SEMINARARBEIT

Numerischer Wertebereich von Elementen normierter Algebren

ausgeführt am

Institut für
Analysis und Scientific Computing
TU Wien

unter der Anleitung von

Ao.Univ.Prof. Dipl.-Ing. Dr.techn. Michael Kaltenbäck

durch

Marco Katic
Matrikelnummer: 11717644

Wien, am 25.01.2020

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Wir diskutieren in dieser Arbeit das Konzept des numerischen Wertebereichs von Operatoren der Banachalgebra $L_b(H)$ auf eine beliebige normierte Algebra A mit Eins.
Der numerische Wertebereich wird dabei nicht nur von der Struktur der Algebra A abhängen, sondern auch von der zugrunde liegenden Norm $\|.\|$. Die Abhängigkeit des numerische Wertebereich von der Norm wird uns wichtige geometrische und topologische Eigenschaften liefern, etwa die Tatsache, dass der numerische Wertebereich $W(A;a)$ eines Elements a der Banachalgebra mit Eins eine nicht leere, kompakte und konvexe Teilmenge von $\mathbb{C}$ ist.
Ähnlich dem Spektralradius eines Element einer Banachalgebra mit Eins werden wir uns mit dem verallgemeinerten Begriff des numerischen Radius und der Beziehung des Spektrums $\sigma(a)$ eines Elementes der Banachalgebra mit Eins zu seinem numerischen Wertebereich $W(a)$ beschäftigen.

2 Grundbegriffe

Wir benötigen zuerst den Begriff einer Algebra.

Definition 2.0.1. *Sei $A \neq \{0\}$ ein Vektorraum über $\mathbb{R}$ oder über $\mathbb{C}$.*

- *Ist A versehen mit einer bilinearen Abbildung*

  $$A \times A \to A, \ (a, b) \mapsto ab,$$

  die assoziativ ist, so nennt man A eine Algebra.

- *Ein $1_A \in A$ heißt Einselement einer Algebra A, falls*

  $$a1_A = 1_A a = a, \ \textit{für alle } a \in A.$$

- *Eine Unteralgebra $B \leq A$ einer Algebra A ist ein linearer Unterraum von A, der unter der Multiplikation abgeschlossen ist.*

- *Ist A mit einer Norm $\|\cdot\|$ derart versehen, dass*

  $$\|ab\| \leq \|a\| \|b\|, \ \textit{für alle } a, b \in A,$$

  so spricht man von einer normierten Algebra. Ist obendrein $(A, \|\cdot\|)$ ein Banachraum, so spricht man von einer Banachalgebra.

Wir bezeichnen in diesem Kapitel das Einselement stets mit 1_A. Falls nicht explizit etwas anderes vorrausgesetzt wird, werden wir im weiteren Verlauf immer von Algebren über $\mathbb{C}$ mit Eins 1_A behandeln.

Fakt 2.0.2.

- Eine Algebra A besitzt höchstens ein Einselement 1_A. Angenommen es gäbe ein weiteres Einselement $\overline{1_A} \in A$ mit $a\overline{1_A} = a$ für alle $a \in A$. Dann folgt $1_A = 1_A\overline{1_A} = \overline{1_A}$.

- Für eine Algebra A und ein $a \in A$ folgt für ein beliebiges $b \in A$

  $$a0 = a(b - b) = (ab) - (ab) = 0 = (ba) - (ba) = (b - b)a = 0a,$$

  da das Produkt auf A eine assoziative Bilinearform ist. Definitionsgemäß gilt $A \neq \{0\}$, insbesondere kann 0 kein Einselement von A sein.

Definition 2.0.3. *Sei A eine Algebra mit Einselement. Ein Element heißt invertierbar, falls es ein $b \in A$ gibt mit $ab = ba = 1_A$. Weiters sei*

$$\mathrm{Inv}(A) := \{a \in A : a \textit{ ist invertierbar}\},$$

und für $a \in A$ bezeichne

$$\rho(a) := \{\lambda \in \mathbb{C} : (a - \lambda 1_A) \in \mathrm{Inv}(A)\}$$

die sogenannte Resolventenmenge von a,

$$\sigma(a) = \mathbb{C} \setminus \rho(a) = \{\lambda \in \mathbb{C} : (a - \lambda 1_A) \notin \mathrm{Inv}(A)\}$$

heißt dann Spektrum von a. Für $a - \lambda 1_A$ schreibt man auch kurz $a - \lambda$ und die Abbildung $\lambda \mapsto (a - \lambda)^{-1}$ heißt Resolvente von a. Der Spektralradius ist definiert durch

$$r(a) := \max_{\lambda \in \sigma(a)} |\lambda|.$$

Falls A eine Banachalgebra mit Eins ist gilt für ein $a \in A$ sogar ([M.B, Seite 129])

$$r(a) = \lim_{n \to \infty} \|a^n\|^{\frac{1}{n}} = \inf_{n \in \mathbb{N}} \|a^n\|^{\frac{1}{n}}.$$

3 Zustandsraum und numerischer Wertebereich

Sei H ein Hilbertraum. Definiert man ein $f : L_b(H) \to \mathbb{C}$ mit $x \in H$ und $\|x\|_H = 1$ durch $f(T) = (Tx, x)_H$, so gilt

$$f(I) = (Ix, x)_H = (x, x)_H = \|x\|_H^2 = 1.$$

Für $\|T\| \leq 1$ gilt weiters

$$|f(T)| = |(Tx, x)_H| \leq \|Tx\|_H \|x\|_H \leq \|T\| \|x\|_H^2 = \|T\| \leq 1.$$

Die Linearität von f folgt aus der Linearität des inneren Produktes im ersten Argument. Für $T \in L_b(H)$ gilt

$$|f(T)| = |(Tx, x)_H| \leq \|Tx\|_H \|x\|_H \leq \|T\|.$$

womit $f \in L_b(H)'$. Dabei gilt $f \in K_1^{L_b(H)'}(0)$ und $f(I) = 1$. Diese Idee führt zu einer geeigneten Definition von numerischen Wertebereichen auch für normierte Algebren mit Einselement. In Analogie zu oben muss für solche stetigen und linearen Funktionale f auf einer normierten Algebra A mit Einselement $f(1_A) = 1$ und $\|f\| \leq 1$ gelten. Den Raum all dieser Funktionale werden wir als den Raum der Zustände bezeichnen.

Definition 3.0.1. *Sei A eine normierte Algebra mit Eins 1_A. Ein stetiges lineares Funktional $f \in A'$ heißt Zustand, falls $\|f\| = f(1_A)$. Wenn zusätzlich $\|f\| = 1$ erfüllt ist, so heißt f ein normierter Zustand. Wir bezeichnen mit*

$$D(A; 1_A) := \{f \in A' : f(1_A) = \|f\| = 1\}.$$

die Menge aller normierten Zustände von A.

Fakt 3.0.2. *Wegen $\|1_A\| = 1$ folgt aus $f \in A'$ mit $\|f\| \leq 1$ und $f(1_A) = 1$, dass $f \in D(A; 1_A)$ und damit $D(A; 1_A) = \{f \in K_1^{A'}(0), f(1_A) = 1\}$.*

Definition 3.0.3. *Sei A eine normierte Algebra mit Eins 1_A und $a \in A$. Der numerische Wertebereich $W(A; a)$ von a bzgl. A ist definiert durch*

$$W(A; a) := \{f(a) : f \in D(A; 1_A)\}.$$

3.1 Eigenschaften des numerischen Wertebereichs und Zustandraums

Wir stellen zunächst die Frage der Verträglichkeit des numerischen Wertebereichs mit einem Übergang zu Unteralgebren.

Proposition 3.1.1. *Sei A eine normierte Algebra mit Eins und B eine Unteralgebra von A mit $1_A \in B$. Dann folgt für ein $b \in B$*

$$W(A; b) = W(B; b).$$

Beweis. $\subseteq$: Für ein beliebiges $z \in W(A; b)$ existiert definitionsgemäß ein $f \in D(A; 1_A)$ mit $z = f(b)$. Wegen $1_A \in B \leq A$ bildet die Einschränkungsabbildung $f \mapsto f|_B$ die Menge $D(A; 1_A)$ nach $D(B; 1_A)$ ab, wobei $z = f(b) = f|_B(b) \in W(B; b)$.

$\supseteq$: Zu $z \in W(B; b)$ existiert ein $f \in D(B; 1_A)$ mit $z = f(b)$. Da B ein linearer Unterraum von A ist und mit der Norm $\|\cdot\| |_B$ ein normierter Raum ist, folgt mit Korollar 5.2.4 [M.B, Seite 77], dass eine Fortsetzung $F \in A'$ existiert mit $\|F\|_{A'} = \|f\|_{B'} = 1$. Folglich gilt $F \in D(A; 1_A)$ mit $z = f(b) = F(b) \in W(A; b)$. $\square$

Lemma 3.1.2. *Für eine normierte Algebra A mit Eins ist die Menge aller Zustände $D(A; 1_A)$ eine nichtleere, schwach*-kompakte und konvexe Teilmenge von A'.*

Beweis. Korollar 5.2.4 [M.B, Seite,77] garantiert uns für $1_A \in A$ die Existenz eines $f \in A'$ mit $f(1_A) = 1 = \|f\|_{A'}$, also $f \in D(A; 1_A)$, wodurch $D(A; 1_A) \neq \emptyset$.
Für $f_1, f_2 \in D(A; 1_A)$ und $\lambda \in [0, 1]$ gilt

$$\lambda f_1(1_A) + (1 - \lambda) f_2(1_A) = \lambda + 1 - \lambda = 1.$$

Damit impliziert die Konvexität von $K_1^{A'}(0)$ jene von $D(A; 1_A)$.
Nach dem Satz von Banach-Alaoglu (vgl. [M.B, Seite 93]) ist $K_1^{A'}(0)$ bzgl. der schwach-* Topologie $\sigma(A', A)$ kompakt und daher abgeschlossen. Zudem ist $M = \{f \in A' : f(1_A) = 1\}$ als Urbild von $\{1\}$ unter der schwach-*-stetigen Abbildung $A' \ni f \mapsto f(1_A) \in \mathbb{C}$ schwach-*-abgeschlossen und folglich auch $D(A; 1_A) = M \cap K_1^{A'}(0)$. Als abgeschlossene Teilmenge der kompakten Menge $K_1^{A'}(0)$ ist $D(A; 1_A)$ schwach*-kompakt in A'. $\square$

Um Schlüsse von der Menge aller Zustände auf den numerischen Wertebereich zu ziehen, benötigen wir jediglich die kanonische Einbettung $\iota : A \to A''$, wobei $A'' = (A', \|\cdot\|_{A'})'$ der Dualraum A' versehen mit der Abbildungsnorm $\|\cdot\|_{A'}$ und $\iota(a)$ das Punktauswertungsfunktional $A \ni f \mapsto f(a) \in \mathbb{C}$ ist. ι ist linear und isometrisch, wenn man A'' mit der Abbildungsnorm $\|\cdot\|_{A''}$ versieht (Lemma 5.5.2 [M.B, Seite 89]).

Proposition 3.1.3. *Sei A eine normierte Algebra mit Eins und $a, b \in A$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Es gelten folgende Eigenschaften des numerischen Wertebereichs:*

i) $W(A; a)$ *ist eine nichtleere, kompakte und konvexe Teilmenge in* $\mathbb{C}$.

ii) $W(A; \alpha 1_A + \beta a) = \alpha + \beta W(A; a)$.

iii) $W(A; \alpha a + \beta b) \subseteq \alpha W(A; a) + \beta W(A; b)$.

iv) $W(A; 1_A) = \{1\}$.

Beweis. i) $W(A; a) \neq \emptyset$ folgt direkt aus $D(A; 1_A) \neq \emptyset$. Wir wissen aus Lemma 3.1.2, dass die Menge aller Zustände schwach*-kompakt und konvex ist. Betrachte das lineare Funktional $\iota(a) : A' \to \mathbb{C}$ aus A''. Aufgrund der Definition der schwach*-Topologie $(A', \sigma(A', A))$ ist das lineare $\iota(a)$ schwach-*-stetig auf A'. Da das Bild einer kompakten Menge unter einer stetigen Abbildung kompakt ist und da das Bild einer konvexen Menge unter einer linearen Abbildung konvex ist, muss $W(A; a) = \iota(a)(D(A; 1_A)) \subseteq \mathbb{C}$ kompakt und konvex sein.

ii) Folgt direkt aus

$$\begin{aligned} W(A; \alpha 1_A + \beta a) &= \{f(\alpha 1_A + \beta a) | f \in D(A; 1_A)\} \\ &= \{\alpha f(1_A) + \beta f(a) | f \in D(A; 1_A)\} = \{\alpha + \beta f(a) | f \in D(A; 1_A)\} \\ &= \alpha + \beta W(A; a). \end{aligned}$$

iii) Für $\lambda \in W(A; \alpha a + \beta b)$ existiert definitionsgemäß ein Zustand $f \in D(A; 1_A)$ mit $f(\alpha a + \beta b) = \lambda$. Da f linear ist, folgt

$$\lambda = f(\alpha a + \beta b) = f(\alpha a) + f(\beta b) = \alpha f(a) + \beta f(b),$$

womit $\lambda \in \alpha W(A; a) + \beta W(A; b)$.

iv) Für alle Zustände $f \in D(A; 1_A)$ gilt $f(1_A) = 1$, weshalb $W(A; 1_A) = \{1\}$. □

Der numerischen Wertbereich eines Elementes a in einer normierten Algebra A lässt sich als Durschnitt abgeschlossener Umgebungen anschreiben. Diese Eigenschaft wird uns später nützlich sein

Lemma 3.1.4. *Sei A eine normierte Algebra mit Eins. Für $a \in A$ gilt*

$$W(A; a) = \bigcap_{z \in \mathbb{C}} K^{\mathbb{C}}_{\|z1_A - a\|_A}(z)$$

Beweis. $\subseteq$: Zu $\lambda \in W(A; a)$ existiert ein Zustand $f \in D(A; 1_A)$ mit $\lambda = f(a)$. Für $z \in \mathbb{C}$ gilt

$$|\lambda - z| = |f(a) - z| = |f(a - z1_A)| \leq \|f\| \, \|a - z1_A\|_A \leq \|a - z1_A\|_A \,,$$

also

$$\lambda \in K^{\mathbb{C}}_{\|z1_A - a\|_A}(z) \text{ für alle } z \in \mathbb{C}.$$

$\supseteq$: Gelte $\lambda \in K^{\mathbb{C}}_{\|z1_A - a\|_A}(z)$ für beliebige $z \in \mathbb{C}$. Falls $a = \eta 1_A$ für ein $\eta \in \mathbb{C}$ erfüllt ist, so gilt

$$\|z1_A - a\|_A = \|z1_A - \eta 1_A\|_A = \|(z - \eta) 1_A\|_A = |z - \eta| \, \|1_A\|_A = |z - \eta|,$$

Für $z=\eta$ folgt aus $\lambda \in K^{\mathbb{C}}_{\|z1_A-a\|}(z)$, dass $\lambda=\eta$. Aus $a=\eta 1_A$ folgt auch $f(a)=f(\eta 1_A)=\eta f(1_A)=\eta$ für alle Zustände $f\in D(A;1_A)$, womit $\lambda\in\{\eta\}=W(A;a)$.
Anderenfalls ist die Menge $U:=\{1_A,a\}\subseteq A$ linear unabhängig. Wir definieren ein lineares g auf $\operatorname{span}(U)$ durch

$$g(\alpha 1_A+\beta a)=\alpha+\beta\lambda,\ \alpha,\beta\in\mathbb{C}.$$

Für $\alpha,\beta\in\mathbb{C}$ mit $\beta\neq 0$ setzen wir $z=-\frac{\alpha}{\beta}$ und erhalten aus $\lambda\in K^{\mathbb{C}}_{\|z1_A-a\|}(z)$

$$\left|\lambda+\frac{\alpha}{\beta}\right|=|\lambda-z|\leq\|z1_A-a\|_A=\left\|\frac{\alpha}{\beta}1_A+a\right\|_A,$$

wodurch

$$|g(\alpha 1_A+\beta a)|=\left|\frac{\alpha}{\beta}+\lambda\right||\beta|\leq|\beta|\left\|\frac{\alpha}{\beta}1_A+a\right\|_A=\|\alpha 1_A+\beta a\|_A.$$

Für $\beta=0$ gilt diese Ungleichung wegen $\|1_A\|=1$. Also gilt $\|g\|\leq 1$. Nach Korollar 5.2.4 [M.B, Seite 77] existiert eine stetige lineare Fortsetzung $F\in A'$ von g mit $\|g\|_{U'}=\|F\|_{A'}\leq 1$. Wegen $F(1_A)=1$ gilt $F\in D(A;1_A)$ und $\lambda=g(a)=F(a)\in W(A;a)$. □

Falls A eine Banachalgebra mit Eins ist, so können wir folgendes zeigen.

Proposition 3.1.5. *Für eine Banachalgebra A mit Eins und $a\in A$ gilt $\sigma(a)\subseteq W(A;a)$.*

Beweis. Nach dem vorherigen Lemma gibt es zu $\lambda\in\mathbb{C}\setminus W(A;a)$ ein $z\in\mathbb{C}$ mit $|z-\lambda|>\|z1_A-a\|_A$. Das heißt $\left\|(z-\lambda)^{-1}(z1_A-a)\right\|_A<1$. Wegen Lemma 6.4.10 [M.B, Seite 128] gilt $1_A-(z-\lambda)^{-1}(z1_A-a)\in\operatorname{Inv}(A)$ und folglich auch

$$(z-\lambda)1_A-(z1_A-a)=a-\lambda 1_A\in\operatorname{Inv}(A),$$

und somit $\lambda\in\rho(a)$. Also ist $\mathbb{C}\setminus W(A;a)\subseteq\mathbb{C}\setminus\sigma(a)$ und daher $\sigma(a)\subseteq W(A;a)$. □

Für den nächsten Satz definieren wir für $a\in A$ und $x\in K_1^A(0)$

$$W(a,x):=\bigcap_{z\in\mathbb{C}}K^{\mathbb{C}}_{\|(z1_A-a)x\|_A}(z).$$

Wir können den numerischen Wertebereich von a über die soeben definierten Mengen ausdrücken.

Lemma 3.1.6. *Sei A eine normierte Algebra mit Eins und $a\in A$. Es gilt für den numerischen Wertebereich*

$$W(A;a)=\bigcup_{x\in K_1^A(0)}W(a;x).$$

Beweis. $\supseteq$: Für $x\in K_1^A(0)$ und $z\in\mathbb{C}$ gilt $\|(z1_A-a)x\|_A\leq\|z1_A-a\|_A$. Mit Lemma 3.1.4 folgt $W(a;x)\subseteq W(A;a)$.
$\subseteq$: Wegen $1_A\in K_1^A(0)$ mit $\|z1_A-a\|_A=\|(z1_A-a)1_A\|_A$ für $z\in\mathbb{C}$ gilt

$$W(A;a)=W(a,1_A)\subseteq\bigcup_{x\in K_1^A(0)}W(a;x).$$

□

Lemma 3.1.7. *Sei A eine normierte Algebra mit Eins und $a \in A$. Dann gilt*

$$W(a,x) = \{f(ax) : f \in D(x)\},$$

wobei

$$D(x) = \{f \in A' : f(x) = 1 = \|f\|_{A'}\}.$$

Beweis.

- $W(a,x) \subseteq \{f(ax) : f \in D(A;1_A)\}$: Sei $y \in W(a,x)$. Wir definieren auf $M := \operatorname{span}\{ax, x\}$ ein lineares Funktional durch $f_y(ax\lambda + x\mu) = \lambda y + \mu$ für $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$, welches wegen $\dim M < \infty$ auch stetig ist. Wir erhalten $f_y(ax) = y$ und $f_y(x) = 1$ sowie mit $z = -\frac{\mu}{\lambda}$ für $\lambda \neq 0$

$$|f_y(ax\lambda + x\mu)| = |\lambda y + \mu| = |\lambda| \left| y + \frac{\mu}{\lambda} \right| \leq |\lambda| \, \|(z1_A - a)x\|_A = \|ax\lambda + x\mu\|_A \,.$$

  Lassen wir λ gegen 0 streben so folgt diese Ungleichung auch für $\lambda = 0$ weshalb $\|f_y\| \leq 1$. Wegen $f_y(x) = 1$ sowie $\|x\|_A \leq 1$ auch $\|f_y\| = 1$. Nach dem Satz von Hahn-Banach existiert eine Fortsetzung $F_y \in A'$ mit $\|F_y\| = \|f_y\| = 1$, womit $F_y \in D(x)$ und $F_y(ax) = y$.

- $W(a,x) \supseteq \{f(ax) : f \in D(A;1_A)\}$: Sei zunächst $f \in D(x)$ und $z \in \mathbb{C}$. Wir erhalten

$$|f(ax) - z| = |f(ax - zx)| \leq \|f\|_{A'} \, \|(a - z1_A)x\|_A = \|(z1_A - a)x\|_A \,.$$

□

Korollar 3.1.8. *Sei A eine normierte Algebra mit Eins und $a \in A$. Dann gilt*

$$\inf_{\lambda \in W(A;a)} \operatorname{Re}(\lambda) \leq \inf_{x \in K_1^A(0)} \|ax\|_A \,.$$

Beweis. Sei $x \in K_1^A(0)$. Aus $W(a,x) = \bigcap_{z \in \mathbb{C}} K_{\|(z1_A - a)x\|_A}(z)$ folgt $W(a,x) \subseteq K_{\|ax\|_A}(0)$, indem wir $z = 0$ setzen. Wegen Lemma 3.1.6 gilt $W(a,x) \subseteq W(A;a)$ und somit

$$\inf_{\lambda \in W(A;a)} \operatorname{Re}(\lambda) \leq \inf_{\lambda \in W(a,x)} \operatorname{Re}(\lambda) \leq \|ax\|_A \,.$$

Da $x \in K_1^A(0)$ beliebig war, folgt die Behauptung. □

3.2 Numerischer Radius

Analog zum Spektralradius eines Elementes können wir seinen numerischen Radius definieren. Dabei nimmt der numerischen Wertebereich $W(A;a)$ die Rolle des Spektrums ein.

Definition 3.2.1. *Sei A eine normierte Algebra mit Eins und $a \in A$. Dann ist der numerische Radius von a in A, bezeichnet mit $n(A;a)$, definiert durch*

$$n(A;a) := \sup\{|\lambda| : \lambda \in W(A;a)\} = \sup\{|f(a)| : f \in D(A;1_A)\}.$$

Da wir schon gezeigt haben, dass der numerische Wertebereich eines Elementes $a \in A$ eine konvexe und kompakte Teilmenge von $\mathbb{C}$ ist, ist der numerische Radius endlich und stimmt mit $\max\{|\lambda| : \lambda \in W(A;a)\}$ überein.

Proposition 3.2.2. *Sei A eine normierte Algebra mit Eins. Für $a, b \in A$ und $\lambda \in \mathbb{C}$ gilt*

i) $n(A; a+b) \leq n(A;a) + n(A;b)$.

ii) $n(A; \lambda a) = |\lambda| n(A;a)$.

Beweis. i): Nach Definition gilt

$$\begin{aligned} n(A; a+b) &= \sup_{f \in D(A;1_A)} |f(a+b)| = \sup_{f \in D(A;1_A)} |f(a) + f(b)| \\ &\leq \sup_{f \in D(A;1_A)} |f(a)| + \sup_{f \in D(A;1_A)} |f(b)| \\ &= n(A;a) + n(A;b). \end{aligned}$$

ii):

$$n(A; \lambda a) = \sup_{f \in D(A;1_A)} |f(\lambda a)| = \sup_{f \in D(A;1_A)} |\lambda f(a)| = |\lambda| \sup_{f \in D(A;1_A)} |f(a)| = |\lambda| n(A;a).$$

□

Lemma 3.2.3. *Sei A eine Banachalgebra mit Eins und $a \in A$. Für $\lambda \notin W(A;a)$ gilt*

$$\left\|(a - \lambda 1_A)^{-1}\right\|_A \leq \frac{1}{d(\lambda, W(A;a))}.$$

Beweis. Für $\lambda \notin W(A;a)$ gilt nach Proposition 3.1.5 $(a - \lambda 1_A) \in \mathrm{Inv}(A)$. Können wir $\|(a - \lambda 1_A) b\|_A \geq \delta \|b\|_A$ für alle $b \in A$ mit $\delta := d(\lambda, W(A;a))$ zeigen, so folgt die behauptete Ungleichung, wenn wir $b = (a - \lambda 1_A)^{-1}$ setzen. Für ein $b \in A$ mit $\|b\|_A = 1$ existiert nach Korollar 5.2.4 [M.B, Seite 77] ein $f \in A'$ mit $\|f\| = 1$ sowie $f(b) = \|b\| = 1$. Wir setzen $g(u) = f(ub)$ für $u \in A$. Dann ist g linear und es gilt $\|g\| \leq \|f\| = 1$ sowie $g(1_A) = f(b) = 1$, also $g \in D(A;1_A)$. Somit folgt

$$\delta \leq |\lambda - g(a)| = |g(\lambda 1_A - a)| = |f((\lambda 1_A - a)b)| \leq \|(\lambda 1_A - a)b\|_A.$$

Für allgemeine $b \in A \backslash \{0\}$ erhalten wir diese Ungleichung durch Anwendung des Bewiesenen auf $\frac{b}{\|b\|_A}$ und für $b = 0$ ist sie trivial. □

Satz 3.2.4. *Sei A eine Banachalgebra mit Eins und $K \subseteq \mathbb{C}$ eine abgeschlossene konvexe Menge. Dann gilt $W(A;a) \subseteq K$ genau dann, wenn $\sigma(a) \subseteq K$ und*

$$\left\|(a - \lambda)^{-1}\right\|_A \leq \frac{1}{d(\lambda, K)} \quad \text{für alle } \lambda \in \mathbb{C} \setminus K. \tag{3.1}$$

Beweis. $\Rightarrow$: Aus $W(A;a) \subseteq K$ folgt nach Proposition 3.1.5, dass $\sigma(a) \subseteq K$, und mit Lemma 3.2.3

$$\left\|(a-\lambda)^{-1}\right\|_A \leq \frac{1}{d(\lambda, W(A;a))} \leq \frac{1}{d(\lambda, K)} \quad \text{für alle } \lambda \in \mathbb{C} \setminus K.$$

$\Leftarrow$: Angenommen es gilt $\sigma(a) \subseteq K$ und die Resolvente von a erfüllt obige Ungleichung. Da die abgeschlossene und konvexe Menge K nach Korollar 5.2.6 [M.B, Seite 79] als Durchschnitt von abgeschlossenen Halbebenen geschrieben werden kann, reicht es zu zeigen, dass jede K enthaltende abgeschlossene Halbebene auch $W(A;a)$ enthält. Eine abgeschlossene Halbebene H lässt sich schreiben als $H = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(z\eta) \leq \gamma\}$ mit gewissen $\eta \in \mathbb{C}$, $|\eta| = 1$, und $\gamma \in \mathbb{R}$, wodurch $H = \frac{1}{\eta}(\gamma - H_0)$ mit $H_0 := \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(z) \geq 0\}$. Die Annahme $H \supseteq K \supseteq \sigma(a)$ mit

$$\left\|(a-\lambda)^{-1}\right\|_A \leq \frac{1}{d(\lambda, K)} \quad \text{für alle } \lambda \in \mathbb{C} \setminus K$$

ist folglich äquivalent zu $H_0 \supseteq \gamma - \eta K \supseteq \sigma(\gamma 1_A - \eta a)$ mit

$$\left\|(\gamma 1_A - \eta a - \lambda)^{-1}\right\|_A \leq \frac{1}{d(\lambda, \gamma - \eta K)} \quad \text{für alle } \lambda \in \mathbb{C} \setminus (\gamma - \eta K)\,.$$

Außerdem ist die zu zeigende Inklusion $H \supseteq W(A;a)$ wegen Proposition 3.1.3 äquivalent zu $H_0 \supseteq \gamma - \eta W(A;a) = W(A; \gamma 1_A - \eta a)$. Indem wir also von $H, K, W(A;a)$ zu $\gamma - \eta H = H_0, \gamma - \eta K, \gamma - \eta W(A;a)$ übergehen, können wir o.B.d.A. annehmen, dass $H = H_0 \supseteq K$. Die vorrausgesetzte Ungleichung 3.1 impliziert wegen $d(-s, K) \geq d(-s, H) = s$ für $s \in \mathbb{R}$ mit $s > 0$

$$\left\|(1_A + ta)^{-1}\right\|_A = \frac{1}{t}\left\|\left(a - \left(-\frac{1}{t}\right)1_A\right)^{-1}\right\|_A \leq \frac{1}{td(-\frac{1}{t}, K)} \leq 1 \quad \text{für } t > 0.$$

Für $f \in D(A; 1_A)$ gilt $\mathrm{Re}(f((1_A + ta)^{-1})) \leq \|f\| \left\|(1_A + ta)^{-1}\right\|_A \leq 1 = f(1_A)$ und somit

$$\begin{aligned} 0 \leq \mathrm{Re}(f(1_A - (1_A + ta)^{-1})) &= \mathrm{Re}(f((1_A + ta)(1_A + ta)^{-1} - (1_A + ta)^{-1})) \\ &= \mathrm{Re}(f((1_A + ta - 1)(1_A + ta)^{-1})) = \mathrm{Re}(f(ta(1_A + ta)^{-1})). \end{aligned}$$

Dividieren wir durch t, so erhalten wir

$$0 \leq \mathrm{Re}(f(a(1_A + ta)^{-1})) \text{ für alle } t > 0.$$

Für hinreichend kleine $t > 0$ gilt $\|ta\|_A < 1$ und daher

$$a(1_A + ta)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^n a^{n+1} = a + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n t^n a^{n+1}.$$

Da A-wertige-Potenzreihen stetig auf ihrem Konvergenzkreis sind, erhalten wir für $t \to 0+$

$$\lim_{t \to 0+} \mathrm{Re}(f(a(1_A + ta)^{-1})) = \mathrm{Re} f(a) \geq 0.$$

Also gilt $f(a) \in H$ und folglich $W(A;a) \subseteq H$. □

Satz 3.2.5. *Sei A eine Banachalgebra mit Eins. Für $a \in A$ gilt*

$$n(A;a) \leq \|a\|_A \leq 4n(A;a).$$

Beweis. Die erste Ungleichung folgt aus $|f(a)| \leq \|f\| \, \|a\|_A = \|a\|_A$ für $f \in D(A;1_A)$. Für die zweite Ungleichung reicht es zu zeigen, dass, falls $W(A;a)$ eine Teilmenge des abgeschlossenen Einheitskreises ist, auch $\|a\|_A \leq 4$ gilt. Denn mit Proposition 3.2.2 (ii) und der gezeigten Ungleichung angewandt auf $\frac{1}{n(A;a)}a$ erhält man die Behauptung. Wegen Satz 3.2.4 gilt

$$\left\|(a-\lambda)^{-1}\right\|_A \leq (|\lambda|-1)^{-1} \text{ für alle } \lambda \in \mathbb{C} \setminus K_1^{\mathbb{C}}(0).$$

Da $(A, \|\cdot\|)$ ein Banachraum ist, folgt mit Satz 11.8.15 [KAL, Seite 129] angewandt auf das holomorphe $f : \{0\} \cup \{z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} : \frac{1}{z} \notin \sigma(a)\} \to \mathbb{C}$ mit

$$f(z) = \left(\frac{1}{z}1_A - a\right)^{-1} = \sum_{n=1}^{\infty} z^n a^{n-1} \quad \text{für } z \neq 0$$

und $f(0) = 0$ wegen $z \notin \sigma(a)$ für $|z| = 2$

$$\|a\|_A = \left\| \frac{1}{2\pi i} \int_{|\gamma|=\frac{1}{2}} \frac{1}{\lambda^3} \left(\frac{1}{\lambda}1_A - a\right)^{-1} d\lambda \right\|_A = \left\| \frac{1}{2\pi i} \int_{|\xi|=2} \xi(\xi 1_A - a)^{-1} d\xi \right\|_A \leq 4.$$

□

Wir wollen noch zeigen, dass der Zustandsraum punktetrennend auf A wirkt.

Korollar 3.2.6. *Sei A eine normierte Algebra mit Eins. Der Zustandsram $D(A;1_A)$ wirkt punktetrennend auf A. Das heißt, für $b, c \in A$ mit $b \neq c$ existiert ein Funktional $f \in D(A;1_A)$ derart, dass $f(b) \neq f(c)$.*

Beweis. Für $0 \neq a$ in A, gilt $n(A;a) \neq 0$ nach Satz 3.2.5. Damit existiert ein normierter Zustand $f \in D(A;1_A)$ mit $f(a) \neq 0$. Wendet man diese Aussage auf $a = b - c \neq 0$ mit $b \neq c$ an, so erhält man $f(b) \neq f(c)$. □

Mit dem Lemma 3.1.8 können wir Aussagen über den Realteil des numerischen Radius treffen.

Satz 3.2.7. *Für A eine normierte Algebra A mit Eins gilt*

$$\begin{aligned}\sup_{\lambda \in W(A;a)} \operatorname{Re}(\lambda) &= \inf_{\alpha > 0} \frac{1}{\alpha}(\|1_A + \alpha a\|_A - 1) \\ &= \lim_{\alpha \to 0+} \frac{1}{\alpha}(\|1_A + \alpha a\|_A - 1).\end{aligned}$$

Beweis. Wir setzen $\eta := \sup_{\lambda \in W(A;a)} \operatorname{Re}(\lambda)$. Wegen Satz 3.1.4 gilt für $\alpha > 0$

$$W(A;a) \subseteq K^{\mathbb{C}}_{\left\|\frac{1}{\alpha}1_A + a\right\|_A}\left(-\frac{1}{\alpha}\right),$$

und daher
$$\left|\mathrm{Re}\left(\lambda+\frac{1}{\alpha}\right)\right| \leq \left|\lambda+\frac{1}{\alpha}\right| \leq \left\|\frac{1}{\alpha}1_A + a\right\|_A \quad \text{für } \lambda \in W(A;a).$$
Daraus folgt aufgrund der Definition von η
$$\eta + \frac{1}{\alpha} \leq \left\|\frac{1_A}{\alpha} + a\right\|_A$$
und folglich
$$\eta \leq \left\|\frac{1_A}{\alpha} + a\right\|_A - \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{\alpha}(\|1_A + \alpha a\| - 1).$$
Zudem gilt nach Proposition 3.1.3 für $\alpha > 0$
$$W(A;1_A - \alpha a) = 1 - \alpha W(A;a),$$
und damit
$$\inf_{\lambda \in W(A;1-\alpha a)} \mathrm{Re}(\lambda) = \inf_{\lambda \in W(A;a)} \mathrm{Re}(1-\alpha\lambda) = 1 - \alpha\eta.$$
Wegen Korollar 3.1.8 erhalten wir für $x \in K_1^A(0)$ daraus
$$1 - \alpha\eta \leq \|(1-\alpha a)x\|_A\,.$$
Also gilt für beliebiges $x \in A \setminus \{0\}$
$$\left\|(1_A - \alpha a)\frac{x}{\|x\|_A}\right\|_A \geq (1-\alpha\eta),$$
womit für $x \in A$
$$(1-\alpha\eta)\,\|x\|_A \leq \|(1_A - \alpha a)x\|_A\,. \tag{3.2}$$
Wählen wir $x = 1_A + \alpha a \in A$, so folgt mit obiger Ungleichung und der Dreiecksungleichung sowie $\|1_A\|_A = 1$
$$\left\|1_A - \alpha^2 a^2\right\|_A = \|(1_A - \alpha a)(1_A + \alpha a)\|_A \geq (1-\alpha\eta)\,\|1 + \alpha a\|_A\,.$$
Für $\alpha\eta < 1$ erhalten wir
$$\begin{aligned}\|1_A + \alpha a\|_A - 1 &\leq (1-\alpha\eta)^{-1}\left\|1_A - \alpha^2 a^2\right\|_A - 1\\ &\leq (1-\alpha\eta)^{-1}(1 + \alpha^2\left\|a^2\right\|_A) - 1 = (1-\alpha\eta)^{-1}(\alpha^2\left\|a^2\right\|_A + \alpha\eta)\end{aligned}$$
und infolge
$$\frac{1}{\alpha}(\|1_A + \alpha a\|_A - 1) \leq (1-\alpha\eta)^{-1}(\eta + \alpha\left\|a^2\right\|_A).$$
Damit ist
$$\eta \leq \frac{1}{\alpha}(\|1_A + \alpha a\|_A - 1) \leq (1-\alpha\eta)^{-1}(\eta + \alpha\left\|a^2\right\|_A)$$
für hinreichend kleine $\alpha > 0$ erfüllt.
Der Ausdruck rechts konvergiert für $\alpha \to 0+$ gegen η, woraus
$$\eta = \inf_{\alpha>0}\frac{1}{\alpha}(\|1_A + \alpha a\|_A - 1) = \lim_{\alpha\to 0+}\frac{1}{\alpha}(\|1_A + \alpha a\|_A - 1)$$
folgt. □

Für den nächsten Satz benötigen wir eine Darstellung der Exponentialfunktion in einer Banachalgebra mit Eins.

Definition 3.2.8. *Sei A einer Banachalgebra mit Eins und $a \in A$.* $\exp(a)$ *ist definiert durch*

$$\exp(a) = 1_A + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n!}.$$

Für $N \in \mathbb{N}$ und $a \in A$ folgt aus

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\|a\|_A^n}{n!} = \exp(\|a\|_A) < +\infty$$

die absolute Konvergenz der A-wertigen Reihe $\exp(a)$, wobei $\|\exp(a)\|_A \leq \exp(\|a\|_A)$.

Proposition 3.2.9. *Sei A eine Banachalgebra mit Eins und $a_n, b_n \in A$ für $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ mit $\sum_{n=0}^{\infty} \|a_n\|_A < \infty, \sum_{n=0}^{\infty} \|b_n\|_A < \infty$. Dann konvergiert die A-wertige Reihe*

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_m = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\right)$$

absolut, wobei $c_m = \sum_{j+k=m} a_j b_k$.

Beweis. Wir setzen

$$A_N = \sum_{n=0}^{N} a_n,\ B_N = \sum_{n=0}^{N} b_n,\ C_N = \sum_{\substack{j+k\leq N\\ j,k\geq 0}} a_j b_k$$

für $N \in \mathbb{N}$. Die Differenz $A_N B_N - C_N$ besteht aus jenen Summanden $a_j b_k$ mit $0 \leq j, k \leq N$ und $j + k > N$ also

$$A_N B_N - C_N = \sum_{0\leq j,k\leq N,\ j+k>N} a_j b_k.$$

Da in obiger Summe j oder k größer $\frac{N}{2}$ sein müssen, können wir die Summe in der Norm durch

$$\begin{aligned}
\|A_N B_N - C_N\|_A &\leq \sum_{0\leq j,k\leq N, j+k>N} \|a_j\|_A \|b_k\|_A \\
&\leq \sum_{0\leq j\leq N, \frac{N}{2}<k\leq N} \|a_j\|_A \|b_k\|_A + \sum_{\frac{N}{2}<j\leq N, k\leq N} \|a_j\|_A \|b_k\|_A \\
&= \sum_{0\leq j\leq N} \|a_j\|_A \sum_{\frac{N}{2}<k\leq N} \|b_k\|_A + \sum_{0\leq k\leq N} \|b_k\|_A \sum_{\frac{N}{2}<j\leq N} \|a_j\|_A,
\end{aligned}$$

abschätzen. Der linke Faktor der beiden Summanden im letzten Ausdruck bleibt für alle $N \in \mathbb{N}$ beschränkt und der rechte Faktor geht für $N \to \infty$ gegen 0.

Die absolute Konvergenz der Partialsumme C_N folgt aus

$$\sum_{n=0}^{N} \|c_n\|_A = \sum_{n=0}^{N} \left\| \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} \right\|_A \leq \sum_{n=0}^{N} \left(\sum_{k=0}^{n} \|a_k b_{n-k}\|_A \right)$$
$$\leq \left(\sum_{n=0}^{N} \|a_n\|_A \right) \left(\sum_{k=0}^{N-n} \|b_k\|_A \right) \leq \left(\sum_{n=0}^{\infty} \|a_n\|_A \right) \left(\sum_{k=0}^{\infty} \|b_k\|_A \right) \quad \text{für alle } N \in \mathbb{N}.$$

□

Wir können nun einige Eigenschaften der Exponentialfunktion auf einer Banachalgebra mit Eins zeigen.

Proposition 3.2.10. *Sei A eine Banachalgebra mit Eins. Weiters seien $a, b \in A$ und $ab = ba$. Dann gilt*

i) $\exp(a + b) = \exp(a) \exp(b)$,

ii) $\exp(a) \in \mathrm{Inv}(a)$ *und* $(\exp(a))^{-1} = \exp(-a)$,

iii) $\exp(a) = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n} a\right)^n$.

Beweis. i) Wir definieren für $N \in \mathbb{N}$

$$x_N := 1_A + \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k!} a^k, \; y_N := 1_A + \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k!} b^k.$$

Wir bezeichnen hier mit $a^0 = 1_A$, um die Darstellung der Summe etwas zu vereinfachen. Da nun die Partialsummen x_N und y_N für $N \to \infty$ absolut gegen $\exp(a)$ bzw. $\exp(b)$ konvergieren, folgt mit Proposition 3.2.9

$$\begin{aligned}
\exp(a)\exp(b) &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!} \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{b^n}{n!} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{a^k b^{n-k}}{k!(n-k)!} \right) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} a^k b^{n-k} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (a+b)^k \\
&= \exp(a + b).
\end{aligned}$$

ii) Folgt aus (i) für $b = -a$.

iii) Sei x_N wie in (i) definiert und

$$\eta_N := \sum_{k=0}^{N} \frac{\|a\|_A^k}{k!}, \; y_N := \left(1_A + \frac{1}{N} a\right)^N, \; \zeta_N := \left(1 + \frac{\|a\|_A}{N}\right)^N$$

für $N \in \mathbb{N}$. Da a mit sich selbst und mit 1_A kommutiert, folgt

$$y_N = \sum_{k=1}^{N} \binom{N}{k} \frac{1}{N^k} a^k + 1_A$$

wodurch

$$x_N - y_N = \sum_{k=2}^{N} \alpha_k a^k$$

mit Koeffizienten $\alpha_k = \frac{1}{k!} - \frac{N!}{N^k k!(N-k)!} = \frac{1}{k!}\left(1 - \frac{(N-1)!}{N^{k-1}(N-k)!}\right) \geq 0$, da $N^{k-1} \geq \frac{(N-1)!}{(N-k)!}$ für alle $k = 2, \dots, N$. Daraus folgt

$$\|x_N - y_N\|_A \leq \sum_{k=2}^{N} \alpha_k \|a\|_A^k = \eta_N - \zeta_N.$$

Aus der Linearität des Grenzwertes folgt mit $\lim_{N\to\infty}(\eta_N - \zeta_N) = \exp(\|a\|_A) - \exp(\|a\|_A) = 0$ die Konvergenz des obigen Ausdrucks für $N \to \infty$ gegen 0.

□

Wir können mithilfe von Proposition 3.2.10 eine weitere nützliche Darstellung des Supremum des numerischen Wertebereichs finden.

Satz 3.2.11. *Sei A eine normierte Algebra mit Eins und $a \in A$. Dann gilt*

$$\begin{aligned}\sup_{\lambda \in W(A;a)} \operatorname{Re}(\lambda) &= \sup_{\alpha > 0} \frac{1}{\alpha} \log(\|\exp(\alpha a)\|_A) \\ &= \lim_{\alpha \to 0+} \frac{1}{\alpha} \log(\|\exp(\alpha a)\|_A).\end{aligned}$$

Beweis. Sei $\mu = \sup_{\lambda \in W(A;a)} \operatorname{Re}(\lambda)$. Wie in (3.2) im Beweis von Satz 3.2.7 sei $\alpha > 0$ mit $1 - \alpha\mu > 0$, sodass für $b \in A$

$$\|(1_A - \alpha a)b\|_A \geq (1 - \alpha\mu)\|b\|_A \text{ für alle } b \in A \tag{3.3}$$

gilt. Durch vollständige Induktion nach $n \in \mathbb{N}$ wollen wir

$$\|(1_A - \alpha a)^n b\|_A \geq (1 - \alpha\mu)^n \|b\|_A \text{ für alle } b \in A \tag{3.4}$$

zeigen. Der Induktionsanfang ist (3.3). Sei (3.4) für $n-1$ mit $n \geq 2$ erfüllt. Wegen $(1_A - \alpha a)b \in A$ gilt

$$\begin{aligned}\|(1_A - \alpha a)^n b\|_A = \left\|(1_A - \alpha a)^{n-1}(1_A - \alpha a)b\right\|_A &\geq (1-\alpha\mu)^{n-1}\|(1_A - \alpha a)b\|_A \\ &\geq (1-\alpha\mu)^{n-1}(1-\alpha\mu)\|b\|_A = (1-\alpha\mu)^n \|b\|_A .\end{aligned} \tag{3.5}$$

Wähle ein $\alpha > 0$ und $N \in \mathbb{N}$ so groß, dass $1 - \frac{\alpha}{N} > 0$. Für $n \geq N$ ersetzen wir α durch $\frac{\alpha}{n}$ in (3.4). Da die Norm und die Multiplikation in A stetig sind, erhalten wir aus Proposition 3.2.10, (*iii*),

$$\|\exp(-\alpha a)b\|_A \geq \exp(-\alpha\mu)\|b\|_A .$$

Wähle $b = \exp(\alpha a)$. Da αa mit $-\alpha a$ kommutiert, folgt für $\alpha > 0$

$$\|\exp(\alpha a)\|_A \leq \exp(\alpha\mu)$$

und folglich

$$\frac{1}{\alpha}\log(\|\exp(\alpha a)\|_A) \leq \mu.$$

Wir erhalten

$$\sup_{\alpha>0}\frac{1}{\alpha}\log(\|\exp(\alpha a)\|_A) \leq \mu.$$

Wegen der Dreiecksungleichung nach unten folgt für $\alpha \in [0,1]$

$$|\,\|\exp(\alpha a)\|_A - \|1_A + \alpha a\|_A\,| \leq \left\|\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(\alpha a)^n}{n!}\right\|_A \leq \alpha^2\exp(\|a\|_A) = \alpha^2 M \tag{3.6}$$

mit $M := \|\exp(a)\|_A < +\infty$. Sei $\epsilon : [0,1] \to [-M, M]$ definiert durch $\epsilon(\alpha) = \|\exp(\alpha a)\|_A - \|1_A + \alpha a\|_A$. Mit der vorherigen Abschätzung gilt $|\epsilon(\alpha)| \leq M\alpha^2$ für $\alpha \in [0,1]$. Andererseits ist $\log(t) \geq \frac{t-1}{t}$ für $t > 0$. Setzen wir $t = \|\exp(\alpha a)\|_A$, so folgt

$$\frac{1}{\alpha}\log(\|\exp(\alpha a)\|_A) \geq \frac{1}{\alpha}\frac{\|\exp(\alpha a)\|_A - 1}{\|\exp(\alpha a)\|_A} = \frac{1}{\alpha}\frac{(\|1_A + \alpha a\|_A - 1) + \epsilon(\alpha)}{\|1_A + \alpha a\|_A + \epsilon(\alpha)}$$

Wegen $\left|\frac{1}{\alpha}\epsilon(\alpha)\right| \leq M\alpha$ erhalten wir $\lim_{\alpha\to 0+}\frac{1}{\alpha}\epsilon(\alpha) = 0$. Mit Satz 3.2.7 folgt

$$\sup_{\lambda\in W(A;a)}\mathrm{Re}(\lambda) = \lim_{\alpha\to 0+}\frac{1}{\alpha}\log(\|\exp(\alpha a)\|_A) = \sup_{\alpha>0}\frac{1}{\alpha}\log(\|\exp(\alpha a)\|_A).$$

□

Wir bringen unser letztes Resultat im Zusammenhang mit dem numerischen Radius.

Satz 3.2.12. *Sei A eine normierte Algebra mit Eins und $a \in A$. Dann gilt*

$$\frac{1}{e}\|a\|_A \leq n(A;a) \leq \|a\|_A.$$

Beweis. Wegen Proposition 3.1.1 können wir o.B.d.A. annehmen, dass A vollständig und somit eine Banachalgebra mit Eins ist. Die zweite Ungleichung ist aus Satz 3.2.5 bekannt. Für den Nachweis der 1.Ungleichung können wir wegen Proposition 3.1.3 annehmen, dass $n(A;a) \leq 1$. Wegen Satz 3.2.11 gilt

$$\sup_{\alpha>0}\frac{1}{\alpha}\log\|\exp(\alpha a)\|_A = \sup_{\lambda\in W(A;a)}\mathrm{Re}(\lambda) \leq n(A;a) \leq 1$$

Da für $|w| = 1$ wegen Proposition 3.1.3 $n(A;wa) = n(A;a)$ gilt, erhalten wir aus obiger Ungleichung mit $\alpha = |z|$, dass für alle $z \in \mathbb{C}$

$$\log\|\exp(za)\|_A \leq 1,$$

womit

$$\|\exp(za)\|_A \leq e.$$

Da $z \mapsto \exp(za)$ mit $a \in A$ eine banachraumwertige, analytische Funktion auf $\mathbb{C}$ ist, können wir Satz 11.8.15 [KAL, Seite 129] auf $f^{(1)}(a) = a$ anwenden und erhalten mit $\gamma(t) = e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$,

$$\|a\|_A = \left\| \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{\exp(za)}{z^2} dz \right\|_A \leq \frac{1}{2\pi} l(\gamma) \sup_{|z|=1} \|\exp(za)\|_A \leq e.$$

□

3.3 Resultate für dissipative und hermitesche Elemente

Definition 3.3.1. *Ein Elemente $a \in A$ heißt dissipativ, falls $\operatorname{Re}(\lambda) \leq 0$ für $\lambda \in W(A; a)$ und hermitesch, falls $W(A; a) \subseteq \mathbb{R}$.*

Mit den Sätzen des vorherigen Abschnittes erhalten wir

Korollar 3.3.2. *Sei A eine normierte Algebra mit Eins.*

i) Ein Element $a \in A$ ist genau dann dissipativ, wenn

$$\|\exp(\alpha a)\| \leq 1 \ \text{ für alle } \alpha \geq 0.$$

ii) Ein Element $a \in A$ genau dann hermitesch, wenn

$$\|\exp(i\alpha a)\| = 1 \ \text{ für alle } \alpha \in \mathbb{R}.$$

Beweis.

i) $\Rightarrow$: Sei a dissipativ. Nach Satz 3.2.11 gilt für $\beta > 0$

$$\frac{1}{\beta} \log(\|\exp(\beta a)\|_A) \leq \sup_{\alpha > 0} \frac{1}{\alpha} \log(\|\exp(\alpha a)\|_A) = \sup_{\lambda \in W(A;a)} \operatorname{Re}(\lambda) \leq 0.$$

Multiplizieren mit β und anwenden von exp ergibt

$$\|\exp(\beta a)\|_A \leq \exp(0) = 1.$$

Für $\beta = 0$ ist diese Ungleichung trivial.
$\Leftarrow$: Aus $\|\exp(\alpha a)\|_A \leq 1$ für $\alpha \geq 0$ folgt

$$\frac{1}{\alpha} \log(\|\exp(\alpha a)\|_A) \leq 0 \ \text{ für alle } \alpha > 0,$$

und mit Satz 3.2.11

$$\sup_{\lambda \in W(A;a)} \operatorname{Re}(\lambda) = \sup_{\alpha > 0} \frac{1}{\alpha} \log(\|\exp(\alpha a)\|_A) \leq 0.$$

ii) $\Rightarrow$: Sei $a \in A$ hermitesch. Für $\alpha = 0$ ist die behauptete Gleichheit klar. Wegen Proposition 3.1.3 sind ia und $-ia$ dissipativ. Aus (i) erhalten wir $\|\exp(i\alpha a)\|_A \leq 1$ für alle $\alpha \in \mathbb{R}$. Wäre $\|\exp(i\alpha a)\|_A < 1$ für ein $\alpha \in \mathbb{R}$, so erhielten wir den Widerspruch

$$1 = \|\exp(i\alpha a)\exp(-i\alpha a)\|_A \leq \|\exp(i\alpha a)\|_A \|\exp(-i\alpha a)\| < 1. \tag{3.7}$$

$\Leftarrow$: Wegen (i) sind ia und $-ia$ dissipativ, womit wegen Proposition 3.1.3 folgt, dass a hermitesch ist.

□

Satz 3.3.3. *Sei A eine Banachalgebra mit Eins. Für $a \in A$ sind die folgenden drei Aussagen äquivalent*

i) *a ist hermitesch.*

ii) $\lim_{\alpha\to 0} \frac{1}{\alpha}(\|1_A + i\alpha a\|_A - 1) = 0.$

iii) $\|\exp(i\alpha a)\|_A = 1$ *für alle* $\alpha \in \mathbb{R}$.

Beweis. Wegen Korollar 3.3.2 gilt (i) $\iff$ (iii).
(iii) $\Rightarrow$ (ii): Für $\alpha \in \mathbb{R}$ gilt

$$\frac{1}{\alpha}|\,\|1_A + i\alpha a\|_A - 1| = \frac{1}{\alpha}|\,\|1_A + i\alpha a\|_A - \|\exp(i\alpha a)\|_A\,|$$

mit der Dreiecksungleichung nach unten folgt

$$\begin{aligned}\frac{1}{\alpha}|\,\|1_A + i\alpha a\|_A - \|\exp(i\alpha a)\|_A\,| &\leq \frac{1}{\alpha}\,\|1_A + i\alpha a - \exp(i\alpha a)\|_A \\ &= \frac{1}{\alpha}\left\|\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(i\alpha a)^k}{k!})\right\|_A = \left\|\sum_{k=2}^{\infty}\frac{\alpha^{k-1}(ia)^k}{k!})\right\|_A,\end{aligned}$$

wobei die letzte Summe für $\alpha \to 0$ gegen 0 konvergiert.
(ii) $\Rightarrow$ (i): $a \in A$ ist hermitesch, genau dann wenn

$$\inf_{\lambda\in W(A;a)} \operatorname{Im}(\lambda) = 0 = \sup_{\lambda\in W(A;a)} \operatorname{Im}(\lambda).$$

Aus Satz 3.2.7 und Proposition 3.1.3 folgt

$$\inf_{\lambda\in W(A;a)} \operatorname{Im}(\lambda) = -\sup_{\lambda\in W(A;ia)} \operatorname{Re}(\lambda) \tag{3.8}$$

und

$$\sup_{\lambda\in W(A;a)} \operatorname{Im}(\lambda) = \sup_{\lambda\in W(A;-ia)} \operatorname{Re}(\lambda). \tag{3.9}$$

sowie

$$\sup_{\lambda\in W(A;ia)} \operatorname{Re}(\lambda) = \lim_{\alpha\to 0+}\frac{1}{\alpha}(\|1_A + i\alpha a\|_A - 1) = 0,$$

$$\sup_{\lambda\in W(A;-ia)} \operatorname{Re}(\lambda) = -\lim_{\alpha\to 0-}\frac{1}{\alpha}(\|1_A + i\alpha a\|_A - 1) = 0,$$

womit wegen (3.8) und (3.9) a hermitesch ist. □

Literaturverzeichnis

[KAL] M. KALTENBÄCK. *Analysis 2*. Vorlesungsskript SS 2015.

[M.B] H.WORACEK, M.KALTENBÄCK, M.BLÜMLINGER. *Funktionalanalysis 1*. Vorlesungsskript SS 2020.