Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Wir betrachten zunächst eine Funktion $\phi \in C_{00}^{\infty}(\mathbb{R})$, d.h. ϕ hat einen kompakten Träger und ist unendlich oft differenzierbar. Den Raum $C_{00}^{\infty}(\mathbb{R})$ bezeichnen wir im Weiteren mit $\mathscr{D}(\mathbb{R})$. Eine Funktion aus diesem Raum nennen wir auch *Testfunktion.*
Wie wir später sehen werden, stellen sich Distributionen als stetige, lineare Funktionale auf diesem Raum mit einer geeigneten Topologie heraus.

Als Beispiel dafür betrachen wir eine lokalintegrierbare Funktion f, d.h.

$$f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}) := \{g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} |\, \mathbb{1}_K g \in L^1(\mathbb{R}) \text{ für alle kompakte Teilmengen } K \text{ von } \mathbb{R}\}$$

Wir werden später sehen, dass die Zuordnung $f \mapsto (\phi \mapsto < f, \phi >)$ mit $(\phi \mapsto < f, \phi >) \in \mathscr{D}(\Omega)^*$ injektiv ist. Wir können also f mit einem linearen Funktional identifizieren. Für ein stetig differenzierbares f und ein $\phi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$, das außerhalb eines Intervalls (a, b) verschwindet, ergibt sich

$$\int_{\mathbb{R}} f'\phi \, dx \;=\; \int_a^b f'\phi \, dx \;=\; f\phi \Big|_a^b - \int_a^b f\phi' \, dx \;=\; -\int_{\mathbb{R}} f\phi' \, dx.$$

Für $f \in C^{\infty}(\mathbb{R})$ erhalten wir durch wiederholte partielle Integration für alle $k \in \mathbb{N}$

$$\int_{\mathbb{R}} f^{(k)}\phi \, dx \;=\; (-1)^k \int_{\mathbb{R}} f\phi^{(k)} \, dx.$$

Die rechte Seite macht auch für nur lokalintegrierbare f Sinn und die Abbildung $\phi \mapsto (-1)^k \int_{\mathbb{R}} f\phi^{(k)} \, dx$ bildet ein lineares Funktional auf $\mathscr{D}(\mathbb{R})$, das stetig bzgl. einer gewissen Topologie, die wir im 2. Kapitel konstruieren werden, ist.

Zunächst bringen wir eine Aussage, die sehr viele Anwendungen in den partiellen Differenzialgleichungen bei Beweisen von Regularitätsaussagen hat. Für den Beweis siehe zum Beispiel Lemma 19.1.2 in [ANA 3].

Satz 1.1 *Ist $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ und hat man $\int_{\Omega} f\phi \, dx = 0$ für alle $\phi \in \mathscr{D}(\Omega)$, so gilt $f = 0$ fast überall.*

Aus diesem Satz folgt, dass die Zuordnung

$$f \mapsto \Big(\phi \mapsto \int_{\Omega} f\phi \, dx\Big)$$

injektiv ist.

2 Konstruktion der Topologie auf $\mathscr{D}(\Omega)$

Für den Rest dieser Arbeit sei Ω immer eine offene Teilmenge des $\mathbb{R}^d$ und K eine kompakte Teilmenge von Ω.

Definition 2.1 *Für $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$ definieren wir $\mathcal{D}^\alpha := \partial_{x_1}^{\alpha_1} \partial_{x_2}^{\alpha_2} \dots \partial_{x_d}^{\alpha_d}$ und nennen $|\alpha| := \sum_{j=1}^{d} \alpha_j$ die Ordnung von α.*

Sei $(K_j)_{j\in\mathbb{N}}$ eine monoton wachsende Folge von kompakten Mengen, $K_j \subseteq K_{j+1}^\circ$ und $\bigcup_{j\in\mathbb{N}} K_j = \Omega$. Eine mögliche Wahl ist etwa $K_j := K_j(0) \cap U_{\frac{1}{j}}(\Omega^c)^c$.

Die Seminormen

$$p_N(f) := max\{|\mathcal{D}^\alpha f(x)| : x \in K_N, |\alpha| \leq N\}$$

erzeugen gemäß *Satz* 5.1.4 in [F] eine lokalkonvexe Topologie auf $C^\infty(\Omega)$.
Eine konvexe Nullumgebungsbasis ist wegen desselben Satzes gegeben durch

$$V_N = \{f \in C^\infty(\Omega) : p_N(f) < \tfrac{1}{N}\},\ N \in \mathbb{N}. \tag{1a}$$

Gemäß dem folgenden Satz ist diese Topologie metrisierbar.

Satz 2.2 *Sei $(X,\mathcal{T})$ ein topologischer Vektorraum mit einer abzählbaren Nullumgebungsbasis. Dann ist X metrisierbar mit einer translationsinvarianten Metrik, d.h. eine Metrik, für die zusätzlich $d(x-z, y-z) = d(x,y)$ für alle $x, y, z \in X$ gilt.*

Beweis. Gemäß Lemma 2.1.8, iii) in [F] können wir eine Nullumgebungsbasis V_n aus kreisförmigen, offenen Mengen wählen. Der zweite Punkt dieses Lemmas besagt, dass es für alle n ein n_j gibt, sodass

$$V_{n_j} + V_{n_j} + V_{n_j} + V_{n_j} \subseteq V_n.$$

Indem wir, falls nötig, einfach zu einer Teilfolge übergehen, können wir o.B.d.A. annehmen, dass

$$V_{n+1} + V_{n+1} + V_{n+1} + V_{n+1} \subseteq V_n. \tag{1}$$

Nun definieren wir folgende Mengen/Funktionen:

$$D := \{r = \textstyle\sum_{n=1}^{\infty} c_n 2^{-n} : (c_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \{0,1\}^{\mathbb{N}},\\ \text{wobei } c_n = 0 \text{ für alle bis auf endlich viele } n \in \mathbb{N}\}$$

Da verschiedene $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$, die in der obigen Definition auftauchen, verschiedene r darstellen, schreiben wir dafür $c_n(r)$.

$$A(r) := \begin{cases} X & , r \geq 1 \\ \sum_{n=1}^{\infty} c_n(r) V_n & , r \in D, \end{cases} \tag{2}$$

$$f(x) := inf\{r : x \in A(r)\}, \tag{3}$$

$$d(x,y) := f(x-y).$$

Unser Ziel ist es, zu zeigen, dass d eine Metrik ist, die die Topologie $\mathcal{T}$ erzeugt. Die Invarianzeigenschaft ist klarerweise erfüllt. Wir zeigen zuerst

$$A(r) + A(s) \subseteq A(r+s), \tag{4}$$

wobei wir wegen (2) annehmen können, dass $r + s < 1$. Dazu verwenden wir folgendes Lemma.

Lemma 2.3 *Seien r,s,r+s $\in D$ und setze $x_n := c_n(r)$, $y_n := c_n(s)$, $z_n := c_n(r+s)$. Es gelte zusätzlich $x_n + y_n \neq z_n$ für ein $n \in \mathbb{N}$. Dann muss $x_n = y_n = 0$, $z_n = 1$ für das kleinste derartige n gelten.*

Beweis. Man überlegt sich elementar, dass $x_n + y_n \neq z_n$ genau dann für ein n, wenn mindestens einmal $x_n = y_n = 1$. Sei m die kleinste Zahl, bei der das passiert. Wegen $r + s < 1$ ist $m \geq 2$. Es gilt dann $x_{m-1} + y_{m-1} + 1 = z_{m-1}$ mod 2. Falls $x_{m-1} = y_{m-1} = 0$ dann sind wir fertig, andernfalls gilt wieder $x_{m-2} + y_{m-2} + 1 = z_{m-2}$ mod 2 u.s.w..
Wegen $r + s < 1$ haben spätestens x_1, y_1, z_1 die gewünschte Eigenschaft. □

Wir verwenden weiterhin die Notation aus dem Lemma. Falls $x_n + y_n = z_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so folgt Gleichheit in (4) sofort aus der Definition von A.
Andernfalls sei N die kleinste Zahl, sodass $x_N + y_N \neq z_N$, womit $x_N = y_N = 0$, $z_N = 1$.
Wegen $V_{n+1} + V_{n+1} \subseteq V_n$ erhalten wir damit

$$\begin{aligned} A(r) &\subseteq x_1 V_1 + ... + x_{N-1} V_{N-1} + V_{N+1} + V_{N+2} + V_{N+3} + ... \\ &\subseteq x_1 V_1 + ... + x_{N-1} V_{N-1} + V_{N+1} + V_{N+1}. \end{aligned}$$

Die Summe in der ersten Zeile ist so zu verstehen, dass die Inklusion für jede hinreichend große, endliche Summe gültig bleibt. Analog gilt

$$A(s) \subseteq y_1 V_1 + ... + y_{N-1} V_{N-1} + V_{N+1} + V_{N+1}.$$

Wegen $x_n + y_n = z_n$ für alle $n < N$, $z_N = 1$ und (1) erhalten wir insgesamt

$$A(r) + A(s) \subseteq z_1 V_1 + ... + z_{N-1} V_{N-1} + V_N \subseteq A(r+s).$$

Für $r < s$ erhalten wir

$$A(r) \subseteq A(r) + A(s-r) \subseteq A(s).$$

Damit ist A monoton. Gilt $f(x) < r$, so gibt es ein $\epsilon > 0$ mit $f(x) + \epsilon < r$. Aus der Definition von f folgt, dass es für dieses ϵ ein $s \in \{t : x \in A(t)\}$ gibt mit
$f(x) \leq s < f(x) + \epsilon < r$. Wegen $x \in A(s) \subseteq A(r)$ gilt somit

$$f(x) < r \Rightarrow x \in A(r). \tag{5}$$

Wir zeigen nun, dass d eine Metrik ist.

Klarerweise gilt $f(0) = 0$ und daher $d(x, y) = 0$ wenn $x = y$.
Falls $x \neq 0$, dann gibt es wegen der Hausdorffeigenschaft ein $V_n = A(2^{-n})$ mit $x \notin V_n$.
Aus (5) folgt $f(x) \geq 2^{-n} > 0$ bzw. $d(u, v) \neq 0$ wenn $x = u - v$ mit $u \neq v$.
Weil die V_n und infolge auch die $A(r)$ kreisförmig sind, gilt $f(x) = f(-x)$ und daher $d(x, y) = d(y, x)$.
Um die Dreiecksungleichung für d nachzuweisen, genügt es, $f(x + y) \leq f(x) + f(y)$ zu verifizieren. Wir können dazu annehmen, dass die rechte Seite kleiner als 1 ist.
Für jedes $\epsilon > 0$ gibt es r, s in D mit $f(x) < r, f(y) < s$ und $r + s < f(x) + f(y) + \epsilon$.
Aus (5) folgt $x \in A(r)$, $y \in A(s)$ und aus (4) erhalten wir $x + y \in A(r + s)$.
Mit (5) folgt

$$f(x + y) \leq r + s < f(x) + f(y) + \epsilon.$$

Da ϵ beliebig war, gilt $f(x + y) \leq f(x) + f(y)$.

Wir zeigen noch, dass d die Topologie $\mathcal{T}$ erzeugt. Die offenen metrischen Kugeln um 0 sind offen in $\mathcal{T}$, da wegen (5)

$$U_\delta^d(0) = \{x : f(x) < \delta\} = \bigcup_{r<\delta} A(r).$$

Es folgt $\mathcal{T}_d \subseteq \mathcal{T}$. Falls $\delta < 2^{-n}$, so gilt $U_\delta^d(0) \subseteq V_n = A(2^{-n})$. Somit bilden die offenen Kugeln bzgl. der Metrik eine Basis von $\mathcal{T}$. Gemäß *Satz* 12.4.6 in [ANA 2] ist $\mathcal{T}$ die gröbste Topologie, die diese Basis enthält. Damit erhalten wir $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}_d$ und insgesamt $\mathcal{T} = \mathcal{T}_d$.

$\square$

Die offenen Kugeln um 0 bzgl. einer Metrik mit rationalem Radius bilden eine abzählbare Nullumgebungsbasis. Also gilt auch die Umkehrung dieses Satzes.

Wir kommen zurück zu der durch die Seminormen $(p_N)_{N\in\mathbb{N}}$ definierte Topologie auf $C^\infty(\Omega)$. Die Abbildung $f \mapsto f(x)$ ist stetig für jedes feste $x \in \Omega$, da sie linear und stetig bei 0 ist, wie man unschwer an der gegebenen Nullumgebungsbasis erkennt.
Für $\mathscr{D}_K(\Omega) := \{f \in C^\infty(\Omega) : supp(f) \subseteq K\}$ gilt

$$\mathscr{D}_K(\Omega) = \bigcap_{x\in K^c} ker\Big(f \mapsto f(x)\Big).$$

Also sind die $\mathscr{D}_K(\Omega)$ abgeschlossene Teilräume von $C^\infty(\Omega)$.

Definition 2.4 *Sei $(X,\mathcal{T})$ein topologischer Vektorraum und $\mathcal{B}$ eine Nullumgebungsbasis. Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt Cauchyfolge, falls es zu jedem $V \in \mathcal{B}$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, sodass*

$$x_n - x_m \in V \quad \textit{für alle } n, m \geq N.$$

Man sieht unschwer, dass diese Definition nicht konkret von der Basis abhängt.

Wir zeigen nun, dass der Raum $C^\infty(\Omega)$ vollständig ist, das heißt, dass jede Cauchyfolge einen Grenzwert besitzt. Dazu sei $(f_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in $C^\infty(\Omega)$. Für festes N gilt $f_i - f_j \in V_N$, wenn nur i, j hinreichend groß sind. Das heißt

$$|\mathcal{D}^\alpha f_i(x) - \mathcal{D}^\alpha f_j(x)| < \frac{1}{N} \text{ für alle } x \in K_N \text{ und } |\alpha| \leq N.$$

Wir werden zeigen, dass $(\mathcal{D}^\alpha f_{i|K_N})_{i\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge im klassischen Sinn im Raum $C(K_N)$ versehen mit der Supremumsnorm ist.
Sei dazu $\epsilon > 0$ und M so gewählt, dass $\frac{1}{M} < \epsilon$ für $M \geq N$ gilt. Nach Voraussetzung gilt $f_i - f_j \in V_M$ für hinreichend große i und j. Wegen $K_N \subseteq K_M$ erhalten wir für diese i und j

$$|\mathcal{D}^\alpha f_i(x) - \mathcal{D}^\alpha f_j(x)| < \frac{1}{M} < \epsilon \quad auf\, K_N.$$

Aus der Vollständigkeit des Raumes $C(K_N)$ folgt die Existenz einer Funktion $g_{\alpha,N} \in C(K_N)$, sodass $\mathcal{D}^\alpha f_i$ diese als Grenzwert besitzt. Die Konvergenz ist hier bezüglich der Supremumsnorm zu verstehen. Für $\alpha = 0$ erhalten wir $f_i \to g_{0,N}$. *Satz* 8.7.4 in [ANA 2] mehrmals angewendet, ergibt $\mathcal{D}^\alpha g_{0,N} = g_{\alpha,N}$ im Inneren von K_N. Insbesondere ist $g_{0,N}$ unendlich oft differenzierbar.
Wiederholt man den obigen Vorgang mit einem $N_0 > N$ und demselben α, dann sieht man leicht, dass die so erhaltene Funktion $g_{\alpha,N_0} \in C(K_{N_0})$ eine Fortsetzung von $g_{\alpha,N}$ sein muss. Somit ist die Funktion

$$g_\alpha : \begin{cases} \Omega \to \mathbb{R}, \\ x \mapsto g_{\alpha,N}(x), \quad \textit{wenn } x \in K_N, \end{cases}$$

wohldefiniert und liegt in $C^\infty(\Omega)$. Daher gilt auch $\mathcal{D}^\alpha g_0 = g_\alpha$. Schließlich bleibt noch zu zeigen, dass f_i in $C^\infty(\Omega)$ gegen g_0 bzgl. der von uns eingeführten Topologie konvergiert. Es gilt $f_i - g_0 \in V_N$ genau dann, wenn

$$|\mathcal{D}^\alpha f_i(x) - \mathcal{D}^\alpha g_0(x)| = |\mathcal{D}^\alpha f_i(x) - g_\alpha(x)| < \frac{1}{N} \text{ für alle } x \in K_N \text{ und } |\alpha| \leq N.$$

Für festes α ist dies nach der oben gezeigten gleichmäßigen Konvergenz von $\mathcal{D}^\alpha f_i$ gegen g_α auf K_N für alle i größer einem gewissen i_0 erfüllt. Da es nur endlich viele verschiedene α mit $|\alpha| \leq N$ gibt, kann man ein maximales i_0 finden, sodass die Ungleichung für alle $i \geq i_0$ erfüllt ist.
Damit ist $C^\infty(\Omega)$ ein vollständiger topologischer Vektorraum. Dasselbe gilt auch für den abgeschlossenen Teilraum $\mathscr{D}_K(\Omega)$.

Satz 2.5 *Die Einschränkungen der Normen*

$$\|\phi\|_N = max\{|\mathcal{D}^\alpha \phi(x)| : x \in \Omega,\, |\alpha| \leq N\} \tag{6}$$

auf $\mathscr{D}_K(\Omega)$ induzieren dieselbe Topologie wie die Einschränkungen der p_N.

Beweis. In diesem Beweis bezeichnen wir mit $\mathcal{T}(f_i, i \in I)$ die gemäß *Satz* 5.1.4 in [F] von den $(f_i)_{i\in I}$ erzeugte Topologie auf den Definitionsbereich der f_i.
Wir betrachten eine feste kompakte Menge K. Für dieses K gibt es ein n_0, sodass $K \subseteq K_N$ für alle $N \geq n_0$ gilt. Wir zeigen, dass die von $(p_N)_{N\geq n_0}$ erzeugte Topologie $\mathcal{T}(p_N, N \geq n_0)$ mit der Topologie $\mathcal{T}(p_N, N \in \mathbb{N})$, die von allen p_N erzeugt wird, übereinstimmt. Offensichtlich gilt $\mathcal{T}(p_N, N \geq n_0) \subseteq \mathcal{T}(p_N, N \in \mathbb{N})$, da links die initiale Topologie über weniger Funktionen gebildet wird. Gemäß *Satz* 5.1.4 in [F] ist (vgl. $(1a)$)

$$\{V_N : N \geq n_0\} \tag{1b}$$

eine Nullumgebungsbasis von $\mathcal{T}(p_N, N \geq n_0)$. Wegen $p_N(f) \leq p_{N+1}(f) < \frac{1}{N+1} < \frac{1}{N}$, für $f \in V_{N+1}$, gilt $V_{N+1} \subseteq V_N$. Induktiv zeigt man, dass $(1b)$ auch eine Nullumgebungsbasis von $\mathcal{T}(p_N, N \in \mathbb{N})$ ist. Daraus folgt schon $\mathcal{T}(p_N, N \geq n_0) = \mathcal{T}(p_N, N \in \mathbb{N})$. Analog gilt $\mathcal{T}(\|.\|_N, N \in \mathbb{N}) = \mathcal{T}(\|.\|_N, N \geq n_0)$, und die Einschränkungen von p_N und $\|.\|_N$ erfüllen eine entsprechende Beziehung.
Für $N \geq n_0$ und $\phi \in \mathscr{D}_K(\Omega)$ gilt klarerweise $\|\phi\|_N = p_N(\phi)$, das heißt $\|.\|_{N|\mathscr{D}_K(\Omega)} = p_{N|\mathscr{D}_K(\Omega)}$. Wir erhalten

$$\mathcal{T}(\|.\|_{N|\mathscr{D}_K(\Omega)}, N \in \mathbb{N}) = \mathcal{T}(\|.\|_{N|\mathscr{D}_K(\Omega)}, N \geq n_0) = \\ \mathcal{T}(p_{N|\mathscr{D}_K(\Omega)}, N \geq n_0) = \mathcal{T}(p_{N|\mathscr{D}_K(\Omega)}, N \in \mathbb{N}),$$

was zu zeigen war. □

Diese Topologie $\mathcal{T}(\|.\|_{N|\mathscr{D}_K(\Omega)}, N \in \mathbb{N})$ bezeichnen wir im Rest der Arbeit mit $\mathcal{T}_K$. Eine konvexe Nullumgebungsbasis ist nach dem Satz gegeben durch

$$V_N^K = \{\phi \in \mathscr{D}_K(\Omega) : \|\phi\|_N < \frac{1}{N}\}. \tag{7}$$

Wir könnten ähnlich wie beim Raum $C^\infty(\Omega)$ mit diesen Normen eine lokalkonvexe Topologie auf $\mathscr{D}(\Omega)$ konstruieren. Diese wäre aber nicht vollständig. Deshalb schlagen wir hier einen anderen Weg ein.

3 Der Testfunktionenraum $\Big(\mathscr{D}(\Omega), \mathcal{T}\Big)$

Definition.

Sei $\mathcal{B}$ das System aller Mengen der Form $\phi + W$, mit $\phi \in \mathscr{D}(\Omega)$ und $W \in \beta$, wobei

$$\beta := \{W \subseteq \mathscr{D}(\Omega) : \, W \textit{ ist konvex, kreisförmig und } \mathscr{D}_K(\Omega) \cap W \in \mathcal{T}_K \textit{ für alle } K\}.$$

Satz 3.1 *Es gelten folgende Aussagen:*

a) $\mathcal{B}$ ist die Basis einer Topologie $\mathcal{T}$ und β ist eine Nullumgebungsbasis von $\mathcal{T}$.

b) $\Big(\mathscr{D}(\Omega), \mathcal{T}\Big)$ ist ein lokalkonvexer topologischer Vektorraum.

Beweis. Seien V_1, $V_2 \in \mathcal{B}$ und $\phi \in V_1 \cap V_2$. Für $a)$ zeigen wir, dass $\phi + W \subseteq V_1 \cap V_2$ für ein $W \in \beta$. Haben wir das nachgewiesen, so folgt zusammen mit $\mathscr{D}(\Omega) \in \mathcal{B}$, dass $\mathcal{B}$ die Basis einer Topologie $\mathcal{T}$ ist. Setzen wir dann $V_2 := \mathscr{D}(\Omega)$, $\phi = 0$, so folgt auch, dass β eine Nullumgebungsbasis ist.
Nach Definition von $\mathcal{B}$ gibt es $\phi_i \in \mathscr{D}(\Omega)$, $W_i \in \beta$ mit $\phi \in \phi_i + W_i = V_i, \quad i = 1, 2.$
Sei K so, dass ϕ, ϕ_1, $\phi_2 \in \mathscr{D}_K(\Omega)$. Da $\mathscr{D}_K(\Omega) \cap W_i$ offen in $\mathscr{D}_K(\Omega)$ ist, gibt es zwei $\delta_i > 0$ mit

$$\phi - \phi_i \in (1 - \delta_i)W_i.$$

Aus der Konvexität von W_i folgt

$$\phi - \phi_i + \delta_i W_i \subseteq (1 - \delta_i)W_i + \delta_i W_i = W_i,$$

und damit

$$\begin{aligned} \phi + \delta_i W_i &\subseteq \phi_i + W_i = V_i, \\ \phi + (\underbrace{\delta_1 W_1 \cap \delta_2 W_2}_{=:W}) &\subseteq V_1 \cap V_2. \end{aligned}$$

Für den Teil $b)$ müssen wir nur zeigen, dass das erste Trennungsaxiom gilt und die Vektorraumoperationen stetig sind, da β per definitionem nur konvexe Mengen enthält. Sei ϕ_1 fest und für jedes $\phi_2 \neq \phi_1$ definiere $W_{\phi_2} := \{\phi \in \mathscr{D}(\Omega) : \|\phi\|_0 < \|\phi_1 - \phi_2\|_0\}$, wobei $\|.\|_0 = \|.\|_N$ für $N = 0$, vgl. (6). Ist $\phi \in W_{\phi_2} \cap \mathscr{D}_K(\Omega)$, dann wird $N_\phi \in \mathbb{N}$ derart gewählt, dass

$$\frac{1}{N_\phi} < \frac{\|\phi_1 - \phi_2\|_0 - \|\phi\|_0}{2}.$$

Ist $f \in V^K_{N_\phi}$ (vgl.(7)), dann erhalten wir wegen

$$\|\phi + f\|_0 \leq \|\phi\|_0 + \|f\|_{N_\phi} < \|\phi\|_0 + \frac{1}{N_\phi} < \|\phi_1 - \phi_2\|_0 ,$$

dass $\phi + V_{N_\phi} \subseteq W_{\phi_2} \cap \mathscr{D}_K(\Omega)$, was $W_{\phi_2} \cap \mathscr{D}_K(\Omega) \in \mathcal{T}_K$ zeigt.
Da W_{ϕ_2} konvex und kreisförmig ist und W_{ϕ_2} so definiert ist, dass $\phi_1 \notin \phi_2 + W_{\phi_2}$, erhalten wir schließlich, dass W_{ϕ_2} in β liegt und folglich $\{\phi_1\} = \Big(\bigcup\limits_{\phi_2 \neq \phi_1} \phi_2 + W_{\phi_2}\Big)^c$ abgeschlossen ist.

Aus der Konvexität von $W \in \beta$ folgt

$$(\phi_1 + \frac{1}{2}W) + (\phi_2 + \frac{1}{2}W) = (\phi_1 + \phi_2) + W,$$

womit die Addition stetig ist.

Sei (α_0, ϕ_0) fest, dann gilt $\alpha\phi - \alpha_0\phi_0 = \alpha(\phi - \phi_0) + (\alpha - \alpha_0)\phi_0$.
Ist $W \in \beta$, dann gibt es ein $\delta > 0$ mit $\delta\phi_0 \in \frac{1}{2}W$. Wählen wir $c > 0$, sodass

$$2c(|\alpha_0| + \delta) = 1,$$

dann gilt

$$\alpha\phi - \alpha_0\phi_0 = \alpha(\phi - \phi_0) + (\alpha - \alpha_0)\phi_0 \in W, \quad \textit{wenn}\, |\alpha - \alpha_0| < \delta,\; \phi - \phi_0 \in cW.$$

$\square$

Satz 3.2 *Es gelten folgende Aussagen für den topologischen Raum* $\Big(\mathscr{D}(\Omega), \mathcal{T}\Big)$*:*

a) Ist $V \subseteq \mathscr{D}(\Omega)$ konvex und kreisförmig, dann gilt

$$V \in \mathcal{T} \textit{ genau dann, wenn } V \in \beta.$$

b) $\mathcal{T}_{|\mathscr{D}_K(\Omega)} = \mathcal{T}_K$ für alle K.

c) Ist $E \subseteq \mathscr{D}(\Omega)$ beschränkt, d.h. für alle $W \in \mathcal{U}(0)$ gibt es ein $t > 0$ mit $E \subseteq tW$, dann gilt

$$E \subseteq \mathscr{D}_K(\Omega) \textit{ für ein gewisses } K.$$

d) Ist $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge im Sinne von Definition 2.4 in $\mathscr{D}(\Omega)$, dann gilt $\phi_n \in \mathscr{D}_K(\Omega)$ für ein K und $\lim\limits_{i,j\to\infty} \|\phi_i - \phi_j\|_N = 0$ für alle $N \in \mathbb{N}$.

e) Jede Cauchyfolge im Sinne von Definition 2.4 in $\mathscr{D}(\Omega)$ konvergiert.

Beweis. ad a): Sei $V \in \mathcal{T}$. Wir müssen zeigen, dass $V \cap \mathscr{D}_K(\Omega)$ offen in $\mathcal{T}_K$ ist. Dazu sei $\phi \in \mathscr{D}_K(\Omega) \cap V$. Wegen $V \in \mathcal{T}$, gibt es ein $W \in \beta$, sodass $\phi + W \subseteq V$.
Daraus folgt $\phi + \Big(\mathscr{D}_K(\Omega) \cap W\Big) \subseteq \mathscr{D}_K(\Omega) \cap V$.
Mit $\mathscr{D}_K(\Omega) \cap W \in \mathcal{T}_K$ haben wir eine offene Umgebung von ϕ gefunden, die in $\mathscr{D}_K(\Omega) \cap V$ enthalten ist. Also ist $V \cap \mathscr{D}_K(\Omega)$ offen in $\mathcal{T}_K$. Dies zeigt auch, dass die Spurtopologie auf $\mathscr{D}_K(\Omega)$ in $\mathcal{T}_K$ enthalten ist. Die Umkehrung folgt aus der Definition von $\mathcal{T}$ durch die Basis $\mathcal{B}$.

ad b): Wir halten ein K fest.
Die Inklusion $\mathcal{T}_{|\mathscr{D}_K(\Omega)} \subseteq \mathcal{T}_K$ haben wir im Beweis von a) bereits gezeigt. Sei $E \in \mathcal{T}_K$. Wir müssen $E = \mathscr{D}_K(\Omega) \cap V$ für ein $V \in \mathcal{T}$ zeigen.
Da (7) eine Nullumgebungsbasis von $\mathcal{T}_K$ ist, gibt es für jedes $\phi \in E$ ein zugehöriges V_N^K, sodass $\phi + V_N^K \subseteq E$. Mit diesem N definieren wir

$$W_\phi := \{\psi \in \mathscr{D}(\Omega) : \|\psi\|_N < \frac{1}{N}\}.$$

Wir zeigen, dass W_ϕ in β liegt.
Als Kugel bzgl. einer Norm ist sie klarerweise konvex und kreisförmig. Es bleibt noch $W_\phi \in \mathcal{T}_A$ für jede kompakte Menge A zu beweisen. Das zeigen wir wieder, indem wir für jedes $\psi \in W_\phi \cap \mathscr{D}_A(\Omega)$ eine Umgebung finden, die vollständig in $W_\phi \cap \mathscr{D}_A(\Omega)$ enthalten ist. Dazu wählen wir M so, dass $\|\psi\|_N + \frac{1}{M} < \frac{1}{N}$ und $M > N$.
Dann ist $\psi + V_M^A = \{\psi + f \in \mathscr{D}_A(\Omega) : \|f\|_M < \frac{1}{M}\} \subseteq W_\phi \cap \mathscr{D}_A(\Omega)$, weil wegen

$$\|\psi + f\|_N \leq \|\psi\|_N + \|f\|_M < \|\psi\|_N + \frac{1}{M} < \frac{1}{N}, \tag{8}$$

$\psi + f \in W_\phi$, wenn $f \in V_M^K$. Also ist $W_\phi \cap \mathscr{D}_A(\Omega) \in \mathcal{T}_A$.

Außerdem gilt $\mathscr{D}_K(\Omega) \cap (\phi + W_\phi) = \phi + \Big(\mathscr{D}_K(\Omega) \cap W_\phi\Big) \subseteq E$.
Wenn wir über alle $\phi \in E$ vereinigen, erhalten wir

$$\mathscr{D}_K(\Omega) \cap \bigcup_{\phi \in E} (\phi + W_\phi) = E \quad mit \quad \bigcup_{\phi \in E} (\phi + W_\phi) \in \mathcal{T}.$$

ad c): Angenommen E liegt in keinem $\mathscr{D}_K(\Omega)$.
Sei $(D_m)_{m \in \mathbb{N}}$ eine Folge von kompakten Mengen mit $D_m \subseteq D_{m+1}^\circ$ und $\bigcup_{m \in \mathbb{N}} D_m = \Omega$. Es gibt daher nach unserer Annahme eine Folge von Punkte $x_m \in D_m^c$ und $\phi_m \in E$ mit

$$\phi_m(x_m) \quad \neq \quad 0.$$

Wir definieren

$$W := \{\phi \in \mathscr{D}(\Omega) : |\phi(x_m)| < \frac{1}{m} |\phi_m(x_m)| \ \forall m \in \mathbb{N}\},$$

und behaupten, dass W in β liegt. Die Konvexität und Kreisförmigkeit prüft man leicht nach.

Ist K eine beliebige kompakte Menge, so gilt $K \subseteq \bigcup_{m\in\mathbb{N}} D_m^\circ$. Aus der Kompaktheit von K folgt, dass K bereits von endlich vielen D_m° umfasst wird. Da die D_m° monoton wachsend geordnet sind, ist K in einem gewissen D_{m_0} enthalten. Klarerweise enthält jedes D_m und folglich auch K nur endlich viele x_m. Für jedes $\psi \in W \cap \mathscr{D}_K(\Omega)$ gilt

$$|\psi(x_m)| < \frac{1}{m}|\phi_m(x_m)|$$

für alle $m \in \mathbb{N}$. Da K nur endlich viele x_m enthält, gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ mit

$$|\psi(x_m)| + \frac{1}{N} < \frac{1}{m}|\phi_m(x_m)|, \text{ für alle } x_m \in K.$$

Jede Funktion in $\mathscr{D}_K(\Omega)$ verschwindet außerhalb von K, insbesondere verschwindet sie bei allen $x_m \notin K$. Es folgt $\psi + V_N^K \subseteq W \cap \mathscr{D}_K(\Omega)$, da für $f \in V_N^K$

$$|\psi(x_m) + f(x_m)| \leq |\psi(x_m)| + \|f\|_N < |\psi(x_m)| + \frac{1}{N} < \frac{1}{m}|\phi_m(x_m)|,$$

falls $x_m \in K$ und

$$|\psi(x_m) + f(x_m)| = 0 < \frac{1}{m}|\phi_m(x_m)|,$$

falls $x_m \notin K$ und damit $W \in \mathcal{T}_K$.
Also ist $W \in \beta$ eine offene Nullumgebung in $\mathcal{T}$. Dieses W ist dann die Ausnahmenullumgebung, bei der die Bedingung für die Beschränktheit von E fehlschlägt, denn $\phi_m \notin mW$ für alle $m \in \mathbb{N}$.

ad *d*): Wir zeigen zuerst allgemein, dass Cauchyfolgen beschränkt sind.
Dazu sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge und W eine beliebige kreisförmige Nullumgebung und V eine kreisförmige Nullumgebung mit $V + V \subseteq W$.
Definitionsgemäß gibt es dann ein $N \in \mathbb{N}$ mit $x_n \in x_N + V$ für alle $n \geq N$. Da V absorbierend ist, gibt es ein $s > 1$ mit $x_N \in sV$. Dann folgt

$$x_n \in sV + V \subseteq sV + sV \subseteq sW \text{ für alle } n \geq N.$$

Zusammen mit den endlich vielen $x_1, \dots, x_N$ wählt man dann ein geeignetes $t \geq s > 0$, sodass $x_n \in tW$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
Aus *c*) folgt $\phi_n \in \mathscr{D}_K(\Omega)$, für eine kompakte Menge $K \subseteq \Omega$, und $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist auch in der Spurtopologie eine Cauchyfolge im Sinne von *Definition* 2.4, weil der Schnitt jeder Nullumgebungsbasis mit $\mathscr{D}_K(\Omega)$ eine Nullumgebungsbasis der Spurtopologie ist. Da (7) eine Nullumgebungsbais von $\mathcal{T}_K$ ist und $\|.\|_N \leq \|.\|_{N+1}$ gilt, folgt $\lim_{i,j\to\infty} \|\phi_i - \phi_j\|_N = 0$ für alle $N \in \mathbb{N}$.

ad *e*): Eine Cauchyfolge in $\mathscr{D}(\Omega)$ ist beschränkt und hat nach *c*) einen gemeinsamen kompakten Träger K. Klarerweise ist sie auch bzgl. der Spurtopologie auf $\mathscr{D}_K(\Omega)$, welche nach *b*) mit $\mathcal{T}_K$ übereinstimmt, eine Cauchyfolge. Wir haben bereits gezeigt, dass der topologische Raum $\left(\mathscr{D}_K(\Omega), \mathcal{T}_K\right)$ vollständig ist. Somit existiert ein Grenzwert in $\mathscr{D}_K(\Omega)$.

Da Konvergenz bzgl. der Spurtopologie die Konvergenz im gesamten Raum impliziert, konvergiert die Cauchyfolge auch in $\Big(\mathscr{D}(\Omega), \mathcal{T}\Big)$.

$\square$

Mit Hilfe der Punkte *b*), *c*) und *d*) des vorherigen Satzes und da Nullumgebungen durch (7) beschrieben werden, kann man die Konvergenz in $\mathscr{D}(\Omega)$ folgendermaßen charakterisieren: Eine Folge ϕ_n in $\mathscr{D}(\Omega)$ konvergiert genau dann gegen 0, wenn die Funktionen einen gemeinsamen kompakten Träger besitzen und alle partiellen Ableitungen gleichmäßig gegen 0 konvergieren.

Wir werden im Folgenden versuchen, die Stetigkeit auf $\mathscr{D}(\Omega)$ anders zu charakterisieren. Zuerst bringen wir eine Charakterisierung im Falle, dass der Grundraum metrisierbar bzw. eine abzählbare Nullumgebungsbasis besitzt.

Satz 3.3 *Sei $\xi : X \to Y$ eine Abbildung zwischen zwei topologischen Vektorräumen, wobei X metrisierbar sei. Dann sind äquivalent:*

a) ξ ist stetig bei x.

b) ξ ist folgenstetig bei x, d.h. aus $x_n \to x$ folgt $\xi(x_n) \to \xi(x)$.

Beweis. *a*) $\Rightarrow$ *b*): Sei x_n eine Folge, die gegen x konvergiert und W eine Umgebung von $\xi(x)$ in Y. Dafür gibt es eine Umgebung V von x, sodass $\xi(V) \subseteq W$. Für dieses V gibt es ein N, sodass $x_n \in V$ für alle $n \geq N$, womit $\xi(x_n) \in W$ für alle $n \geq N$. Das bedeutet $\xi(x_n) \to \xi(x)$.
b) $\Rightarrow$ *a*) : Wäre ξ bei x nicht stetig, dann gäbe es eine Umgebung W in Y, sodass $\xi^{-1}(W)$ keine Umgebung von x enthält.
Aus der Metrisierbarkeit folgt die Existenz einer abzählbaren Umgebungsbasis vom Umgebungsfilter von x. Daher gibt es x_n mit $x_n \to x$, aber $\xi(x_n) \notin W$, also $\xi(x_n) \not\to \xi(x)$, was ein Widerspruch ist.

$\square$

Wir werden später sehen, dass unsere Topologie auf $\mathscr{D}(\Omega)$ nicht metrisierbar ist. Also kann man den vorherigen Satz nicht unmittelbar anwenden. Die Aussage gilt aber trotzdem auch in diesem Fall. Das liegt hauptsächlich daran, dass man die Situation auf die metrisierbare Topologie $\mathcal{T}_K$ zurückführen kann.

Satz 3.4 *Sei ξ eine lineare Abbildung von $\mathscr{D}(\Omega)$ in einen lokalkonvexen Raum Y. Dann sind äquivalent:*

a) ξ ist stetig.

b) Aus $\phi_n \to 0$ in $\mathscr{D}(\Omega)$ folgt $\xi(\phi_n) \to 0$ in Y.

c) Die Einschränkung von ξ auf $\mathscr{D}_K(\Omega)$ ist stetig für alle K.

Beweis. *a*) $\Rightarrow$ (*b*): Diesen Schritt zeigt man analog wie im ersten Teil von *Satz* 3.3, denn dort haben wir die Metrisierbarkeit nicht verwendet.

b) $\Rightarrow$ *c*) : Nach *Satz* 2.1.11 in [F] reicht es, die Stetigkeit von $\xi_{|\mathscr{D}_K(\Omega)}$ bei 0 zu zeigen. Wegen *Satz* 3.2, *b*) trägt der Grundraum die Topologie $\mathcal{T}_K$.

Sei $\phi_n \in \mathscr{D}_K(\Omega)$ mit $\phi_n \to 0$ in $\mathscr{D}_K(\Omega)$. Dann gilt auch $\phi_n \to 0$ in $\mathscr{D}(\Omega)$ und nach Voraussetzung $\xi(\phi_n) \to 0$. Weil mit (7) eine abzählbare Nullumgebungsbasis von $\mathcal{T}_K$ gegeben ist, können wir *Satz* 3.3 anwenden, und die Stetigkeit von $\xi_{|\mathscr{D}_K(\Omega)}$ ist bewiesen.

$c) \Rightarrow a)$: Sei W eine konvexe, kreisförmige Nullumgebung in Y.
Dann ist auch $V := \xi^{-1}(W)$ wegen der Linearität konvex und kreisförmig.
Satz 3.2, $a)$ besagt dann, dass

$$V \in \mathcal{T} \text{ genau dann, wenn } \mathscr{D}_K(\Omega) \cap V \in \mathcal{T}_K \text{ für alle } K.$$

Die rechte Seite ist aber wegen Voraussetzung $c)$ erfüllt. Daher ist V offen in $\mathcal{T}$ und infolge ξ stetig bei 0. Gemäß *Satz* 2.1.11 in [F] ist ξ sogar überall stetig.

□

Wir können jetzt eine Distribution definieren.

Definition 3.5 *Eine Distribution ist ein bzgl. $\mathcal{T}$ stetiges, lineares Funktional auf $\mathscr{D}(\Omega)$. Die Menge aller Distributionen wird mit $\mathscr{D}'(\Omega)$ bezeichnet.*

Jede konvergente Folge $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathscr{D}(\Omega)$ ist auch eine Cauchyfolge, da für eine Nullumgebung W und eine kreisförmige Nullumgebung V mit $V + V \subseteq W$

$$\phi_i - \phi_j = \phi_i - \lim_{n\to\infty} \phi_n + \lim_{n\to\infty} \phi_n - \phi_j \in V + V \subseteq W$$

für hinreichend große i, j. Nach *Satz* 3.2, $d)$ liegt die Folge in einem $\mathscr{D}_K(\Omega)$ und mithilfe von (7) erkennt man, dass alle Ableitungen gleichmäßig konvergieren. Die Topologie ist daher feiner als die von der Supremumsnorm induzierten Topologie. Dies reicht schon aus, um Differenzialoperatoren stetig zu machen.

Folgerung 3.6 *Jeder Differenzialoperator $\mathcal{D}^\alpha : \mathscr{D}(\Omega) \to \mathscr{D}(\Omega)$ ist stetig.*

Beweis. Wegen $\|\mathcal{D}^\alpha\phi\|_N \leq \|\phi\|_{|\alpha|+N}$ für alle $N \in \mathbb{N}$, ist $\mathcal{D}^\alpha$ stetig auf jedem $\mathscr{D}_K(\Omega)$ und die Behauptung folgt aus *Satz* 3.4, $c)$.

□

Diese Aussage ist essentiell bei der Anwendung von Distributionentheorie auf partielle Differenzialgleichungen. Dort versucht man, einen distributionellen Lösungsbegriff für partielle Differenzialgleichungen zu entwickeln. Dabei verwendet man einen Satz, der Operationen, unter anderem auch Differentiation, auf Distributionen sinnvoll definiert. Eine wesentliche Voraussetzung in diesem Satz ist dabei die Stetigkeit von diesen Operationen. Wir werden hier aber nicht näher darauf eingehen.

Eine relativ einfach nachzuweisende Charakterisierung einer Distribution ist

Satz 3.7 *Sei ξ ein lineares Funktional auf $\mathscr{D}(\Omega)$. Dann sind äquivalent:*

a) $\xi \in \mathscr{D}'(\Omega)$

b) Für jedes K gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ und $C < \infty$:

$$|\xi(\phi)| \leq C \, \|\phi\|_N \text{ \textit{für alle} } \phi \in \mathscr{D}(\Omega).$$

Beweis. Seien $\xi \in \mathscr{D}'(\Omega)$ und $K \subseteq \Omega$ kompakt.
Die Einschränkung von ξ auf $\mathscr{D}_K(\Omega)$ ist bei 0 stetig. Wegen *Satz* 3.2, *b*) und (7) gibt es ein V_N, sodass

$$|\xi(\phi)| < 1 \text{ für alle } \phi \in V_N.$$

Für $\phi \neq 0$ ist immer $\dfrac{\phi}{(N+1)\,\|\phi\|_N} \in V_N$, womit

$$|\xi\Big(\tfrac{\phi}{(N+1)\|\phi\|_N}\Big)| < 1 \text{ und infolge } |\xi(\phi)| < (N+1)\,\|\phi\|_N.$$

Für die Umkehrung betrachten wir $\xi_{|\mathscr{D}_K(\Omega)}$ und zeigen die Stetigkeit bei 0.
Sei $0 < \epsilon < 1$ und $M > \dfrac{1}{\epsilon}(N + C)$. Dann gilt für $\phi \in V_M$

$$|\xi(\phi)| \leq C\,\|\phi\|_N \leq C\,\|\phi\|_M < \frac{C}{M} < \epsilon.$$

Punkt *a*) folgt dann aus *Satz* 3.4 *c*). □

Zuletzt versuchen wir zu zeigen, dass der topologische Raum $\Big(\mathscr{D}(\Omega), \mathcal{T}\Big)$ nicht metrisierbar ist.

Zunächst betrachten wir den Zusammenhang zwischen Cauchyfolgen gemäß *Definition* 2.4 und klassische Cauchyfolgen in metrischen Räumen. Dazu setzen wir voraus, dass ein gegebener topologischer Vektorraum $(X, \mathcal{T}_X)$ durch einer translationsinvarianten Metrik d metrisiert wird. Wegen

$$d(x_n, x_m) = d(x_n - x_m, 0)$$

ist x_n eine Cauchyfolge bezüglich der Metrik genau dann, wenn sie eine solche gemäß $Definition$ 2.4 ist. Daraus folgt auch unmittelbar:

$(X, \mathcal{T}_X)$ *ist genau dann vollständig, wenn der metrische Raum* (X, d) *vollständig ist.* (9)

Die Abbildung $\delta_x : \phi \mapsto \phi(x)$ ist nach dem vorherigen Satz mit $N = 0$ und $C = 1$ eine Distribution. Jetzt lässt sich $\mathscr{D}_K(\Omega)$ darstellen als

$$\mathscr{D}_K(\Omega) = \bigcap_{x \in K^c} ker\, \delta_x,$$

womit dieser in $\mathscr{D}(\Omega)$ abgeschlossen ist.
Wäre $\Big(\mathscr{D}(\Omega), \mathcal{T}\Big)$ metrisierbar, dann hätte dieser Raum auch eine abzählbare Nullumgebungsbasis und nach *Satz* 2.2 gäbe es eine translationsinvariante Metrik, die dieselbe Topolgie erzeugt. Diese Metrik wäre wegen (9) vollständig.
Sei nun $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von kompakten Mengen, die den Grundraum Ω überdecken.
Die abgeschlossenen Teilräume $\mathscr{D}_{K_n}(\Omega)$ haben als echte Unterräume leeres Inneres.

Somit sind die Voraussetzungen vom Satz von Baire (*Bemerkung* 4.1.3 in [F]) erfüllt und auch

$$\mathscr{D}(\Omega) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathscr{D}_{K_n}(\Omega)$$

hätte leeres Inneres.
Dieser Widerspruch zeigt, dass der topologische Raum $\left(\mathscr{D}(\Omega), \mathcal{T}\right)$ nicht metrisierbar ist.

Literatur

[F] Michael Kaltenbäck, Harald Woracek, Martin Blümlinger: *Funktionalanalysis*

[ANA 2] Michael Kaltenbäck: *Analysis 2, Sommersemester 2012*

[ANA 3] Michael Kaltenbäck: *Analysis 3, Wintersemester 2015/2016*

[R] Walter Rudin: *Functional Analysis*