Seminararbeit

m-Isometrien

ausgeführt am

Institut für
Analysis und Scientific Computing
TU Wien

unter der Anleitung von

Ao.Univ.Prof. Dipl.-Ing. Dr.techn. Michael Kaltenbäck

durch

Lukas Sauer
Matrikelnummer: 12002158

Wien, am 22. Februar 2023

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Ein linearer und beschränkter Operator T von einem komplexen Hilbertraum H in sich selbst heißt m-Isometrie, wenn

$$\sum_{k=0}^{m}(-1)^{m-k}\binom{m}{k}T^{*k}T^{k}=0,$$

wobei T^* die Adjungierte von T bezeichnet.

Wir wollen in der vorliegenden Arbeit einen Überblick über die Eigenschaften von m-Isometrien geben. Dazu werden im wesentlichen die Ergebnisse aus [AS95] aufbereitet. Im letzten Abschnitt bringen wir einige Resultate aus [BT14].

Im ersten Abschnitt der Arbeit wollen wir einige Begriffsbildungen und wichtige Sätze aus der Funktionalanalysis in Erinnerung rufen, welche wir später brauchen werden.

Erstes Ziel wird ein Zerlegungssatz für m-Isometrien sein. In der Tat kann jede m-Isometrie in eine direkte orthogonale Summe von sogenannten echten m-Isometrien zerlegt werden. Dieser Satz erlaubt es, sich bei der Untersuchung von m-Isometrien auf echte m-Isometrien zu beschränken.

Des weiteren wollen wir im dritten Abschnitt das Spektrum von m-Isometrien beschreiben. Wir werden zeigen, dass dieses im Abschluss der Einheitskreisscheibe enthalten ist. Dieses grobe Resultat lässt sich weiter einschränken, wenn wir m-Isometrien mit bestimmten Eigenschaften betrachten.

Im vierten und letzten Abschnitt untersuchen wir gewichtete Shiftoperatoren, welche unter bestimmten Voraussetzungen m-isometrisch sind.

2 Grundbegriffe aus der Funktionalanalysis

Im Folgenden sei $(H, (.,.))$ ein Hilbertraum über dem Skalarkörper $\mathbb{C}$. Mit $L_b(H)$ wollen wir den Banachraum der linearen und beschränkten Abbildungen von H nach H bezeichnen. Wir erinnern an die Definition des orthogonalen Komplements.

Definition 2.1. Sei M ein Unterraum von H. Das *orthogonale Komplement* $M^\perp$ von M ist definiert als

$$M^\perp := \{x \in H : (x, y) = 0 \ \forall y \in M\}.$$

Bemerkung 2.2. Ist $y \in H$ und das lineare Funktional $f_y \colon H \to \mathbb{C}$ definiert durch $f_y(x) = (x, y)$, so folgt aus der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung

$$|f_y(x)| = |(x, y)| \leq \|x\|\|y\|$$

für alle $x \in H$. Somit ist f_y ein beschränktes lineares Funktional. Für einen Unterraum M ist nach Definition des orthogonalen Komplements

$$M^\perp = \bigcap_{y \in M} \ker f_y.$$

Also ist $M^\perp$ als Schnitt abgeschlossener Unterräume selbst ein abgeschlossener Unterraum von H.

Lemma 2.3. *Sei $(M_i)_{i\in I}$ eine Familie von Unterräumen von H und M ein abgeschlossener Unterraum von H. Dann gelten die folgenden Aussagen:*

(i) $\bigcap_{i\in I} M_i^\perp = (\operatorname{span} \bigcup_{i\in I} M_i)^\perp$

(ii) $M^{\perp\perp} = M$

(iii) $H = M \oplus M^\perp$

(iv) Die Projektion P_M auf den Unterraum M ist eine Orthogonalprojektion und daher selbstadjungiert.

Für einen Beweis verweisen wir auf [BKW22, p.47 ff.].

Definition 2.4. Sei $(e_i)_{i\in I}$ ein Orthonormalsystem aus Vektoren aus H. Im Fall $\overline{\operatorname{span}\{e_i \colon i \in I\}} = H$ nennen wir $(e_i)_{i\in I}$ eine *Orthonormalbasis*. Weiters heißt H *separabel*, falls es eine höchstens abzählbare Orthonormalbasis gibt.

Bemerkung 2.5. Mithilfe des Lemmas von Zorn und der Tatsache, dass ein Orthonormalsystem genau dann eine Orthonormalbasis ist, wenn es maximal ist, lässt sich zeigen, dass jeder Hilbertraum eine Orthonormalbasis besitzt (siehe [BKW22, p.51]).

Wir wollen noch kurz auf positive Operatoren zu sprechen kommen.

Definition 2.6. $T \in L_b(H)$ heißt *positiv*, wenn für alle $x \in H$

$$(Tx, x) \geq 0.$$

Die nachfolgenden Aussagen werden in [FM16, p.70] bewiesen. Wir wollen sie hier der Vollständigkeit halber noch einmal explizit beweisen.

Lemma 2.7. *Ist $T \in L_b(H)$ positiv, dann gilt*

$$|(Tx, y)|^2 \leq (Tx, x)(Ty, y).$$

Beweis. Wir schreiben die Elemente aus $H \times H$ als $(.; .)$. Weil T linear und $(., .)$ sesquilinear ist, stellt auch

$$\begin{aligned} [., .] \colon H \times H &\to \mathbb{C} \\ (x; y) &\mapsto (Tx, y) \end{aligned}$$

eine Sesquilinearform dar. Wegen der Positivität von T ist $[., .]$ positiv semidefinit. Wir können also die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung auf $[., .]$ anwenden und erhalten

$$|(Tx, y)|^2 = |[x, y]|^2 \leq [x, x][y, y] = (Tx, x)(Ty, y).$$

□

Korollar 2.8. *Sei $T \in L_b(H)$ positiv und $x \in H$. Ist $(Tx, x) = 0$, so folgt $x \in \ker T$.*

Beweis. Für $x \in H$ erhalten wir aus Lemma 2.7 mit $y = Tx$, der Beschränktheit von T sowie der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung

$$\|Tx\|^4 = (Tx, Tx)^2 \leq (Tx, x)(T^2x, Tx) \leq (Tx, x)\|Tx\|^2\|T\|,$$

weshalb aus $(Tx, x) = 0$ immer $\|Tx\|^4 = 0$ und daher $Tx = 0$ folgt. □

Es sei noch an das folgende, nicht nur für positive Operatoren geltende Resultat, erinnert (siehe [BKW22, p.142]).

Lemma 2.9. *Sei $T \in L_b(H)$. T ist genau dann der Nulloperator, wenn $(Tx, x) = 0$ für alle $x \in H$.*

Wir wiederholen noch einige grundlegende Definitionen und Resultate aus der Spektraltheorie.

Definition 2.10. $T \in L_b(H)$ heißt *invertierbar*, wenn T bijektiv und T^{-1} beschränkt ist.

Bemerkung 2.11. Wegen des Satzes von der offenen Abbildung ist die Forderung in Definition 2.10, dass T^{-1} beschränkt ist, redundant.

Definition 2.12. Für $T \in L_b(H)$ heißt die Menge

$$\rho(T) := \{\lambda \in \mathbb{C} \colon T - \lambda \text{ ist invertierbar}\}$$

Resolventenmenge von T. Die Menge

$$\sigma(T) := \rho(T)^c$$

heißt *Spektrum* von T. Weiters nennen wir

$$\sigma_p := \{\lambda \in \mathbb{C} \colon \ker(T - \lambda) \neq \{0\}\}$$

das *Punktspektrum* von T,

$$\sigma_c := \{\lambda \in \mathbb{C} \colon T - \lambda \text{ ist injektiv}, \ \overline{\operatorname{ran}(T - \lambda)} = H, \ \operatorname{ran}(T - \lambda) \neq H\}$$

das *stetige Spektrum* von T und

$$\sigma_r := \{\lambda \in \mathbb{C} \colon T - \lambda \text{ ist injektiv}, \ \overline{\operatorname{ran}(T - \lambda)} \neq H\}$$

das *Residualspektrum* von T.

Bemerkung 2.13. Definitionsgemäß zerfällt das Spektrum eines linearen und beschränkten Operators T in die drei oben definierten Teilmengen des Spektrums. Also gilt

$$\sigma(T) = \sigma_p(T) \dot\cup \sigma_c(T) \dot\cup \sigma_r(T).$$

Es lässt sich zeigen, dass das Spektrum eines linearen und beschränkten Operators T stets nichtleer und kompakt ist (siehe [BKW22, p.127, p.129]). Damit ist die folgende Begriffsbildung sinnvoll.

Definition 2.14. Für $T \in L_b(H)$ heißt

$$r(T) := \max_{\lambda \in \sigma(T)} |\lambda|$$

der *Spektralradius* von T.

Satz 2.15. *Ist $T \in L_b(H)$, so gilt*

$$r(T) = \lim_{k \to \infty} \|T^k\|^{\frac{1}{k}}.$$

Für einen Beweis dieses Satzes verweisen wir auf [BKW22, p.129].

3 Zerlegungssatz

Ziel dieses Abschnitts ist es, einen Zerlegungssatz für m-Isometrien zu beweisen. Wir starten mit der schon in der Einleitung erwähnten Definition von m-Isometrien.

Definition 3.1. Sei $T \in L_b(H)$ und $m \in \mathbb{N}$. T heißt *m-Isometrie*, falls

$$\gamma_m(T) := \sum_{k=0}^{m} (-1)^{m-k} \binom{m}{k} T^{*k} T^k = 0.$$

Weiters setzen wir $\gamma_0(T) = I$.

Lemma 3.2. *Ein $T \in L_b(H)$ ist genau dann eine Isometrie, wenn T eine 1-Isometrie im Sinne von Definition 3.1 ist.*

Beweis. Mit der Linearität des Skalarprodukts und der Adjungiertengleichung $(Tx, y) = (x, T^*y)$ folgt für $x, y \in H$

$$(Tx, Ty) - (x, y) = (T^*Tx, y) - (x, y) = ((T^*T - I)x, y).$$

Aus Lemma 2.9 angewandt auf den Operator $T^*T - I$ folgt die Behauptung. □

Wir fassen noch einige elementare Eigenschaften von m-Isometrien in folgendem Lemma zusammen.

Lemma 3.3. *Sei $T \in L_b(H)$ und M ein abgeschlossener T-invarianter Unterraum, also $T(M) \subseteq M$. Dann gelten die folgenden Aussagen.*

(*i*) *T ist genau dann eine m-Isometrie, wenn für alle $x \in H$*

$$\sum_{k=0}^{m} (-1)^{m-k} \binom{m}{k} \|Tx\|^2 = 0.$$

(*ii*) $T^*\gamma_m(T)T - \gamma_m(T) = \gamma_{m+1}(T)$.

(*iii*) *Jede m-Isometrie ist eine $(m+1)$-Isometrie.*

(*iv*) *$T \restriction_M$ ist eine m-Isometrie.*

Beweis.

ad (i): Mit der Linearität des Skalarprodukts und der Adjungiertengleichung folgt für $x \in H$

$$\begin{aligned}(\gamma_m(T)x, x) &= \sum_{k=0}^{m} (-1)^{m-k} \binom{m}{k} (T^{*k}T^k x, x) \\ &= \sum_{k=0}^{m} (-1)^{m-k} \binom{m}{k} (T^k x, T^k x) \\ &= \sum_{k=0}^{m} (-1)^{m-k} \binom{m}{k} \|Tx\|^2.\end{aligned}$$

Aus Lemma 2.9 angewandt auf den Operator $\gamma_m(T)$ folgt unmittelbar (i).

ad (ii): Für ganze Zahlen $0 \leq k \leq m$ gilt

$$\binom{m+1}{k+1} = \binom{m}{k} + \binom{m}{k+1}, \tag{3.1}$$

wobei wir $\binom{m}{m+1} = 0$ setzen. Damit erhalten wir

$$\begin{aligned}\gamma_{m+1}(T) &= \sum_{k=0}^{m+1} (-1)^{m+1-k} \binom{m+1}{k} T^{*k}T^k \\ &= (-1)^{m+1} I + \sum_{k=1}^{m+1} (-1)^{m+1-k} \binom{m+1}{k} T^{*k}T^k \\ &= (-1)^{m+1} I + \sum_{k=0}^{m} (-1)^{m-k} \binom{m+1}{k+1} T^{*k+1}T^{k+1} \\ &\overset{(3.1)}{=} (-1)^{m+1} I + T^* \underbrace{\left(\sum_{k=0}^{m} (-1)^{m-k} \binom{m}{k} T^{*k}T^k \right)}_{=\gamma_m(T)} T \\ &\quad + \sum_{k=0}^{m-1} (-1)^{m-k} \binom{m}{k+1} T^{*k+1}T^{k+1} \\ &= T^* \gamma_m(T) T + (-1)^{m+1} I + \sum_{k=1}^{m} (-1)^{m-k+1} \binom{m}{k} T^{*k}T^k \\ &= T^* \gamma_m(T) - \gamma_m(T).\end{aligned}$$

ad (iii): Wegen $\gamma_m(T) = 0$ für eine m-Isometrie folgt $\gamma_{m+1}(T) = 0$ sofort aus (ii).

ad (iv): Nach Definition der Einschränkungsabbildung gilt $T\restriction_M = T\iota_M$, wobei ι_M die Einbettungsabbildung von M nach H ist. Weiters existiert aufgrund der Abgeschlossenheit von M nach Lemma 2.3 (iv) die Orthogonalprojektion P_M auf den Unterraum M. Da M T-invariant ist, gilt

$$T\restriction_M = T\iota_M = P_M T\iota_M.$$

Betrachten wir ι_M als Element von $L_b(M,H)$ und P_M als Element von $L_b(H,M)$, so gilt $\iota_M^* = P_M$. Für $T\restriction_M$ als Element von $L_b(M,M)$ folgt daher

$$(T\restriction_M)^* = (P_M T\iota_M)^* = \iota_M^* T^* P_M^* = P_M T^* \iota_M.$$

Induktiv erhalten wir aufgrund von $\iota_M P_M x = x$ für alle $x \in M$ und der T-Invarianz von M, dass

$$(T\restriction_M)^k = P_M T^k \iota_M \text{ und } (T\restriction_M)^{*k} = P_M T^{*k} \iota_M.$$

Weil T eine m-Isometrie ist, folgt

$$\begin{aligned}
\gamma_m(T\restriction_M) &= \sum_{k=0}^{m} (-1)^{m-k} \binom{m}{k} (T\restriction_M)^{*k} (T\restriction_M)^k \\
&= \sum_{k=0}^{m} (-1)^{m-k} \binom{m}{k} P_M T^{*k} \iota_M P_M T^k \iota_M \\
&= P_M \underbrace{\left(\sum_{k=0}^{m} (-1)^{m-k} \binom{m}{k} T^{*k} T^k \right)}_{=\gamma_m(T)} \iota_M = 0.
\end{aligned}$$

Also ist $T\restriction_M$ eine m-Isometrie.

$\square$

Definition 3.4. Für $T \in L_b(H)$ und $k \in \mathbb{N}$ heißt

$$s_T(k) := T^{*k} T^k$$

das *Symbol* von T. Für $k = 0$ setzen wir $s_T(k) = I$.

Definition 3.5. Ist $T \in L_b(H)$ eine m-Isometrie, so heißt

$$\Delta_T := \gamma_{m-1}(T)$$

der *zu T kovariante* Operator.

Lemma 3.6. *Die folgenden Aussagen gelten für $T \in L_b(H)$ und $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.*

(i) $s_T(k) = \sum_{l=0}^{k} \binom{k}{l} \gamma_l(T)$.

(ii) *Ist T eine m-Isometrie, so ist Δ_T ein positiver Operator.*

Beweis. Wir beweisen (i) mit Induktion nach k.

- Induktionsanfang: Für $k = 0$ ist die rechte Seite nach Definition 3.1 gleich der Identität. Nach Definition 3.4 trifft das auch auf die linke Seite zu.

- Induktionsschritt: Mit Lemma 3.3 (ii) und der Identität (3.1) erhalten wir

$$\begin{aligned} s_T(k+1) &= \sum_{l=0}^{k+1} \binom{k+1}{l} \gamma_l(T) = I + \sum_{l=1}^{k+1} \binom{k+1}{l} \gamma_l(T) \\ &= I + \sum_{l=0}^{k} \binom{k+1}{l+1} \gamma_{l+1}(T) \\ &\overset{(3.1)}{=} I + \sum_{l=0}^{k} \binom{k}{l} \gamma_{l+1}(T) + \sum_{l=0}^{k} \binom{k}{l+1} \gamma_{l+1}(T) \\ &\overset{3.3}{=} I + T^* \left(\sum_{l=0}^{k} \binom{k}{l} \gamma_l(T) \right) T - \sum_{l=0}^{k} \binom{k}{l} \gamma_l(T) + \sum_{l=1}^{k} \binom{k}{l} \gamma_l(T) \\ &\overset{IV}{=} T^* s_T(k) T = T^{*k+1} T^{k+1}, \end{aligned}$$

  wobei wir für die vorletzte Gleichheit die Induktionsvoraussetzung benutzt haben.

Für den Beweis von (ii) beachte man, dass für alle ganzen Zahlen $0 \leq l < m-1$

$$\lim_{k \to \infty} \frac{(m-1)!(k-(m-1))!}{l!(k-l)!} = 0.$$

Im Fall $l = m-1$ ist dieser Grenzwert 1. Damit erhalten wir für $x \in H$

$$\begin{aligned} (\gamma_{m-1}(T)x, x) &= \lim_{k \to \infty} \sum_{l=0}^{m-1} \frac{(m-1)!(k-(m-1))!}{l!(k-l)!} (\gamma_l(T)x, x) \\ &= \lim_{k \to \infty} \frac{(m-1)!(k-(m-1))!}{k!} (\sum_{l=0}^{m-1} \binom{k}{l} \gamma_l(T)x, x) \\ &= \lim_{k \to \infty} \frac{(m-1)!(k-(m-1))!}{k!} (s_T(k)x, x) \\ &= \lim_{k \to \infty} \frac{(m-1)!(k-(m-1))!}{k!} (T^{*k}T^k x, x) \\ &= \lim_{k \to \infty} \frac{(m-1)!(k-(m-1))!}{k!} \|T^k x\|^2. \end{aligned}$$

Also ist $(\Delta_T x, x)$ Grenzwert einer nichtnegativen reellwertigen Folge und damit selbst nichtnegativ. □

Lemma 3.7. *Ist $T \in L_b(H)$ eine m-Isometrie mit $m > 1$ und M ein abgeschlossener, T-invarianter Unterraum von H, so gelten die folgenden Aussagen.*

(i) $\ker \Delta_T$ *ist ein abgeschlossener, T-invarianter Unterraum, wobei $T \restriction_{\ker \Delta_T}$ eine $(m-1)$-Isometrie bildet.*

(ii) Ist $T\restriction_M$ eine $(m-1)$-Isometrie, so muss $M \subseteq \ker \Delta_T$ gelten.

Beweis. Da T eine m-Isometrie ist, erhalten wir aus Lemma 3.3 (*ii*), dass $T^*\Delta_T T^* - \Delta_T = 0$, weshalb für $x \in \ker \Delta T$

$$(\Delta_T Tx, Tx) = (T^*\Delta_T Tx, x) = (\Delta_T x, x) = 0.$$

Da Δ_T ein positiver Operator ist, haben wir $Tx \in \ker \Delta_T$ gemäß Korollar 2.8. Folglich gilt nach Lemma 3.3 (*iv*)

$$\gamma_{m-1}(T\restriction_{\ker \Delta_T}) = 0,$$

weshalb die Einschränkung von T auf $\ker \Delta_T$ eine $(m-1)$-Isometrie darstellt.

Ist $T\restriction_M$ eine $(m-1)$-Isometrie und $x \in M$, dann gilt

$$\begin{aligned}(\Delta_T x, x) &= (\gamma_{m-1}(T)x, x) \\ &= (P_M \gamma_{m-1}(T)x, x) = (\gamma_{m-1}(T\restriction_M)x, x) = 0,\end{aligned}$$

womit $x \in \ker \Delta_T$; siehe Korollar 2.8. □

Definition 3.8. Ein Unterraum M von H heißt *T-reduzibel*, wenn $T(M) \subseteq M$ und $T(M^\perp) \subseteq M^\perp$.

Bevor wir den folgenden Satz beweisen, wollen wir noch das Lemma von Zorn in Erinnerung rufen:

Lemma 3.9. *Sei $\mathcal{C}$ eine nichtleere Halbordnung. Besitzt jede nichtleere total geordnete Teilmenge $\mathcal{K}$ von $\mathcal{C}$ eine obere Schranke, so hat $\mathcal{C}$ ein maximales Element.*

Satz 3.10. *Ist $T \in L_b(H)$ eine m-Isometrie mit $m > 1$, so hat die Menge $\mathcal{C}$ aller abgeschlossenen, T-reduziblen Unterräume mit der Eigenschaft, dass $T\restriction_M$ eine $(m-1)$-Isometrie ist, ein größtes Element.*

Beweis. Wir wollen das Lemma von Zorn auf $\mathcal{C}$ versehen mit $\subseteq$ anwenden.

- Offensichtlich gilt $\{0\} \in \mathcal{C}$, womit $\mathcal{C} \neq \emptyset$.
- Sei $\emptyset \neq \mathcal{K} \subseteq \mathcal{C}$ total geordnet. Nach Konstruktion ist

  $$N := \overline{\operatorname{span} \bigcup_{U \in \mathcal{K}} U}$$

  eine obere Schranke von $\mathcal{K}$. Wir müssen noch zeigen, dass $N \in \mathcal{C}$. Wegen der Beschränktheit von T und da die Elemente aus $\mathcal{K}$ T-reduzibel sind, gilt

  $$T(N) = T(\overline{\operatorname{span} \bigcup_{U \in \mathcal{K}} U}) \subseteq \overline{\operatorname{span} \bigcup_{U \in \mathcal{K}} T(U)} \subseteq \overline{\operatorname{span} \bigcup_{U \in \mathcal{K}} U} = N.$$

Mit Lemma 2.3 (i) folgt

$$T(N^\perp) = T(\overline{\operatorname{span} \bigcup_{U \in \mathcal{K}} U}^\perp) = T(\bigcap_{U \in \mathcal{K}} U^\perp)$$
$$\subseteq \bigcap_{U \in \mathcal{K}} T(U^\perp) \subseteq \bigcap_{U \in \mathcal{K}} U^\perp = \overline{\operatorname{span} \bigcup_{U \in \mathcal{K}} U}^\perp = N^\perp,$$

womit sich N als T-reduzibel herausstellt.

Für die Eigenschaft $(m-1)$-Isometrie zu sein sei bemerkt, dass für alle $U \in \mathcal{K}$ nach Lemma 3.7 (ii) U eine Teilmenge von $\ker \Delta_T$ ist. Aufgrund der Abgeschlossenheit von $\ker \Delta_T$ folgt

$$N = \overline{\operatorname{span} \bigcup_{U \in \mathcal{K}} U} \subseteq \ker \Delta_T.$$

Wegen des ersten Punkts von Lemma 3.7 ist $T \restriction_{\ker \Delta_T}$ eine $(m-1)$-Isometrie und wegen

$$T \restriction_{\ker \Delta_T} \restriction_N = T \restriction_N$$

ist auch $T \restriction_N$ eine $(m-1)$-Isometrie. Also gilt $N \in \mathcal{C}$.

Mit dem Lemma von Zorn folgt die Existenz eines maximalen Elements in $\mathcal{C}$. Wir werden dieses für den weiteren Verlauf des Beweises mit M bezeichnen.

Wir zeigen noch, dass für $M_1, M_2 \in \mathcal{C}$

$$\overline{M_1 + M_2} \in \mathcal{C}. \tag{3.2}$$

- Aus der Beschränktheit von T und der T-Reduzibilität von M_1, M_2 folgt

$$T(\overline{M_1 + M_2}) \subseteq \overline{T(M_1 + M_2)} = \overline{T(M_1) + T(M_2)} \subseteq \overline{M_1 + M_2}$$

sowie

$$T(\overline{M_1 + M_2}^\perp) \subseteq T(M_i^\perp) \subseteq M_i^\perp$$

für $i \in \{1, 2\}$, womit

$$T(\overline{M_1 + M_2}^\perp) \subseteq M_1^\perp \cap M_2^\perp \subseteq (M_1 + M_2)^\perp = \overline{M_1 + M_2}^\perp.$$

- Nach Lemma 3.7 (ii) gilt

$$M_1 \subseteq \ker \Delta_T \text{ und } M_2 \subseteq \ker \Delta_T,$$

womit wieder wegen der Abgeschlossenheit von $\ker \Delta_T$

$$\overline{M_1 + M_2} \subseteq \ker \Delta_T.$$

Da nach dem ersten Punkt von Lemma 3.7 $T \restriction_{\ker \Delta_T}$ eine $(m-1)$-Isometrie und $\overline{M_1 + M_2}$ ein $T \restriction_{\ker \Delta_T}$-invarianter Unterraum ist, ist auch $T \restriction_{\overline{M_1+M_2}}$ eine $(m-1)$-Isometrie.

Da für $M_1, M_2 \in \mathcal{C}$ mit maximalem M_1 auch $\overline{M_1 + M_2} \in \mathcal{C}$, folgt aus der Maximalität

$$M_1 = \overline{M_1 + M_2} \supseteq M_2,$$

womit M_1 das größte Element von $\mathcal{C}$ ist. □

Definition 3.11. Sei $T \in L_b(H)$ eine m-Isometrie mit $m > 1$ und sei $l \in \mathbb{N}, l < m$. Wir nennen T *l-echt*, wenn für keinen abgeschlossenen und T-reduziblen Unterraum $M \neq \{0\}$ von H die Einschränkung $T\restriction_M$ eine l-Isometrie ist. T heißt *echt*, wenn T $(m-1)$-echt ist.

Wir definieren noch alle 1-Isometrien als echt.

Lemma 3.12. *Seien $T \in L_b(H)$, H_1 ein T-reduzibler abgeschlossener Unterraum von H und H_2 ein $T\restriction_{H_1}$-reduzibler abgeschlossener Unterraum von H_1. Dann ist H_2 schon T-reduzibel.*

Beweis. H_2 ist T-invariant, da $T(H_2) = T\restriction_{H_1}(H_2) \subseteq H_2$. Die T-Invarianz des orthogonalen Komplements von H_2 folgt aus der $T\restriction_{H_1}$-Reduzibilität von H_2 und der T-Reduzibilität von H_1:

$$\begin{aligned}
T(H_2^\perp) &= T((H_2^\perp \cap H_1) + (H_2^\perp \cap H_1^\perp)) = T(H_2^\perp \cap H_1) + T(H_2^\perp \cap H_1^\perp)\\
&= T\restriction_{H_1}(H_2^\perp \cap H_1) + T(H_1^\perp) \subseteq H_2^\perp \cap H_1 + H_1^\perp\\
&\subseteq (H_2^\perp \cap H_1) + H_2^\perp \subseteq H_2^\perp.
\end{aligned}$$

□

Satz 3.13 (Zerlegungssatz)**.** *Für eine m-Isometrie $T \in L_b(H)$ existieren eindeutige abgeschlossene Unterräume $H_1 \dots H_m$ mit*

$$H = H_1 \oplus \cdots \oplus H_m$$

so, dass H_l T-reduzibel und $T\restriction_{H_l}$ eine echte l-Isometrie ist.

Beweis. Wegen Satz 3.10 existiert ein größter abgeschlossener und T-reduzibler Unterraum M_m mit der Eigenschaft, dass $T\restriction_{M_m}$ eine $(m-1)$-Isometrie ist. Wir setzen $H_m := M_m^\perp$. Ist $\{0\} \neq M \subseteq H_m$ ein $T\restriction_{H_m}$-reduzibler und abgeschlossener Unterraum von H, so erhalten wir aus Lemma 3.12, dass M T-reduzibel ist. Wäre $T\restriction_M$ eine $(m-1)$-Isometrie, so müsste wegen Satz 3.10 M in $H_m^\perp$ enthalten sein, was $\{0\} \neq M \subseteq H_m$ widerspricht. Wir fassen zusammen:

- H_m ist T-reduzibel,
- $T\restriction_{H_m}$ ist eine echte m-Isometrie,
- $T\restriction_{H_m^\perp}$ ist eine $(m-1)$-Isometrie.

Wir wiederholen das eben beschriebene Vorgehen mit dem Hilbertraum $H_m^\perp$ und der $(m-1)$-Isometrie $T\restriction_{H_m^\perp}$.

Wegen Satz 3.10, diesmal angewandt auf den Hilbertraum $H_m^\perp$ und den Operator $T\restriction_{H_m^\perp}$, existiert ein größter abgeschlossener und $T\restriction_{H_m^\perp}$-reduzibler Unterraum M_{m-1} von $H_m^\perp$ mit der Eigenschaft, dass $T\restriction_{M_{m-1}}$ eine $(m-2)$-Isometrie abgibt. Wir setzen $H_{m-1} := M_{m-1}^{\perp} \cap H_m^{\perp}$.

Aus der $T\restriction_{H_m^{\perp}}$-Reduzibilität von M_{m-1} folgt sofort die $T\restriction_{H_m^{\perp}}$-Reduzibilität von H_{m-1}. Jetzt ist H_{m-1} ein $T\restriction_{H_m^{\perp}}$-reduzibler Unterraum des T-reduziblen Unterraums $H_m^{\perp}$, womit nach Lemma 3.12 H_{m-1} T-reduzibel ist.

Wir zeigen, dass $T\restriction_{H_{m-1}}$ eine echte $(m-1)$-Isometrie ist. Sei dazu $\{0\} \neq M \subseteq H_{m-1}$ ein abgeschlossener und $T\restriction_{H_{m-1}}$-reduzibler Unterraum. Nach Lemma 3.12 ist M ein $T\restriction_{H_m^{\perp}}$-reduzibler Unterraum. Wäre $T\restriction_M$ eine $(m-2)$-Isometrie, so müsste $M \subseteq M_{m-1} = H_{m-1}^{\perp} \cap H_m^{\perp}$ gelten, was $\{0\} \neq M \subseteq H_{m-1}$ widerspricht. Wir fassen zusammen:

- H_{m-1} ist T-reduzibel,
- $T\restriction_{H_{m-1}}$ ist eine echte $(m-1)$-Isometrie,
- $T\restriction_{H_{m-1}^{\perp} \cap H_m^{\perp}}$ ist eine $(m-2)$-Isometrie.

Iteriertes Vorgehen liefert eine orthogonale Zerlegung

$$H = H_1 \oplus \cdots \oplus H_m$$

mit den Eigenschaften

$$H_l \text{ ist } T\text{-reduzibel und } T\restriction_{H_l} \text{ ist eine echte } l\text{-Isometrie}$$

für $l \in \{1 \dots m\}$. Die Eindeutigkeit folgt aus der Eindeutigkeitsaussage in Satz 3.10 und nach Konstruktion. $\square$

4 Spektrum von m-Isometrien

Folgende Begriffsbildung wird von Nutzen sein, wenn wir das Spektrum von m-Isometrien beschreiben wollen.

Definition 4.1. Ist $T \in L_b(H)$, so nennen wir

$$\sigma_{ap}(T) := \{\lambda \in \mathbb{C} \colon \exists (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ aus } H, \|x_n\| = 1 \colon (T-\lambda)x_n \to 0\}$$

das *approximative Punktspektrum* von T.

Lemma 4.2. *Sei $T \in L_b(H)$. Ein $\lambda \in \mathbb{C}$ liegt genau dann nicht im approximativen Punktspektrum, wenn $T - \lambda$ nach unten beschränkt ist, d.h.*

$$\lambda \notin \sigma_{ap}(T) \iff \exists c > 0 \forall x \in H \colon \|(T-\lambda)x\| \geq c\|x\|. \tag{4.1}$$

Beweis. Ist $T - \lambda$ nach unten beschränkt, dann gilt $\|(T-\lambda)x\| \geq c$ für alle $x \in H$ mit $\|x\| = 1$, weshalb für jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bestehend aus Einheitsvektoren $(T-\lambda)x_n \not\to 0$.

Ist umgekehrt $T - \lambda$ nicht nach unten beschränkt, so gibt es für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein $x_n \in H$ mit

$$\|(T-\lambda)x_n\| < \frac{1}{n}\|x_n\|.$$

Da wir die x_n normiert wählen können, folgt $\lambda \in \sigma_{ap}(T)$. □

Wir fassen einige Eigenschaften des approximativen Punktspektrums zusammen.

Satz 4.3. *Für $T \in L_b(H)$ gilt*

$$\partial\sigma(T) \subseteq \sigma_{ap}(T) \subseteq \sigma(T).$$

Ein Beweis ist etwa in [FM16, p.67] zu finden.

Lemma 4.4. *Sei $T \in L_b(H)$. Im Fall $\lambda \notin \sigma_{ap}(T)$ ist $T - \lambda$ injektiv und* $\operatorname{ran}(T-\lambda)$ *abgeschlossen. Weiters gilt*

$$\sigma_p(T) \cup \sigma_c(T) \subseteq \sigma_{ap}(T). \tag{4.2}$$

Beweis. Ist $T - \lambda$ nicht injektiv, so gibt es ein $x \in H, \|x\| = 1$ mit $(T-\lambda)x = 0$. Somit gilt $(T-\lambda)x_n \to 0$ für die konstante Folge $x_n := x$, also $\lambda \in \sigma_{ap}(T)$.

Für die Abgeschlossenheit von $\operatorname{ran}(T-\lambda)$ sei $((T-\lambda)y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge aus $\operatorname{ran}(T-\lambda)$. Wegen $\lambda \notin \sigma_{ap}(T)$ ist $T - \lambda$ gemäß Lemma 4.2 nach unten beschränkt. Also ist $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in H und damit $y_n \to y \in H$. Mit der Beschränktheit von $T - \lambda$ folgt $(T-\lambda)y_n \to (T-\lambda)y$. Wegen $(T-\lambda)y \in \operatorname{ran}(T-\lambda)$ erweist sich $\operatorname{ran}(T-\lambda)$ als vollständig und infolge als abgeschlossen.

Um (4.2) zu zeigen, stellen wir zunächst fest, dass (4.2) zu

$$\sigma_{ap}(T)^c \subseteq \rho(T) \cup \sigma_r(T)$$

äquivalent ist. Ist also $\lambda \notin \sigma_{ap}(T)$, so wissen wir, dass $T - \lambda$ injektiv ist. Wir unterscheiden zwei Fälle:

1. $T - \lambda$ ist surjektiv und damit auch bijektiv, weshalb in diesem Fall $\lambda \in \rho(T)$.
2. $T - \lambda$ ist nicht surjektiv. Wegen der Abgeschlossenheit von $\operatorname{ran}(T - \lambda)$ gilt

   $$\overline{\operatorname{ran}(T-\lambda)} = \operatorname{ran}(T-\lambda) \subsetneq H,$$

   wodurch $\lambda \in \sigma_r(T)$.

□

Damit haben wir alle Mittel bereitgestellt, um das Spektrum von m-Isometrien beschreiben zu können. Ein grobes Bild des Spektrums von m-Isometrien liefert der folgende Satz.

Satz 4.5. *Ist $T \in L_b(H)$ eine m-Isometrie, dann gelten die folgenden Aussagen:*

(i) $\sigma(T) \subseteq \overline{\mathbb{D}}$.

(ii) $\sigma_{ap}(T) \subseteq \partial\mathbb{D}$.

Beweis.

ad (i): Wir zeigen $r(T) \leq 1$. Für $x \in H$ und $k \in \mathbb{N}$ folgt aus der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung

$$\|T^k x\|^2 = (T^k x, T^k x)^2 = (T^{*k}T^k x, x)^2 \leq \|T^{*k}T^k\| \|x\|^2.$$

Also ist $\|T^k\| \leq \sqrt{\|T^{*k}T^k\|}$ und folglich

$$\begin{aligned}
\|T^k\|^{\frac{1}{k}} &\leq \|T^{*k}T^k\|^{\frac{1}{2k}} = \|s_T(k)\|^{\frac{1}{2k}} = \Big\| \sum_{l=0}^{k} \binom{k}{l} \gamma_l(T) \Big\|^{\frac{1}{2k}} \\
&\leq \left(\sum_{l=0}^{k} \binom{k}{l} \|\gamma_l(T)\| \right)^{\frac{1}{2k}} \leq \left(\sum_{l=0}^{m-1} \binom{k}{l} \|\gamma_l(T)\| \right)^{\frac{1}{2k}} \\
&= \left(\sum_{l=0}^{m-1} \frac{k!}{(k-l)!} \frac{1}{l!} \|\gamma_l(T)\| \right)^{\frac{1}{2k}} \leq \left(\underbrace{\sum_{l=0}^{m-1} k^l \frac{1}{l!} \|\gamma_l(T)\|}_{p(k)} \right)^{\frac{1}{2k}}, \qquad (4.3)
\end{aligned}$$

wobei $p(k) = a_{m-1}k^{m-1} + \cdots + a_1 k + 1$ ein Polynom $(m-1)$-ten Grades in k mit positiven Koeffizienten a_l ist. Wegen

$$\begin{aligned} 1 \leq p(k)^{\frac{1}{k}} &\leq (a_{m-1}k^{m-1} + \cdots + a_1 k^{m-1} + k^{m-1})^{\frac{1}{k}} \\ &\leq (k^{\frac{1}{k}})^{m-1}(a_{m-1} + \cdots + a_1 + 1) \to 1 \end{aligned}$$

konvergiert die rechte Seite in (4.3) gegen 1 und infolge $r(T) \leq 1$.

ad (ii): Aus $\lambda \in \sigma_{ap}(T)$ folgt die Existenz einer Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, \|x_n\| = 1$ mit $(T-\lambda)x_n \to 0$. Wir zeigen mittels Induktion nach k, dass $(T^k - \lambda^k)x_n \to 0$.

- Induktionsanfang: Für $k = 1$ gilt nach Voraussetzung $(T-\lambda)x_n \to 0$.
- Induktionsschritt: Es gilt

$$\begin{aligned} \|(T^{k+1} - \lambda^{k+1})x_n\| &= \|(T^{k+1} - T\lambda^k + T\lambda^k - \lambda^{k+1})x_n\| \\ &\leq \|T(T^k - \lambda^k)x_n\| + \|\lambda^k(T-\lambda)x_n\| \\ &\leq \|T\|\|(T^k - \lambda^k)x_n\| + |\lambda|^k\|(T-\lambda)x_n\|. \end{aligned}$$

Die rechte Seite konvergiert nach Induktionsvoraussetzung und Induktionsanfang gegen 0.

Weiters gilt für $k \in \mathbb{N}$ wegen dem gerade bewiesenen einerseits

$$\begin{aligned} \|T^k x_n\|^2 - |\lambda|^{2k} &\leq (\|(T^k - \lambda^k)x_n\| + |\lambda|^k)^2 - |\lambda|^{2k} \\ &= \|(T^k - \lambda^k)x_n\|^2 + 2\|(T^k - \lambda^k)x_n\||\lambda|^k \to 0 \end{aligned}$$

und andererseits

$$\begin{aligned} |\lambda|^{2k} - \|T^k x_n\|^2 &= \|\lambda^k x_n\|^2 - \|T^k x_n\|^2 \\ &\leq (\|(T^k - \lambda^k)x_n\| + \|T^k x_n\|)^2 - \|T^k x_n\|^2 \\ &\leq \|(T^k - \lambda^k)x_n\|^2 - 2\|(T^k - \lambda^k)x_n\|\|T^k\| \to 0. \end{aligned}$$

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} (\gamma_m(T)x_n, x_n) &= \sum_{k=0}^{m} (-1)^{m-k}\binom{m}{k}(T^{*k}T^k x_n, x_n) \\ &= \sum_{k=0}^{m} (-1)^{m-k}\binom{m}{k}\|T^k x_n\|^2 \to \sum_{k=0}^{m} (-1)^{m-k}\binom{m}{k}|\lambda|^{2k}. \end{aligned}$$

Da T eine m-Isometrie ist, gilt $(\gamma_m(T)x_n, x_n) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Aus dem binomischen Lehrsatz folgt

$$0 = \sum_{k=0}^{m} (-1)^{m-k}\binom{m}{k}|\lambda|^{2k} = (1 - |\lambda|^2)^m,$$

also $|\lambda| = 1$.

□

Korollar 4.6. *Ist $T \in L_b(H)$ eine m-Isometrie, dann gelten die folgenden Aussagen:*

(i) *T ist injektiv.*

(ii) $\operatorname{ran} T$ *ist abgeschlossen.*

(iii) *Es gilt entweder $\sigma(T) = \overline{\mathbb{D}}$ oder $\sigma(T) \subseteq \partial\mathbb{D}$.*

Beweis. Wegen Satz 4.5 *(ii)* gilt $0 \notin \sigma_{ap}(T)$. Die ersten beiden Aussagen folgen damit aus Lemma 4.4. Für den Beweis der dritten Aussage bemerken wir zunächst, dass wegen Satz 4.3 und Satz 4.5 *(ii)*

$$\partial\sigma(T) \subseteq \sigma_{ap}(T) \subseteq \partial\mathbb{D}. \tag{4.4}$$

Angenommen, $\sigma(T) \neq \overline{\mathbb{D}}$ und $\sigma(T) \nsubseteq \partial\mathbb{D}$. Wegen Satz 4.5 *(i)* muss $\sigma(T) \subsetneq \overline{\mathbb{D}}$ gelten. Also gibt es ein $\mu \in \mathbb{D}$, welches nicht im Spektrum liegt. Wäre nämlich $\mathbb{D}$ ganz in $\sigma(T)$ enthalten, so müsste wegen der Kompaktheit des Spektrums $\overline{\mathbb{D}} \subseteq \sigma(T)$ im Widerspruch $\sigma(T) \subsetneq \overline{\mathbb{D}}$ zu gelten. Andererseits gibt es wegen $\sigma(T) \nsubseteq \partial\mathbb{D}$ ein $\lambda \in \mathbb{D}$, welches auch im Spektrum liegt. Die Abbildungen

$$\begin{aligned} \alpha\colon [0,1] &\to \mathbb{D} \\ t &\mapsto \lambda + (1-t)\mu \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} d_{\sigma(T)}\colon \mathbb{D} &\to [0,\infty) \\ \nu &\mapsto d(\sigma(T),\nu), \end{aligned}$$

wobei $d(\sigma(T),\nu) := \inf\{|s-\nu|\colon s \in \sigma(T)\}$, und damit auch $h := d_{\sigma(T)} \circ \alpha$ sind stetig. Die kompakte Menge $\{t \in [0,1]\colon h(t) = 0\}$ enthält 1 und hat daher ein Minimum $t_0 > 0$. Wegen der Kompaktheit von $\sigma(T)$ ist $\alpha(t_0) \in \sigma(T)$. Weiters enthält für jedes $\delta > 0$ die Umgebung $U_\delta(\alpha(t_0)) := \{s \in \mathbb{C}\colon |s - \alpha(t_0)| < \delta\}$ einen Punkt $\nu \in \mathbb{D}$, der nicht im Spektrum liegt, denn

- für $\delta \leq |\mu - \alpha(t_0)|$ können wir $\nu := \alpha(t_1)$ mit $t_1 \in [0, t_0)$ und $|\alpha(t_1) - \alpha(t_0)| = \delta/2$ wählen.
- für $\delta > |\mu - \alpha(t_0)|$ erfüllt $\nu = \mu$ das Gewünschte.

Es folgt $\alpha(t_0) \in \partial\sigma(T)$ mit $|\alpha(t_0)| < 1$, was (4.4) widerspricht. □

Da ein linearer und beschränkter Operator T genau dann bijektiv ist, wenn $0 \notin \sigma(T)$ erhalten wir aus Korollar 4.6 *(iii)* das folgende Resultat.

Korollar 4.7. *Sei $T \in L_b(H)$ eine m-Isometrie. Ist T bijektiv, so gilt $\sigma(T) \subseteq \partial\mathbb{D}$. Andernfalls haben wir $\sigma(T) = \overline{\mathbb{D}}$.*

Korollar 4.8. *Sei $T \in L_b(H)$ eine m-Isometrie. Ist auch T^* eine m-Isometrie, so folgt $\sigma(T) \subseteq \partial\mathbb{D}$.*

Beweis. Wir beweisen die Aussage durch Kontraposition. Aus $\sigma(T) \nsubseteq \partial\mathbb{D}$ folgt wegen Korollar 4.6 (*iii*) $\sigma(T) = \overline{\mathbb{D}}$, womit auch $0 \in \sigma(T)$. Nach Satz 4.5 (*ii*) gilt $0 \notin \sigma_{ap}(T)$. Also folgt $0 \in \sigma_r(T)$ aus Lemma 4.4, womit $\overline{\operatorname{ran} T} \neq H$ und infolge

$$\ker T^* = \overline{\operatorname{ran} T}^{\perp} \supsetneq \{0\}.$$

Somit ist 0 ein Eigenwert von T^* und daher in $\sigma_{ap}(T^*)$ enthalten. Wegen Satz 4.5 (*ii*) kann T^* keine m-Isometrie sein. □

5 Gewichtete Shiftoperatoren

Wir wollen in diesem Abschnitt eine Klasse von Operatoren untersuchen, welche unter gewissen Voraussetzungen m-isometrisch sind. In diesem Abschnitt ist H immer ein unendlichdimensionaler, separabler Hilbertraum. Für eine Orthonormalbasis $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von H und eine Folge $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus $\mathbb{C}$ definieren wir auf der Menge $M := \operatorname{span}\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ den linearen Operator

$$\begin{aligned}\hat{S}\colon M &\to H\\ e_n &\mapsto w_n e_{n+1}.\end{aligned}$$

Lemma 5.1. *Sei $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Orthonormalbasis von H und $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus $\mathbb{C}$. Der lineare Operator $\hat{S}$ ist genau dann beschränkt, wenn die Folge $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt ist. In dem Fall gilt $\|\hat{S}\| = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}}|w_n|$.*

Beweis. Sei $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ durch C beschränkt und $x = \sum_{n=1}^N c_n e_n \in M$ mit $c_i \in \mathbb{C}$ für $i = 1,\dots,N$. Aus dem Satz des Pythagoras folgt

$$\begin{aligned}\|\hat{S}x\|^2 &= \|\hat{S}\left(\sum_{n=1}^N c_n e_n\right)\|^2 = \|\sum_{n=1}^N c_n \hat{S}e_n\|^2 = \|\sum_{n=1}^N c_n w_n e_{n+1}\|^2\\ &= \sum_{n=1}^N |w_n|^2\|c_n e_{n+1}\|^2 \leq C^2\sum_{n=1}^N \|c_n e_{n+1}\|^2 = C^2\sum_{n=1}^N\|c_n e_n\|^2\\ &= C^2\|\sum_{n=1}^N c_n e_n\|^2 = C^2\|x\|^2,\end{aligned}$$

wodurch $\|\hat{S}\| \leq \sup\limits_{n\in\mathbb{N}}|w_n|$. Wegen

$$\|\hat{S}\| = \sup_{y\in M, \|y\|=1}\|\hat{S}y\| \geq \|\hat{S}e_n\| = \|w_n e_{n+1}\| = |w_n|$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $\|\hat{S}\| = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}}|w_n|$. □

Wir erinnern an folgenden Fortsetzungssatz:

Satz 5.2. *Seien X, Y normierte Räume und sei Y vollständig. Sei D ein dichter Unterraum von X und T eine lineare und beschränkte Abbildung von D nach Y. Dann existiert eine eindeutige lineare und beschränkte Fortsetzung von T auf ganz X.*

Für einen Beweis verweisen wir auf [BKW22, p.36].

Da M ein dichter Unterraum von H ist, können wir den Fortsetzungssatz auf den beschränkten Operator $\hat{S}$ anwenden und erhalten

Korollar 5.3. *Sei $\hat{S}$ wie zu Beginn des Abschnitts mit beschränkter Folge $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus $\mathbb{C}$ definiert. Dann hat $\hat{S}$ eine eindeutige lineare und beschränkte Fortsetzung S, welche von H nach H abbildet.*

Definition 5.4. Sei $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Orthonormalbasis von H und $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge aus $\mathbb{C}$. Wir nennen die eindeutige Fortsetzung S von $\hat{S}$ aus Korollar 5.3 den *unilateralen gewichteten Shiftoperator* mit *Gewichten* $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Als Abbildung von einem Hilbertraum in sich selbst hat S auch eine Adjungierte.

Lemma 5.5. *Sei S ein unilateraler gewichteter Shiftoperator auf H mit Gewichten $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Der lineare Operator $\hat{R}\colon M \to H$*

$$\hat{R} = \begin{cases} 0 & \textit{für } n = 1 \\ \overline{w}_{n-1} e_{n-1} & \textit{sonst} \end{cases} \tag{5.1}$$

ist beschränkt. Für die nach Satz 5.2 existerende, eindeutige beschränkte Fortsetzung R gilt $R = S^*$.

Beweis. Mit $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}}|w_n| = C$ und $x = \sum_{n=1}^N c_n e_n \in M$ mit $c_i \in \mathbb{C}$ für $i = 1, \dots, N$ folgt

$$\begin{aligned} \|\hat{R}x\|^2 &= \|\hat{R}\left(\sum_{n=1}^N c_n e_n\right)\|^2 = \|\sum_{n=1}^N c_n \hat{R} e_n\|^2 = \|\sum_{n=2}^N c_n \overline{w}_{n-1} e_{n-1}\|^2 \\ &= \sum_{n=2}^N |w_{n-1}|^2 \|c_n e_{n-1}\|^2 \leq C^2 \sum_{n=2}^N \|c_n e_{n-1}\|^2 = C^2 \sum_{n=2}^N \|c_n e_n\|^2 \\ &\leq C^2 \|\sum_{n=1}^N c_n e_n\|^2 = C^2 \|x\|^2. \end{aligned}$$

Also ist $\hat{R}$ beschränkt. Wir wollen

$$(\hat{S}x, y) = (x, \hat{R}y)$$

für alle $x, y \in M$ zeigen. Wegen der Linearität des Skalarprodukts reicht es, die Aussage für $e_n, e_m \in \{e_j : j \in \mathbb{N}\}$ nachzuweisen. Es gilt

$$(\hat{S}e_n, e_m) = (w_n e_{n+1}, e_m) = w_n(e_{n+1}, e_m) = \begin{cases} 0 & \text{für } n+1 \neq m, \\ w_n & \text{für } n+1 = m. \end{cases}$$

Für $m = 1$ gilt $(e_n, \hat{R}e_m) = 0$. Im Falle $m > 1$ erhalten wir

$$(e_n, \hat{R}e_m) = (e_n, \overline{w}_{m-1} e_{m-1}) = w_{m-1}(e_n, e_{m-1}) = \begin{cases} 0 & \text{für } n \neq m-1, \\ w_{m-1} & \text{für } n = m-1. \end{cases}$$

Also gilt $(Sx, y) = (x, Ry)$ auf dem dichten Unterraum M. Aus Stetigkeitsgründen muss dann $(Sx, y) = (x, Ry)$ für alle $x, y \in H$ zutreffen. □

Korollar 5.6. *Ist S ein unilateraler gewichteter Shiftoperator auf H mit Gewichten $(w_j)_{j\in\mathbb{N}}$, dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}$ und $k \in \mathbb{N}$*

$$S^k e_n = \left(\prod_{l=n}^{k+n-1} w_l\right) e_{n+k}, \tag{5.2}$$

$$S^{*k} e_n = \begin{cases} 0 & \text{für } n \leq k, \\ \left(\prod_{l=n-k}^{n-1} \overline{w}_l\right) e_{n-k} & \text{für } n \geq k+1, \end{cases} \tag{5.3}$$

und

$$S^{*k} S^k e_n = \left(\prod_{l=n}^{k+n-1} |w_l|^2\right) e_n. \tag{5.4}$$

Beweis. Wir zeigen die ersten beiden Formeln mit Induktion nach k:

Für $k = 1$ gilt Formel (5.2) nach Definition von S. Gilt (5.2) für $k \in \mathbb{N}$, so folgt

$$S^{k+1} e_n = S S^k e_n = \left(\prod_{l=n}^{k+n-1} w_l\right) S e_{n+k} = \left(\prod_{l=n}^{k+n-1} w_l\right) w_{n+k} e_{n+k+1} = \left(\prod_{l=n}^{k+n} w_l\right) e_{n+k+1},$$

also (5.2) für $k + 1$.

Für $k = 1$ gilt (5.3) nach Definition von S^*. Im Induktionsschritt machen wir eine Fallunterscheidung:

- $n \leq k$: Nach Induktionsvoraussetzung gilt

$$S^{*k+1} e_n = S^* S^{*k} e_n = 0.$$

- $n = k + 1$: Wieder gilt nach Induktionsvoraussetzung

$$S^{*k+1} e_n = S^* S^{*k} e_n = \left(\prod_{l=n-k}^{n-1} \overline{w}_l\right) S^* \underbrace{e_{n-k}}_{e_1} = 0.$$

- $n > k + 1$: Es gilt

$$\begin{aligned} S^{*k+1} e_n = S^* S^{*k} e_n &= \left(\prod_{l=n-k}^{n-1} \overline{w}_l\right) S^* e_{n-k} = \left(\prod_{l=n-k}^{n-1} \overline{w}_l\right) \overline{w}_{n-k-1} e_{n-k-1} \\ &= \left(\prod_{l=n-k-1}^{n-1} \overline{w}_l\right) e_{n-k-1}. \end{aligned}$$

Aus (5.2) und (5.3) erhalten wir schließlich (5.4):

$$S^{*k} S^k e_n = \left(\prod_{l=n}^{k+n-1} w_l\right) S^{*k} e_{n+k} = \left(\prod_{l=n}^{k+n-1} w_l\right) \left(\prod_{l=n}^{k+n-1} \overline{w}_l\right) e_n = \left(\prod_{l=n}^{k+n-1} |w_l|^2\right) e_n.$$

□

Lemma 5.7. *Sei S ein unilateraler gewichteter Shiftoperator auf H mit Gewichten $(w_j)_{j\in\mathbb{N}}$.*

(i) *Ist S eine m-Isometrie, so gilt $w_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$.*

(ii) *S ist genau dann eine m-Isometrie, wenn für alle $n \in \mathbb{N}$*

$$\sum_{k=0}^{m}(-1)^{m-k}\binom{m}{k}\left(\prod_{l=n}^{k+n-1}|w_l|^2\right) = 0. \tag{5.5}$$

Beweis.

ad (i): Ist S m-isometrisch und gäbe es ein $\tilde{n} \in \mathbb{N}$ mit $w_{\tilde{n}} = 0$, so würde $e_{\tilde{n}} \in \ker S$ folgen, also S nicht injektiv sein. Nach Lemma 4.6 sind m-Isometrien jedoch stets injektiv.

ad (ii): Sei $n \in \mathbb{N}$. Wegen Korollar 5.6 gilt

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{m}(-1)^{m-k}\binom{m}{k}\|S^k e_n\|^2 &= \sum_{k=0}^{m}(-1)^{m-k}\binom{m}{k}(S^{*k}S^k e_n, e_n) \\ &= \sum_{k=0}^{m}(-1)^{m-k}\binom{m}{k}(\left(\prod_{l=n}^{k+n-1}|w_l|^2\right) e_n, e_n) \\ &= \sum_{k=0}^{m}(-1)^{m-k}\binom{m}{k}\left(\prod_{l=n}^{k+n-1}|w_l|^2\right).\end{aligned} \tag{5.6}$$

Ist S eine m-Isometrie, so gilt wegen Lemma 3.3 (i) für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=0}^{m}(-1)^{m-k}\binom{m}{k}\|S^k e_n\|^2 = 0,$$

und damit (5.5).

Gilt umgekehrt (5.5) und ist $x = \sum_{j=1}^{N} c_j e_j \in M, c_j \in \mathbb{C}$, so folgt aus dem Satz des Pythagoras

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{m}(-1)^{m-k}\binom{m}{k}\|S^k(\sum_{j=1}^{N} c_j e_j)\|^2 &= \sum_{k=0}^{m}(-1)^{m-k}\binom{m}{k}\sum_{j=1}^{N}|c_j|^2\|S^k e_j\|^2 \\ &= \sum_{j=1}^{N}|c_j|^2\sum_{k=0}^{m}(-1)^{m-k}\binom{m}{k}\|S^k e_j\|^2 \\ &= \sum_{j=1}^{N}|c_j|^2\sum_{k=0}^{m}(-1)^{m-k}\binom{m}{k}\left(\prod_{l=j}^{k+j-1}|w_l|^2\right) = 0.\end{aligned}$$

Da M ein dichter Unterraum von H ist, muss aus Stetigkeitsgründen $\sum_{k=0}^{m}(-1)^{m-k}\binom{m}{k}\|S^k x\|^2 = 0$ für alle $x \in H$ gelten. Mit Lemma 3.3 (i) folgt, dass S eine m-Isometrie ist.

□

Wir brauchen noch einige Begriffsbildungen und Resultate aus der Theorie der linearen Rekursionsgleichungen, die wir im Folgenden bereitstellen (siehe [Het22, p.35 ff.]).

Definition 5.8. Die Gleichung

$$x_{n+k} = c_{k-1}x_{n+k-1} + \cdots + c_0 x_n, \ n \geq 1, \tag{5.7}$$

mit Koeffizienten $c_j \in \mathbb{C}$ für $j = 0, \ldots, k-1$ heißt *lineare Rekursionsgleichung k-ter Ordnung.*

Lemma 5.9. *Für $c_0, \ldots, c_{k-1} \in \mathbb{C}$ ist die Lösungsmenge von (5.7) ein k-dimensionaler Unterraum des Folgenraums $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.*

Definition 5.10. Das *charakteristische Polynom* von (5.7) ist definiert als

$$\chi(z) = z^k - c_{k-1}z^{k-1} - \cdots - c_1 z - c_0.$$

Satz 5.11. *Sei $\chi(z)$ das charakteristische Polynom von (5.7) mit Nullstellen $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ und Vielfachheiten $m_1, \ldots, m_r$. Dann ist*

$$\{(n^j \alpha_i^n)_{n\in\mathbb{N}} \colon 1 \leq i \leq r, 0 \leq j < m_i\}$$

eine Basis des Lösungsraums von (5.7).

Damit können wir den zentralen Satz dieses Abschnitts beweisen.

Satz 5.12. *Sei S ein unilateraler gewichteter Shiftoperator auf H mit Gewichten $(w_j)_{j\in\mathbb{N}}$. S ist genau dann eine m-Isometrie, wenn es ein normiertes Polynom p mit reellen Koeffizienten höchstens $(m-1)$-ten Grades derart gibt, dass $p(n) > 0$ und*

$$|w_n|^2 = \frac{p(n+1)}{p(n)}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$.

Beweis. Wir stellen zunächst fest, dass in jedem Fall $w_n \neq 0$ gilt: Im Falle, dass es ein Polynom mit den oben genannten Eigenschaften gibt, hat man offensichtlich $w_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Falls S eine m-Isometrie ist, gilt wegen Lemma 5.7 (i) $w_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Also können wir eine Folge $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definieren, indem wir $u_1 = 1$ und $u_n = \prod_{j=1}^{n-1}|w_j|^2 \in (0, \infty)$ für alle $n > 1$ setzen. Offenbar gilt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$|w_n|^2 = \frac{u_{n+1}}{u_n} \text{ und } \prod_{l=n}^{k+n-1}|w_l|^2 = \frac{u_{n+k}}{u_n}.$$

Gemäß Lemma 5.7 (ii) ist S genau dann eine m-Isometrie ist, wenn für alle $n \geq 1$

$$\sum_{k=0}^{m}(-1)^{m-k}\binom{m}{k}\frac{u_{n+k}}{u_n} = 0,$$

oder äquivalent dazu

$$\sum_{k=0}^{m}(-1)^{m-k}\binom{m}{k}u_{n+k} = 0. \tag{5.8}$$

Diese Gleichung ist eine homogene lineare Rekursionsgleichung m-ter Ordnung mit dem charakteristischen Polynom

$$\chi(z) = \sum_{k=0}^{m}(-1)^{m-k}\binom{m}{k}z^k = (z-1)^m,$$

welches 1 als einzige Nullstelle mit Vielfachheit m hat. Nach Satz 5.11 bildet

$$\{(n^j)_{n\in\mathbb{N}} \colon 0 < j < m\}$$

eine Basis des Lösungsraums von (5.8). Wir haben also gezeigt, dass S genau dann eine m-Isometrie ist, wenn $u_n = q(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit einem Polynom q mit reellen Koeffizienten und höchstens $(m-1)$-ten Grades.

Ist S eine m-Isometrie, dann gibt es ein Polynom q mit reellen Koeffizienten höchstens $(m-1)$-ten Grades so, dass $u_n = q(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Sei α der Leitkoeffizient von q und $p := q/\alpha$. Nach Definition der u_n gilt $p(n) > 0$ für $n \in \mathbb{N}$ und weiters

$$|w_n|^2 = \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{q(n+1)}{q(n)} = \frac{p(n+1)}{p(n)}.$$

Sei umgekehrt p ein normiertes Polynom mit reellen Koeffizienten höchstens $(m-1)$-ten Grades und $p(n) > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Ferner gelte

$$|w_n|^2 = \frac{p(n+1)}{p(n)}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Das Polynom $q := p/p(1)$ erfüllt

$$q(1) = \frac{p(1)}{p(1)} = 1 = u_1$$

und

$$q(n) = \frac{p(n)}{p(1)} = \prod_{j=1}^{n-1}\frac{p(j+1)}{p(j)} = \prod_{j=1}^{n}|w_j|^2 = u_n$$

für alle $n > 1$, womit S eine m-Isometrie ist. □

Lemma 5.13. *Sei S ein unilateraler gewichteter Shiftoperator auf H mit Gewichten $(w_j)_{j\in\mathbb{N}}$ und sei S m-isometrisch. Dann ist das Polynom p aus Satz 5.12 eindeutig.*

Beweis. Ist $\tilde{p}$ ein weiteres Polynom mit den Eigenschaften aus Satz 5.12, dann gilt

$$\frac{\tilde{p}(k)}{\tilde{p}(1)} = \prod_{l=1}^{k-1}\frac{\tilde{p}(l+1)}{\tilde{p}(l)} = \prod_{l=1}^{k-1}|w_l|^2 = \prod_{l=1}^{k-1}\frac{p(l+1)}{p(l)} = \frac{p(k)}{p(1)}$$

für alle $k \geq 1$. Infolge gilt

$$\tilde{p} = \frac{\tilde{p}(1)}{p(1)} p.$$

Da p normiert ist, muss $\tilde{p}(1) = p(1)$ und damit $\tilde{p} = p$ gelten. □

Korollar 5.14. *Sei S ein unilateraler gewichteter Shiftoperator auf H mit Gewichten $(w_j)_{j\in\mathbb{N}}$. S ist genau dann eine strikte m-Isometrie, d.h. eine m-Isometrie mit der Eigenschaft, dass S keine $(m-1)$-Isometrie ist, wenn der Grad des Polynoms aus Satz 5.12 genau $m-1$ ist.*

Beweis. Sei zunächst S eine strikte m-Isometrie. Wäre der Grad von p strikt kleiner als $m-1$, so wäre p ein Polynom höchstens $(m-2)$-ten Grades mit den Eigenschaften aus Satz 5.12 und S nach Satz 5.12 eine $(m-1)$-Isometrie.

Sei umgekehrt p ein Polynom $(m-1)$-ten Grades mit den Eigenschaften aus Satz 5.12. Dann ist S eine m-Isometrie. Wegen Lemma 5.13 ist das Polynom p eindeutig. Also gibt es kein Polynom kleineren Grades, das die Eigenschaften aus Satz 5.12 erfüllt. Somit kann S keine $(m-1)$-Isometrie sein. □

Mithilfe von Korollar 5.14 lassen sich sehr einfach für beliebige $m \in \mathbb{N}$ strikt m-isometrische Shiftoperatoren konstruieren.

Beispiel 5.15. Sei $(e_j)_{j\in\mathbb{N}}$ eine Orthonormalbasis von H. Für $n \in \mathbb{N}$ definiere $w_n \in \mathbb{C}$ mit

$$|w_n| = \sqrt{\frac{n^2+3n+3}{n^2+n+1}}.$$

Nach Konstruktion und Korollar 5.14 ist der unilaterale gewichtete Shiftoperator bezüglich der Orthonormalbasis $(e_j)_{j\in\mathbb{N}}$ mit den Gewichten $(w_j)_{j\in\mathbb{N}}$ eine strikte 3-Isometrie.

Literaturverzeichnis

[AS95] J. Agler and M. Stankus. m-isometric transformations of hilbert space. *Integral Equations and Operator Theory*, 21:383–429, 1995.

[BKW22] M. Blümlinger, M. Kaltenbäck, and H. Woracek. Funktionalanalysis, 2022.

[BT14] A. Belal and L. Trieu. The structure of m-isometric weighted shift operators. 2014.

[FM16] E. Fricain and J. Mashreghi. *The Theory of H(b) Spaces*, volume 1. Cambridge University Press, 2016.

[Het22] S. Hetzl. Diskrete und geometrische algorithmen, 2022.