TECHNISCHE UNIVERSITÄT WIEN

SEMINARARBEIT

Eigenschaften und Kriterien von subnormalen Operatoren

ausgeführt am

Institut für
Analysis und Scientific Computing
TU Wien

unter der Anleitung von

Ao.Univ.Prof. Dipl.-Ing. Dr.techn. Michael Kaltenbäck

durch

Thomas Ilo
Matrikelnummer: 12002144

Wien, September 2023

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Die vielfältigen Eigenschaften von normalen Operatoren machen die Studie von subnormalen Operatoren aufgrund ihrer nahen Beziehung vielversprechend. Die folgende Arbeit beschäftigt sich mit Eigenschaften und Kriterien von subnormalen Operatoren in einem Hilbertraum. Dafür werden im ersten Abschnitt grundlegende Definitionen und Sätze für den Rest der Arbeit aufgearbeitet. Abschnitt 3 behandelt Kriterien für subnormale Operatoren, sowie quasinormale Operatoren und deren Verhältnis zu subnormalen Operatoren. Im letzten Abschnitt definieren wir die minimalen normalen Erweiterungen subnormaler Operatoren und bringen nützliche Resultate darüber.

Abschnitt 3 und 4 sind Ausarbeitungen von Sätzen und Beweisen aus [Con91, Chapter 2.1, 2.2].

2 Grundlagen

Wir behandeln in dieser Arbeit nur Hilberträume über $\mathbb{C}$. Im Folgenden bezeichnet $L_b(H_1, H_2)$ die Menge aller linearen beschränkten Operatoren von einem Hilbertraum H_1 in einen Hilbertraum H_2. Wenn Definitions- und Zielmenge beide H_1 sind, dann schreibt man einfach $L_b(H_1)$ für $L_b(H_1, H_1)$.

Definition 2.1. Sei H_1 ein Hilbertraum und $A \in L_b(H_1)$.

- A heißt normal, wenn $AA^* = A^*A$.
- A heißt subnormal, wenn A eine normale Erweiterung besitzt, also wenn ein Hilbertraum H_2 und normaler Operator $N \in L_b(H_2)$ derart existieren, dass H_1 Unterraum von H_2 mit $N(H_1) \subseteq H_1$ ist und $A = N|_{H_1}$ gilt.

Das folgende Lemma wird etwa in [Kal23, p. 29] bewiesen.

Lemma 2.2. *Sei H ein Hilbertraum und $A \in L_b(H)$ positiv, also ist A selbstadjungiert und $\sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : A - \lambda I \notin Inv(L_b(H))\} \subseteq [0, +\infty)$. Dann existiert ein eindeutiger positiver Operator $B \in L_b(H)$, mit $B^2 = A$. Für jeden Operator $C \in L_b(H)$ mit $CA = AC$, gilt auch $CB = BC$. Für das positive $B \in L_b(H)$ mit $B^2 = A$ schreibt man auch $B = \sqrt{A}$.*

Satz 2.3 (Polarzerlegung)**.** *Zu $A \in L_b(H_1, H_2)$ gibt es eindeutig bestimmte Operatoren $U \in L_b(H_1, H_2)$ und $P \in L_b(H_2)$ so, dass $A = UP$, $P = \sqrt{A^*A}$ und U eine partielle Isometrie auf $\overline{ran(P)}$ ist. Für $x \in \overline{ran(P)}$ gilt also $\|Ux\| = \|x\|$ und für $x \in ran(P)^\perp$ gilt $Ux = 0$. In dem Fall hat man zudem $ran(U) = \overline{ran(A)}$ und $ker(P) = ker(A)$.*

Für einen Beweis siehe etwa [Kal23, p. 32 ff.].

Definition 2.4. Sei V ein Vektorraum. Eine Abbildung $p : V \to [0, +\infty)$ heißt Seminorm, wenn

(i) $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$ für alle $x, y \in V$;

(ii) $p(\lambda x) = |\lambda| p(x)$ für alle $x \in X, \lambda \in \mathbb{C}$.

Im Gegensatz zu Normen muss für die Seminorm aus $p(x) = 0$ nicht unbedingt $x = 0$ folgen. Eine Seminorm ist genau dann eine Norm, wenn $x = 0$ aus $p(x) = 0$ folgt.

Lemma 2.5. *Ist p eine Seminorm auf V und setzen wir $N(p) := \{x \in V : p(x) = 0\}$, dann gilt*

(i) $p(0) = 0$;

(ii) $|p(x) - p(y)| \leq p(x - y)$;

(iii) *$N(p)$ ist ein linearer Unterraum in V;*

(iv) *Für $V_p = V/N(p)$ bildet $\|.\|_p : V_p \to [0, +\infty)$ definiert durch $\|x\|_p = p(x)$ eine wohldefinierte Norm.*

Beweis.

(i) Für ein beliebiges $x \in V$ gilt $p(0) = p(0 \cdot x) = |0| p(x) = 0$.

(ii) Aus $p(x) = p(x - y + y) \leq p(x - y) + p(y)$ folgt $p(x) - p(y) \leq p(x - y)$. Genauso zeigt man $p(y) - p(x) \leq p(y - x)$. Wegen $p(x - y) = p(-1 \cdot (y - x)) = p(y - x)$ erhalten wir die gewünschte Aussage.

(iii) Sind $x, y \in N(p)$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, so gilt $0 \leq p(\alpha x + \beta y) \leq |\alpha| p(x) + |\beta| p(y) = 0$.

(iv) Für $x \in V$ und $n \in N(p)$ gilt wegen (ii), dass $p(x) = |p(x + n - n) - p(-n)| \leq p(x + n)$ und $p(x + n) \leq p(x) + p(n) = p(x)$, also $p(x) = p(x + n)$. $\|.\|_p$ ist somit wohldefiniert. Dabei gilt $\|x\|_p = 0$ genau dann, wenn $p(x) = 0$, also $x \in N(p)$. Offenbar ist mit p auch $\|x\|_p$ eine Seminorm, weshalb $\|x\|_p$ eine Norm abgibt.w

$\square$

3 Kriterien für subnormale Operatoren

3.1 quasinormale Operatoren

Definition 3.1. Wir nennen $Q \in L_b(H)$ quasinormaler Operator, wenn Q und Q^*Q kommutieren, also $QQ^*Q = Q^*QQ$ zutrifft.

Lemma 3.2. *Sei $Q \in L_b(H)$ und $Q = UP$ die Polarzerlegung von Q. Q ist genau dann ein quasinormaler Operator wenn $UP = PU$.*

Beweis. Aus $UP = PU$ folgt $UP^2 = P^2U$ und weiters $QQ^*Q = QP^2 = UP^3 = P^2UP = Q^*QQ$, also die Quasinormalität von Q.

Umgekehrt sei Q quasinormal, also $QP^2 = P^2Q$. Nach Lemma 2.2 gilt $UP^2 = QP = PQ = PUP$. Für $x \in ran(P)$ folgt aus $(UP - PU)P = 0$, dass $UPx = PUx$. Umgekehrt verschwindet U auf $ran(P)^\perp = ker(P)$, woraus $UPx = PUx$ für $x \in ran(P)^\perp$ folgt. Damit gilt $UP = PU$ auf ganz H. □

Satz 3.3. *Jedes quasinormale $Q \in L_b(H)$ ist auch subnormal.*

Beweis. Wir unterscheiden zwei Fälle.
Fall 1: $ker(Q) = \{0\}$. Ist $Q = UP$ die Polarzerlegung von Q, so definieren wir zwei Operatoren A, B auf $H^2 = H \oplus H$ mittels ihren Blockoperatordarstellungen

$$A = \begin{bmatrix} U & I - UU^* \\ 0 & U^* \end{bmatrix} \quad , \quad B = \begin{bmatrix} P & 0 \\ 0 & P \end{bmatrix}.$$

Nach Lemma 3.2 gilt $UP = PU$ und infolge $Q^* = U^*P = PU^*$. Wir erhalten für $N = AB$

$$N = \begin{bmatrix} UP & P - UU^*P \\ 0 & U^*P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q & P - UU^*P \\ 0 & Q^* \end{bmatrix} \quad , \quad N^* = \begin{bmatrix} Q^* & 0 \\ P - PUU^* & Q \end{bmatrix} \tag{3.1}$$

und daher

$$NN^* = \begin{bmatrix} QQ^* + (I - UU^*)PP(I - UU^*) & (I - UU^*)PQ \\ Q^*P(I - UU^*) & Q^*Q \end{bmatrix},$$

$$N^*N = \begin{bmatrix} Q^*Q & Q^*(I-UU^*)P \\ P(I-UU^*)Q & QQ^* + P(I-UU^*)(I-UU^*)P \end{bmatrix}.$$

Wegen $\{0\} = ker(Q) = ker(P) = ran(P)^\perp$ ist U eine Isometrie, also $U^*U = I$. Infolge gilt $UU^*UU^* = UU^*$, womit UU^* und $I - UU^*$ Projektion abgegeben.
Wir erhalten

$$\begin{aligned} P(I-UU^*)(I-UU^*)P &= P^2(I-UU^*)^2 = P^2(I-UU^*) = \\ &= P^2(U^*U - UU^*) = Q^*Q - QQ^*, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q^*(I-UU^*)P = P^2U^*(I-UU^*) &= P^2(I-U^*U)U^* = 0 = \\ &= U(I-UU^*)P^2 = (I-UU^*)UP^2. \end{aligned}$$

Also stimmen alle Einträge von N^*N und NN^* überein, weshalb N normal ist. Zudem erkennen wir aus (3.1), dass $N(H) \subseteq H$ und $N|_H = Q$.

Fall 2: $ker(Q) \neq \{0\}$. Wegen $Q^* = U^*P$ gilt $L := ker(Q) = ker(P) \subseteq ker(Q^*) = ran(Q)^\perp$. Bezüglich der Zerlegung $H = L^\perp \oplus L$ gilt daher

$$Q = \begin{bmatrix} R & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

womit sich $R \in L_b(L^\perp)$ als quasinormal herausstellt. Wegen $ker(R) = \{0\}$ kann Fall 1 auf R angewandt werden. Ist $N \in L_b(\widetilde{H})$ eine normale Erweiterung von R mit $L^\perp \subseteq \widetilde{H}$ und bezeichne T die orthogonale Projektion von $L \oplus \widetilde{H}$ auf $\widetilde{H}$, so ist $NT \in L_b(L \oplus \widetilde{H})$ eine normale Erweiterung von Q. $\square$

Bemerkung 3.4. Da jeder normale Operator offenbar quasinormal ist, gilt die Implikationskette *normal* $\Rightarrow$ *quasinormal* $\Rightarrow$ *subnormal*. Insbesondere ist $S \in L_b(H)$ genau dann subnormal wenn es eine quasinormale Erweiterung hat.

3.2 Vereinfachtes Halmos Bram Kriterium

Wir kommen zu einem zentralen Kriterium für subnormale Operatoren.

Satz 3.5. *Ein Operator $S \in L_b(H)$ ist genau dann subnormal, wenn für endlich viele $f_0, \ldots, f_n \in H$*

$$\sum_{j,k=0}^{n} (S^k f_j, S^j f_k) \geq 0 \tag{3.2}$$

und

$$\sum_{j,k=0}^{n} (S^{k+1} f_j, S^{j+1} f_k) \leq c \sum_{j,k=0}^{n} (S^k f_j, S^j f_k) \tag{3.3}$$

mit einer von den f_j unabhängigen Konstanten $c \geq 0$.

Beweis. Ist $S \in L_b(H)$ subnormal, dann existiert eine normale Erweiterung $N \in L_b(\widetilde{H})$ mit $H \subseteq \widetilde{H}$ von S. Für endlich viele beliebige $f_0, \ldots, f_n \in H$ folgt

$$\sum_{j,k=0}^{n} (S^k f_j, S^j f_k) = \sum_{j,k=0}^{n} (N^k f_j, N^j f_k) = \sum_{j,k=0}^{n} (N^{*j} f_j, N^{*k} f_k) = \|\sum_{k=0}^{n} N^{*k} f_k\|^2 \geq 0.$$

Setzten wir $g_i := S f_i = N f_i$, so gilt auch

$$\sum_{j,k=0}^{n} (S^{k+1} f_j, S^{j+1} f_k) = \sum_{j,k=0}^{n} (S^k g_j, S^j g_k) = \|\sum_{k=0}^{n} N^{*k} N f_k\|^2 =$$
$$= \|N \sum_{k=0}^{n} N^{*k} f_k\|^2 \leq \|N\|^2 \|\sum_{k=0}^{n} N^{*k} f_k\|^2.$$

womit (3.3) für jedes $c \geq \|N\|^2$ zutrifft.

Gelte umgekehrt (3.2) und (3.3). Wir definieren $H^\infty := \prod_{i=0}^{\infty} H$, $H_0 := \{f \in H^\infty : f_i = 0$ für alle bis auf endlich viele $i \in \mathbb{N}$ $\}$, sowie die Sesquilinearform

$$[(h_i)_{i\in\mathbb{N}}, (g_i)_{i\in\mathbb{N}}] := \sum_{j,k=0}^{n} (S^{k+j} h_j, S^{k+j} g_k) \text{ mit } (h_i)_{i\in\mathbb{N}}, (g_i)_{i\in\mathbb{N}} \in H_0$$

Im Fall $(h_i)_{i\in\mathbb{N}} = (g_i)_{i\in\mathbb{N}}$ ist dieser Ausdruck wegen (3.2) mit $f_i = S^i h_i = S^i g_i$ aus $[0, +\infty)$. Also ist $[.,.]$ eine positiv semidefinite Sesquilinearform und infolge $p(f) := [f, f]$ eine Seminorm. Nach Lemma 2.5. ist mit $L := \{f \in H_0 : [f, f] = 0\}$ und $\|f + L\|_p = p(f + L)$ eine Norm auf $\widetilde{H} := H_0/L$ wohldefiniert.
Für $f \in H_0$ und $g \in L$ gilt wegen der Polarisationsformel

$$4[f,g] = p(f+g)^2 - p(f-g)^2 + ip(f+ig)^2 - ip(f-ig)^2 = p(f)^2 - p(f)^2 + ip(f)^2 - ip(f)^2 = 0.$$

Für beliebige $f_1, f_2 \in H_0, l_1, l_2 \in L$ gilt also $[f_1 + l_1, f_2 + l_2] = [f_1, f_2] + [f_1, l_2] + [l_1, f_2] + [l_1, l_2] = [f_1, f_2]$. Somit ist durch $[f + L, g + L] := [f, g]$ ein inneres Produkt auf $\widetilde{H}$ wohldefiniert.

Sei A der Operator auf H_0, welcher durch $(Af)_i = Sf_i$ definiert ist. Aufgrund der Linearität von S ist auch A linear. Wegen Formel (3.3) angewandt auf $f_k = S^k g_k$, gilt

$$[Ag, Ag] = \sum_{j,k=0}^{n} (S^{k+j}Sg_j, S^{k+j}Sg_k) \leq c \sum_{j,k=0}^{n} (S^{k+j}g_j, S^{k+j}g_k) = c[g,g].$$

Infolge gilt $AL \subseteq L$ und A ist auf $\widetilde{H}$ wohldefiniert und beschränkt. Ähnlich definieren wir den Operator B auf H_0, durch $(Bf)_i = f_{i-1}$ und $(Bf)_0 = 0$. Verwenden wir Formel (3.3) zwei Mal, erhalten wir

$$\begin{aligned}[Bg, Bg] = \sum_{j,k=1}^{n+1} (S^{k+j}g_{j-1}, S^{k+j}g_{k-1}) &= \sum_{j,k=0}^{n} (S^{k+j+2}g_j, S^{k+j+2}g_k) \leq \\ \leq c \sum_{j,k=0}^{n} (S^{k+j+1}g_j, S^{k+j+1}g_k) &\leq c^2 \sum_{j,k=0}^{n} (S^{k+j}g_j, S^{k+j}g_k) = c^2[g,g].\end{aligned}$$

Genauso wie A ist damit auch B auf $\widetilde{H}$ wohldefiniert, linear und beschränkt. Beide Operatoren lassen sich stetig auf die Vervollständigung $\overline{H}$ von $\widetilde{H}$ fortsetzen. Wegen

$$\begin{aligned}[A^*A(f+L), (f+L)] = [Af, Af] &= \sum_{j,k=0}^{n} (S^{k+j+1}Sg_j, S^{k+j+1}g_k) = \\ &= \sum_{j=1}^{n+1} \sum_{k=0}^{n} (S^{k+j}Sg_{j-1}, S^{k+j}g_k) = [B(f+L), (f+L)]\end{aligned}$$

für $f + L \in \widetilde{H}$ zusammen mit der Dichtheit von $\widetilde{H}$ in $\overline{H}$ folgt $A^*A = B$ auf $\overline{H}$. Nun gilt für beliebiges $f = (f_i)_{i\in\mathbb{N}} \in H_0$, dass $(ABf)_i = A(f_{i-1}) = Sf_{i-1} = (Af)_{i-1} = (BAf)_i$ für $i > 0$ und $(ABf)_0 = A0 = 0 = BAf_0$. Es folgt $AB = BA$ auf H_0 und damit auf $\widetilde{H}$. Wegen der Dichtheit von $\widetilde{H}$ in $\overline{H}$ folgt $AA^*A = AB = BA = A^*AA$ auf $\overline{H}$. Damit ist A

ein quasinormaler Operator auf $\overline{H}$.
Für $k : H \to H_0$ mit $k(f) = (f, 0, \dots)$ gilt

$$[kf, kf] = \sum_{j,k=0}^{0} (S^{k+j} f_j, S^{k+j} f_k) = (S^0 f, S^0 f) = (f, f),$$

weshalb H mit $f \to kf + L$ als Teilraum von $\overline{H}$ betrachtet werden kann. Wendet man A auf H an, so gilt auf H_0

$$Akf = (Sf, S0, \dots) = (Sf, 0, \dots) = kSf,$$

woraus $A|_H = S$ folgt. A ist also eine quasinormale Erweiterung von S. Nach Bemerkung 3.4 ist S damit subnormal. $\square$

Bemerkung 3.6. Die Voraussetzungen des vorherigen Satzes können aufgeweicht werden. Zum Beispiel reicht es, eine der beiden Formeln (3.2) und (3.3) vorauszusetzen, die andere kann dann hergeleitet werden. Die Beweise dafür übersteigen den Rahmen dieser Arbeit, können jedoch bei [Con91, p. 30 ff.] nachgelesen werden.

4 Minimale normale Erweiterungen

Die normale Erweiterung eines subnormalen Operators $S \in L_b(H_1)$ ist nicht eindeutig. Für eine beliebige normale Erweiterung $N \in L_b(H_2) = L_b(H_1 \oplus H_1^{\perp_{H_2}})$ von S und einen beliebigen normalen Operator $M \in L_b(H_3)$, ist nämlich auch $N \times M \in L_b(H_2 \times H_3) = L_b((H_1 \oplus H_1^{\perp_{H_2}}) \times H_3)$ eine normale Erweiterung von S. Es ist daher nützlich die minimale normale Erweiterung eines subnormalen Operators zu definieren.

Definition 4.1. Sei $M \subseteq H$ ein Unterraum. Für einen Operator $A \in L_b(H)$ sagt man, dass M den Operator A reduziert, oder auch, dass M ein reduzierender Unterraum von S ist, wenn $A(M) \subseteq M$ und $A(M^\perp) \subseteq M^\perp$.

Bemerkung 4.2. Ist $A \in L_b(H)$ und $M \subseteq H$ ein reduzierender Unterraum von A, so kann der Operator A in Blockmatrixdarstellung mit $H = M \oplus M^\perp$ als

$$A = \begin{bmatrix} R_1 & 0 \\ 0 & R_2 \end{bmatrix},$$

dargestellt werden. Für A^* gilt infolge

$$A^* = \begin{bmatrix} R_1^* & 0 \\ 0 & R_2^* \end{bmatrix}.$$

Also reduziert M auch den Operator A^*. Insbesondere ist M genau dann ein reduzierender Unterraum von A, wenn er auch A^* reduziert. Aus der Definition sieht man auch, dass M genau dann N reduziert, wenn $M^\perp$ ein reduzierender Unterraum von N ist.

Definition 4.3. Sei $S \in L_b(H_1)$ ein subnormaler Operator und $N \in L_b(H_2)$ eine normale Erweiterung von S mit $H_1 \subseteq H_2$. N heißt die minimale normale Erweiterung (mne) von S, wenn es keinen reduzierenden Unterraum von N gibt, der auch H_1 enthält.

Es gibt eine einfache Möglichkeit, minimale normale Erweiterungen zu charakterisieren.

Lemma 4.4. *Sei $S \in L_b(H_1)$ ein subnormaler Operator. Eine normale Erweiterung $N \in L_b(H_2)$ von S mit $H_1 \subseteq H_2$ ist genau dann eine minimale normale Erweiterung, wenn*

$$H_2 = \overline{\mathcal{L}\{N^{*k}h : h \in H_1, k \geq 0\}},$$

wobei $\mathcal{L}\{N^{*k}h : h \in H_1, k \geq 0\}$ *die Lineare Hülle der Menge* $\{N^{*k}h : h \in H_1, k \geq 0\}$ *und* $\overline{\mathcal{L}\{N^{*k}h : h \in H_1, k \geq 0\}}$ *ihren Abschluss bezeichnet.*

Beweis. $M := \mathcal{L}\{N^{*k}h : h \in H_1, k \geq 0\}$ enthält H_1 und für $f = \sum_k N^{*k}h_k \in M$ gilt wegen $NH_1 \subseteq H_1$

$$Nf = N \sum_k N^{*k}h_k = \sum_k N^{*k}Nh_k \in M,$$

womit $N(M) \subseteq M$ und infolge $N(\overline{M}) \subseteq \overline{M}$. Für $f \in H_2$ bedeutet $f \perp M$, dass $(f, N^{*k}h) = 0$ für alle $h \in H_1, k \geq 0$. Weil daraus $(Nf, N^{*k_n}h) = (f, N^{*k_n+1}h) = 0$ folgt, gilt auch $N(M^\perp) \subseteq M^\perp$. $\overline{M}$ reduziert also N. Falls N eine minimale normale Erweiterung ist, folgt $\overline{M} = H_2$.

Ist $R \subseteq H_2$ mit $H_1 \subseteq R$ ein reduzierender Unterraum von N, so gilt $N^{*k}H \subseteq N^{*k}R \subseteq R$. Wir erhalten daraus $M \subseteq R$. Somit folgt aus $\overline{M} = H_2$, dass auch $R = H_2$, womit N eine minimale normale Erweiterung von S ist. □

Schließlich kann man zeigen, dass die minimale normale Erweiterung eines subnormalen Operators quasi eindeutig ist, also man von der minimalen normalen Erweiterung sprechen kann.

Satz 4.5. *Seien* $S_1 \in L_b(H_1), S_2 \in L_b(H_2)$ *subnormale Operatoren,* $N_1 \in L_b(\widetilde{H_1})$, $N_2 \in L_b(\widetilde{H_2})$ *jeweils minimale normale Erweiterungen und* $U : H_1 \to H_2$ *ein isometrischer Isomorphismus mit* $US_1 = S_2U$. *Es existiert dann eine unitäre Erweiterung* $V : \widetilde{H_1} \to \widetilde{H_2}$ *von* U *mit* $VN_1V^* = N_2$.

Beweis. Für beliebiges $x_1, y_1 \in H_1, x_2, y_2 \in H_2$ und $k, l \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ gilt wegen der Normalität von N_1, N_2

$$(N_{1,2}^{*k}x_{1,2}, N_{1,2}^{*l}y_{1,2}) = (N_{1,2}^{l}N_{1,2}^{*k}x_{1,2}, y_{1,2}) = (N_{1,2}^{l}x_{1,2}, N_{1,2}^{k}y_{1,2}).$$

Da U ein isometrischer Isomorphismus ist, gilt $(Uh, Ug) = (h, g)$ für alle $h, g \in H_1$.

Insgesamt gilt für $f_0, \ldots, f_n \in H_1$ und ganzen $k_1, \ldots, k_n \geq 0$ dann

$$\begin{aligned}\|\sum_{i=0}^{n} N_2^{*k_i} U f_i\|^2 &= (\sum_{i=0}^{n} N_2^{*k_i} U f_i, \sum_{i=0}^{n} N_2^{*k_i} U f_i) = \sum_{i,j=0}^{n} (N_2^{*k_i} U f_i, N_2^{*k_j} U f_j) = \\ &= \sum_{i,j=0}^{n} (N_2^{k_j} U f_i, N_2^{k_i} U f_j) = \sum_{i,j=0}^{n} (U N_1^{k_j} f_i, U N_1^{k_i} f_j) = \\ &= \sum_{i,j=0}^{n} (N_1^{k_j} f_i, N_1^{k_i} f_j) = \sum_{i,j=0}^{n} (N_1^{*k_i} f_i, N_1^{*k_j} f_j) = \|\sum_{i=0}^{n} N_1^{*k_i} f_i\|^2 = \\ &= \|\sum_{i=0}^{n} N_1^{*k_i} f_i\|^2.\end{aligned}$$

Folglich ist durch $V(\sum_{i=0}^n N_1^{*k_i} f_i) = \sum_{i=0}^n N_2^{*k_i} U f_i$ eine lineare und isometrische Abbildung von $\mathcal{L}\{N_1^{*k} h : h \in H_1, k \geq 0\}$ auf $\mathcal{L}\{N_2^{*k} h : h \in H_2, k \geq 0\}$ wohldefiniert. Ihre stetige Fortsetzung ist isometrisch. Wegen $V(\overline{\mathcal{L}\{N_1^{*k} h : h \in H_1, k \geq 0\}}) = \overline{\mathcal{L}\{N_2^{*k} h : h \in H_2, k \geq 0\}}$ in Kombination mit Lemma 4.4 bildet V $\widetilde{H_1}$ bijektiv auf $\widetilde{H_2}$ ab. Schließlich gilt wegen $VN_1 = N_2V$ auch $VN_1V^* = N_2$. □

Korollar 4.6. *Sei $S \in L_b(H_1)$ ein subnormaler Operator. Sind $N_1, N_2 \in L_b(H_2)$ minimale normale Erweiterungen von S, so sind N_1 und N_2 unitär äquivalent.*

Für die normale Erweiterung $N \in L_b(H_2)$ eines subnormalen Operators $S \in L_b(H_1)$ hat man bezüglich $H_2 = H_1 \oplus H_1^\perp$ folgende Blockdarstellung:

$$N = \begin{bmatrix} S & X \\ 0 & T^* \end{bmatrix}. \tag{4.1}$$

N^* hat dann bezüglich $H_2 = H_1^\perp \oplus H_1$ die Darstellung

$$N^* = \begin{bmatrix} T & X^* \\ 0 & S^* \end{bmatrix}, \tag{4.2}$$

womit sich auch $T \in L_b(H_1^\perp)$ als ein subnormaler Operator herausstellt.

Definition 4.7. Sei $A \in L_b(H)$. Man nennt A pur, wenn kein nicht-trivialer A reduzierender Unterraum $M \subseteq H$ mit normalem $A|_M$ existiert.

Satz 4.8. *Sei $S \in L_b(H_1)$ ein subnormaler Operator, $H_1 \subseteq H_2$ und $N \in L_b(H_2)$ seine minimale normale Erweiterung. S ist genau dann pur, wenn N^* die minimale normale Erweiterung des Operators T aus Formel (4.2) ist.*

Beweis. $M := \overline{\mathcal{L}\{N^k h : h \in H_1^\perp, k \geq 0\}}$ erfüllt $N(M) \subseteq M$. Für $h \in H_1^\perp$ und $g \in H_1$ folgt aus $N(H_1) = S(H_1) \subseteq H_1$ und $(N^*h, g) = (h, Ng) = 0$, dass $N^*(H_1^\perp) \subseteq H_1^\perp$. Infolge gilt für $f \in M^\perp$ und endlich vielen $h_1, \ldots, h_m \in H_1^\perp$

$$(Nf, \sum_k N^k h_k) = (f, \sum_k N^k N^* h_k) = 0,$$

weshalb $Nf \in M^\perp$, also $N(M^\perp) \subseteq M^\perp$. M reduziert damit N und nach Bemerkung 4.2 auch N^*. Bezüglich $H_1 = M \oplus M^\perp$ gilt also

$$N = \begin{bmatrix} R_1 & 0 \\ 0 & R_2 \end{bmatrix} \quad , \quad N^* = \begin{bmatrix} R_1^* & 0 \\ 0 & R_2^* \end{bmatrix},$$

woraus die Normalität von $R_2 = N|_{M^\perp}$ folgt. Wegen $H_1^\perp \subseteq M$ gilt $M^\perp \subseteq H_1$ und daher $S(M^\perp) = N(M^\perp) \subseteq M^\perp$. Für das orthogonale Komplement L von $M^\perp$ in H_1 haben wir $L \subseteq M$ und wegen $N(M) \subseteq M$ auch $S(L) \subseteq L$. Damit wird S von $M^\perp$ reduziert und $S|_{M^\perp} = R_2$ ist normal. Wenn S pur ist, muss daher $M^\perp = \{0\}$ und infolge $M = H_2$ gelten. Nach Lemma 4.4 ist N^* die minimale normale Erweiterung von T.

Sei umgekehrt S nicht pur. Dann existiert ein nicht-trivialer S reduzierender Unterraum $K \subseteq H_1$ so, dass $S|_K$ normal ist. N als Erweiterung von S erfüllt $N(K) \subseteq K$. Bezüglich $H_2 = K \oplus K^\perp$ gilt daher

$$N = \begin{bmatrix} R_1 & X \\ 0 & R_2 \end{bmatrix} \quad , \quad N^* = \begin{bmatrix} R_1^* & 0 \\ X^* & R_2^* \end{bmatrix},$$

wobei $R_1 = N|_K = S|_K$ normal ist. Aus

$$\begin{bmatrix} R_1 R_1^* + XX^* & XR_2^* \\ R_2 X^* & R_2 R_2^* \end{bmatrix} = NN^* = N^*N = \begin{bmatrix} R_1^* R_1 & R_1^* X \\ X^* R_1 & X^*X + R_2^* R_2 \end{bmatrix}$$

folgt $XX^* = R_1^* R_1 - R_1 R_1^* = 0$ und damit $(X^*f, X^*f) = (XX^*f, f) = 0$. Also sind X^* und X Nulloperatoren. Wir sehen an

$$N = \begin{bmatrix} R_1 & 0 \\ 0 & R_2 \end{bmatrix},$$

dass auch $N(K^{\perp}) \subseteq K^{\perp}$. Also wird N von K reduziert. Nach Bemerkung 4.2 werden N und N^* von $K^{\perp}$ reduziert. Wegen $K \subseteq H_1$ gilt $H_1^{\perp} \subseteq K^{\perp}$. Also besitzt N^* einen reduzierenden Unterraum, welcher $H_1^{\perp}$ enthält. Nach Definition 4.3 ist N^* keine minimale normale Erweiterung von T.

$\square$

Literaturverzeichnis

[Con91] John B. Conway. *The Theory of Subnormal Operators*. American Mathematical Society, 1991.

[Kal23] Michael Kaltenbäck. *Funktionalanalysis 2*. June 2023.