SEMINARARBEIT

Ultraprodukte von Banachräumen

ausgeführt am

Institut für
Analysis und Scientific Computing
TU Wien

unter der Anleitung von

Ao.Univ.Prof. Dipl.-Ing. Dr.techn. Harald Woracek

durch

Ian Hornik
Matrikelnummer: 12115564
Haizingergasse 18/4
1180 Wien

Wien, am 26. Januar 2024

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Ultrafilter spielen eine wesentliche Rolle in der Analysis, da ihre Eigenschaften im Zusammenhang mit topologischen Räumen oft elegante Resultate liefern. In dieser Arbeit sollen diese Eigenschaften verwendet werden, um den Begriff des Ultraprodukts einer Familie von Banachräumen einzuführen und zu untersuchen. Dabei wird zunächst auf die Konstruktion eingegangen und im Anschluss daran werden grundlegende Eigenschaften analysiert. Abschließend wird eine Klassifikation aller Banachräume über die Struktur von Ultraprodukten präsentiert.

Vorausgesetzt werden dabei grundlegende Resultate aus der Analysis [Kal14], Topologie und linearen Algebra sowie fundamentale Resultate der Funktionalanalysis [WKB17], vor allem jene über Operatoren und Topologien. Ergebnisse über Ultraprodukte von Banachräumen basieren auf der Arbeit von Diestel, Jarchow und Tonge [DJT95].

In der gesamten Arbeit betrachten wir – außer explizit angemerkt – stets Banachräume $(X, \|\cdot\|_X)$ über $\mathbb{C}$, jedoch bleiben alle Resultate für reelle Banachräume gültig. Sind X und Y Banachräume, so bezeichnen wir mit $L_b(X, Y)$ den linearen Raum aller stetigen linearen Abbildungen von X nach Y. Dieser Raum, versehen mit der Operatornorm, ist selbst wieder ein Banachraum. Mit $X' := L_b(X, \mathbb{C})$ bezeichnen wir den topologischen Dualraum von X. Ist $\varepsilon > 0$ und $x \in X$, so bezeichnen wir mit $B_\varepsilon(x)$ die offene Kugel mit Radius ε um x. Ist $A \subseteq X$, so schreiben wir $\overline{A}$ für den topologischen Abschluss von A in X. Für $x \in X$ und $x' \in X'$, so schreiben wir $\langle x, x' \rangle := x'(x)$.

2 Konstruktion von Ultraprodukten

Um dem Begriff des Ultraproduktes einer Familie von Banachräumen einen Sinn zu geben, präsentieren wir zunächst einige grundlegende Resultate, welche essenziell für die Konstruktion sind. Insbesondere wollen wir auf Eigenschaften der Konvergenz von Filtern eingehen.

Proposition 2.1. *Für eine Familie von Banachräumen $(X_i)_{i\in I}$ bezeichne $\ell^\infty(X_i; I)$ die Menge aller $(x_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} X_i$, für die $(\|x_i\|_{X_i})_{i\in I}$ als Familie in $\mathbb{R}$ beschränkt ist. Versehen mit*

$$\|(x_i)_{i\in I}\|_\infty \coloneqq \sup_{i\in I} \|x_i\|_{X_i}$$

ist $(\ell^\infty(X_i; I), \|\cdot\|_\infty)$ ein Banachraum.

Beweis. Dass $(\ell^\infty(X_i; I), \|\cdot\|_\infty)$ ein normierter Raum ist, folgt unmittelbar aus der Definition. Es bleibt die Vollständigkeit zu zeigen.

Sei $(x_i^{(k)})_{i\in I, k\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in $\ell^\infty(X_i; I)$ und $\varepsilon > 0$ beliebig. Dann gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ mit

$$\|(x_i^{(n)})_{i\in I} - (x_i^{(m)})_{i\in I}\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \forall m, n > N.$$

Insbesondere gilt für alle $j \in I$ damit

$$\|x_j^{(n)} - x_j^{(m)}\|_{X_j} < \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon, \quad \forall m, n > N, \tag{2.1}$$

womit auch $(x_j^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in X_j ist. Aufgrund der Vollständigkeit existiert der Grenzwert $\widehat{x}_j$ dieser Cauchyfolge im Banachraum X_j. Es bleibt zu zeigen, dass $(\widehat{x}_i)_{i\in I}$ in $\ell^\infty(X_i; I)$ liegt und Grenzwert der Cauchyfolge $(x_i^{(k)})_{i\in I, k\in\mathbb{N}}$ ist.

Der Grenzübergang $n \to \infty$ in (2.1) liefert

$$\|\widehat{x}_j - x_j^{(m)}\|_{X_j} \leq \frac{\varepsilon}{2}, \quad \forall m \geq N,$$

inbesondere folgt

$$\sup_{j\in I} \|\widehat{x}_j - x_j^{(m)}\|_{X_j} \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon, \quad \forall m \geq N. \tag{2.2}$$

Wählen wir nun ein $N \in \mathbb{N}$ mit

$$\sup_{j\in I} \|(\widehat{x}_i)_{i\in I} - (x_i^{(N)})_{i\in I}\|_{X_j} < 1,$$

so folgt sofort

$$\sup_{j\in I} \|(\widehat{x}_i)_{i\in I}\|_{X_j} \leq \sup_{j\in I} \|(\widehat{x}_i)_{i\in I} - (x_i^{(N)})_{i\in I}\|_{X_j} + \sup_{j\in I} \|(x_i^{(N)})_{i\in I}\|_{X_j} <$$
$$< 1 + \|(x_i^{(N)})_{i\in I}\|_\infty < \infty,$$

also $(\widehat{x}_i)_{i\in I} \in \ell^\infty(X_i; I)$. Inbesondere liefert uns (2.2) nun die Konvergenz der Cauchyfolge $(x_i^{(k)})_{i\in I, k\in\mathbb{N}}$ gegen $(\widehat{x}_i)_{i\in I}$ bezüglich $\|\cdot\|_\infty$, was zu zeigen war. ■

Wir erinnern nun an die Definition eines Filters.

Definition 2.2. Sei M eine nichtleere Menge. Wir nennen ein Mengensystem $\mathscr{F} \subseteq \mathcal{P}(M)$ einen *Filter*, falls

1. $\mathscr{F} \neq \emptyset$ und $\emptyset \notin \mathscr{F}$,
2. $A, B \in \mathscr{F} \implies A \cap B \in \mathscr{F}$,
3. $A \in \mathscr{F}, A \subseteq B \subseteq M \implies B \in \mathscr{F}$.

Sind $\mathscr{F}, \mathscr{G}$ zwei Filter auf derselben Menge, so nennen wir $\mathscr{F}$ *feiner* als $\mathscr{G}$, falls $\mathscr{F} \supseteq \mathscr{G}$. In diesem Fall heißt $\mathscr{G}$ *gröber* als $\mathscr{F}$.

Ein Filter $\mathscr{U}$, zu dem es keinen echt feineren Filter gibt, heißt *Ultrafilter*.

Ein Mengensystem $\mathscr{B} \subseteq \mathcal{P}(M)$ heißt *Filterbasis*, wenn das Mengensystem

$$\mathscr{F} := \{O \subseteq M : \exists B \in \mathscr{B} : O \supseteq B\} \supseteq \mathscr{B}$$

einen Filter bildet. In diesem Fall heißt $\mathscr{F}$ der von $\mathscr{B}$ erzeugte Filter. Offenbar ist jeder Filter eine Filterbasis von sich selbst.

Ist $(I, \preceq)$ eine gerichtete Menge, so ist

$$\{\{i \in I : i \succeq i_0\} : i_0 \in I\}$$

eine Filterbasis in I. Der davon erzeugte Filter wird *Ordnungsfilter* genannt.

Ist $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum, so bildet die Menge aller Umgebungen $\mathfrak{U}(x)$ von $x \in X$ einen Filter, den *Umgebungsfilter* von x. Eine Filterbasis eines Umgebungsfilters wird auch *Umgebungsbasis* genannt.

Ist $\mathscr{B}$ eine Filterbasis in X, so heißt $\mathscr{B}$ *konvergent* gegen $x \in X$, wenn es eine Umgebungsbasis $\mathfrak{B}$ von x gibt, sodass

$$\forall U \in \mathfrak{B} \exists B \in \mathscr{B} : B \subseteq U.$$

Im Allgemeinen können nichttriviale Ultrafilter nicht explizit angegeben werden. Jedoch liefert die nachstehende Folgerung des Lemmas von Zorn:

Lemma 2.3. *Jeder Filter $\mathscr{F}$ kann zu einem Ultrafilter verfeinert werden.*

Ist $f : X \to Y$ eine Abbildung zwischen nichtleeren Mengen und $\mathscr{F}$ ein (Ultra)filter auf X, so stellt sich die Frage ob das mengentheoretische Bild $\{f(F) : F \in \mathscr{F}\}$ wieder einen (Ultra)filter bildet. Dies ist im Allgemeinen nicht der Fall, da dieses Mengensystem nicht unter Obermengen abgeschlossen sein muss. Wir können dieses Mengensystem jedoch zu einem Filter erweitern, wie folgendes Lemma zeigt.

Lemma 2.4. *Seien X, Y nichtleere Mengen, $f : X \to Y$ eine Abbildung und $\mathscr{F}$ ein Filter auf X. Dann ist*

$$f[\mathscr{F}] := \{A \subseteq Y : f^{-1}(A) \in \mathscr{F}\}$$

ein Filter auf Y, der Bildfilter *von $\mathscr{F}$ unter f. Ist $\mathscr{F}$ ein Ultrafilter, so ist es auch $f[\mathscr{F}]$.*

Wir führen nun eine Art Grenzwertbegriff ein, der ausschlaggebend für die Struktur von Ultraprodukten ist.

Proposition 2.5. *Sei K ein kompakter Hausdorffraum, I eine nichtleere Menge, $f : I \to K$ eine Abbildung und $\mathscr{U}$ ein Ultrafilter auf I. Dann existiert der Grenzwert des Ultrafilters $f[\mathscr{U}]$ in K, ist eindeutig und wird mit $\lim_{\mathscr{U}} f(i)$ bezeichnet.*

Beweis. Da $f[\mathscr{U}]$ nach obigem Lemma ein Ultrafilter in dem kompakten Raum K ist, ist dieser konvergent. Da Grenzwerte in Hausdorffräumen eindeutig sind, folgt die Eindeutigkeit. ■

In den meisten Fällen werden wir beschränkte Abbildungen nach $\mathbb{C}$ betrachten. Eine wichtige Tatsache für unsere Konstruktion ist, dass der obige Grenzwert auch für solche Abbildungen stets existiert.

Korollar 2.6. *Sei I eine nichtleere Menge, $n \in \mathbb{N}$, $f : I \to \mathbb{C}^n$ eine beschränkte Abbildung und $\mathscr{U}$ ein Ultrafilter auf I. Dann existiert $\lim_{\mathscr{U}} f(i)$ und liegt in $\overline{f(I)}$.*

Beweis. Die Menge $f(I)$ ist beschränkt, womit $\overline{f(I)}$ kompakt in $\mathbb{C}^n$ ist. Inbesondere bildet f in $\overline{f(I)}$ ab, womit nach Proposition 2.5 die Aussage folgt. ■

Um Verträglichkeiten dieses Grenzwertbegriffes mit algebraischen Operationen zu untersuchen, zeigen wir zunächst einige allgemeine Eigenschaften.

Unsere erste Beobachtung ist, dass wenn zwei Abbildungen auf einer Menge des Ultrafilters übereinstimmen sie denselben Grenzwert besitzen.

Lemma 2.7. *Sei K ein kompakter Hausdorffraum, $\mathscr{U}$ ein Ultrafilter auf einer nichtleeren Menge I und $f, g : I \to K$ Abbildungen. Gibt es eine Menge $M \in \mathscr{U}$ mit $f\big|_M = g\big|_M$, so folgt*

$$\lim_{\mathscr{U}} f(i) = \lim_{\mathscr{U}} g(i).$$

Beweis. Sei $U \in \mathfrak{U}(\lim_{\mathscr{U}} g(i))$ beliebig. Wegen $\mathfrak{U}(\lim_{\mathscr{U}} g(i)) \subseteq g[\mathscr{U}]$ ist $g^{-1}(U) \cap M \in \mathscr{U}$. Es folgt

$$f(g^{-1}(U) \cap M) = g(g^{-1}(U) \cap M) \subseteq g(g^{-1}(U)) \cap g(M) \subseteq U.$$

Wegen $f(g^{-1}(U) \cap M) \in f[\mathscr{U}]$ konvergiert also $f[\mathscr{U}]$ gegen $\lim_{\mathscr{U}} g(i)$, und aufgrund der Eindeutigkeit des Grenzwerts folgt

$$\lim_{\mathscr{U}} f(i) = \lim_{\mathscr{U}} g(i).$$

■

Folgendes Lemma liefert uns nun in gewissem Sinne die Verträglichkeit des Grenzwerts mit stetigen Operationen.

Lemma 2.8. *Seien K, L kompakte Hausdorffräume, $\mathscr{U}$ ein Ultrafilter auf einer nichtleeren Menge I, sowie $f : I \to K$ und $g : K \to L$ Abbildungen. Dann gelten folgende Aussagen:*

(i) $g[f[\mathscr{U}]] = (g \circ f)[\mathscr{U}]$

(ii) Ist g an der Stelle $\lim_{\mathscr{U}} f(i)$ stetig, so gilt

$$\lim_{\mathscr{U}} (g \circ f)(i) = g(\lim_{\mathscr{U}} f(i)).$$

(iii) Sind $(K_j)_{j=1}^n$ kompakte Hausdorffräume und ist $f = (f_j)_{j=1}^n : I \to \prod_{j=1}^n K_j$ eine Abbildung, wobei der Produktraum mit der Produkttopologie versehen ist, so ist

$$\lim_{\mathscr{U}} f(i) = (\lim_{\mathscr{U}} f_j(i))_{j=1}^n.$$

Beweis.

(i) Nach Definition des Bildfilters gilt

$$B \in (g \circ f)[\mathscr{U}] \Leftrightarrow f^{-1}(g^{-1}(B)) \in \mathscr{U} \Leftrightarrow g^{-1}(B) \in f[\mathscr{U}] \Leftrightarrow B \in g[f[\mathscr{U}]].$$

(ii) Sei $U \in \mathfrak{U}(g(\lim_{\mathscr{U}} f(i)))$ beliebig. Da g stetig ist, folgt $g^{-1}(U) \in \mathfrak{U}(\lim_{\mathscr{U}} f(i)) \subseteq f[\mathscr{U}]$ und damit $U \in g[f[\mathscr{U}]] = (g \circ f)[\mathscr{U}]$, womit $(g \circ f)[\mathscr{U}]$ gegen $g(\lim_{\mathscr{U}} f(i))$ konvergiert.

(iii) Für jedes $j = 1, \dots, n$ sei $U_j \in \mathfrak{U}(\lim_{\mathscr{U}} f_j(i)) \subseteq f_j[\mathscr{U}]$, so ist $f_j^{-1}(U_j) \in \mathscr{U}$. Damit ist auch

$$f^{-1}\left(\prod_{j=1}^n U_j\right) = \bigcap_{j=1}^n f_j^{-1}(U_j) \in \mathscr{U},$$

womit $\prod_{j=1}^n U_j \in f[\mathscr{U}]$ folgt.

■

Korollar 2.9. *Seien $\mathscr{U}$ ein Ultrafilter auf einer nichtleeren Menge I und $f, g : I \to \mathbb{C}$ beschränkte Abbildungen. Dann gelten folgende Eigenschaften:*

(i) $\lim_{\mathscr{U}}(f(i)+g(i)) = \lim_{\mathscr{U}} f(i) + \lim_{\mathscr{U}} g(i)$

(ii) $\lim_{\mathscr{U}}(f(i)g(i)) = (\lim_{\mathscr{U}} f(i))(\lim_{\mathscr{U}} g(i))$

(iii) Ist $c \in \mathbb{C}$ *und* f *konstant mit Wert* c*, so ist* $\lim_{\mathscr{U}} f(i) = c$*.*

(iv) Sind f, g *reellwertig und gilt* $\forall i \in I : f(i) \leq g(i)$*, so ist* $\lim_{\mathscr{U}} f(i) \leq \lim_{\mathscr{U}} g(i)$*.*

Lemma 2.10. *Sei* $(X_i)_{i\in I}$ *eine Familie von Banachräumen und* $\mathscr{U}$ *ein Ultrafilter auf* I*. Dann ist*

$$N_{\mathscr{U}} := \{(x_i)_{i\in I} \in \ell^\infty(X_i; I) : \lim_{\mathscr{U}} \|x_i\|_{X_i} = 0\}$$

ein abgeschlossener linearer Unterraum von $\ell^\infty(X_i; I)$ *und es gilt für alle* $(x_i)_{i\in I} \in \ell^\infty(X_i; I)$

$$\inf_{(n_i)_{i\in I}\in N_{\mathscr{U}}} \sup_{i\in I} \|x_i - n_i\|_{X_i} = \lim_{\mathscr{U}} \|x_i\|_{X_i}.$$

Beweis. Seien $(x_i)_{i\in I}, (y_i)_{i\in I} \in N_{\mathscr{U}}$ und $\lambda \in \mathbb{C}$. Dann ist

$$0 \leq \lim_{\mathscr{U}} \|x_i + \lambda y_i\|_{X_i} \leq \lim_{\mathscr{U}} \|x_i\|_{X_i} + |\lambda| \lim_{\mathscr{U}} \|y_i\|_{X_i} = 0,$$

womit $(x_i)_{i\in I} + \lambda(y_i)_{i\in I} \in N_{\mathscr{U}}$ ist. Damit ist $N_{\mathscr{U}}$ ein linearer Unterraum von $\ell^\infty(X_i; I)$.

Die Abbildung

$$p : \ell^\infty(X_i; I) \to \mathbb{R}, (x_i)_{i\in I} \mapsto \lim_{\mathscr{U}} \|x_i\|_{X_i}$$

ist wegen

$$\begin{aligned} |p(x) - p(y)| &= |\lim_{\mathscr{U}} \|x_i\|_{X_i} - \lim_{\mathscr{U}} \|y_i\|_{X_i}| = \lim_{\mathscr{U}} |\|x_i\|_{X_i} - \|y_i\|_{X_i}| \leq \lim_{\mathscr{U}} \|x_i - y_i\|_{X_i} \\ &\leq \lim_{\mathscr{U}} \sup_{j\in I} \|x_j - y_j\|_{X_j} = \sup_{j\in I} \|x_j - y_j\|_{X_j} = \|x - y\|_\infty \end{aligned}$$

sogar Lipschitz-stetig, womit $N_{\mathscr{U}}$ als Urbild der stetigen Abbildung p unter der abgeschlossenen Menge $\{0\}$ ebenfalls abgeschlossen ist.

Sei $(x_i)_{i\in I} \in \ell^\infty(X_i; I)$ beliebig. Für $\varepsilon > 0$ definieren wir $(y_i)_{i\in I} \in \ell^\infty(X_i; I)$ durch

$$y_j := \begin{cases} x_j, & \|x_j\|_{X_j} \geq \lim_{\mathscr{U}} \|x_i\|_{X_i} + \varepsilon, \\ 0, & \text{sonst}, \end{cases}$$

Wähle $U \in \mathscr{U}$, sodass für alle $i \in U$ gilt $\|x_i\|_{X_i} \in B_\varepsilon(\lim_{\mathscr{U}} \|x_i\|_{X_i})$. Dann gilt für $i \in U$, dass $\|y_i\|_{X_i} = 0$. Mit Lemma 2.7 folgt $\lim_{\mathscr{U}} \|y_i\|_{X_i} = 0$ und damit $(y_i)_{i\in I} \in N_{\mathscr{U}}$. Weiters gilt

$$x_j - y_j = \begin{cases} 0, & \|x_j\|_{X_j} \geq \lim_{\mathscr{U}} \|x_i\|_{X_i} + \varepsilon, \\ x_j, & \text{sonst}, \end{cases}$$

und damit

$$\inf_{(n_i)_{i\in I}\in N_{\mathscr{U}}} \sup_{i\in I} \|x_i - n_i\|_{X_i} \leq \sup_{i\in I} \|x_i - y_i\|_{X_i} \leq \lim_{\mathscr{U}} \|x_i\|_{X_i} + \varepsilon,$$

womit für $\varepsilon \to 0$ eine Richtung der Ungleichung folgt.

Andererseits gilt für beliebiges $(n_i)_{i\in I} \in N_{\mathscr{U}}$

$$\begin{aligned}\sup_{i\in I} \|x_i - n_i\|_{X_i} \geq \lim_{\mathscr{U}} \|x_i - n_i\|_{X_i} &\geq \lim_{\mathscr{U}} \big| \|x_i\|_{X_i} - \|n_i\|_{X_i} \big| \\ &\geq \lim_{\mathscr{U}} \|x_i\|_{X_i} - \lim_{\mathscr{U}} \|n_i\|_{X_i} = \lim_{\mathscr{U}} \|x_i\|_{X_i}.\end{aligned}$$

Anwenden des Infimums liefert die andere Richtung der Ungleichung. ■

Obiges Lemma liefert die essenziellen Bausteine für unsere Konstruktion. Sind $(X_i)_{i\in I}$ eine Familie von Banachräumen und $\mathscr{U}$ ein Ultrafilter auf I, so ist $N_{\mathscr{U}}$ ein abgeschlossener Unterraum von $\ell^\infty(X_i; I)$, womit

$$\ell^\infty(X_i; I)/N_{\mathscr{U}},$$

versehen mit der üblichen Quotientennorm, wieder ein Banachraum ist.

Definition 2.11. Sei $(X_i)_{i\in I}$ eine Familie von Banachräumen und $\mathscr{U}$ ein Ultrafilter auf I. Dann wird

$$\ell^\infty(X_i; I)/N_{\mathscr{U}},$$

als *Ultraprodukt* der Banachräume $(X_i)_{i\in I}$ bezüglich $\mathscr{U}$ bezeichnet. Wir schreiben dafür auch

$$\left(\textstyle\prod_{i\in I} X_i\right)_{\mathscr{U}} \quad \text{oder} \quad \left(\textstyle\prod X_i\right)_{\mathscr{U}}.$$

Im Fall $X_i = X$ für alle $i \in I$ schreiben wir auch nur $X^{\mathscr{U}}$.

Die Elemente $(x_i)_{i\in I} + N_{\mathscr{U}}$ eines Ultraprodukts bezeichnen wir mit $(x_i)_{\mathscr{U}}$.

Man beachte, dass nach Lemma 2.10 die Norm eines Elements $(x_i)_{\mathscr{U}}$ gegeben ist durch

$$\|(x_i)_{\mathscr{U}}\| = \inf_{(n_i)_{i\in I}\in N_{\mathscr{U}}} \sup_{i\in I} \|x_i - n_i\|_{X_i} \overset{!}{=} \lim_{\mathscr{U}} \|x_i\|_{X_i}.$$

3 Eigenschaften von Ultraprodukten

3.1 Ultraprodukte von Operatoren

Das enge Zusammenspiel zwischen einem Banachraum und dessen linearen Operatoren motiviert die Notwendigkeit des Begriffs eines Ultraprodukts solcher Operatoren. Ein wesentliches Resultat hierbei ist, dass das Ultraprodukt der topologischen Dualräume in den topologischen Dualraum des Ultraprodukts eingebettet werden kann.

Proposition 3.1. *Seien $(X_i)_{i\in I}, (Y_i)_{i\in I}$ Familien von Banachräumen und $\mathscr{U}$ ein Ultrafilter auf I. Dann ist für $(u_i)_{\mathscr{U}} \in (\prod L_b(X_i, Y_i))_{\mathscr{U}}$ der Operator*

$$\begin{aligned} u : (\textstyle\prod X_i)_{\mathscr{U}} &\to (\textstyle\prod Y_i)_{\mathscr{U}} \\ (x_i)_{\mathscr{U}} &\mapsto (u_i x_i)_{\mathscr{U}} \end{aligned}$$

wohldefiniert, linear und beschränkt. Wir bezeichnen u auch als das Ultraprodukt *der Operatoren $(u_i)_{i\in I}$. Die Abbildung*

$$\begin{aligned} \kappa : (\textstyle\prod L_b(X_i, Y_i))_{\mathscr{U}} &\to L_b((\textstyle\prod X_i)_{\mathscr{U}}, (\textstyle\prod Y_i)_{\mathscr{U}}) \\ (u_i)_{\mathscr{U}} &\mapsto u \end{aligned}$$

liefert eine isometrische Einbettung.

Beweis. Wir zeigen zunächst, dass die Definition des Operators u unabhängig von den Nebenklassen von $(u_i)_{\mathscr{U}}$ und $(x_i)_{\mathscr{U}}$ ist. Seien dazu $(u_i)_{\mathscr{U}} \in (\prod L_b(X_i, Y_i))_{\mathscr{U}}, (x_i)_{\mathscr{U}} \in (\prod X_i)_{\mathscr{U}}$ beliebig, so gilt

$$\begin{aligned} \|u(x_i)_{\mathscr{U}}\| &= \|(u_i x_i)_{\mathscr{U}}\| \\ &= \lim_{\mathscr{U}} \|u_i x_i\|_{X_i} \\ &\leq \lim_{\mathscr{U}} \|u_i\| \|x_i\|_{X_i} \\ &= \lim_{\mathscr{U}} \|u_i\| \cdot \lim_{\mathscr{U}} \|x_i\|_{X_i} \\ &= \|(u_i)_{\mathscr{U}}\| \cdot \|(x_i)_{\mathscr{U}}\|. \end{aligned}$$

Also folgt aus $\|(u_i)_{\mathscr{U}}\| = 0$ oder $\|(x_i)_{\mathscr{U}}\| = 0$ sofort $\|u(x_i)_{\mathscr{U}}\| = 0$ und damit die Wohldefiniertheit. Die Linearität von u folgt sofort aus der Linearität der Abbildungen $(u_i)_{i\in I}$ und obige Rechnung liefert wegen $\|(u_i)_{\mathscr{U}}\| < \infty$ die Beschränktheit.

Die Abbildung κ ist damit ebenfalls wohldefiniert und offenbar linear. Es bleibt die Isometrie zu zeigen. Dazu bemerken wir zunächst

$$\begin{aligned}\|\kappa(u_i)_{\mathscr{U}}\| = \|u\| &= \sup_{\substack{(x_i)_{\mathscr{U}}\in(\prod X_i)_{\mathscr{U}}\\ \|(x_i)_{\mathscr{U}}\|=1}} \|(u_ix_i)_{\mathscr{U}}\| = \sup_{\substack{(x_i)_{\mathscr{U}}\in(\prod X_i)_{\mathscr{U}}\\ \|(x_i)_{\mathscr{U}}\|=1}} \lim_{\mathscr{U}} \|u_ix_i\|_{Y_i}\\ &\leq \sup_{\substack{(x_i)_{\mathscr{U}}\in(\prod X_i)_{\mathscr{U}}\\ \|(x_i)_{\mathscr{U}}\|=1}} \lim_{\mathscr{U}} \|u_i\|\|x_i\|_{X_i} = \lim_{\mathscr{U}} \|u_i\| = \|(u_i)_{\mathscr{U}}\|.\end{aligned}$$

Sei nun $\varepsilon > 0$ beliebig. Für jedes $i \in I$ wählen wir ein $x_i \in X$ mit $\|x_i\|_{X_i} = 1$ und $\|u_ix_i\|_{Y_i} \geq \|u_i\| - \varepsilon$. Dann gilt

$$\|\kappa(u_i)_{\mathscr{U}}\| = \|u\| \geq \|(u_ix_i)_{\mathscr{U}}\| = \lim_{\mathscr{U}} \|u_ix_i\|_{Y_i} = \lim_{\mathscr{U}} \|u_i\| - \varepsilon = \|(u_i)_{\mathscr{U}}\| - \varepsilon.$$

Mit $\varepsilon \to 0$ folgt die Isometrie. ■

Lemma 3.2. *Ist $\mathscr{U}$ ein Ultrafilter auf einer nichtleeren Menge I, so ist $\mathbb{C}^{\mathscr{U}}$ isometrisch isomorph zu $\mathbb{C}$.*

Beweis. Die Abbildung

$$\psi : \ell^\infty(\mathbb{C}; I) \to \mathbb{C}, (z_i)_{i\in I} \mapsto \lim_{\mathscr{U}} z_i$$

ist nach Korollar 2.9 linear. Wegen $\psi((1)_{i\in I}) = 1$ ist sie nicht konstant null, womit sie bereits surjektiv ist. Wegen

$$(z_i)_{i\in I} \in N_{\mathscr{U}} \Leftrightarrow \lim_{\mathscr{U}} |z_i| = 0 \Leftrightarrow |\lim_{\mathscr{U}} z_i| = 0 \Leftrightarrow (z_i)_{i\in I} \in \ker\psi.$$

folgt $N_{\mathscr{U}} = \ker\psi$. Eine Anwendung des Homomorphiesatzes liefert

$$\mathbb{C}^{\mathscr{U}} = \ell^\infty(X_i; I)/N_{\mathscr{U}} = \ell^\infty(X_i; I)/\ker\psi \cong \operatorname{ran}\psi = \mathbb{C}.$$

Der induzierte Isomorphismus

$$\widehat{\psi} : \mathbb{C}^{\mathscr{U}} \to \mathbb{C}, (z_i)_{\mathscr{U}} \mapsto \lim_{\mathscr{U}} z_i$$

ist wegen

$$\widehat{\psi}((z_i)_{\mathscr{U}})| = |\lim_{\mathscr{U}} z_i| = \lim_{\mathscr{U}} |z_i| = \|(z_i)_{\mathscr{U}}\|$$

sogar isometrisch. ■

Damit erhalten wir den vorher erwähnten Zusammenhang zwischen den Dualräumen.

Korollar 3.3. *Sei $(X_i)_{i\in I}$ eine Familie von Banachräumen und $\mathscr{U}$ ein Ultrafilter auf I. Dann kann $(\prod X_i')_{\mathscr{U}}$ isometrisch in $(\prod X_i)'_{\mathscr{U}}$ eingebettet werden.*

Beweis. Sei κ die isometrische Einbettung aus Proposition 3.1 und $\widehat{\psi}$ der isometrische Isomorphismus aus Lemma 3.2. Die Abbildung

$$\begin{aligned}\Psi : L_b((\prod X_i)_{\mathscr{U}}, \mathbb{C}^{\mathscr{U}}) &\to (\prod X_i)'_{\mathscr{U}}\\ f &\mapsto \widehat{\psi} \circ f\end{aligned}$$

ist wohldefiniert, linear und isometrisch. $\Psi \circ \kappa$ liefert die gewünschte isometrische Einbettung.

$$(\prod X_i')_{\mathscr{U}} \xrightarrow{\kappa} L_b((\prod X_i)_{\mathscr{U}}, \mathbb{C}^{\mathscr{U}}) \xrightarrow{\Psi} (\prod X_i)'_{\mathscr{U}}$$

■

Mit den obigen Bezeichnungen können wir nun $(\prod X_i')_{\mathscr{U}}$ als Teilmenge von $(\prod X_i)'_{\mathscr{U}}$ auffassen. Für $(x_i)_{\mathscr{U}} \in (\prod X_i)_{\mathscr{U}}$ und $(x_i')_{\mathscr{U}} \in (\prod X_i')_{\mathscr{U}}$ definieren wir dazu

$$\begin{aligned}\langle (x_i)_{\mathscr{U}}, (x_i')_{\mathscr{U}} \rangle &:= \langle (x_i)_{\mathscr{U}}, (\Psi \circ \kappa)(x_i')_{\mathscr{U}} \rangle\\ &= \lim_{\mathscr{U}} \langle x_i, x_i' \rangle.\end{aligned}$$

3.2 Ultraprodukte endlichdimensionaler Banachräume

Wir wollen einen kurzen Einblick in die topologische Größe von Ultraprodukten geben. Der Begriff der Auerbachbasis – gewissermaßen eine Verallgemeinerung von Orthonormalbasen von Hilberträumen – bietet sich zu diesem Zweck an.

Definition 3.4. Sei $(E, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum mit $\dim E = n < \infty$. Ein System von normierten Vektoren $x_1, \dots, x_n \in E$ und $x_1', \dots, x_n' \in E'$ heißt *Auerbachbasis* von E, wenn

$$\langle x_i, x_j' \rangle = \delta_{i,j}, \quad \forall 1 \leq i, j \leq n.$$

In diesem Fall wird das System auch mit $(x_i, x_i')_{i=1}^n$ bezeichnet.

Inbesondere bilden $(x_i)_{i=1}^n$ eine Basis von E und $(x_i')_{i=1}^n$ eine Basis von E'. Im endlichdimensionalen Fall existiert stets eine solche Basis.

Lemma 3.5 (Auerbach)**.** *Sei $(X, \|\cdot\|)$ ein endlichdimensionaler normierter Raum. Dann besitzt X eine Auerbachbasis.*

Proposition 3.6. *Sei $n \in \mathbb{N}$ und $(E_i)_{i \in I}$ eine Familie n-dimensionaler Banachräume. Dann gilt für jeden Ultrafilter $\mathscr{U}$ auf I, dass* $\dim(\prod E_i)_{\mathscr{U}} = n$.

Beweis. Wähle für jedes $i \in I$ eine Auerbachbasis $(x_{i,k}, x_{i,k}')_{k=1}^n$ von E_i. Nach Korollar 3.3 können wir für jedes $1 \leq k \leq n$ das Element $(x_{i,k}')_{\mathscr{U}} \in (\prod E_i')_{\mathscr{U}}$ als ein Element von $(\prod E_i)'_{\mathscr{U}}$ auffassen. Wir behaupten, dass diese Elemente bereits eine Basis dieses Dualraumes bilden.

Um die lineare Unabhängigkeit einzusehen, seien $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{C}$ mit $0 = \sum_{k=1}^n \alpha_k (x'_{i,k})_{\mathscr{U}}$. Für $1 \leq \ell \leq n$ gilt

$$\begin{aligned} 0 &= \langle (x_{i,\ell})_{\mathscr{U}}, \sum_{k=1}^n \alpha_k (x'_{i,k})_{\mathscr{U}} \rangle = \sum_{k=1}^n \alpha_k \langle (x_{i,\ell})_{\mathscr{U}}, (x'_{i,k})_{\mathscr{U}} \rangle \\ &= \sum_{k=1}^n \alpha_k \lim_{\mathscr{U}} \langle x_{i,\ell}, x_{i,k} \rangle = \alpha_\ell. \end{aligned}$$

Also folgt bereits $a_1, \dots, a_n = 0$ und damit die lineare Unabhängigkeit.

Es bleibt zu zeigen, dass auch ein Erzeugendensystem vorliegt. Sei $(x_i)_{\mathscr{U}} \in (\prod E_i)_{\mathscr{U}}$ beliebig mit $\langle (x_i)_{\mathscr{U}}, (x'_{i,k})_{\mathscr{U}} \rangle = 0$ für alle $1 \leq k \leq n$, so gilt

$$\begin{aligned} \|(x_i)_{\mathscr{U}}\| &= \lim_{\mathscr{U}} \|x_i\| = \lim_{\mathscr{U}} \| \sum_{k=1}^n \langle x_i, x'_{i,k} \rangle x_{i,k} \| \leq \lim_{\mathscr{U}} \sum_{k=1}^n \| \langle x_i, x'_{i,k} \rangle x_{i,k} \| \\ &= \sum_{k=1}^n \lim_{\mathscr{U}} |\langle x_i, x'_{i,k} \rangle| \|x_{i,k}\| = \sum_{k=1}^n |\lim_{\mathscr{U}} \langle x_i, x'_{i,k} \rangle| = \sum_{k=1}^n |\langle (x_i)_{\mathscr{U}}, (x'_{i,k})_{\mathscr{U}} \rangle| = 0. \end{aligned}$$

Demnach ist $(x_i)_{\mathscr{U}} = 0$, womit $\bigcap_{k=1}^n \ker(x'_{i,k})_{\mathscr{U}} = \{0\}$ folgt. Damit bilden diese Funktionale ein Erzeugendensystem des Dualraums. ■

Insbesondere gilt also für einen Ultrafilter $\mathscr{U}$ auf einer Menge I und einen endlichdimensionalen Banachraum X, dass $X^{\mathscr{U}} \cong X$.

Im Kontrast dazu werden Ultraprodukte – im topologischen Sinne – schnell groß, sobald die Dimension der einzelnen Banachräume unbeschränkt ist. Folgendes Resultat, welches wir hier ohne Beweis angeben, illustriert dies:

Proposition 3.7. *Sei $(X_i)_{i \in I}$ eine Familie von Banachräumen und $\mathscr{U}$ ein Ultrafilter auf I, welcher keine endlichen Mengen beinhaltet. Dann ist das Ultraprodukt $(\prod X_i)_{\mathscr{U}}$ entweder endlichdimensional oder nicht-separabel.*

4 Endlichdimensionale Struktur

Die Ergebnisse in diesem Abschnitt zeigen, dass jeder Banachraum in gewisser Weise bereits durch seine endlichdimensionalen Teilräume charakterisiert wird. Ultraprodukte können also die lokale Struktur (die endlichdimensionalen Teilräume) mit der globalen Struktur (dem gesamten Banachraum) in Verbindung bringen.

Satz 4.1. *Jeder Banachraum X ist isometrisch isomorph zu einem Unterraum eines Ultraprodukts der endlichdimensionalen Unterräume von X.*

Beweis. Sei X ein Banachraum und die Menge $\mathcal{E}_X$ der endlichdimensionalen Unterräume von X durch Mengeninklusion gerichtet. Wir verfeinern den dadurch induzierten Ordnungsfilter zu einem Ultrafilter $\mathscr{U}$ auf $\mathcal{E}_X$ und wollen nun zeigen, dass X isometrisch isomorph zu einem Unterraum von $(\prod_{E\in\mathcal{E}_X} E)_{\mathscr{U}}$ ist.

Für gegebenes $x \in X$ definieren wir für $E \in E$

$$x_E := \begin{cases} x, & x \in E, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Da $\|x_E\|_X \leq \|x\|_X$ für alle $E \in \mathcal{E}_X$ gilt, liegt $(x_E)_{\mathscr{U}}$ in $(\prod_{E\in\mathcal{E}_X} E)_{\mathscr{U}}$. Damit ist die Abbildung

$$J_X : X \to (\textstyle\prod_{E\in\mathcal{E}_X} E)_{\mathscr{U}}, x \mapsto (x_E)_{\mathscr{U}}$$

wohldefiniert.

Um die Linearität von J_X einzusehen, seien $x, y \in X, \lambda \in \mathbb{C}$. Wir betrachten die Menge $\mathcal{L} := \{E \in \mathcal{E}_X : E \supseteq \operatorname{span}\{x, y\}\} \in \mathscr{U}$. Für $E \in \mathcal{L}$ gilt $x, y, x + \lambda y \in E$ und damit

$$\|J_X(x + \lambda y) - (J_X(x) + \lambda J_X(y))\| = \lim_{\mathscr{U}} \|(x + \lambda y)_E - (x_E + \lambda y_E)\|_X = 0.$$

Also folgt $J_X(x + \lambda y) = J_X(x)\lambda J_X(y)$ und damit die Linearität.

Um die Isometrie zu zeigen sei $x \in X$ beliebig und setze $\mathcal{L} := \{E \in \mathcal{E}_X : E \supseteq \operatorname{span}\{x\}\} \in \mathscr{U}$. Für $E \in \mathcal{L}$ gilt $x_E = x$ und damit

$$\|J_X(x)\| = \|(x_E)_{\mathscr{U}}\| = \lim_{\mathscr{U}} \|x_E\|_X = \|x\|_X.$$

Nun ist J_X als isometrische Abbildung injektiv. Wir erhalten

$$X \cong \operatorname{ran} J_X \leq (\textstyle\prod_{E\in\mathcal{E}_X} E)_{\mathscr{U}}.$$

■

Satz 4.2. *Der Bidualraum X'' jedes Banachraumes X ist isometrisch isomorph zu einem Quotienten eines Ultraprodukts der endlichdimensionalen Quotientenräume von X.*

Beweis. Sei X ein Banachraum und sei $\mathcal{C}_X$ die Menge der $\|\cdot\|$-abgeschlossenen Unterräume von X mit endlicher Kodimension. Sei $\mathcal{C}_X$ durch umgekehrte Mengeninklusion gerichtet. Wir zeigen zunächst

$$\mathcal{E}_{X'} = \{Z^{\perp} : Z \in \mathcal{C}_X\}.$$

Sei $E \in \mathcal{E}_{X'}$ beliebig, so ist ${}^{\perp}E$ als Linksannihilator abgeschlossen und hat, da E endlichdimensional ist, endliche Kodimension. Also gilt ${}^{\perp}E \in \mathcal{C}_X$. Mit dem Bipolarsatz folgt

$$({}^{\perp}E)^{\perp} = \overline{\operatorname{span} E}^{\sigma(X',X)} = E.$$

Ist nun $Z \in \mathcal{C}_X$ beliebig, so folgt sofort $\dim Z^{\perp} = \operatorname{codim} Z < \infty$ und damit $Z^{\perp} \in \mathcal{E}_{X'}$.

Die Mengen sind demnach gleich, und da $Z_1 \subseteq Z_2$ genau dann, wenn $Z_1^{\perp} \supseteq Z_2^{\perp}$ sind sie gleich geordnet. Inbesondere stimmen die Ordnungsfilter überein und der verfeinerte Ultrafilter $\mathscr{U}$ kann gleich gewählt werden. Mit dem vorigen Satz erhalten wir damit eine isometrische Einbettung

$$J_{X'} : X' \to (\textstyle\prod_{Z \in \mathcal{C}_X} Z^{\perp})_{\mathscr{U}}.$$

Zusammen mit der Tatsache, dass für festes $Z_0 \in \mathcal{C}_X$ stets $Z_0^{\perp} \cong (X/Z_0)'$ gilt, und Korollar 3.3 erhalten wir eine isometrische Einbettung $\widehat{J}_{X'} : X' \to (\prod_{Z \in \mathcal{C}_X} X/Z)'_{\mathscr{U}}$. Der dazu duale Operator $(\widehat{J}_{X'})'$ induziert nun, zusammen mit der kanonischen Einbettung ι eines Banachraumes in seinen Bidualraum, auf natürliche Weise einen Operator $Q_X : (\prod_{Z \in \mathcal{C}_X} X/Z)_{\mathscr{U}} \to X''$.

$$\begin{tikzcd}
(\prod_{Z\in\mathcal{C}_X}(X/Z)')_{\mathscr{U}} \arrow[r, "\Psi"] & (\prod_{Z\in\mathcal{C}_X} X/Z)'_{\mathscr{U}} \arrow[r, dotted, no head] & (\prod_{Z\in\mathcal{C}_X} X/Z)''_{\mathscr{U}} \arrow[d, "(\widehat{J}_{X'})'"] & (\prod_{Z\in\mathcal{C}_X} X/Z)_{\mathscr{U}} \arrow[l, "\iota"'] \arrow[dl, bend left, "Q_X"] \\
(\prod_{Z\in\mathcal{C}_X} Z^{\perp})_{\mathscr{U}} \arrow[u] & X' \arrow[l, "J_{X'}"] \arrow[u, "\widehat{J}_{X'}"'] \arrow[r, dotted, no head] & X'' &
\end{tikzcd}$$

Wir wollen die Surjektivität von Q_X zeigen – sei dazu $x'' \in X''$ beliebig. Es gilt

$$\{0\} = \ker J_{X'} = {}^{\perp}\operatorname{ran}(J_{X'})',$$

eine Anwendung des Rechtsannihilators und der Bipolarsatz liefern

$$X'' = \{0\}^{\perp} = ({}^{\perp}\operatorname{ran}(J_{X'})')^{\perp} = \overline{\operatorname{ran}(J_{X'})'}^{\sigma(X'',X')} = \operatorname{ran}(J_{X'})',$$

wobei die letzte Gleichheit gilt, da $J_{X'}$ als Isometrie auf einem Banachraum $\|\cdot\|$-abgeschlossenes Bild hat, welches nach dem Satz vom abgeschlossenen Bild auch $\sigma(X'', X')$-abgeschlossen ist. Demnach ist $(J_{X'})'$ surjektiv, es gibt also ein $\omega \in (\prod_{Z \in \mathcal{C}_X} Z^{\perp})'_{\mathscr{U}}$ mit $(J_{X'})'\omega = x''$.

Für festes $Z_0 \in \mathcal{C}_X$ definieren wir die Abbildung

$$v_{Z_0} : {Z_0}^{\perp} \to (\textstyle\prod_{Z \in \mathcal{C}_X} Z^{\perp})_{\mathscr{U}}, x' \mapsto (x'_Z)_{\mathscr{U}},$$

wobei

$$x'_Z := \begin{cases} x', & Z_0 \supseteq Z, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Nun setzen wir $x_{Z_0} := \omega v_{Z_0}$. Wegen $\operatorname{codim} Z_0 < \infty$ ist X/Z_0 reflexiv und es folgt

$$x_{Z_0} \in (Z_0^\perp)' \cong (X/Z_0)'' \cong X/Z_0.$$

Wir können also – vermöge eines geeigneten isometrischen Isomorphismus φ – ein Element

$$(\varphi(x_Z))_{\mathscr{U}} \in (\textstyle\prod_{Z \in \mathcal{C}_X} X/Z)_{\mathscr{U}}$$

erhalten. Es bleibt zu zeigen, dass dieses Element tatsächlich $Q_X(\varphi(x_Z))_{\mathscr{U}} = x''$ erfüllt. Dazu sei zunächst $Z_0 \in \mathcal{C}_X$ fest und $x' \in Z_0^\perp$ beliebig. Dann gilt für $Z \in \mathcal{C}_X$ mit $Z \subseteq Z_0$

$$(J_{x'}x')_Z = x' = (v_{Z_0}x')_Z.$$

Inbesondere gilt diese Gleichheit auf der Menge $\{Z \in \mathcal{C}_X : Z \subseteq Z_0\} \in \mathscr{U}$.

Sei nun $x' \in X'$ beliebig. Dann gilt

$$\begin{aligned} \langle x', Q_X(\varphi(x_Z))_{\mathscr{U}}\rangle &= \langle x', ((\widehat{J}_{X'})' \circ \iota)(\varphi(x_Z))_{\mathscr{U}}\rangle = \langle \widehat{J}_{X'}x', \iota(\varphi(x_Z))_{\mathscr{U}}\rangle \\ &= \langle (\varphi(x_Z))_{\mathscr{U}}, \widehat{J}_{X'}x'\rangle = \lim_{\mathscr{U}} \langle \varphi(x_Z), x'_Z\rangle \\ &= \lim_{\mathscr{U}} \langle x'_Z, \omega v_Z\rangle = \lim_{\mathscr{U}} \langle x'_Z, v'_Z\omega\rangle \\ &= \lim_{\mathscr{U}} \langle v_Z x'_Z, \omega\rangle = \lim_{\mathscr{U}} \langle J_{X'}x', \omega\rangle \\ &= \langle x', (J_{X'})'\omega\rangle = \langle x', x''\rangle \end{aligned}$$

und damit $x'' = Q_X(\varphi(x_Z))_{\mathscr{U}}$. Demnach ist Q_X surjektiv, womit wir nach dem Homomorphiesatz

$$(\textstyle\prod_{Z \in \mathcal{C}_X} X/Z)_{\mathscr{U}} / \ker Q_X \cong X''$$

erhalten. ∎

Literaturverzeichnis

[DJT95] Joe Diestel, Hans Jarchow, and Andrew Tonge. *Absolutely summing operators*, volume 43 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1995.

[Kal14] Michael Kaltenbäck. *Fundament Analysis*, volume 26 of *Berliner Studienreihe zur Mathematik [Berlin Study Series on Mathematics]*. Heldermann Verlag, Lemgo, 2014.

[WKB17] Harald Woracek, Michael Kaltenbäck, and Martin Blümlinger. Funktionalanalysis. Skriptum zu Funktionalanalysis 1, 2017.