SEMINARARBEIT

Die Ergodensätze von Birkhoff und von von Neumann

ausgeführt am

Institut für
Analysis und Scientific Computing
TU Wien

unter der Anleitung von

Ao.Univ.Prof. Dipl.-Ing. Dr.techn. Michael Kaltenbäck

durch

Florian Mielke

Matrikelnummer: 11770909

Wien, am 13. Februar 2021

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Entstanden in der statistischen Physik, hat sich die Ergodentheorie inzwischen zu einem eigenständigen mathematischen Teilgebiet größtenteils an der Schnittstelle von Maßtheorie, Stochastik und der Theorie der dynamischen Systeme entwickelt.

> "Ergodic theory originated as an offshot of the work of Boltzmann and of Maxwell in the kinetic theory of gases. The impetus provided by the physical problem led later to the development by pure mathematicians of ergodic theory as a branch of measure theory, and, as is to be expected, the scope of this mathematical theory extends now far beyond the initial field of interest. However, the chief physical problems to which ergodic theory has relevance, namely, the justification of the methods of statistical mechanics and the relation between reversibility and irreversibility have been by no means satisfactorily solved, and the question arises of how far the mathematical theory contributes to the elucidation of these physical problems." I.E. Farquhar [1964]

In dieser Arbeit werde ich zwei grundlegende Sätze der Ergodentheorie beweisen. Das wird zum einen der Ergodensatz von Birkhoff, manchmal auch individueller Ergodensatz genannt, und zum anderen der Ergodensatz von von Neumann sein. Nach dem Beweis des Ergodensatzes von Birkhoff, werden auch zwei Anwendungen in der Zahlentheorie angeführt.

Notation

In der ganzen Arbeit sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, also ein Maßraum, wobei $\mu(X) = 1$ gilt. Außerdem setze man zwecks der Übersicht

$$L^p := L^p(X, \mathcal{A}, \mu, \mathbb{R}) \text{ für } p \geq 1$$

und versehe diese mit den bekannten Normen $||.||_p$.

2 Der Ergodensatz von Birkhoff

Definition 2.1. *Eine messbare Abbildung $T : X \to X$ heißt maßerhaltend, wenn für jedes $A \in \mathcal{A}$ folgende Gleichheit gilt:*

$$\mu(A) = \mu(T^{-1}A).$$

Lemma 2.2. *Ein $T : X \to X$ ist genau dann maßerhaltend, wenn für jedes $f \in L^1$*

$$\int_X f \, d\mu = \int_X f \circ T \, d\mu$$

gilt.

Beweis. Sei zuerst T maßerhaltend. Für eine nichtnegative Treppenfunktion $u = \sum_{j=1}^{J} \mathbb{1}_{U_j} \alpha_j$ auf X gilt

$$\int_X u \, d\mu = \sum_{j=1}^{J} \mu(U_j)\alpha_j = \sum_{j=1}^{J} \mu(T^{-1}U_j)\alpha_j \, d\mu(x) = \int_X \sum_{j=1}^{J} \mathbb{1}_{T^{-1}U_j} \cdot \alpha_j \, d\mu.$$

Weil aber $x \in T^{-1}U_j$ zu $T(x) \in U_j$ äquivalent ist, folgt

$$\int_X \sum_{j=1}^{J} \mathbb{1}_{T^{-1}U_j} \cdot \alpha_j \, d\mu = \int_X \sum_{j=1}^{J} (\mathbb{1}_{U_j} \circ T) \cdot \alpha_j \, d\mu = \int_X u \circ T \, d\mu.$$

Für ein nicht negatives $f \in L^1$ gibt es bekannterweise eine Folge nichtnegativer Treppenfunktionen u_n, die punktweise und monoton wachsend gegen f konvergiert. Mit dem eben Bewiesenen schließt man auf

$$\int_X f \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X u_n \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X u_n \circ T \, d\mu = \int_X f \circ T \, d\mu.$$

Im Falle eines allgemeinen $f \in L^1$ liefert Aufspalten in Negativ- bzw. Positivteil das Behauptete. Für die Umkehrung sei $A \in \mathcal{A}$ beliebig. Es gilt

$$\mu(A) = \int_X \mathbb{1}_A \, d\mu = \int_X \mathbb{1}_A \circ T \, d\mu = \int_X \mathbb{1}_{T^{-1}A} \, d\mu = \mu(T^{-1}A).$$

□

Definition 2.3. *Eine Abbildung $T : X \to X$ nennt man ergodisch, falls für ein beliebiges $A \in \mathcal{A}$ aus $T^{-1}A = A$ folgt, dass entweder $\mu(A) = 0$ oder $\mu(A) = 1$.*

Lemma 2.4. *Folgende zwei Aussagen sind äquivalent:*

- *T ist ergodisch*
- *Gilt für $f \in L^1$ die Gleichung $f = f \circ T$ fast überall, so ist f fast überall gleich einer Konstante.*

Beweis. Wir werden wie in [1] in Abschnitt 3, Proposition 2 vorgehen. Sei zuerst T ergodisch und $f \in L^1$, wobei $f = f \circ T$ fast überall gilt. Angenommen, f wäre nicht fast überall gleich einer Konstante, so gibt es ein $a \in \mathbb{R}$ derart, dass die beiden Mengen

$$A := f^{-1}((-\infty, a]) \quad \text{und} \quad A^c = f^{-1}((a, \infty])$$

positives Maß haben. Für die Nullmenge $N = \{x \in X : f(x) \neq f \circ T(x)\}$ folgt

$$\begin{aligned}(T^{-1}A)\backslash N &= \left(T^{-1}(f^{-1}(-\infty, a])\right)\backslash N = \left((f \circ T)^{-1}(-\infty, a]\right)\backslash N \\ &= (f^{-1}(-\infty, a])\backslash N = A\backslash N,\end{aligned}$$

was wegen $\mu(A) \neq 0$ und $1 - \mu(A) = \mu(A^c) \neq 0$ der Ergodizität widerspricht.
Für die Umkehrung sei $A \in \mathcal{A}$ mit $T^{-1}A = A$ von strikt positivem Maß. Aus

$$\mathbb{1}_A(x) = \mathbb{1}_{T^{-1}A}(x) = \mathbb{1}_A(T(x)),$$

folgt, dass $\mathbb{1}_A$ fast überall gleich einer Konstante ist. Wegen $\mu(A) > 0$ gilt $\mathbb{1}_A = 1$ fast überall und damit $\mu(A) = 1$. □

Für den Beweis des Ergodensatzes von Birkhoff benötigen wir noch folgendes Lemma:

Lemma 2.5. *Seien $M, P \in \mathbb{N}$ mit $P \geq M$ sowie $a_0, ..., a_{P-1} \geq 0$ beliebig. Für $j \in \{1, ..., P - M\}$ setzen wir $c_j = 1$, wenn es ein $N \in \{1, \dots, M\}$ gibt mit $\sum_{n=0}^{N-1} a_{n+j} \geq N$, andernfalls setzen wir $c_j := 0$. Dann gilt die Ungleichung*

$$\sum_{n=0}^{P-1} a_n \geq \sum_{j=0}^{P-M} c_j.$$

Beweis. Wir beweisen die Ungleichung mittels Induktion nach $q := P - M \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Also ist

$$\sum_{n=0}^{M+q-1} a_n \geq \sum_{j=0}^{q} c_j$$

für alle $q \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ zu zeigen. Für $q = 0$ gilt im Fall $c_0 = 0$ offensichtlich diese Ungleichung. Im Fall $c_0 = 1$ gilt

$$\sum_{n=0}^{N-1} a_n \geq N \text{ für ein } N \in \{1, \dots, M\},$$

weshalb

$$\sum_{n=0}^{M+0-1} a_n \geq \sum_{n=0}^{N-1} a_n \geq N \geq \sum_{j=0}^{0} c_j.$$

Sei $Q > 0$ und angenommen, dass die Ungleichung $\sum_{n=0}^{M+q-1} a_n \geq \sum_{j=0}^{q} c_j$ für alle $q \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ mit $q < Q$ und nichtnegative $a_0, ..., a_{P-1}$ richtig ist.

–) Im Fall $c_0 = 0$ gilt nach Induktionsvoraussetzung

$$\sum_{n=0}^{M+Q-1} a_n \geq \sum_{n=0}^{M+Q-1-1} a_{n+1} \geq \sum_{j=0}^{Q-1} c_{j+1} = \sum_{j=0}^{Q} c_j,$$

da die zu zeigende Ungleichung ja für $a_{n+1}, n = 0, ..., M+Q-1-1$ als richtig vorausgesetzt ist.

–) Für den Fall $c_0 = 1$ gibt es ein $N \in \{1, \ldots, M\}$ mit

$$\sum_{n=0}^{N-1} a_n \geq N.$$

→ Im Unterfall $Q < N (\leq M)$ gilt

$$\sum_{n=0}^{M+Q-1} a_n \geq \sum_{n=0}^{N-1} a_n \geq N \geq \sum_{j=0}^{Q} c_j.$$

→ Im Unterfall $Q \geq N$ gilt nach Induktionsvoraussetzung für a_{n+N}, $n = 0, ..., M+Q-N-1$,

$$\sum_{n=0}^{M+Q-N-1} a_{n+N} \geq \sum_{j=0}^{Q-N} c_{j+N},$$

also auch

$$\sum_{n=N}^{M+Q-1} a_n \geq \sum_{j=N}^{Q} c_j,$$

was zusammen mit $\sum_{n=0}^{N-1} a_n \geq N$

$$\sum_{n=0}^{M+Q-1} a_n \geq N + \sum_{j=N}^{Q} c_j \geq \sum_{j=0}^{Q} c_j$$

ergibt.

□

Satz 2.6. *(Ergodensatz von Birkhoff) Sei $T : X \to X$ ergodisch und maßerhaltend. Ist $f \in L^1$, so folgt für fast alle $u \in X$*

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f(T^n u) = \int_X f \, d\mu.$$

Beweis. Der vorliegende Beweis folgt den Argumenten von Theorem 10.2 in [2].

$\gg$ Man erkennt unmittelbar, dass die Aussage des Satzes genau dann für $f \in L^1$ zutrifft, wenn sie für

$$f - \int_X f \, d\mu \in L^1$$

gilt. Also können wir $\int_X f \, d\mu = 0$ annehmen. Unser Ziel ist es,

$$\mu(\{u \in X : \limsup_{N\to\infty} \left| \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f(T^n u) \right| \neq 0\}) = 0$$

zu zeigen. Für ein $\epsilon > 0$ sei

$$E_\epsilon(f) := \{u \in X : \limsup_{N\to\infty} \left| \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f(T^n u) \right| > \epsilon\}.$$

Angenommen, wir wissen, dass $\mu(E_\epsilon(f)) = 0$ für alle $\epsilon > 0$, dann folgt

$$\mu(\{u \in X : \limsup_{N\to\infty} \left| \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f(T^n u) \right| \neq 0\})$$

$$= \mu\left(\bigcup_{j\in\mathbb{N}} E_{\frac{1}{j}}(f) \right) \leq \sum_{j\in\mathbb{N}} \mu(E_{\frac{1}{j}}(f)) = 0.$$

Es bleibt also $\mu(E_\epsilon(f)) = 0$ für alle $\epsilon > 0$ zu zeigen, was in einigen Schritten geschieht:

$\gg$ Zuerst wollen wir

$$\mu(E_{2\epsilon}(f)) \leq \frac{1}{\epsilon} \int_X |f| \, d\mu$$

$f \in L^1$ für $\epsilon > 0$ zeigen. Dazu schreiben wir $f = f^+ - f^-$ mit integrierbaren $f^+, f^- \geq 0$ und setzen für $M \in \mathbb{N}$

$$E_\epsilon^M(f^+) := \{u \in X : \exists N \in \mathbb{N}, 1 \leq N \leq M \text{ mit } \sum_{n=0}^{N-1} f^+(T^n u) \geq \epsilon N\}$$

sowie

$$E_\epsilon^M(f^-) := \{u \in X : \exists N \in \mathbb{N}, 1 \leq N \leq M \text{ mit } \sum_{n=0}^{N-1} f^-(T^n u) \geq \epsilon N\}.$$

Für beliebige $\epsilon > 0$, $u \in X$ und $P \geq M$ gilt

$$\frac{f^+(u)}{\epsilon}, \frac{f^+(Tu)}{\epsilon}, ..., \frac{f^+(T^{P-1}u)}{\epsilon} \geq 0,$$

sodass wir Lemma 2.5 anwenden können und

$$\sum_{n=0}^{P-1} \frac{f^+(T^n u)}{\epsilon} \geq \sum_{j=0}^{P-M} \mathbb{1}_{E_1^M(\frac{f^+}{\epsilon})}(T^j u)$$

erhalten. Wegen $E_1^M(\frac{f^+}{\epsilon}) = E_\epsilon^M(f^+)$ ergibt Multiplizieren mit ϵ

$$\sum_{n=0}^{P-1} f^+(T^n u) \geq \epsilon \sum_{j=0}^{P-M} \mathbb{1}_{E_\epsilon^M(f^+)}(T^j u).$$

Analog schließt man auf

$$\sum_{n=0}^{P-1} f^-(T^n u) \geq \epsilon \sum_{j=0}^{P-M} \mathbb{1}_{E_\epsilon^M(f^-)}(T^j u).$$

Wenn man beide Seiten integriert, bekommen wir aufgrund von Lemma 2.2

$$P \int_X f^+ \, d\mu = \int_X \sum_{n=0}^{P-1} f^+ \circ T^n \, d\mu \geq (P - M + 1)\epsilon\mu(E_\epsilon^M(f^+))$$

sowie

$$P \int_X f^- \, d\mu = \int_X \sum_{n=0}^{P-1} f^- \circ T^n \, d\mu \geq (P - M + 1)\epsilon\mu(E_\epsilon^M(f^-)).$$

Dividieren durch P ergibt für $P \to \infty$

$$\int_X f^+ \, d\mu \geq \epsilon\mu(E_\epsilon^M(f^+)) \quad \text{sowie} \quad \int_X f^- \, d\mu \geq \epsilon\mu(E_\epsilon^M(f^-)).$$

$(E_\epsilon^M(f^+) \cup E_\epsilon^M(f^-))_{M\in\mathbb{N}}$ ist offenbar eine aufsteigende Mengenfolge. Zudem gilt

$$E_{2\epsilon}(f) \subseteq \bigcup_{M\in\mathbb{N}} E_\epsilon^M(f^+) \cup E_\epsilon^M(f^-),$$

da für $u \notin \bigcup_{M\in\mathbb{N}} E_\epsilon^M(f^+) \cup E_\epsilon^M(f^-)$ und allen $M, N \in \mathbb{N}$ mit $N \leq M$

$$\frac{1}{N}\left|\sum_{n=0}^{N-1} f(T^n u)\right| \leq \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} |f(T^n u)| = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} f^+(T^n u) + \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} f^-(T^n u) < 2\epsilon,$$

die Ungleichung

$$\limsup_{N\to\infty} \frac{1}{N}\left|\sum_{n=0}^{N-1} f(T^n u)\right| \leq 2\epsilon,$$

also $u \notin E_{2\epsilon}(f)$ folgt. Insgesamt ergibt sich wegen der Stetigkeit von unten von μ, dass

$$\begin{aligned}\mu(E_{2\epsilon}(f)) &\leq \mu\left(\bigcup_{M\in\mathbb{N}} E_\epsilon^M(f^+) \cup E_\epsilon^M(f^-)\right) = \lim_{M\in\mathbb{N}} \mu\left(E_\epsilon^M(f^+)) \cup E_\epsilon^M(f^-)\right) \\ &\leq \lim_{M\in\mathbb{N}} \mu(E_\epsilon^M(f^+)) + \mu(E_\epsilon^M(f^-)) \leq \frac{1}{\epsilon}\left(\int_X f^+ \,d\mu + \int_X f^- \,d\mu\right) \\ &= \frac{1}{\epsilon}\int_X |f| \,d\mu.\end{aligned}$$

$\gg$ Wir zeigen, dass es für $f \in L^1$ mit $\int_X f\,d\mu = 0$ zu jedem $\delta > 0$ ein $h \in L^\infty$ gibt mit $||f - (hT - h)||_1 < \delta$. Das bedeutet aber genau, dass die Menge

$$E := \{h \circ T - h : h \in L^\infty\} \text{ dicht in } B_0 := \{f \in L^1 : \int_X f\,d\mu = 0\}$$

bezüglich $||.||_1$ ist. Wenn wir zeigen können, dass $E \subseteq B_0$ und alle beschränkten linearen Funktionale, die auf E verschwinden, auch auf B_0 verschwinden, folgt aus Korollar 5.2.6 in [4], dass E dicht in B_0 ist. Ersteres folgt aus

$$\int_X h \circ T - h\,d\mu = \int_X h\,d\mu - \int_X h\,d\mu = 0,$$

wobei Lemma 2.2 angewandt wurde. Für die zweite Aussage sei α ein beschränktes lineares Funktional auf L^1. Aus Satz 16.1.6 in [5] folgt die Existenz eines $k \in L^\infty$ mit

$$\alpha(f) = \int_X f \cdot k\,d\mu \text{ für alle } f \in L^1.$$

Angenommen, α verschwindet auf E, was genau $\int_X (h \circ T - h) \cdot k\,d\mu = 0$ für alle $h \in L^\infty$ bedeutet. Für $h = k$ bekommen wir

$$\int_X k \circ T \cdot k\,d\mu = \int_X k^2\,d\mu$$

und damit

$$\begin{aligned}\int_X (k \circ T - k)^2\,d\mu &= \int_X (k\circ T)^2\,d\mu + \int_X k^2\,d\mu - 2\int_X k \circ T \cdot k\,d\mu \\ &= 2\left(\int_X k^2\,d\mu - \int_X k \circ T \cdot k\,d\mu\right) = 0,\end{aligned}$$

wobei wir wieder Lemma 2.2 angewandt haben. Daraus folgt $k \circ T = k$ fast überall. Weil T ergodisch ist, folgt aus Lemma 2.4, dass k eine fast überall konstante Funktion ist. Für $f \in B_0$, also $\int_X f\,d\mu = 0$, gilt dann

$$\alpha(f) = \int_X k \cdot f\,d\mu = c\int_X f\,d\mu = 0,$$

wobei $k(x) = c \in \mathbb{R}$ für fast alle $x \in X$.

$\gg$ Abschließend betrachte man ein $f \in B_0$. Für $\delta > 0$ gibt es nach dem eben gezeigten ein $h \in L^\infty$ mit $||f - (h \circ T - h)||_1 < \delta$. Für $u \in X$ und $\epsilon > 0$ folgt aus

$$\begin{aligned}\epsilon &< \limsup_{N\to\infty} \left| \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f(T^n u) \right| \\ &\leq \limsup_{N\to\infty} \left| \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} (f - (h \circ T - h))(T^n u) \right| + \limsup_{N\to\infty} \left| \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} (h \circ T - h)(T^n u) \right|,\end{aligned}$$

dass

$$E_\epsilon(f) \subseteq E_{\frac{\epsilon}{2}}(f - (hT - h)) \cup E_{\frac{\epsilon}{2}}(hT - h),$$

womit

$$\mu(E_\epsilon(f)) \leq \mu(E_{\frac{\epsilon}{2}}(f - (hT - h))) + \mu(E_{\frac{\epsilon}{2}}(hT - h)).$$

Weil aber für alle $u \in X$

$$\left| \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} (h \circ T - h)(T^n u) \right| = \frac{1}{N} |h(T^N u) - h(u)| \leq \frac{2||h||_\infty}{N} \overset{N\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

gilt, folgt $E_{\frac{\epsilon}{2}}(h \circ T - h) = \emptyset$ und daher $\mu(E_{\frac{\epsilon}{2}}(h \circ T - h)) = 0$ für alle $\epsilon > 0$. Außerdem gilt

$$\mu(E_{\frac{\epsilon}{2}}(f - (h \circ T - h))) \leq \frac{1}{\epsilon/4} \int_X |f(x) - (h \circ T(x) - h(x))| \, d\mu(x) \leq \frac{4\delta}{\epsilon}.$$

Wenn man nun δ gegen Null laufen lässt, erhalten wir

$$\mu(E_\epsilon(f)) = 0 \quad \text{für alle} \quad \epsilon > 0.$$

$\square$

2.7 Zwei Anwendungen in der Zahlentheorie

Die folgenden zwei Anwendungen stammen aus [2] Abschnitt 10.3.

1) Bekannterweise kann man jedes $x \in [0, 1)$ darstellen als

$$x = \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{2^2} + \frac{a_3}{2^3} + ...,$$

wobei $a_1, a_2, a_3, ... \in \{0, 1\}$ und wobei nicht $a_j = 1$ für alle $j \in \mathbb{N}$ ab einem gewissen $J \in \mathbb{N}$. Man nennt x normal, wenn der Anteil an Einsen in obiger Darstellung und der Anteil an Nullen in obiger Darstellung gleich $\frac{1}{2}$ ist, was

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} Card\{1 \leq k \leq n : a_k = 0\} = \frac{1}{2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} Card\{1 \leq k \leq n : a_k = 1\}$$

bedeutet. Nun sind fast alle $x \in [0, 1)$ normal. Um das einzusehen, definiere die bzgl. des Lebesgue-Maß ergodische und maßerhaltende Abbildung $T : [0, 1) \to [0, 1)$

$$T(x) := 2x \mod 1.$$

Der Beweis der Ergodizität ist nicht trivial und würde hier den Rahmen sprengen, weshalb auf [6] Seite 1536, Proposition 3 verwiesen sei. Für $x = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{2^i}$ gilt

$$T^k(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_{k+i}}{2^i}.$$

Wegen $a_1 = 1 \Leftrightarrow x \in [\frac{1}{2}, 1)$ und $a_1 = 0 \Leftrightarrow x \in [0, \frac{1}{2})$ gilt

$$a_{k+1} = \begin{cases} 0 & \text{für } T^k(x) \in [0, \frac{1}{2}) \\ 1 & \text{für } T^k(x) \in [\frac{1}{2}, 1). \end{cases}$$

Man erhält

$$\begin{aligned} Card\{1 \leq k \leq n : a_k = 0\} &= Card\{0 \leq k < n : a_{k+1} = 0\} \\ &= Card\{0 \leq k < n : T^k(x) \in [0, \frac{1}{2})\}. \end{aligned}$$

Wenden wir den Ergodensatz von Birkhoff auf $f := \mathbb{1}_{[0,\frac{1}{2})}$ an, so folgt für fast alle $x \in [0, 1)$

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} Card\{1 \leq k \leq n : a_k = 0\} &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{1}_{[0,\frac{1}{2})}(T^k(x)) \\ &= \int_{[0,1)} \mathbb{1}_{[0,\frac{1}{2})} \, d\lambda = \lambda([0, \frac{1}{2})) = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Analog schließt man auf

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} Card\{1 \leq k \leq n : a_k = 1\} = \frac{1}{2}.$$

Man kann obige Argumentation auch für eine andere Basis als 2 in einer ähnlichen Art und Weise führen.

2) Man betrachte die Folge $(2^n)_{n\in\mathbb{N}}$ und jene Folge $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$, die von obigen Folgengliedern jeweils die erste Ziffer herausnimmt, also

$$2, 4, 8, 1, 3, 6, 1, ...$$

Man kann mit dem Ergodensatz von Birkhoff zeigen, dass der Anteil an $k \in \{0, 1, ..., 9\}$ in der Folge $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleich $\log_{10}(1 + \frac{1}{k})$ ist, also

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} Card\{1 \leq n \leq N : r_n = k\} = \log_{10}(1 + \frac{1}{k}).$$

Um das einzusehen, sei auf [2] Kapitel 10.3, Application 2, verwiesen.

3 Der Ergodensatz von von Neumann

Satz 3.1. *(Ergodensatz von von Neumann) Sei $T : X \to X$ maßerhaltend und seien $f, g \in L^2$. Der Ausdruck*

$$\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\int_X f \circ T^n \cdot g \, d\mu$$

konvergiert für $N \to \infty$. Wenn T zusätzlich ergodisch ist, stimmt der Grenzwert mit

$$\int_X f \, d\mu \cdot \int_X g \, d\mu$$

überein

Beweis. Die Beweisidee stützt sich auf Theorem 10.1 aus [2]:

≫ Man betrachte folgende Teilmengen des L^2:

$$I := \{f \in L^2 : f = f \circ T \text{ fast überall}\}$$

welche, wenn T ergodisch ist, nach Lemma 2.4 nur aus Funktionen besteht, die fast überall gleich einer Kontante sind, sowie

$$B := \{f \in L^2 : \exists h \in L^2 \text{ mit } f = h \circ T - h \text{ fast überall}\}.$$

Für $f_1 \in I$, $N \geq 1$ und fast alle $x \in X$ gilt

$$\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} f_1(T^n x) = f_1(x)$$

und für $f_2 = h \circ T - h$ aus B mit $h \in L^2$ und fast alle $x \in X$

$$\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} f_2(T^n x) = \frac{1}{N}(h(T^N x) - h(x)).$$

Aus der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung folgt

$$\begin{aligned}\frac{1}{N}\left|\int_X (h \circ T^N - h) \cdot g \, d\mu\right| &\leq \frac{1}{N}\left(\left|\int_X h \circ T^N \cdot g \, d\mu\right| + \left|\int_X hg \, d\mu\right|\right) \\ &\leq \frac{1}{N}(||h \circ T^N||_2 ||g||_2 + ||h||_2 ||g||_2) \\ &= \frac{2}{N}||h||_2 ||g||_2 \to 0 \text{ für } N \to \infty,\end{aligned}$$

wobei $||h \circ T^N||_2 = ||h||_2$ verwendet wurde, was aus Lemma 2.2 und

$$\int_X |h \circ T^N|^2 \, d\mu = \int_X |h|^2 \circ T^N \, d\mu = \int_X |h|^2 \, d\mu$$

ersichtlich ist.

$\gg$ Man nehme an, dass $f \in L^2$ mit $f = f_1 + f_2$, wobei $f_1 \in I, f_2 \in B$. Aus obigen Tatsachen folgt

$$\begin{aligned}\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\int_X (f\circ T^n)\cdot g\,d\mu &= \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\int_X (f_1 \circ T^n)\cdot g\,d\mu + \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\int_X (f_2\circ T^n)\cdot g\,d\mu \\ &= \int_X f_1 g\,d\mu + \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\int_X (f_2\circ T^n)\cdot g\,d\mu \overset{N\to\infty}{\longrightarrow} \int_X f_1 g\,d\mu.\end{aligned}$$

Sei nun zusätzlich T ergodisch. Da T maßerhaltend ist, gilt wegen Lemma 2.2

$$\int_X f_2\,d\mu = \int_X h\circ T\,d\mu - \int_X h\,d\mu = 0$$

und wegen der Ergodizität von T ist f_1 fast überall gleich einer Konstante, sodass $f_1 = c_1$ fast überall mit einem $c_1 \in \mathbb{R}$. Insgesamt ergibt das

$$\begin{aligned}\int_X f\,d\mu\cdot\int_X g\,d\mu &= \int_X f_1\,d\mu\cdot\int_X g\,d\mu \\ &= c_1\mu(X)\int_X g\,d\mu = \int_X f_1 g\,d\mu.\end{aligned}$$

$\gg$ Wir nehmen an, dass es für ein $f \in L^2$ Folgen $(f_{1,k})_{k\in\mathbb{N}}$ aus I und $(f_{2,k})_{k\in\mathbb{N}}$ aus B gibt mit

$$f_{1,k} + f_{2,k} \to f \text{ bzgl. } ||.||_2.$$

Zwecks der Übersicht setze man für $h \in L^2$

$$A_N(h) := \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\int_X (h\circ T^n)\cdot g\,d\mu.$$

Zu $\epsilon > 0$ gibt es ein $K \in \mathbb{N}$ mit $||f - (f_{1,k} + f_{2,k})||_2 < \epsilon$ für alle $k \geq K$. Aus der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung und Lemma 2.2 folgt

$$\begin{aligned}|A_N(f) - A_N(f_{1,k} + f_{2,k})| &= \left|\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\int_X ((f-(f_{1,k}+f_{2,k}))\circ T^n)\cdot g\,d\mu\right| \\ &\leq \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} ||(f-(f_{1,k}+f_{2,k}))\circ T^n||_2||g||_2 \\ &= \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} ||f-(f_{1,k}+f_{2,k})||_2||g||_2 \leq \epsilon||g||_2.\end{aligned}$$

Also konvergiert $A_N(f_{1,k}+f_{2,k})$ für $k\to\infty$ gleichmäßig in N gegen $A_N(f)$. Zudem existiert wie im letzten Abschnitt gezeigt für jedes $k \in \mathbb{N}$ der Grenzwert

$$\lim_{N\to\infty} A_N(f_{1,k} + f_{2,k}),$$

sodass wir Lemma 8.7.1 aus [3] anwenden können, woraus die Existenz von $\lim_{N\to\infty} A_N(f)$ folgt. Wenn T zusätzlich ergodisch ist, gilt

$$\begin{aligned}\lim_{N\to\infty} A_N(f) &= \lim_{k\to\infty}\lim_{N\to\infty} A_N(f_{1,k}+f_{2,k})\\ &= \lim_{k\to\infty}\left(\int_X f_{1,k}+f_{2,k}\,d\mu\cdot\int_X g\,d\mu\right)\\ &= \int_X f\,d\mu\cdot\int_X g\,d\mu,\end{aligned}$$

wobei letzte Gleichheit gilt, da für den Fall $\mu(X)<\infty$ aus $f_{1,k}+f_{2,k}\to f$ bzgl. $||.||_2$ auch $f_{1,k}+f_{2,k}\to f$ bzgl. $||.||_1$ folgt.

$\gg$ Um den Beweis zu vollenden, bleibt $L^2 = cl(I+B)$ zu zeigen, wobei $cl(I+B)$ den Abschluss von $I+B$ bzgl $||.||_2$ bezeichnet. Da B ein Unterraum von L^2 ist, gilt

$$L^2 = B^\perp + cl(B).$$

Es bleibt $B^\perp \subseteq I$ zu zeigen, da sich daraus

$$L^2 = B^\perp + cl(B) \subseteq I + cl(B) \subseteq cl(I+B) \subseteq L^2$$

ergibt. Sei also $f\in B^\perp$, womit

$$\int_X f f_2\,d\mu = 0 \text{ für alle } f_2\in B$$

bzw.

$$\int_X f\cdot(h\circ T)\,d\mu = \int_X fh\,d\mu \text{ für alle } h\in L^2$$

folgt. Für $h=f$ ergibt sich

$$\int_X f\cdot(f\circ T)\,d\mu = \int_X f^2\,d\mu.$$

Wir schließen auf

$$\begin{aligned}\int_X (f\circ T - f)^2\,d\mu &= \int_X (f\circ T)^2\,d\mu + \int_X f^2\,d\mu - 2\int_X f\cdot(f\circ T)\,d\mu\\ &= 2\left(\int_X f^2\,d\mu - \int_X f\cdot(f\circ T)\,d\mu\right) = 0\end{aligned}$$

woraus $f = f\circ T$ fast überall und damit $f\in I$ folgt.

$\square$

Literaturverzeichnis

[1] H. Bruin. Notes on Ergodic Theory. University of Vienna. November 5, 2014.

[2] M. Pollicott, M. Yuri. Dynamical Systems and Ergodic Theory. London Mathematical Society Student Texts 40, January 1998.

[3] M. Kaltenbäck. Fundament Analysis. Heldermann Verlag, 2014.

[4] H. Woracek, M. Kaltenbäck, M. Blümlinger. Funktionalanalysis. TU Wien, 13. Auflage, Februar 2019.

[5] M. Kaltenbäck. Analysis 3. TU Wien, WS 2018/2019.

[6] Robert A. Meyers. Mathematics of Complexity and Dynamical Systems. Springer Science and Business Media, 2011.