SEMINARARBEIT

SS 2023

Produkt-Integrale in Banachalgebren mit Eins

ausgeführt am

Institut für Analysis und Scientific Computing

TU Wien

unter der Anleitung von

Ao.Univ.Prof. Dipl.-Ing. Dr.techn. Michael Kaltenbäck

durch

Hossein Pichler

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

In dieser Seminararbeit wird analog zum Riemann-Integral in Banachräumen eine Variante des Produkt-Integrals definiert.
Grundsätzlich gibt es für verschiedene Klassen von Funktionen auch unterschiedliche Zugänge zum Produkt-Integral. Hier wurde die Herangehensweise von Pesi Rustom Masani [1] gewählt, in welcher man matrix-wertige Funktionen ausgehend von einem abgeschlossenen reellen Intervall verallgemeinert. Dazu betrachten wir Funktionen $f : [a, b] \to X$, die in eine Banachalgebra mit Eins X abbilden. Anschließend wird mithilfe einer äquivalenten Definition der Zusammenhang zwischen Produkt-Integral und Riemann-Integral in kommutativen Banachalgebren mit Eins gezeigt. Eine alternative Methode, diesen zu zeigen, findet man in [2].

2 Ungleichungen in Banachalgebren mit Eins

In diesem Abschnitt wollen wir Ungleichungen beweisen, welche allgemein in Banachalgebren mit Eins gelten. Diese sind hilfreich, wenn man Eigenschaften über das Produkt-Integral zeigen möchte.

Definition 2.1. Sei $(X, \|.\|_X, \cdot, \mathbb{1})$ eine Banachalgebra mit Eins. Für $x, y \in X$ ist der Ausdruck $x \cdot y$ oder xy als $\cdot(x, y)$ zu verstehen und für $n \in \mathbb{N}^+$ definieren wir $x^n := \underbrace{xx \cdots x}_{\text{n-mal}}$ und $x^0 := \mathbb{1}$.

Für $x_1, \ldots, x_n \in X$ bezeichnen wir folgende Ausdrücke als das rechte bzw. linke Produkt:

$$\prod_{i=1}^{n} x_i := x_1 x_2 \ldots x_n, \quad \prod_{i=n}^{1} x_i := x_n x_{n-1} \ldots x_1.$$

Lemma 2.2. *Ist $(X, \|.\|_X, \cdot, \mathbb{1})$ eine Banachalgebra mit Eins und $x_1, \ldots, x_n \in X$, dann gilt*

$$\left\| \prod_{i=1}^{n} (\mathbb{1} + x_i) \right\|_X \leq \prod_{i=1}^{n} \|\mathbb{1} + x_i\|_X \leq \exp\left(\sum_{i=1}^{n} \|x_i\|_X \right).$$

Beweis. Die erste Ungleichung folgt induktiv aus $\|xy\|_X \leq \|x\|_X \|y\|_X$ für $x, y \in X$. Wegen $\exp(\|x_i\|_X) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\|x_i\|_X^k}{k!}$ und wegen der Dreiecksungleichung erhalten wir

$$\prod_{i=1}^{n} \|\mathbb{1} + x_i\|_X \leq \prod_{i=1}^{n} (1 + \|x_i\|_X) \leq \prod_{i=1}^{n} \exp(\|x_i\|_X) = \exp\left(\sum_{i=1}^{n} \|x_i\|_X \right).$$

$\square$

Lemma 2.3. *Für eine Banachalgebra $(X, \|.\|_X, \cdot, \mathbb{1})$ mit Eins und $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n \in X$ gilt*

$$\prod_{i=1}^{n} x_i - \prod_{i=1}^{n} y_i = \sum_{i=1}^{n} \Big(\prod_{k=1}^{i-1} y_k\Big)(x_i - y_i)\Big(\prod_{k=i+1}^{n} x_k\Big),$$

wobei $\prod_{k=1}^{0} y_k = \prod_{k=n+1}^{n} x_k = \mathbb{1}$.

Beweis. Der rechte Ausdruck lässt sich als Teleskopsumme darstellen:

$$\sum_{i=1}^{n} \Big(\prod_{k=1}^{i-1} y_k\Big)(x_i - y_i)\Big(\prod_{k=i+1}^{n} x_k\Big) = (x_1 x_2 \ldots x_n) \underbrace{-(y_1 x_2 \ldots x_n) + (y_1 x_2 \ldots x_n)}_{0} \ldots$$

$$\ldots \underbrace{-(y_1 \ldots y_{n-1} x_n) + (y_1 \ldots y_{n-1} x_n)}_{0} - (y_1 y_2 \ldots y_n) = \prod_{i=1}^{n} x_i - \prod_{i=1}^{n} y_i.$$

$\square$

Lemma 2.4. *Ist* $(X, \|.\|_X, \cdot, \mathbb{1})$ *eine Banachalgebra mit Eins und* $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n \in X$*, so gilt*

$$\left\| \prod_{i=1}^{n} (\mathbb{1} + x_i) - \prod_{i=1}^{n} (\mathbb{1} + y_i) \right\|_X \leq \exp\left(\sum_{i=1}^{n} \|x_i\|_X + \|y_i\|_X \right) \sum_{i=1}^{n} \|x_i - y_i\|_X.$$

Beweis. Aus Lemma 2.3 folgt

$$\left\| \prod_{i=1}^{n} (\mathbb{1} + x_i) - \prod_{i=1}^{n} (\mathbb{1} + y_i) \right\|_X \leq \sum_{i=1}^{n} \big(\prod_{k=1}^{i-1} \|\mathbb{1} + y_k\|_X \big) \big(\prod_{k=i+1}^{n} \|\mathbb{1} + x_k\|_X \big) \|x_i - y_i\|_X.$$

Nach Lemma 2.2 erhalten wir für alle $i = 1, \dots, n$

$$\begin{aligned}
\big(\prod_{k=1}^{i-1} \|\mathbb{1} + y_k\|_X \big) \big(\prod_{k=i+1}^{n} \|\mathbb{1} + x_k\|_X \big) &\leq \exp\left(\sum_{k=1}^{i-1} \|y_k\|_X + \sum_{k=i+1}^{n} \|x_k\|_X \right) \\
&\leq \exp\left(\sum_{k=1}^{n} \|y_k\|_X + \|x_k\|_X \right),
\end{aligned}$$

weshalb

$$\begin{aligned}
\left\| \prod_{i=1}^{n} (\mathbb{1} + x_i) - \prod_{i=1}^{n} (\mathbb{1} + y_i) \right\|_X &\leq \sum_{i=1}^{n} \exp\left(\sum_{k=1}^{n} \|y_k\|_X + \|x_k\|_X \right) \|x_i - y_i\|_X \\
&= \exp\left(\sum_{i=1}^{n} \|y_i\|_X + \|x_i\|_X \right) \sum_{i=1}^{n} \|x_i - y_i\|_X.
\end{aligned}$$

□

3 Definition und Eigenschaften des Produkt-Integrals

Definition 3.1. Sei $(X, \|.\|_X, \cdot, \mathbb{1})$ eine Banachalgebra mit Eins und $f : [a, b] \to X$ eine beschränkte Funktion.
Wir bezeichnen die Menge aller Riemann-Zerlegungen von $[a, b]$ mit $\mathcal{R}[a, b]$. Für jede Riemann-Zerlegung $R := ((\xi_i)_{i=0}^{n(R)}, (\alpha_i)_{i=1}^{n(R)}) \in \mathcal{R}[a, b]$ setzen wir $\Delta\xi_i := \xi_i - \xi_{i-1}$ für $i = 1, \dots n(R)$. Das rechte bzw. das linke Riemann-Produkt von f bezüglich R definieren wir als

$$P(f, R) := \prod_{i=1}^{n(R)} \big(\mathbb{1} + \Delta\xi_i f(\alpha_i) \big),$$

$$P^*(f, R) := \prod_{i=n(R)}^{1} \big(\mathbb{1} + \Delta\xi_i f(\alpha_i) \big).$$

Existiert der Grenzwert des Netzes $(P(f, R))_{R \in \mathcal{R}[a,b]}$ in X, so nennt man diesen das rechte Produkt-Integral von f über $[a, b]$:

$$\prod_{a}^{b} \big(\mathbb{1} + f(x) dx \big) := \lim_{R \in \mathcal{R}[a,b]} P(f, R)$$

Existiert der Grenzwert von $(P^*(f,R))_{R\in\mathcal{R}[a,b]}$, so spricht man vom linken Produkt-Integral von f über $[a,b]$:

$$\prod_b^a \big(\mathbb{1}+f(x)dx\big) := \lim_{R\in\mathcal{R}[a,b]} P^*(f,R)$$

Bemerkung 3.2. Man kann zeigen, dass das rechte Produkt-Integral genau dann existiert, wenn das linke existiert. Das folgt aus der Tatsache, dass die Existenz jeweils zur Riemann-Integrierbarkeit äquivalent ist. Siehe [2].

Bemerkung 3.3. Analog zum Riemann-Integral schreibt man auch $\lim_{|R|\to 0} P(f,R)$ statt $\lim_{R\in\mathcal{R}[a,b]} P(f,R)$ sowie $\lim_{|R|\to 0} P^*(f,R)$ statt $\lim_{R\in\mathcal{R}[a,b]} P^*(f,R)$.

Bemerkung 3.4. Da Netze in Banachräumen genau dann konvergieren, wenn sie Cauchy Netze sind, ist die Existenz von $\prod_a^b \big(\mathbb{1}+f(x)dx\big)$ äquivalent zu

$$\forall\epsilon>0\ \exists\delta>0\ \forall R_1,R_2\in\mathcal{R}[a,b] \text{ mit } |R_1|,|R_2|\le\delta:$$
$$\|P(f,R_1)-P(f,R_2)\|_X\le\epsilon.$$

Analoges gilt für das linke Produkt-Integral.

Bemerkung 3.5. Wir zeigen einige Eigenschaften vom rechten Produkt-Integral. Analoge Aussagen gelten für das linke. Man kann nämlich auf einer Banachalgebra mit Eins ein neues Produkt $x\circ y := y\cdot x$ definieren und erhält eine neue Banachalgebra mit Eins. Die Aussagen über das rechte Produkt-Integral in $(X,\|.\|_X,\circ,\mathbb{1})$ übertragen sich dann auf das linke in $(X,\|.\|_X,\cdot,\mathbb{1})$.

Lemma 3.6. *Sei $(X,\|.\|_X,\cdot,\mathbb{1})$ eine Banachalgebra mit Eins und $f:[a,b]\to X$ eine beschränkte Funktion. Für eine beliebige Riemann-Zerlegung $R := ((\xi_i)_{i=0}^{n(R)},(\alpha_i)_{i=1}^{n(R)})$ von $[a,b]$ gilt*

$$\|P(f,R)\|_X \le \exp\big((b-a)\cdot\|f\|_\infty\big).$$

Falls das rechte Produkt-Integral existiert, so hat man

$$\left\|\prod_a^b \big(\mathbb{1}+f(x)dx\big)\right\|_X \le \exp\big((b-a)\cdot\|f\|_\infty\big).$$

Beweis. Aus Lemma 2.2 folgt

$$\begin{aligned}\|P(f,R)\|_X &= \prod_{i=1}^{n(R)}\big(\mathbb{1}+\Delta\xi_i f(\alpha_i)\big) \le \exp\left(\sum_{i=1}^{n(R)}\|\Delta\xi_i f(\alpha_i)\|_X\right)\\ &= \exp\left(\sum_{i=1}^{n(R)}\Delta\xi_i\|f(\alpha_i)\|_X\right) \le \exp\big((b-a)\cdot\|f\|_\infty\big).\end{aligned}$$

Die zweite Aussage folgt aus der Stetigkeit der Norm und der ersten Aussage:

$$\begin{aligned}\|\prod_a^b \big(\mathbb{1}+f(x)dx\big)\|_X &= \|\lim_{R\in\mathcal{R}[a,b]} P(f,R)\|_X\\ &= \lim_{R\in\mathcal{R}[a,b]}\|P(f,R)\|_X \le \exp\big((b-a)\cdot\|f\|_\infty\big).\end{aligned}$$

□

Lemma 3.7. *Sei $(X, \|.\|_X, \cdot, \mathbb{1})$ eine Banachalgebra mit Eins, $a < b < c$ aus $\mathbb{R}$ und $f : [a, c] \to X$ eine beschränkte Funktion. Falls die Produkt-Integrale*

$$\prod_a^b \big(\mathbb{1} + f(x)dx\big) \text{ und } \prod_b^c \big(\mathbb{1} + f(x)dx\big)$$

existieren, so existiert auch $\prod_a^c \big(\mathbb{1} + f(x)dx\big)$ und es gilt

$$\prod_a^c \big(\mathbb{1} + f(x)dx\big) = \prod_a^b \big(\mathbb{1} + f(x)dx\big) \prod_b^c \big(\mathbb{1} + f(x)dx\big)).$$

Beweis. Sei $\epsilon > 0$ beliebig. Wir wählen $\delta_1 > 0$ und $\delta_2 > 0$ so, dass für alle Riemann-Zerlegungen $R_{[a,b]}$ von $[a, b]$ mit $|R_{[a,b]}| \leq \delta_1$ und $R_{[b,c]}$ von $[b, c]$ mit $|R_{[b,c]}| \leq \delta_2$

$$\|P(f, R_{[a,b]}) - \underbrace{\prod_a^b \big(\mathbb{1} + f(x)dx\big)}_{P_{[a,b]}:=}\|_X \leq \frac{\epsilon}{4 \exp\big((c-a) \cdot \|f\|_\infty\big)},$$

$$\|P(f, R_{[b,c]}) - \underbrace{\prod_b^c \big(\mathbb{1} + f(x)dx\big)}_{P_{[b,c]}:=}\|_X \leq \frac{\epsilon}{4 \exp\big((c-a) \cdot \|f\|_\infty\big)}.$$

Wir definieren $\delta := \min(1, \delta_1, \delta_2, \frac{\epsilon}{2(3\|f\|_\infty + \|f\|_\infty^2) \exp(\|f\|_\infty (c-a))})$ und zeigen anschließend $\|P(f, R) - P_{[a,b]} P_{[b,c]}\|_X \leq \epsilon$ für alle $R \in \mathcal{R}[a, c]$ mit $|R| \leq \delta$.
Sei also $R := ((\xi_i)_{i=0}^{n(R)}, (\alpha_i)_{i=1}^{n(R)})$ eine beliebige Riemann-Zerlegung von $[a, c]$ mit $|R| \leq \delta$. Wir wählen $k \in \{1, \ldots, n(R)\}$ derart, dass $b \in [\xi_{k-1}, \xi_k]$ und definieren

$$P_b := (\mathbb{1} + (b - \xi_{k-1}) f(b)) (\mathbb{1} + (\xi_k - b) f(b))$$

und

$$P := \underbrace{\left(\prod_{i=1}^{k-1} \big(\mathbb{1} + \Delta\xi_i f(\alpha_i)\big)\right)}_{P_L:=} P_b \underbrace{\left(\prod_{k+1}^{n(R)} \big(\mathbb{1} + \Delta\xi_i f(\alpha_i)\big)\right)}_{P_R}.$$

Mit der Dreiecksungleichung folgt

$$\|P(f, R) - P_{[a,b]} P_{[b,c]}\|_X \leq \|P(f, R) - P\|_X + \|P - P_{[a,b]} P_{[b,c]}\|_X.$$

Für den ersten Ausdruck wenden wir Lemma 2.2 auf die Riemann-Produkte P_L und P_R an und erhalten

$$\begin{aligned}
\|P(f, R) - P\|_X &= \|P_L \cdot (\mathbb{1} + \Delta\xi_k f(\alpha_k) - P_b) \cdot P_R\|_X \\
&\leq \|\mathbb{1} + \Delta\xi_k f(\alpha_k) - P_b\|_X \, \|P_R\|_X \, \|P_L\|_X \\
&\leq \|\mathbb{1} + \Delta\xi_k f(\alpha_k) - P_b\|_X \exp((c-a)\|f\|_\infty).
\end{aligned}$$

Wir wenden die Dreiecksungleichung an und aus $\Delta\xi_k, (\xi_k - b), (b - \xi_{k-1}) \leq \delta \leq \frac{\epsilon}{2(3\|f\|_\infty + \|f\|_\infty^2)\exp(\|f\|_\infty(c-a))}$ folgt

$$\|\mathbb{1} + \Delta\xi_k f(\alpha_k) - P_b\|_X$$

$$\begin{aligned}
&= \left\|\Delta\xi_k f(\alpha_k) - (\xi_k - b)f(b) - (b - \xi_{k-1})f(b) - (b - \xi_{k-1})(\xi_k - b)f(b)^2\right\|_X \\
&\leq 3\delta\|f\|_\infty + 1 \cdot \delta\|f\|_\infty^2 = \delta(3\|f\|_\infty + \|f\|_\infty^2) \leq \frac{\epsilon}{2\exp((c-a)\|f\|_\infty)}.
\end{aligned}$$

Also gilt

$$\|P(f,R) - P\|_X \leq \frac{\epsilon}{2\exp((c-a)\|f\|_\infty)}\exp((c-a)\|f\|_\infty) = \frac{\epsilon}{2}.$$

Um den Ausdruck $\|P - P_{[a,b]}P_{[b,c]}\|_X$ abzuschätzen wenden wir zunächst die Dreiecksungleichung an.

$$\begin{aligned}
\|P - P_{[a,b]}P_{[b,c]}\|_X \leq &\underbrace{\left\|P - P_{[a,b]}\left(\mathbb{1} + (\xi_k - b)f(b)\right)P_R\right\|_X}_{I_1:=} \\
&+ \underbrace{\left\|P_{[a,b]}\left(\mathbb{1} + (\xi_k - b)f(b)\right)P_R - P_{[a,b]}P_{[b,c]}\right\|_X}_{I_2:=}.
\end{aligned}$$

Wegen der Wahl von δ_1 und δ_2 sowie $\delta \leq \delta_1$ bzw. $\delta \leq \delta_2$ erhalten wir

$$\begin{aligned}
I_1 &\leq \left\|P_L\left(\mathbb{1} + (b - \xi_{k-1})f(b)\right) - P_{[a,b]}\right\|_X \|(\mathbb{1} + (\xi_k - b)f(b))\, P_R)\|_X \\
&\leq \frac{\epsilon}{4\exp(\|f\|_\infty(c-a))}\exp(\|f\|_\infty(c-a)) = \frac{\epsilon}{4}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_2 &\leq \left\|P_{[a,b]}\right\|_X \left\|(\mathbb{1} + (\xi_k - b)f(b))\, P_R - P_{[b,c]}\right\|_X \\
&\leq \exp(\|f\|_\infty(c-a))\frac{\epsilon}{4\exp(\|f\|_\infty(c-a))} = \frac{\epsilon}{4}.
\end{aligned}$$

Also haben wir

$$\|P - P_{[a,b]}P_{[b,c]}\|_X \leq I_1 + I_2 \leq \frac{\epsilon}{2}$$

gezeigt und insgesamt gilt

$$\|P(f,R) - P_{[a,b]}P_{[b,c]}\|_X \leq \|P(f,R) - P\|_X + \|P - P_{[a,b]}P_{[b,c]}\|_X \leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

□

4 Äquivalente Definition des Produkt-Integrals

Wir werden in dem Abschnitt einen äquivalenten Zugang zum Produkt-Integral definieren. Dazu benötigt man zuerst folgendes Ergebnis.

Lemma 4.1. *Sei* $(X, \|.\|_X, \cdot, \mathbb{1})$ *eine Banachalgebra mit Eins.*
Die Funktion $\exp : X \to X$ *definiert durch* $\exp(x) = \sum_{k=0}^\infty \frac{1}{k!}x^k$ *ist wohldefiniert und stetig.*
Für kommutierende $x, y \in X$*, also* $x \cdot y = y \cdot x$*, gilt*

$$\exp(x) \cdot \exp(y) = \exp(x + y).$$

Beweis. Die Wohldefiniertheit folgt aus

$$\sum_{k=0}^{\infty} \| \frac{1}{k!} x^k \|_X \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \|x\|_X^k = \exp(\|x\|_X).$$

Um die Stetigkeit zu zeigen, wählen wir $r > 0$ beliebig und betrachten $\exp|_{K_r^{\|\cdot\|_X}(0)}$. Für $k \in \mathbb{N}$ ist die Funktion $f_k : K_r^{\|\cdot\|_X}(0) \to X$ mit $f_k(x) := \frac{1}{k!} x^k$ beschränkt durch $\|f_k\|_\infty \leq \frac{1}{k!} r^k$. Wir wenden das Weierstraßsche Konvergenzkriterium an und erhalten aus der absoluten Konvergenz $\sum_{k=0}^{\infty} \|f_k\|_\infty \leq \exp(r)$ die gleichmäßige Konvergenz der Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$. Die Funktion $\exp|_{K_r^{\|\cdot\|_X}(0)} = \sum_{k=0}^{\infty} f_k$ ist Grenzwert einer gleichmäßig konvergenten Folge stetiger Funktionen und somit selbst stetig. Da $r > 0$ beliebig war, ist auch $\exp : X \to X$ stetig.
Die Reihen $\exp(x)$ und $\exp(y)$ konvergieren absolut und daher auch unbedingt. Wegen $\mathbb{N} \times \mathbb{N} = \bigcup_{k=0}^{\infty} \{(j,l) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid j + l = k\}$ erhalten wir durch Umordnung

$$\begin{aligned}
\exp(x)\exp(y) &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k \frac{1}{j!} y^j = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\{(j,l) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid j+l=k\}} \frac{1}{l!} x^l \frac{1}{j!} y^j \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{k} \frac{1}{j!(k-j)!} x^{k-j} y^j.
\end{aligned}$$

Mit Induktion nach $k \in \mathbb{N}$ folgern wir aus $xy = yx$ die Gleichheit

$$(x+y)^k = \sum_{j=0}^{k} \frac{k!}{j!(k-j)!} x^{k-j} y^j.$$

Insgesamt erhalten wir

$$\exp(x)\exp(y) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{k} \frac{1}{j!(k-j)!} x^{k-j} y^j = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (x+y)^k = \exp(x+y).$$

□

Definition 4.2. Sei $(X, \|.\|_X, \cdot, \mathbb{1})$ eine Banachalgebra mit Eins und $f : [a,b] \to X$ eine beschränkte Funktion. Für eine Riemann-Zerlegung $R := ((\xi_i)_{i=0}^{n(R)}, (\alpha_i)_{i=1}^{n(R)}) \in \mathcal{R}[a,b]$ definieren wir

$$P_e(f,R) := \prod_{i=1}^{n(R)} \exp(\Delta\xi_i f(\alpha_i)).$$

Lemma 4.3. *Sei $(X, \|.\|_X, \cdot, \mathbb{1})$ eine Banachalgebra mit Eins und $f : [a,b] \to X$ eine beschränkte Funktion. Für ein beliebiges $\epsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$ so, dass für jede Riemann-Zerlegung R von $[a,b]$ mit $|R| \leq \delta$*

$$\|P(f,R) - P_e(f,R)\|_X \leq \epsilon.$$

Beweis. Zu beliebigem $\epsilon > 0$ wählen wir $\delta \in (0,1]$ derart, dass

$$\delta \leq \frac{\epsilon}{\exp\big((2\|f\|_\infty + \exp(\|f\|_\infty))(b-a)\big)\exp(\|f\|_\infty)(b-a)}.$$

Sei $R := ((\xi_i)_{i=0}^{n(R)}, (\alpha_i)_{i=1}^{n(R)})$ eine beliebige Riemann-Zerlegung von $[a,b]$ mit $|R| \leq \delta$. Nach Lemma 2.4 folgt

$$\begin{aligned}
\|P(f,R) - P_e(f,R)\|_X &= \Big\| \prod_{i=1}^{n(R)} (\mathbb{1} + \Delta\xi_i f(\alpha_i)) - \prod_{i=1}^{n(R)} \exp(\Delta\xi_i f(\alpha_i)) \Big\|_X \\
&= \Big\| \prod_{i=1}^{n(R)} (\mathbb{1} + \Delta\xi_i f(\alpha_i)) - \prod_{i=1}^{n(R)} (\mathbb{1} + \Delta\xi_i f(\alpha_i) + \underbrace{\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\Delta\xi_i^n}{n!} f(\alpha_i)^n}_{R_i :=}) \Big\|_X \\
&\leq \exp\left(\sum_{i=1}^{n(R)} \|\Delta\xi_i f(\alpha_i)\|_X + \|\Delta\xi_i f(\alpha_i) + R_i\|_X \right) \sum_{i=1}^{n(R)} \|R_i\|_X .
\end{aligned}$$

Wegen $\Delta\xi_i \leq \delta \leq 1$ kann man $R_i = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\Delta\xi_i^n}{n!} f(\alpha_i)^n$ abschätzen durch

$$\|R_i\|_X \leq \sum_{n=2}^{\infty} \Big\| \frac{\Delta\xi_i^n}{n!} f(\alpha_i)^n \Big\|_X \leq \Delta\xi_i^2 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!} \|f\|_\infty^n \leq \Delta\xi_i^2 \exp(\|f\|_\infty).$$

$\Delta\xi_i \leq \delta \leq 1$ und $\sum_{i=1}^{n(R)} \Delta\xi_i = (b-a)$ ergeben nach Anwendung der Dreiecksungleichung

$$\begin{aligned}
&\|P(f,R) - P_e(f,R)\|_X \\
&\leq \exp\left(\sum_{i=1}^{n(R)} 2\Delta\xi_i \|f(\alpha_i)\|_X + \Delta\xi_i^2 \exp(\|f\|_\infty) \right) \sum_{i=1}^{n(R)} \Delta\xi_i^2 \exp(\|f\|_\infty) \\
&\leq \exp\left(\sum_{i=1}^{n(R)} 2\Delta\xi_i \|f\|_\infty + \Delta\xi_i \cdot 1 \cdot \exp(\|f\|_\infty) \right) \delta \sum_{i=1}^{n(R)} \Delta\xi_i \exp(\|f\|_\infty) \\
&= \exp\left((2\|f\|_\infty + \exp(\|f\|_\infty)) \sum_{i=1}^{n(R)} \Delta\xi_i \right) \delta \exp(\|f\|_\infty) \sum_{i=1}^{n(R)} \Delta\xi_i \\
&= \exp\big((2\|f\|_\infty + \exp(\|f\|_\infty))(b-a) \big) \exp(\|f\|_\infty)(b-a) \cdot \delta \leq \epsilon
\end{aligned}$$

□

Bemerkung 4.4. Mit Lemma 4.3 folgt

$$\lim_{|R| \to 0} P_e(f,R) = \lim_{|R| \to 0} P(f,R)$$

in dem Sinne, dass die linke Seite genau dann existiert, wenn es die rechte tut. In dem Fall gilt

$$\lim_{|R| \to 0} P_e(f,R) = \prod_a^b \big(\mathbb{1} + f(x)dx \big).$$

5 Produkt-Integrale in kommutativen Banachalgebren mit Eins

In kommutativen Banachalgebren mit Eins lässt sich das Produkt-Integral einfach auf das Riemann-Integral zurückführen.

Satz 5.1. *Sei $(X, \|.\|_X, \cdot, \mathbb{1})$ eine Banachalgebra mit Eins und $f : [a,b] \to X$ eine beschränkte Riemann-integrierbare Funktion. Falls für alle $\alpha, \beta \in [a,b] : f(\alpha) \cdot f(\beta) = f(\beta) \cdot f(\alpha)$ gilt, so existieren das linke und das rechte Produkt-Integral, wobei*

$$\prod_b^a \big(\mathbb{1} + f(x)dx\big) = \prod_a^b \big(\mathbb{1} + f(x)dx\big) = \exp\left(\int_a^b f(x)dx\right).$$

Insbesondere ist diese Bedingung erfüllt, falls $\cdot$ kommutativ auf X ist.

Beweis. Sei $R := ((\xi_i)_{i=0}^{n(R)}, (\alpha_i)_{i=1}^{n(R)})$ eine Riemann-Zerlegung von $[a,b]$.
Für $j, k \in \{1, \dots, n(R)\}$ gilt

$$\big(\mathbb{1} + \Delta\xi_j f(\alpha_j)\big) \cdot \big(\mathbb{1} + \Delta\xi_k f(\alpha_k)\big) = \big(\mathbb{1} + \Delta\xi_k f(\alpha_k)\big) \cdot \big(\mathbb{1} + \Delta\xi_j f(\alpha_j)\big)$$

und mit vollständiger Induktion folgt

$$P(f,R) = \prod_{i=1}^{n(R)} \big(\mathbb{1} + \Delta\xi_i f(\alpha_i)\big) = \prod_{i=n(R)}^{1} \big(\mathbb{1} + \Delta\xi_i f(\alpha_i)\big) = P^*(f,R).$$

Also stimmen das linke und das rechte Produkt-Integral überein, sofern es existiert.

Wegen $\Delta\xi_j f(\alpha_j) \cdot \Delta\xi_k f(\alpha_k) = \Delta\xi_k f(\alpha_k) \cdot \Delta\xi_j f(\alpha_j))$ folgt aus Lemma 4.1

$$\exp\left(\Delta\xi_j f(\alpha_j)\right) \cdot \exp\left(\Delta\xi_k f(\alpha_k)\right) = \exp\left(\Delta\xi_j f(\alpha_j) + \Delta\xi_k f(\alpha_k)\right)$$

und mit vollständiger Induktion

$$P_e(f,R) = \prod_{i=1}^{n(R)} \exp\left(\Delta\xi_i f(\alpha_i)\right) = \exp\left(\sum_{i=1}^{n(R)} \Delta\xi_i f(\alpha_i)\right) = \exp\left(S(f,R)\right).$$

Da $\exp : X \to X$ laut Lemma 4.1 stetig ist, gilt

$$\begin{aligned}\lim_{R \in \mathcal{R}[a,b]} P_e(f,R) &= \lim_{R \in \mathcal{R}[a,b]} \exp\left(S(f,R)\right) \\ &= \exp\left(\lim_{R \in \mathcal{R}[a,b]} S(f,R)\right) = \exp\left(\int_a^b f(x)dx\right)\end{aligned}$$

□

Bemerkung 5.2. Wir sehen insbesondere, dass sich Produkt-Integrale von Funktionen $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ mithilfe vom Riemann-Integral ausrechnen lassen. Dies gilt auch für matrix-wertige Funktionen $f : [a,b] \to \mathbb{R}^{n \times n}$, deren Bild kommutiert.

Literatur

[1] Masani, P. R. *Multiplicative Riemann integration in normed rings.* 1946.

[2] Slavík, A. *Product integration, its history and applications.* 2007.