SEMINARARBEIT

Konvexe Analysis

ausgeführt am

Institut für
Analysis und Scientific Computing
TU Wien

unter der Anleitung von

Prof. Michael Kaltenbäck

durch

Manuel Peczar
Matrikelnummer: 12102372
Wiedner Hauptstraße 8
1040 Wien

Wien, am 20.02.2024

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Diese Seminararbeit beleuchtet konvexe Funktionen und untersucht dabei Besonderheiten dieser speziellen Abbildungen. Ziel der Arbeit ist es, einen kleinen Einblick in diesen Teilbereich der konvexen Analysis zu geben und einige interessante Resultate herauszuarbeiten und zu beweisen. Der Inhalt baut auf den Vortrag des Autors vom 11. Dezember 2023 auf und liefert zudem vertiefendere Erkenntnisse.

Der Fokus besteht zunächst darin zu zeigen, dass jede konvexe, unterhalbstetige und eigentliche Funktion dem Supremum aller darunterliegenden affinen Geraden entspricht; siehe Satz 2.1.14. Infolgedessen wird in Kapitel 2.2 der Begriff der Fenchel-Konjugierten Abbildung eingeführt und anschließend gezeigt, dass die Bikonjugierte einer Funktion für konvexe, unterhalbstetige und eigentliche Abbildungen mit ebendieser übereinstimmt; siehe Satz **??**. Zuletzt wird der Begriff des Subdifferentials definiert, welches eine echte Verallgemeinerung des klassischen Differentials darstellt und vor allem im Falle konvexer Funktionen interessante Eigenschaften aufweist wie in Satz 2.3.5 gezeigt wird. Die Kapitel 2.1 und 2.3 orientieren sich dabei am Buch von Charalambos D. Aliprantis [AB06, Kapitel 7], während Kapitel 2.2 sich auf [Sch18, Kapitel 15] und [Bro08, Kapitel 5-7] stützt.

2 Konvexe Funktionen

2.1 Konvexe, unterhalbstetige Funktionen

Definition 2.1.1. (Konvexe Menge) Sei X ein Vektorraum. Eine Teilmenge $K \subset X$ heißt konvex, wenn

$$\lambda x + (1-\lambda)y \in K$$

für alle $x, y \in K$ und alle $\lambda \in (0,1)$.

Damit enthält eine konvexe Menge zu je zwei Punkten auch deren Verbindungsstrecke.

Definition 2.1.2. (Konvexe Funktion) Sei X ein Vektorraum. Eine Abbildung $f : X \to \overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ heißt konvex, wenn ihr Epigraph

$$\mathrm{epi}f = \{(x,\alpha) \in X \times \mathbb{R} : \alpha \geq f(x)\}$$

eine konvexe Teilmenge des Vektorraumes $X \times \mathbb{R}$ ist. Wir nennen f konkav, wenn deren Hypograph

$$\mathrm{hypo}f = \{(x,\alpha) \in X \times \mathbb{R} : \alpha \leq f(x)\}$$

konvex ist. Die durch

$$\mathrm{dom}f = \{x \in X : f(x) < +\infty\}$$

definierte Teilmenge von X heißt der effektive Definitionsbereich von f. Wir nennen f eigentlich, wenn $\mathrm{dom}f$ nichtleer ist und $f(x) > -\infty$ für alle $x \in X$ gilt.

Satz 2.1.3. Sei X ein Vektorraum. Eine Abbildung $f : X \to (-\infty, +\infty]$ ist genau dann konvex, wenn

$$f(\alpha x + (1-\alpha)y) \leq \alpha f(x) + (1-\alpha)f(y) \tag{2.1}$$

für alle $x, y \in X$ und alle $\alpha \in (0,1)$.

Beweis: "$\Rightarrow$": Seien $x, y \in X$. Im Fall $f(x) = +\infty$ oder $f(y) = +\infty$ ist die rechte Seite der Ungleichung unendlich, womit die Aussage erfüllt ist.
Für $x, y \in \mathrm{dom}f$ ziehen $f(x) \geq f(x)$ und $f(y) \geq f(y)$ offenbar $(x, f(x)) \in \mathrm{epi}f$ und $(y, f(y)) \in \mathrm{epi}f$ nach sich. Da f konvex ist, folgt $(\alpha x+(1-\alpha)y, \alpha f(x)+(1-\alpha)f(y)) \in \mathrm{epi}f$. Nach der Definition des Epigraphen heißt dies $f(\alpha x + (1-\alpha)y) \leq \alpha f(x) + (1-\alpha)f(y)$.
"$\Leftarrow$": $(x,\mu) \in \mathrm{epi}f, (y,\nu) \in \mathrm{epi}f$ bedeutet $\mu \geq f(x)$ und $\nu \geq f(y)$, womit

$$f(\alpha x + (1-\alpha)y) \leq \alpha f(x) + (1-\alpha)f(y) \leq \alpha\mu + (1-\alpha)\nu.$$

Also gilt $(\alpha x + (1-\alpha)y, \alpha\mu + (1-\alpha)\nu) = \alpha(x,\mu) + (1-\alpha)(y,\nu) \in \mathrm{epi}f$, weshalb sich $\mathrm{epi}f$ als konvex und infolge auch f als konvex herausstellt. ■

Definition 2.1.4. (Erweiterte konvexe Funktion) Sei X ein Vektorraum, $C \subseteq X$ eine konvexe Teilmenge von X und $f : C \to (-\infty, +\infty]$ eine konvexe Abbildung. Wir definieren die auf ganz X erweiterte Funktion $\widetilde{f} : X \to (-\infty, +\infty]$ durch

$$\widetilde{f}(x) := \begin{cases} f(x), & x \in C, \\ +\infty, & x \notin C. \end{cases}$$

Proposition 2.1.5. Ist X ein Vektorraum, $C \subseteq X$ eine konvexe Teilmenge von X und $f : C \to (-\infty, +\infty]$ eine konvexe Abbildung, dann ist auch die nach Definition 2.1.4 erweiterte Funktion $\widetilde{f} : X \to (-\infty, +\infty]$ konvex.

Beweis: Für $\lambda \in (0, 1)$ und $x, y \in X$ derart, dass $x \notin C$ oder $y \notin C$ gilt (2.1), da die rechte Seite dieser Ungleichung mit $\widetilde{f}$ statt f unendlich ist. Im Fall $x, y \in C$ folgt $\lambda x + (1-\lambda)y \in C$ für alle $\lambda \in (0, 1)$, weil f als konvex vorausgesetzt ist

$$\widetilde{f}(\lambda x + (1 - \lambda)y) = f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y) = \lambda\widetilde{f}(x) + (1 - \lambda)\widetilde{f}(y).$$

■

Definition 2.1.6. (Unterhalbstetigkeit) Sei X ein topologischer Vektorraum. Eine Abbildung $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ heißt unterhalbstetig, wenn für alle $c \in \mathbb{R}$ die Subniveaumengen

$$M_c = \{x \in X : f(x) \leq c\}$$

abgeschlossen sind. Sind die Mengen $\{x \in X : f(x) \geq c\}$ für alle $c \in \mathbb{R}$ abgeschlossen, dann heißt f oberhalbstetig.

Lemma 2.1.7. Sei X ein topologischer Vektorraum. Ist $\{f_\alpha\}_{\alpha \in A}$ eine Familie von unterhalbstetigen Funktionen, dann ist das punktweise Supremum $\sup_{\alpha \in A} f_\alpha$ auch unterhalbstetig.

Beweis: Für $c \in \mathbb{R}$ und $\alpha \in A$ ist $\{x \in X : f_\alpha(x) \leq c\}$ nach Definition abgeschlossen. Wir setzen $f(x) = \sup_{\alpha \in A} f_\alpha$ für alle $x \in X$. Die Menge

$$\{x \in X : f(x) \leq c\} = \bigcap_{\alpha \in A} \{x \in X : f_\alpha(x) \leq c\}$$

ist als Schnitt von abgeschlossenen Mengen abgeschlossen, womit f unterhalbstetig ist. ■

Satz 2.1.8. Sei X ein lokalkonvexer Vektorraum. Eine Abbildung $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ ist genau dann unterhalbstetig, wenn $\text{epi} f$ in $X \times \mathbb{R}$ abgeschlossen ist.

Beweis: $\Rightarrow$: Wir zeigen für eine unterhalbstetige Funktion, dass das Komplement des Epigraphen offen ist. Sei $(x, \alpha) \in (X \times \mathbb{R}) \setminus \text{epi} f$, das heißt $f(x) > \alpha$, und wähle $\epsilon > 0$ mit $f(x) > \alpha + \epsilon$. Da f unterhalbstetig ist, ist $U = \{y \in X : f(y) > \alpha + \epsilon\}$ offen in X. Damit bildet $V = U \times (\alpha - \epsilon, \alpha + \epsilon)$ eine offene Umgebung von (x, α). Wegen $f(y) > \alpha + \epsilon > \beta$ für alle $(y, \beta) \in V$ gilt $V \cap \text{epi} f = \emptyset$. Infolge ist das Komplement von $\text{epi} f$ offen beziehungsweise $\text{epi} f$ abgeschlossen.

$\Leftarrow$: Ist epi$f$ abgeschlossen in X und $\alpha \in \mathbb{R}$, dann ist

$$S_\alpha = \{(x,\alpha) : x \in X, f(x) \leq \alpha\} = \text{epi}f \cap (X \times \{\alpha\})$$

abgeschlossen in $X \times \mathbb{R}$. Bezeichnet $\iota_\alpha : X \to X \times \mathbb{R}$ mit $\iota_\alpha(x) = (x,\alpha)$ die offenbar stetige kanonische Einbettung, so ist auch die Subniveaumenge $M_\alpha = \iota^{-1}(S_\alpha)$ abgeschlossen. ■

Im Folgenden steht X^* für den algebraischen Dualraum eines Vektorraumes X. Ist X ein topologischer Vektorraum, so bezeichnen wir mit X' den topologischen Dualraum.

Definition 2.1.9. Sei X ein Vektorraum. Eine Abbildung $f : X \to \mathbb{R}$ von der Form $f(x) = x^*(x) + c$ für ein $x^* \in X^*$ und ein $c \in \mathbb{R}$ nennen wir affin beziehungsweise affin linear.

Affine Abbildungen sind sowohl konvex als auch konkav.

Satz 2.1.10. (Hahn-Banach geometrisch) Sei X ein lokalkonvexer topologischer Vektorraum. Sind A und B zwei nichtleere, disjunkte und konvexe Teilmengen von X, wobei zusätzlich A kompakt und B abgeschlossen ist, so existieren $f \in X', \gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{R}$ mit

$$f(x) \leq \gamma_1 < \gamma_2 \leq f(y)$$

für alle $x \in A$ und $y \in B$.

Beweis: Für einen detaillierten Beweis siehe [WKB23, Satz 5.2.5, Seite 77f]. ■

Bemerkung 2.1.11. Wir wollen Satz 2.1.10 (Hahn-Banach geometrisch) auf die einpunktige Menge $A = \{x\}$ mit $x \notin B$ und eine konvexe und abgeschlossene Teilmenge B anwenden. Der Übergang von f zu $-f$ zeigt, dass ein Punkt x genau dann nicht in der Menge B liegt, wenn es ein $\gamma \in \mathbb{R}$ und ein $f \in X'$ derart gibt, dass $f(y) \leq \gamma < f(x)$ für alle $y \in B$. Insbesondere können wir einzelne Punkte von diesen nicht enthaltenden, konvexen, abgeschlossenen Mengen mittels eines Funktionals trennen.

Bemerkung 2.1.12. Der topologische Dualraum von $X \times \mathbb{R}$ kann mit $X' \times \mathbb{R}$ vermöge der Dualität

$$\big\langle (x,\alpha), (x',\lambda) \big\rangle = x'(x) + \lambda\alpha$$

identifiziert werden. Wegen $(X, \sigma(X,X'))' = X'$ [WKB23, Satz 5.3.3, Seite 81 und Beispiel 5.3.7, Seite 83] kann der topologische Dualraum von $X \times \mathbb{R}$ auch dann mit $X' \times \mathbb{R}$ identifiziert werden, wenn X die schwache Topologie trägt. Da eine konvexe Teilmenge von X genau dann abgeschlossen ist, wenn sie bezüglich $\sigma(X', X)$ abgeschlossen ist [WKB23, Satz 5.3.8, Seite 83], ist nach Satz 2.1.8 eine konvexe Abbildung $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ genau dann unterhalbstetig, wenn sie unterhalbstetig mit X versehen mit $\sigma(X,X')$ ist.

Lemma 2.1.13. Seien X ein lokalkonvexer topologischer Vektorraum und $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ eine konvexe, unterhalbstetige und eigentliche Funktion. Zu $x \in \text{dom}f$ und $\alpha \in (-\infty, f(x))$ existiert eine stetige affine Abbildung $g : X \to \mathbb{R}$ mit $g(x) = \alpha$ und $g(y) < f(y)$ für alle $y \in X$.

Beweis: Wegen $x \in \mathrm{dom}f$ gilt $(x, f(x)) \in \mathrm{epi}f$, also $\mathrm{epi}f \neq \emptyset$. Vorraussetzungsgemäß ist der Epigraph konvex. Nach Satz 2.1.8 ist dieser auch abgeschlossen. Wegen $\alpha < f(x)$ gilt $(x, \alpha) \notin \mathrm{epi}f$.
Als Folge des geometrischen Satzes von Hahn-Banach gibt es nach Bemerkung 2.1.11 ein nichttriviales lineares Funktional (x', λ) im Dualraum $X' \times \mathbb{R}$ und $\epsilon > 0$ mit

$$x'(x) + \lambda\alpha + \epsilon < x'(y) + \lambda\beta \qquad \text{für alle } (y, \beta) \in \mathrm{epi}f. \tag{2.2}$$

Da die Ungleichung für alle hinreichend großen β gelten muss, folgt $\lambda \geq 0$.
Nach Vorraussetzung gilt $f(x) < +\infty$. Einsetzen von $(y, \beta) = (x, f(x))$ in Ungleichung (2.2) und Subtraktion von $x'(x) + \lambda\alpha$ führt auf $0 < \epsilon < \lambda(f(x) - \alpha)$. Wegen $\alpha < f(x)$ würde $\lambda = 0$ einen Widerspruch erzeugen, weshalb $\lambda > 0$. Folglich lässt sich Ungleichung (2.2) durch λ dividieren und wir erhalten

$$\frac{x'(x)}{\lambda} + \alpha + \frac{\epsilon}{\lambda} < \frac{x'(y)}{\lambda} + \beta$$

beziehungsweise

$$\frac{x'(x-y)}{\lambda} + \alpha + \frac{\epsilon}{\lambda} = \frac{x'(x) - x'(y)}{\lambda} + \alpha + \frac{\epsilon}{\lambda} < \beta.$$

Wir definieren $g : X \to \mathbb{R}$ durch

$$g(z) = \frac{\langle x - z, x' \rangle}{\lambda} + \alpha.$$

Offenbar gilt $g(x) = \alpha$ und g ist von der Form $g(x) = x^*(x) + c$, also affin. Wegen $x' \in X'$ ist g stetig. Weiters gilt $g(y) + \epsilon/\lambda < \beta$ für alle $(y, \beta) \in \mathrm{epi}f$. Im Fall $y \in \mathrm{dom}f$ folgt daraus mit $\beta = f(y)$ die Ungleichung $g(y) < f(y)$. Im Fall $y \notin \mathrm{dom}f$ gilt $g(y) < +\infty = f(y)$. ■

Satz 2.1.14. Seien X ein lokalkonvexer topologischer Vektorraum sowie $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ eine konvexe, unterhalbstetige und eigentliche Funktion. Für alle $x \in X$ gilt

$$f(x) = \sup\left\{g(x) : g \text{ ist affin und stetig mit } g < f\right\},$$

wobei $g < f$ die Ungleichung $g(y) < f(y)$ für alle $y \in X$ bedeutet.

Beweis: Seien $x \in X$ fest und $\alpha \in \mathbb{R}$ mit $\alpha < f(x)$. Zu jedem $x \in X$ existiert solch ein $\alpha \in \mathbb{R}$, da f nach Vorraussetzung eigentlich ist und damit $f(x) > -\infty$.
Es reicht zu zeigen, dass eine stetige, affine Abbildung g existiert mit $g(x) \geq \alpha$ und $g(y) < f(y)$ für alle $y \in X$. Wir betrachten folgende 2 Fälle:

$x \in \mathrm{dom}f$: In dem Fall liefert uns Lemma 2.1.13 das gewünschte $g : X \to \mathbb{R}$.

$x \notin \mathrm{dom}f$: Mit analoger Argumentation wie im Beweis von Lemma 2.1.13 existiert ein lineares Funktional (x', λ) im Dualraum $X' \times \mathbb{R}$ und $\epsilon > 0$ derart, dass Ungleichung (2.2) zutrifft. Wieder muss $\lambda \geq 0$, da die Ungleichung auch für hinreichend große β gelten muss.

Im Fall $\lambda > 0$ ist Ungleichung (2.2) äquivalent zu

$$\frac{1}{\lambda}\left\langle x-y,x'\right\rangle + \alpha < \beta - \frac{\epsilon}{\lambda} \qquad \text{für alle } (y,\beta)\in \operatorname{epi} f.$$

Wir definieren die Abbildung $g : X \to \mathbb{R}$ durch die linke Seite der Ungleichung, also

$$g(y) := \frac{1}{\lambda}\left\langle x-y,x'\right\rangle + \alpha, \qquad y \in X.$$

Offenbar gilt $g(x) = \alpha$ und wegen $\epsilon > 0$, $\lambda > 0$ auch $g(y) < \beta - \epsilon/\lambda < \beta$. Im Fall $y \in \operatorname{dom} f$ erhalten wir mit $\beta = f(y)$ die Ungleichung $g(y) < f(y)$ und für $y \notin \operatorname{dom} f$ gilt $g(y) < +\infty = f(y)$, weshalb $g(y) < f(y)$ für alle $y \in X$.

Im Fall $\lambda = 0$ reduziert sich Ungleichung (2.2) zu

$$x'(x) + \epsilon < x'(y) \qquad \text{für alle } y \in \operatorname{dom} f.$$

Wir setzen $h(z) := \langle x - z, x'\rangle + \epsilon/2, z \in X$, und erhalten

$$h(y) < \left\langle x-y,x'\right\rangle + \epsilon < 0 \qquad \text{für alle } y \in \operatorname{dom} f.$$

Zudem haben wir $h(x) = \epsilon/2 > 0$.

Zu $\overline{y} \in \operatorname{dom} f \neq \emptyset$ existiert nach Lemma 2.1.13 eine affine Abbildung $\overline{g}$ mit $\overline{g}(z) < f(z)$ für alle $z \in X$ und $\overline{g}(\overline{y}) = \alpha$. Für beliebiges $\beta > 0$ betrachten wir die stetige und affine Abbildung

$$g(z) = \beta h(z) + \overline{g}(z), \qquad z \in X.$$

Im Fall $y \in \operatorname{dom} f$ haben wir oben bereits gezeigt, dass $h(y) < 0$, womit $g(y) < f(y)$, da auch $\overline{g}(y) < f(y)$. Im Fall $y \notin \operatorname{dom} f$ gilt $g(y) < +\infty = f(y)$, weshalb insgesamt $g(y) < f(y)$ für alle $y \in X$. Abschließend gilt $g(x) = \beta h(x) + \overline{g}(x) = \beta\epsilon/2 + \overline{g}(x) \geq \alpha$ für β groß genug.

■

Korollar 2.1.15. Seien X ein lokalkonvexer topologischer Vektorraum sowie $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ eine konvexe, unterhalbstetige und eigentliche Funktion. Für alle $x \in X$ gilt

$$f(x) = \sup\left\{g(x) : g \text{ ist affin und stetig mit } g \leq f\right\}.$$

Beweis: Aus Satz 2.1.14 folgern wir

$$\begin{aligned} f(x) &\geq \sup\left\{g(x) : g \text{ ist affin und stetig mit } g \leq f\right\} \\ &\geq \sup\left\{g(x) : g \text{ ist affin und stetig mit } g < f\right\} = f(x). \end{aligned}$$

■

2.2 Die Fenchel-Konjugierte

Definition 2.2.1. (Fenchel-Konjugierte) Sei X ein lokalkonvexer topologischer Vektorraum, X' dessen topologischer Dualraum und $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ eine Abbildung. Die Fenchel-Konjugierte $f^* : X' \to \overline{\mathbb{R}}$ zu f ist definiert durch

$$f^*(x') := \sup_{x \in X} \left(\left\langle x', x \right\rangle - f(x) \right).$$

Die Funktion f^* wird im Zusammenhang mit konvexen Funktionen oft einfach als Konjugierte bezeichnet.

Bemerkung 2.2.2. (Geometrische Bedeutung der Konjugierten) Für ein gegebenes $x' \in X'$ und eine Konstante $c \in \mathbb{R}$ ist

$$l : X \to \mathbb{R} \text{ mit } l(x) := c + \left\langle x', x \right\rangle$$

eine affine Abbildung, wobei wir x' als Steigung ansehen können. Die Fenchel-Konjugierte ordnet einer Steigung $x' \in X'$ die Zahl $f^*(x')$ zu, wobei für alle $y \in X$

$$f^*(x') = \sup_{x \in X} \left(\left\langle x', x \right\rangle - f(x) \right) \geq \left\langle x', y \right\rangle - f(y).$$

Somit ist $f^*(x')$ die kleinste Konstante z derart, dass f oberhalb der affinen Abbildung $-z + \langle x', \cdot \rangle$ liegt.

Satz 2.2.3. (Eigenschaften der Fenchel-Konjugierten) Sei X ein lokalkonvexer topologischer Vektorraum und $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ eine eigentliche Abbildung. Die Fenchel-Konjugierte $f^* : X' \to \overline{\mathbb{R}}$ nimmt den Wert $-\infty$ nie an und ist konvex sowie unterhalbstetig bezüglich der Topologie $\sigma(X', X)$ auf X'.

Beweis: Zunächst sei bemerkt, dass nach Vorraussetzung $\text{dom} f \neq \emptyset$. Offenbar gilt für $g_x(x') = \langle x', x \rangle - f(x)$

$$f^*(x') = \sup_{x \in \text{dom} f} g_x(x') > -\infty,$$

womit $f^* : X \to (-\infty, x]$. Zudem ist die Konjugierte das Supremum einer Familie von affinen und bezüglich $\sigma(X'X)$ stetigen Abbildungen. Nach Lemma 2.1.7 ist $f^*(x')$ unterhalbstetig.
Für $u', v' \in X'$ und $\lambda \in (0, 1)$ gilt

$$\begin{aligned}
f^*(\lambda u' + (1-\lambda)v') &= \sup_{x \in X} \left(\left\langle \lambda u' + (1-\lambda)v', x \right\rangle - f(x) \right) \\
&= \sup_{x \in X} \left(\lambda \left\langle u', x \right\rangle + (1-\lambda) \left\langle v', x \right\rangle - (\lambda + 1 - \lambda) f(x) \right) \\
&\leq \sup_{x \in X} \left(\lambda \left\langle u', x \right\rangle - \lambda f(x) \right) + \sup_{x \in X} \left((1-\lambda) \left\langle v', x \right\rangle - (1-\lambda) f(x) \right) \\
&= \lambda \cdot \sup_{x \in X} \left(\left\langle u', x \right\rangle - f(x) \right) + (1-\lambda) \cdot \sup_{x \in X} \left(\left\langle v', x \right\rangle - f(x) \right) \\
&= \lambda f^*(u') + (1-\lambda) f^*(v'),
\end{aligned}$$

womit f^* nach Satz 2.1.3 konvex ist. ∎

Satz 2.2.4. Sei X ein lokalkonvexer topologischer Vektorraum. Ist $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ eine konvexe, unterhalbstetige und eigentliche Abbildung, so ist die Fenchel-Konjugierte $f^* : X' \to \overline{\mathbb{R}}$ eigentlich.

Beweis: Gemäß Satz 2.2.3 nimmt f^* den Wert $-\infty$ nicht an. Nach Satz 2.1.14 ist f das Supremum aller darunter liegenden affinen Geraden. Also gilt

$$f(x) = \sup \big\{ g(x) : g \text{ ist affin und stetig mit } g < f \big\}.$$

Wäre die Menge aller affinen und stetigen $g < f$ leer, so hätten wir nach Konvention $-\infty = \sup \emptyset = f(x)$ für alle $x \in X$, was der Tatsache widerspricht, dass f eigentlich ist. Demnach existiert eine affine, stetige Abbildung $g = x'(.) + c < f$ mit $c \in \mathbb{R}, x' \in X'$.
Diese Ungleichung bedeutet

$$x'(x) - f(x) \leq -c, \qquad x \in X.$$

Nehmen wir das Supremum über alle $x \in X$, so erhalten wir

$$f^*(x') = \sup_{x \in X} \big(\langle x', x \rangle - f(x) \big) \leq -c < +\infty,$$

womit $x' \in \mathrm{dom} f^* \neq \emptyset$ und infolge f^* eigentlich ist. ■

Lemma 2.2.5. (Fenchels Ungleichung) Ist X ein lokalkonvexer topologischer Vektorraum und $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ eine konvexe, unterhalbstetige und eigentliche Funktion, dann gilt

$$\big\langle x', x \big\rangle \leq f(x) + f^*(x') \tag{2.3}$$

für alle $x \in X$ und alle $x' \in X'$.

Beweis: Nach Satz 2.2.4 ist f^* eigentlich, weshalb weder f noch f^* den Wert $-\infty$ annimmt. Im Fall $x \notin \mathrm{dom} f$ oder $x' \notin \mathrm{dom} f^*$ gilt (2.3) trivialerweise. Im Fall $x \in \mathrm{dom} f$ und $x' \in \mathrm{dom} f^*$ folgt aus $f^*(x') = \sup_{y \in X} \big(\langle x', y \rangle - f(y) \big)$, dass $f^*(x') \geq \langle x', x \rangle - f(x)$ und durch Addition von $f(x)$ auf beiden Seiten

$$\big\langle x', x \big\rangle \leq f(x) + f^*(x').$$

■

Definition 2.2.6. Sei X ein lokalkonvexer topologischer Vektorraum, X' dessen topologischer Dualraum versehen mit $\sigma(X', X)$ und $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ eine Abbildung. Die Konjugierte von $f^* : X' \to \overline{\mathbb{R}}$ bezeichnen wir als die Fenchel-Bikonjugierte $f^{**} : X \to \overline{\mathbb{R}}$ zu f, also

$$f^{**}(x) := \sup_{x' \in X'} \big(\langle x', x \rangle - f^*(x') \big).$$

Korollar 2.2.7. Sei X ein lokalkonvexer topologischer Vektorraum und $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ eine konvexe, unterhalbstetige und eigentliche Abbildung. Die Bikonjugierte f^{**} ist konvex, unterhalbstetig und eigentlich.

Beweis: Da die Bikonjugierte von f die Konjugierte von f^* ist, folgt die Aussage direkt aus Satz 2.2.3 und Satz 2.2.4, wobei es nach Bemerkung 2.1.12 egal ist, ob X mit der gegebenen Topologie oder mit $\sigma(X, X')$ versehen ist. ■

Satz 2.2.8. Sei X ein lokalkonvexer topologischer Vektorraum und $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ eine konvexe, unterhalbstetige und eigentliche Funktion. Dann gilt für die Bikonugierte Funktion von f

$$f^{**}(x) = \sup \big\{ g(x) : g \text{ ist affin und stetig mit } g \leq f \big\}$$

und $f^{**} = f$.

Beweis: Nach Fenchels Ungleichung aus Lemma 2.2.5 gilt für alle $x \in X, x' \in X'$

$$\langle x', x \rangle - f^*(x') \leq f(x).$$

Da f und f^* nach Satz 2.2.4 eigentlich sind, gilt diese Ungleichung auch wenn $f^*(x') = +\infty$, womit

$$f(x) \geq \sup_{x' \in X'} \big(\langle x', x \rangle - f^*(x') \big) \overset{Def.}{=} f^{**}(x).$$

Nach Korollar 2.2.7 ist die Bikonugierte f^{**} konvex, unterhalbstetig und eigentlich. Korollar 2.1.15 impliziert

$$f^{**}(x) = \sup \big\{ g(x) : g \text{ ist affin und stetig mit } g \leq f^{**} \big\}.$$

Ist $g : X \to \mathbb{R}$ affin und stetig mit $g \leq f$, wobei

$$g(x) = \langle x', x \rangle - \alpha, \qquad x \in X,$$

mit $x' \in X'$ und $\alpha \in \mathbb{R}$, dann gilt für alle $x \in X$,

$$\langle x', x \rangle - f(x) \leq \alpha.$$

Wir erhalten

$$\alpha \geq \sup_{x \in X} \big(\langle x', x \rangle - f(x) \big) \overset{Def.}{=} f^*(x'),$$

womit für alle $x \in X$

$$g(x) = \langle x', x \rangle - \alpha \leq \langle x', x \rangle - f^*(x') \leq \sup_{y' \in X'} \big(\langle y', x \rangle - f^*(y') \big) = f^{**}(x).$$

Aus Korollar 2.1.15 folgt

$$f(x) = \sup \big\{ g(x) : g \text{ ist affin und stetig mit } g \leq f \big\} = f^{**}(x).$$

■

2.3 Das Subdifferential

Definition 2.3.1. Seien X ein lokalkonvexer topologischer Vektorraum und $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ eine eigentliche und konvexe Abbildung. Ein $x' \in X'$ heißt Subgradient von f an x, falls für alle $y \in X$ die Subgradienten Ungleichung

$$f(y) \geq f(x) + x'(y - x) \tag{2.4}$$

gilt. Für $x \in X$ nennen wir die mehrwertige Abbildung $\partial f : X \to \mathcal{P}(X')$ definiert durch

$$\partial f(x) := \{x' \in X' : f(y) \geq f(x) + \langle x', y - x \rangle \text{ für alle } y \in X\}$$

das Subdifferential von f an x. Im Fall $\partial f(x) \neq \emptyset$ nennen wir f subdifferenzierbar an x.

Satz 2.3.2. Sei $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ eine eigentliche und konvexe Abbildung, welche an der Stelle x_0 klassisch differenzierbar ist. Dann ist f an der Stelle x_0 auch subdifferenzierbar.

Beweis: Nach Vorraussetzung existiert grad f an der Stelle x_0, wobei für alle $x \in \mathbb{R}^n$

$$\lim_{\lambda \to 0} \frac{f(x_0 + \lambda x) - f(x_0)}{\lambda} = \langle \text{grad } f(x_0), x \rangle .$$

Wegen der Konvexität von f gilt für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$ und $\lambda \in (0, 1)$

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y).$$

Dies ist äquivalent zu

$$\frac{1}{\lambda}\big(f(y + \lambda(x - y)) - f(y)\big) \leq f(x) - f(y).$$

Einsetzen von $y = x_0$ und der Grenzübergang $\lambda \to 0$ liefert

$$\langle \text{grad } f(x_0), x - x_0 \rangle \leq f(x) - f(x_0) \quad \text{bzw.} \quad \langle \text{grad } f(x_0), x - x_0 \rangle + f(x_0) \leq f(x),$$

für alle $x \in \mathbb{R}^n$, womit $x' = \text{grad } f(x_0) \in \partial f(x_0)$. ■

Bemerkung 2.3.3. Der vorangehende Satz 2.3.2 zeigt, dass für konvexe Abbildungen das Subdifferential eine Verallgemeinerung des Differentials ist. Es gilt sogar folgende Aussage: Ist $f \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ eine konvexe Abbildung, so gilt für alle $x \in \mathbb{R}^n$, dass $\partial f(x) = \{\nabla f(x)\}$. Für einen Beweis siehe [Ste20, Satz 4.1.7, Seite 109].

Beispiel 2.3.4. Die Betragsfunktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) = |x|$ ist an der Stelle $x = 0$ nicht im klassischen Sinne differenzierbar. Für $x \neq 0$ stimmt das Subdifferential mit der klassischen Ableitung überein. Insgesamt gilt

$$\partial f(x) = \begin{cases} \{1\}, & x > 0, \\ \big[-1, 1\big], & x = 0, \\ \{-1\}, & x < 0. \end{cases}$$

Satz 2.3.5. Sei X ein reflexiver, reeller Banachraum und $f : X \to \mathbb{R}$ eine konvexe Abbildung. Für alle $x \in X, x' \in X'$ gelten die folgenden Tatsachen.

1) $x' \in \partial f(x) \Leftrightarrow f(x) + f^*(x') = \langle x', x \rangle$.

2) $x' \in \partial f(x) \Rightarrow x \in \partial f^*(x')$

3) Im Fall $f(x) = f^{**}(x)$ für alle $x \in X$ gilt in 2) sogar Äquivalenz, also

$$x' \in \partial f(x) \Leftrightarrow x \in \partial f^*(x').$$

Beweis:

ad 1) $\Rightarrow$: Seien $x \in X, x' \in X'$ mit $x' \in \partial f(x)$. Wir definieren eine affin lineare Abbildung $g : X \to \mathbb{R}$ durch $g(y) := f(x) + \langle x', y - x \rangle$. Nach der Definition des Subdifferentials gilt $f(y) \geq f(x) + x'(y - x) = g(y)$ für alle $y \in X$, womit g unterhalb von f liegt. Offenbar gilt für alle $y \in X$

$$\left\langle x', y \right\rangle = g(y) + \left\langle x', x \right\rangle - f(x). \tag{2.5}$$

Auswertung von g an der Stelle x liefert, $g(x) = f(x)$. Wegen $g(y) \leq f(y)$ folgt $\sup_{y \in X}(g(y) - f(y)) = 0$. Für $f^*(x')$ gilt

$$f^*(x') \overset{Def.}{=} \sup_{y \in X} \left(\left\langle x', y \right\rangle - f(y) \right) \overset{(2.5)}{=} \sup_{y \in X} \big(g(y) - f(y) + \left\langle x', x \right\rangle - f(x) \big) = \left\langle x', x \right\rangle - f(x),$$

was äquivalent zu $f(x) + f^*(x') = \langle x', x \rangle$ ist.

$\Leftarrow$: Aus $f(x) + f^*(x') = \langle x', x \rangle$ folgt für $z \in X$

$$\left\langle x', x \right\rangle - f(x) = f^*(x') \overset{Def.}{=} \sup_{y \in X} \left(\left\langle x', y \right\rangle - f(y) \right) \geq \left\langle x', z \right\rangle - f(z),$$

und infolge

$$f(z) \geq f(x) + \left\langle x', z - x \right\rangle.$$

Dies ist genau die Subgradienten Ungleichung (2.4), womit $x' \in \partial f(x)$.

ad 2) Nach Definition des Subdifferentials für die Konjugierte von f gilt

$$x \in \partial f^*(x') \Leftrightarrow f^*(y') \geq f^*(x') + \left\langle x, y' - x' \right\rangle \quad \text{für alle } y' \in X'. \tag{2.6}$$

Im Fall $x' \in \partial f(x)$, gilt nach 1) die Gleichheit $f(x) + f^*(x') = \langle x', x \rangle$. Diese ist äquivalent zu $-f^*(x') = -\langle x', x \rangle + f(x)$. Gemeinsam mit der Definition der Konjugierten folgt

$$\begin{aligned} f^*(y') - f^*(x') &= \sup_{y \in X} \left(\left\langle y, y' \right\rangle - f(y) \right) - \left\langle x', x \right\rangle + f(x) \geq \\ &\geq \left\langle x, y' \right\rangle - f(x) + f(x) - \left\langle x', x \right\rangle = \left\langle x, y' - x' \right\rangle. \end{aligned}$$

Wegen (2.6) folgt $x \in \partial f^*(x')$.

ad 3) Im Fall $f(x) = f^{**}(x)$ erhalten wir den Schluss von $x \in \partial f^*(x')$ auf $x' \in \partial f(x)$, indem wir 2) auf f^* anwenden.

■

Definition 2.3.6. Sei X ein Vektorraum und $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ eine Abbildung. Wir sagen f wird minimiert an der Stelle x, wenn $f(y) \geq f(x)$ für alle $y \in X$.

Lemma 2.3.7. Sei X ein Vektorraum und sei $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ eine konvexe und eigentliche Abbildung. f wird bei $x \in \mathrm{dom} f$ genau dann minimiert, wenn $0 \in \partial f(x)$.

Beweis: $\Rightarrow$: Sei $x \in \mathrm{dom} f$ derart, dass f an x minimiert wird, also $f(y) \geq f(x)$ für alle $y \in X$, womit auch $f(y) \geq f(x) + x'(y - x)$ für $x' = 0$. Nach Definition des Subdifferentials gilt $0 \in \partial f(x)$.
$\Leftarrow$: Im Fall $0 \in \partial f(x)$, gilt per Definition $f(y) \geq f(x) + x'(y - x)$ für alle $y \in X$ mit $x' = 0$, weshalb $f(y) \geq f(x)$. Also wird f an der Stelle x minimiert. ■

Literaturverzeichnis

[AB06] Charalambos D. Aliprantis and Kim C. Border. *Infinite Dimensional Analysis: A Hitchhiker's Guide.* Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 3rd edition, 2006.

[Bro08] Martin Brokate. *Konvexe Analysis.* Zentrum Mathematik, TU München, München, 2008.

[Sch18] Ben Schweizer. *Partielle Differentialgleichungen.* Springer-Verlag, Deutschland, 2018.

[Ste20] Oliver Stein. *Grundzüge der konvexen Analysis.* Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 2020.

[WKB23] Harald Woracek, Michael Kaltenbäck, and Martin Blümlinger. *Funktionalanalysis.* TU Wien, Wien, 2023.