. $F_\varnothing|_{c_{00}(\mathcal{A}\times H)/N} = 0$. Da die Identität bzw. die Nullfunktion Fortsetzungen von $F_\Omega|c_{00}(\mathcal{A} \times H)/N$ bzw. $F_\varnothing|c_{00}(\mathcal{A} \times H)/N$ auf $\tilde{H}$ sind, gilt wegen der Eindeutigkeit der Fortsetzung $F_\Omega = I$ bzw. $F_\varnothing = 0$. Außerdem haben wir für $\Theta_1, \Theta_2 \in \mathcal{A}, [\delta_{(\Delta,x)}] \in \tilde{H}$

$$F_{\Theta_1 \cap \Theta_2}([\delta_{(\Delta,x)}]) = [\delta_{(\Delta \cap \Theta_1 \cap \Theta_2, x)}] = F_{\Theta_1}([\delta_{(\Delta \cap \Theta_2, x)}]) = F_{\Theta_1} F_{\Theta_2}([\delta_{(\Delta,x)}]),$$

womit sich wegen der Linearität der F_Θ und der Eindeutigkeit der Fortsetzungen $F_{\Theta_1 \cap \Theta_2} = F_{\Theta_1} F_{\Theta_2}$ ergibt.
Für die σ-Additivität von F seien $\Theta_n \in \mathcal{A}, n \in \mathbb{N}$, paarweise disjunkt und $[\delta_{(\Delta,x)}] \in \tilde{H}$. Wir erhalten

$$\left\| \sum_{n\in\mathbb{N}} F_{\Theta_n}([\delta_{(\Delta,x)}]) - F_{\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\Theta_n}([\delta_{(\Delta,x)}]) \right\|_{\tilde{H}}^2 = \left\| \left(\sum_{n\in\mathbb{N}} \delta_{(\Theta_n\cap\Delta,x)} \right) - \delta_{(\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\Theta_n\cap\Delta,x)} \right\|^2$$

$$= \left\| \sum_{n\in\mathbb{N}} \delta_{(\Theta_n\cap\Delta,x)} \right\|^2 - 2\mathrm{Re} \left\langle \sum_{n\in\mathbb{N}} \delta_{(\Theta_n\cap\Delta,x)}, \delta_{(\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\Theta_n\cap\Delta,x)} \right\rangle + \left\| \delta_{(\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\Theta_n\cap\Delta,x)} \right\|_{\tilde{H}}^2$$

$$\overset{(*)}{=} \sum_{n\in\mathbb{N}} \left\| \delta_{(\Theta_n\cap\Delta,x)} \right\|^2 - 2\mathrm{Re} \sum_{n\in\mathbb{N}} \left\langle \delta_{(\Theta_n\cap\Delta,x)}, \delta_{(\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\Theta_n\cap\Delta,x)} \right\rangle + \left\| \delta_{(\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\Theta_n\cap\Delta,x)} \right\|^2$$

$$= \sum_{n\in\mathbb{N}} \phi((\Theta_n\cap\Delta,x),(\Theta_n\cap\Delta,x)) - 2\mathrm{Re} \sum_{n\in\mathbb{N}} \phi((\Theta_n\cap\Delta,x),(\bigcup_{k\in\mathbb{N}}\Theta_k\cap\Delta,x)) +$$
$$\phi((\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\Theta_n\cap\Delta,x),(\bigcup_{k\in\mathbb{N}}\Theta_k\cap\Delta,x))$$

$$= \sum_{n\in\mathbb{N}} \langle E(\Theta_n\cap\Delta)x,x\rangle_H - 2\mathrm{Re} \sum_{n\in\mathbb{N}} \langle E(\Theta_n\cap\Delta)x,x\rangle_H + \left\langle E(\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\Theta_n\cap\Delta)x,x \right\rangle_H$$

$$= \sum_{n\in\mathbb{N}} \langle E(\Theta_n\cap\Delta)x,x\rangle_H - 2\mathrm{Re} \sum_{n\in\mathbb{N}} \langle E(\Theta_n\cap\Delta)x,x\rangle_H + \sum_{n\in\mathbb{N}} \langle E(\Theta_n\cap\Delta)x,x\rangle_H = 0,$$

wobei die letzte Gleichheit gilt, da E ein positives operatorwertiges Maß ist, und die Gleichheit $(*)$ wegen der Stetigkeit des Skalarprodukts und

$$\left\langle \delta_{(\Theta_i\cap\Delta,)}, \delta_{(\Theta_j\cap\Delta,)} \right\rangle = \langle E(\Theta_i\cap\Delta\cap\Theta_j)x,x\rangle = 0$$

für $i \neq j \in \mathbb{N}$.
Für $\tilde{x} = \sum_{i=1}^m c_i[\delta_{(\Delta_i,x_i)})] \in c_{00}(\mathcal{A}\times H)/N$ folgt also

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} F_{\Theta_n}(\tilde{x}) = \sum_{i=1}^m c_i \sum_{n\in\mathbb{N}} F_{\Theta_n}([\delta_{(\Delta_i,x_i)}]) = \sum_{i=1}^m c_i F_{\bigcup_{n\in N}\Theta_n}([\delta_{(\Delta_i,x_i)}]) = F_{\bigcup_{n\in N}\Theta_n}(\tilde{x}),$$

womit $(\sum_{n\in\mathbb{N}} F_{\Theta_n})|_{c_{00}(\mathcal{A}\times H)/N} = F_{\bigcup_{n\in N}\Theta_n}|_{c_{00}(\mathcal{A}\times H)/N}$.
Für $i \neq j \in \mathbb{N}$ und $\sum_{k=1}^m c_k[\delta_{(\Delta_k,x_k)}] \in c_{00}(\mathcal{A}\times H)$ gilt wegen $\Theta_i \cap \Theta_j = \varnothing$

$$F_{\Theta_i}F_{\Theta_j}\left(\sum_{k=1}^m c_k[\delta_{(\Delta_k,x_k)}] \right) = \sum_{k=1}^m c_k F_{\Theta_i}F_{\Theta_j}([\delta_{(\Delta_k,x_k)}]) = \sum_{k=1}^m c_k[\delta_{(\varnothing,x_k)}] = 0.$$

Da die F_{Θ_n} als orthogonale Projektionen stetig auf $c_{00}(\mathcal{A}\times H)/N$ sind, erhalten wir für $\tilde{x} \in c_{00}(\mathcal{A}\times H)/N$

$$\left(\sum_{n\in\mathbb{N}} F_{\Theta_n} \right)^2 (\tilde{x}) = \sum_{n=1}^\infty F_{\Theta_n} \lim_{M\to\infty} \sum_{m=1}^M F_{\Theta_m}(\tilde{x})$$
$$= \sum_{n=1}^\infty \lim_{M\to\infty} \sum_{m=1}^M F_{\Theta_n}F_{\Theta_m}(\tilde{x}) = \sum_{n=1}^\infty F_{\Theta_n}^2(\tilde{x}) = \left(\sum_{n\in\mathbb{N}} F_{\Theta_n} \right)(\tilde{x}).$$

Also ist $(\sum_{n\in\mathbb{N}} F_{\Theta_n})|_{c_{00}(\mathcal{A}\times H)/N}$ eine Projektion auf $c_{00}(\mathcal{A}\times H)/N$. Wegen der Stetigkeit des Skalarprodukts gilt

$$\left\langle \left(\sum_{n=1}^{\infty} F_{\Theta_n}\right)(\tilde{x}), \tilde{y} \right\rangle = \lim_{N\to\infty} \left\langle \sum_{n=1}^{N} F_{\Theta_n}(\tilde{x}), \tilde{y} \right\rangle = \lim_{N\to\infty} \left\langle \tilde{x}, \sum_{n=1}^{N} F_{\Theta_n}(\tilde{y}) \right\rangle = \left\langle \tilde{x}, \left(\sum_{n=1}^{\infty} F_{\Theta_n}\right)(\tilde{y}) \right\rangle$$

für $\tilde{x}, \tilde{y} \in c_{00}(\mathcal{A}\times H)/N$, weshalb $(\sum_{n\in\mathbb{N}} F_{\Theta_n})|_{c_{00}(\mathcal{A}\times H)/N}$ selbstadjungiert und infolge beschränkt ist.
Also haben sowohl $(\sum_{n\in\mathbb{N}} F_{\Theta_n})|_{c_{00}(\mathcal{A}\times H)/N}$ als auch $F_{\bigcup_{n\in N}\Theta_n}|_{c_{00}(\mathcal{A}\times H)/N}$ eindeutige Fortsetzungen auf $\tilde{H}$, und wir erhalten

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} F_{\Theta_n} = F_{\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\Theta_n}$$

auf ganz $\tilde{H}$. □

3 Eine Anwendung des Satzes von Naimark

Für Operatoren $T_1, T_2 \in L_b(H)$ schreiben wir im folgenden $T_1 \le T_2$ falls $\langle T_1 x, x\rangle \le \langle T_2 x, x\rangle$ für alle $x \in H$.

3.1 Satz. *Sei $K \subseteq \mathbb{R}$ kompakt versehen mit der σ-Algebra $\mathcal{A}$ aller Borelteilmengen von K. Weiters sei H ein Hilbertraum und für $n \in \mathbb{N}_0$ seien $A_n \in L_b(H)$ selbstadjungierte Operatoren, die folgende Eigenschaften erfüllen.*

- *Für alle $p = \sum_{i=0}^{k} a_i x^i \in \mathbb{C}[x]$ mit $p(x) \ge 0$ für alle $x \in K$ gilt*

$$\sum_{i=0}^{k} a_i A_i \ge 0,$$

- *$A_0 = I$.*

Dann gilt $A_1^2 \le A_2$ und $A_1^2 = A_2$ genau dann, wenn $A_1^k = A_k$ für alle $k \in \mathbb{N}$.

Beweis. Wir halten zunächst $u \in H$ fest und lösen das Momentenproblem

$$\langle A_k u, u\rangle = \int_K x^k d\mu_u \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}.$$

Dazu definieren wir die offenbar lineare Funktion $\hat{\phi} : \mathbb{C}[x] \to \mathbb{C}$ durch

$$\hat{\phi}(\sum_{i=0}^{n} a_i x^i) := \sum_{i=0}^{n} a_i \langle A_i u, u\rangle .$$

Setzen wir $\mathcal{P} := \{p|_K \,|p \in \mathbb{C}[x]\}$, so ist die durch

$$\phi(p|_k) := \hat{\phi}(p)$$

definierte Abbildung von $\mathcal{P}$ nach $\mathbb{C}$ wohldefiniert. In der Tat folgt für $p|_K, q|_K \in \mathcal{P}$ mit $p|_K = q|_K$ und $p = \sum_{i=1}^{n} a_i x^i;\ q = \sum_{j=1}^{m} b_j x^j$ zunächst $\|p|_K - q|_K\|_\infty = 0$. Nach Voraussetzung gilt für den Operator $S := \sum_{i=1}^{n}(a_i - b_i)A_i$ sowohl $S \geq 0$ als auch $-S \geq 0$, womit $S = 0$. Hier haben wir o.B.d.A $n \geq m$ angenommen und für $i > m$ den Wert b_i als 0 definiert. Wir erhalten

$$|\phi(p\,|_K) - \phi(q\,|_K)| = |\hat{\phi}(p) - \hat{\phi}(q)| = |\hat{\phi}(p-q)| = |\,\langle Su, u\rangle\,| = 0,$$

und damit die Wohldefiniertheit von ϕ. Klarerweise ist mit $\hat{\phi}$ auch ϕ linear und nach Voraussetzung auch positiv. Um die Beschränktheit von ϕ zu zeigen, sei zunächst $p \in \mathbb{R}[x]$ mit $\|p\,|_K\|_\infty \leq 1$. Wegen $K \subseteq \mathbb{R}$ gilt

$$\mathbb{1} \pm p\,|_K \geq 0,$$

wobei $\mathbb{1}$ die Funktion ist, die auf K konstant den Wert Eins annimmt. Da auch $\mathbb{1} \pm p\,|_K$ eine Polynomfunktion ist, folgt

$$0 \leq \phi(\mathbb{1} \pm p\,|_K)) = \phi(\mathbb{1}) \pm \phi(p\,|_K),$$

womit $|\phi(p\,|_K)| \leq \phi(\mathbb{1})$. Für $q \in \mathbb{C}[x]$ mit $\|q\,|_K\|_\infty \leq 1$ sind $q_r := \text{Re } q$ und $q_i := \text{Im } q$ reele Polynome, die $\|q_r\,|_K\|_\infty \leq 1$ bzw. $\|q_i\,|_K\|_\infty \leq 1$ erfüllen. Aus

$$|\phi(q)| = |\phi(q_r + iq_i)| \leq |\phi(q_r)| + |\phi(q_i)| \leq 2\phi(\mathbb{1})$$

folgt die Beschränktheit von ϕ auf $\mathcal{P}$. Da $\mathcal{P} \subseteq C(K,\mathbb{C})$ ein nirgends verschwindende und punktetrennende Algebra von Funktionen ist, und da wegen $K \subseteq \mathbb{R}$ mit $p \in \mathcal{P}$ auch $\overline{p} \in \mathcal{P}$, sind die Voraussetzungen des Satzes von Stone-Weierstrass erfüllt und $\mathcal{P}$ liegt dicht in $C(K,\mathbb{C})$. Daher existiert ein eindeutiges lineares Funktional $\psi : C(K,\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ mit $\phi = \psi\,|_{\mathcal{P}}$, wobei $\psi(f) = \lim_{n\to\infty} \phi(p_n)$ für $f \in C(K,\mathbb{C})$ und eine beliebige Folge $(p_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{P}^{\mathbb{N}}$ mit $\lim_{n\to\infty} p_n = f$ (bzgl. $\|.\|_\infty$).
Für $f \in C(K,\mathbb{C})$ mit $f \geq 0$ gilt $\sqrt{f} \in \mathbb{C}(K,\mathbb{C})$. Also gibt es eine Folge $(p_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{P}^{\mathbb{N}}$ mit $\lim_{n\to\infty} p_n = \sqrt{f}$. Wegen $\text{Im}\sqrt{f} = 0$ folgt $\lim_{n\to\infty} \text{Im } p_n = 0$ und $\lim_{n\to\infty} \text{Re } p_n = \sqrt{f}$. Setzen wir $q_n := (\text{Re } p_n)^2 \in \mathcal{P}$, so folgt $q_n \geq 0$ und

$$f = \sqrt{f}^2 = (\lim_{n\to\infty} \text{Re } p_n)^2 = \lim_{n\to\infty} q_n$$

und damit

$$\psi(f) = \lim_{n\to\infty} \phi(q_n) \geq 0.$$

Daher ist $\psi : C(K,\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ ein positives lineares Funktional. Der Darstellungssatz von Riesz liefert uns ein eindeutiges Maß μ_u mit

$$\psi(f) = \int_K f d\mu_u \quad \text{für alle } f \in C(K,\mathbb{R}).$$

Insbesondere gilt für $k \in \mathbb{N}_0$

$$\langle A_k u, u\rangle = \psi(x^k) = \int_K x^k d\mu_u$$

und μ_u ist eindeutig durch diese Gleichheit bestimmt. Definieren wir für $u, v \in H$ das komplexe Maß $\mu_{u,v}$ durch

$$\mu_{u,v}(\Delta) := \frac{1}{4}(\mu_{u+v}(\Delta) - \mu_{u-v}(\Delta) + i\mu_{u+iv}(\Delta) - i\mu_{u-iv}(\Delta)),$$

so gilt $\langle A_k u, v\rangle = \int_K x^k d\mu_{u,v}$ und $\mu_u = \mu_{u,u}$. Wegen

$$\int_K x^k d\mu_{u+\lambda v,w} = \langle A_k(u + \lambda v), w\rangle = \langle A_k u, w\rangle + \lambda \langle A_k v, w\rangle$$

$$= \int_K x^k d\mu_{u,w} + \lambda \int_K x^k d\mu_{v,w} = \int_K x^k d(\mu_{u,w} + \lambda\mu_{v,w})$$

für alle $u, v \in H$, $\lambda \in \mathbb{C}$, $k \in \mathbb{N}$ und da $\mu_{u,v}$ durch $\langle A_k u, v\rangle = \int_K x^k d\mu_{u,v}$ wegen der Dichtheit von $\mathcal{P}$ in $C(K, \mathbb{C})$ eindeutig festgelegt wird, hängt für festgehaltenes $\Delta \in \mathcal{A}$ die Abbildung $(u, v) \mapsto \mu_{u,v}(\Delta)$ linear von u ab. Genauso sieht man, dass $(u, v) \mapsto \mu_{u,v}(\Delta)$ konjugiert linear von v abhängt.
Für $u, v \in H$ mit $\|u\|, \|v\| \le 1$ gilt

$$|\mu_{u,v}(\Delta)| \le \frac{1}{4}\left(|\mu_{u+v}(\Delta)| + |\mu_{u-v}(\Delta)| + |\mu_{u+iv}(\Delta)| + |\mu_{u-iv}(\Delta)|\right)$$

$$\le \frac{1}{4}\left(\mu_{u+v}(K) + \mu_{u-v}(K) + \mu_{u+iv}(K) + \mu_{u-iv}(K)\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left(\int_K d\mu_{u+v} + \int_K d\mu_{u-v} + \int_K d\mu_{u+iv} + \int_K d\mu_{u-iv}\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left(\langle u+v, u+v\rangle + \langle u-v, u-v\rangle + \langle u+iv, u+iv\rangle + \langle u-iv, u-iv\rangle\right)$$

$$= \frac{1}{4}(4\|u\| + 4\|v\|) \le 2$$

Für beliebige $u, v \in H\backslash\{0\}$ gilt damit $\frac{1}{\|u\|\|v\|}|\mu_{u,v}(\Delta)| \le 2$, also

$$|\mu_{u,v}(\Delta)| \le 2\|u\|\|v\|.$$

Daher ist $(u, v) \mapsto \mu_{u,v}(\Delta)$ eine beschränke Sesquilinearform auf H. Der Satz von Lax-Milgram liefert uns einen Operator $E(\Delta) : H \to H$ mit

$$\langle E(\Delta)u, v\rangle = \mu_{u,v}(\Delta) \qquad \text{für alle } u, v \in H.$$

Aus der Konstruktion von $E(\Delta)$ ergibt sich unmittelbar, dass $E : \mathcal{A} \to L_b(h)$ ein positives operatorwertiges Maß definiert, wobei wegen

$$\langle E(K)u, u\rangle = \mu_u(K) = \int_K d\mu_u = \langle A_0 u, u\rangle = \langle u, u\rangle$$

$E(K) = I$ gilt. Der Satz von Naimark angewandt auf E liefert uns einen Hilbertraum $\tilde{H} \supseteq H$ und ein Spektralmaß $F : \mathcal{A} \to L_b(\tilde{H})$ so, dass $E(\Delta) = P_H F(\Delta)|_H$ für alle $\Delta \in \mathcal{A}$.

Für $u, v \in H$ gilt $E_{u,v}(\Delta) := \langle E(\Delta)u, v\rangle = \mu_{u,v}(\Delta)$. Sind $u, v \in H$ und setzen wir $F_{u,v}(\Delta) := \langle F(\Delta)u, v\rangle$, so gilt

$$F_{u,v}(\Delta) = \langle F(\Delta)u, v\rangle = \langle F(\Delta)u, P_H v\rangle = \langle P_H F(\Delta)u, v\rangle = \langle E(\Delta)u, v\rangle = E_{u,v}(\Delta)$$

und folglich

$$\left\langle P_H\left(\int_K x^k dF\right)u, v\right\rangle = \left\langle \left(\int_K x^k dF\right)u, v\right\rangle =$$

$$= \int_K x^k dF_{u,v} = \int_K x^k dE_{u,v} = \langle A_k u, v\rangle \,.$$

Also gilt für alle $k \in \mathbb{N}_0$

$$P_H\left(\int_K x^k dF\right)|_H = A_k.$$

Wir definieren $\tilde{A} := \int_K x\,dF$. Da $\mathcal{B}^{\mathcal{A}}(K, \mathbb{R}) \ni \phi \mapsto \int_K \phi\, dF \in L_b(H)$ gemäß [WKB] ein *-Homomorphismus ist, haben wir für $k \in \mathbb{N}_0$

$$P_H \tilde{A}^k |_H = A_k. \tag{5}$$

Hier bezeichnet $\mathcal{B}^{\mathcal{A}}(K, \mathbb{R})$ die Menge aller beschränkten, messbaren Funktionen von K nach $\mathbb{R}$. Für ein $u \in H$ gilt

$$\begin{aligned} \langle A_2 u, u\rangle &= \left\langle P_H \tilde{A}^2 u, u\right\rangle = \left\langle \tilde{A}^2 u, P_H u\right\rangle = \left\langle \tilde{A}^2 u, u\right\rangle = \left\langle \tilde{A}u, \tilde{A}u\right\rangle = \left\|\tilde{A}u\right\|^2 \geq \\ &\geq \left\|P_H \tilde{A}u\right\|^2 = \left\langle P_H \tilde{A}u, P_H \tilde{A}u\right\rangle = \left\langle \tilde{A} P_H^2 \tilde{A}u, u\right\rangle = \left\langle \tilde{A} P_H \tilde{A}u, P_H u\right\rangle = \\ &= \left\langle P_H \tilde{A} P_H \tilde{A}u, u\right\rangle = \left\langle A_1^2 u, u\right\rangle, \end{aligned} \tag{6}$$

also $A_1^2 \leq A_2$.
Setzen wir $A_2 = A_1^2$ voraus, so folgt aus (6)

$$\left\|\tilde{A}u\right\|^2 = \left\|P_H \tilde{A}u\right\|^2 \text{ für alle } u \in H.$$

Wegen

$$\left\|\tilde{A}u - P_H \tilde{A}u\right\|^2 = \left\|\tilde{A}u\right\|^2 + \left\|P_H \tilde{A}u\right\|^2 - 2\mathrm{Re}\left\langle P_H \tilde{A}u, \tilde{A}u\right\rangle = 2\left\|P_H \tilde{A}u\right\|^2 - 2\left\|P_H \tilde{A}u\right\|^2 = 0$$

erhalten wir $\tilde{A}u = P_H \tilde{A}u$. Also gilt $\tilde{A}u \in H$ für alle $u \in H$. Aus (5) folgt

$$A_1 = P_H \tilde{A}\,|_H = \tilde{A}\,|_H$$

und daraus

$$A_k = P_H(\tilde{A}\,|_H)^k = A_1^k \text{ für alle } k \in \mathbb{N}.$$

□

Literatur

[AG] Akhiezer, Glazman: *Theory of Linear Operators in Hilbert Space (Volume II)*, Dover Publications Inc., 1993

[N] Béla Sz.-Nagy: *A Moment Problem for Self-Adjoint Operators*, 1953

[WKB] Woracek, Kaltenbäck, Blümlinger: *Funktionalanalysis Skript*, 2022