Seminararbeit: Über den Fock-Raum und das Spektrum des Annihilators und orthogonalen Erzeugers

Philip Scheberan

22. Juli 2018

Einführung

Ist X Banach-Raum und T ein beschränkter, linearer Operator, dann definiert man dessen Resolventenmenge als

$$\rho(T) := \{\lambda \in \mathbb{C} : \ (T - \lambda I) \text{ ist invertierbar}\},$$

wobei ein $S \in \mathcal{B}(X)$ dann invertierbar ist, wenn $\ker S = \{0\}$ und $\operatorname{ran} S = X$. Das Spektrum eines Operator T definiert man als

$$\sigma(T) := \mathbb{C} \backslash \rho(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \ (T - \lambda I) \text{ ist nicht invertierbar}\}.$$

Für $T \in \mathcal{B}(X)$ gilt also $\lambda \notin \sigma(T)$, wenn $\ker(T - \lambda I) \neq \{0\}$ oder $\operatorname{ran}(T - \lambda I) \neq X$. Damit unterteilt man das Spektrum in das Punktspektrum

$$\sigma_p(T) := \{\lambda \in \mathbb{C} : \ \ker(T - \lambda I) \neq \{0\}\}$$

und nennt $\lambda \in \sigma_p(T)$ einen Eigenwert von T und ein $x \in \ker(T - \lambda I)$ einen Eigenvektor von T. Das stetige Spektrum $\sigma_c(T)$ enthält alle $\lambda \in \mathbb{C}$, für die $(T - \lambda I)$ injektiv ist und $\operatorname{ran}(T - \lambda I)$ zwar dicht in X, aber nicht ganz X ist. Das Residualspektrum $\sigma_r(T)$ enthält alle $\lambda \in \mathbb{C}$, für die $(T - \lambda I)$ injektiv ist und $\operatorname{ran}(T - \lambda I)$ nicht dicht in X ist.

Wir definieren außerdem das approximative Punktspektrum

$$\sigma_{app}(T) := \{\lambda \in \mathbb{C} : \ \exists \ (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in X, \ \|x_n\| = 1, n \in \mathbb{N}, \ \|Tc_n - \lambda c_n\| \overset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0\}.$$

Das approximative Spektrum ist abgeschlossen und erfüllt

$$\sigma_p(T) \cup \sigma_c(T) \subseteq \sigma_{app}(T) \subseteq \sigma(T).$$

Ist $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum und $\mathcal{F}(\mathcal{H})$ der davon erzeugte Fock-Raum, dann ist für $v \in \mathcal{H}$ der (links-) Erzeuger Operator

$$l(v) : \ \mathcal{F}(\mathcal{H}) \longrightarrow \mathcal{F}(\mathcal{H}), \ f \longmapsto v \otimes f$$

sowie dessen adjungierter Operator $l(v)^*$, der (links-) Annihilator Operator, definiert. Für v,$w \in \mathcal{H}$ mit $\|v\| = \|w\| = 1$ und $v \perp w$, kann man das Spektrum des Operator $l(v) + l(w)^*$ betrachten. Es stellt sich heraus, dass dieses rein stetig ist und mit dem abgeschlossenen Einheitskreis überein stimmt
In dieser Arbeit werden zunächst alle vorkommenden Begriffe erklärt. Dann wird der Beweis dieser spektralen Aussage erbracht, wobei die Beweisführung in mehreren Schritten erfolgt. Zuerst zeigt man, dass die Resolventenmenge eine Obermenge von $\backslash\{z \in \mathbb{C} : \ |z| > 1\}$ ist. Danach, dass Punkt- und Residualspektrum leer sind. Schlussendlich wird bewiesen, dass das approximative Spektrum Obermenge des Einheitskreises ist. Der folgende Beweis geht auf [B] zurück und wird in dieser Arbeit noch etwas genauer ausgearbeitet.

Das Tensorprodukt und der Fock Raum

Das Tensorprodukt

Zu Beginn werden einige Resultate aus der Multilinearen Algebra präsentiert, welche das zu Grunde liegende Tensorprodukt definieren. Diese grundlegenden Aussagen werden ohne Beweis angeführt, welche in der Fachliteratur nachgelesen werden können, siehe [G] und [KM].

1.1 Definition. Gegeben seien Vektorräume $V_1, V_2, \ldots, V_p, X$ über $\mathbb{C}$ und eine multilineare Abbildung $\tau: V_1 \times V_2 \times \ldots \times V_p \longrightarrow X$. Dann heißt (X, τ) ein Tensorprodukt von $V_1 \times \ldots \times V_p$, falls gilt:
Zu jedem Vektorraum W über $\mathbb{C}$ und für jede multilineare Abbildung $f: V_1 \times V_2 \times \ldots \times V_p \longrightarrow W$ existiert genau eine lineare Abbilung $g: X \longrightarrow W$, sodass $f = g \circ \tau$.

1.2 Satz. Seien $V_1, V_2, \ldots, V_p$, Vektorräume über $\mathbb{C}$. Dann existiert ein Tensorprodukt zu diesen Vektorräumen. Seien (X_1, τ_1) sowie (X_2, τ_2) zwei solche Tensorprodukte, dann sind beide Tensorprodukte isomorph zu einander.

Das Tensorprodukt ist also eindeutig gegeben und wird im Weiteren als $V_1 \otimes V_2 \otimes \ldots \otimes V_p$ bezeichnet. Die Elemente des Tensorproduktes nennt man Tensoren. Außerdem definiert man $v_1 \otimes \ldots \otimes v_p := \tau(v_1, \ldots, v_p)$ und nennt Tensoren dieser Bauart rein. Schließlich ist das Tensorprodukt assoziativ: $(V_1 \otimes V_2) \otimes V_3 = V_1 \otimes (V_2 \otimes V_3) = V_1 \otimes V_2 \otimes V_3$.

1.3 Bemerkung. Für zwei Vektorräume V, W über $\mathbb{C}$ mit $\dim(W) = 1$ folgt aus der Eindeutigkeit des Tensorprodukts, dass $V \otimes W \cong V \cong W \otimes V$. Insbesondere gilt damit $\mathbb{C} \otimes V \cong V$.

1.4 Satz. Sind V_1 und V_2 Vektorräume über $\mathbb{C}$ mit Basis $E_1 = \{b_i : \ i \in I\}$ beziehungsweise $E_2 = \{b_j : \ j \in J\}$. So bildet $E := \{b_i \otimes b_j : \ (i,j) \in I \times J\}$ eine Basis von $V_1 \otimes V_2$.

1.5 Bemerkung. Falls die Dimensionen zweier Vektorräume V_1 und V_2 über $\mathbb{C}$ endlich sind, so kann man $(V_1 \otimes V_2)^*$ mit $V_1^* \otimes V_2^*$ identifizieren und $V_1^* \otimes V_2^*$ mit der Menge aller linearen Abbildungen von V_1 nach V_2^* beziehungsweise der Menge aller linearen Abbildungen von $V_1 \times V_2$ in den Skalarkörper K.

1.6 Definition. Sei V ein Vektorraum $n \in \mathbb{N}$. So definiert man dessen n-faches Tensorprodukt induktiv durch

$$V^{\otimes 0} = K, \qquad V^{\otimes 1} = V, \qquad V^{\otimes n+1} = V \otimes V^{\otimes n}.$$

Das Tensorprodukt von Hilberträumen

Hat man einen Hilbertraum gegeben, so kann man dessen n-faches (algebraisches) Tensorprodukt bilden. Man wünscht sich jedoch, dass das Endergebnis wieder ein Hilbertraum ist. Dies ist im Allgemeinen nicht der Fall. Im Weiteren bezeichnen wir die im vorigen Abschnitt eingeführte

Kontruktion des algebraischen Tensorproduktes als $V_1 \otimes_a V_2$.

1.7 Satz. Sei $\mathcal{H}$ versehen mit dem Skalarprodukt $\langle .,. \rangle$ ein Hilbertraum und $\mathcal{B}$ eine algebraische Basis. Auf dem (algebraischen) Tensorprodukt $\mathcal{H}^{\otimes_a n}$ definiert man für $v_i, w_i \in \mathcal{B}$, $i \in \{1, \ldots, n\}$:

$$\langle a \cdot v_1 \otimes_a v_2 \otimes_a \ldots \otimes_a v_n, b \cdot w_1 \otimes_a w_2 \otimes_a \ldots \otimes_a w_n \rangle_n := a\bar{b} \cdot \langle v_1, w_1 \rangle \cdot \langle v_2, w_2 \rangle \cdots \langle v_n, w_n \rangle$$

Durch lineare Fortsetzung erhält man damit eine wohldefinierte Sesquilinearform $\langle .,. \rangle_n$. Diese ist ein von der gewählten Basis unabhängiges Skalarprodukt auf $\mathcal{H}^{\otimes_a n}$.

Beweis. Da $\langle .,. \rangle$ ein Skalarprodukt auf $\mathcal{H}$ ist, folgt sofort, dass $\langle .,. \rangle_n$ sesquilinear und hermitesch ist. Die Basisunabhängigkeit ist einfach nachzurechnen. Es bleibt also die positive Definitheit zu zeigen. Es reicht die Aussage für $\mathcal{H}^{\otimes_a 2}$ zu beweisen. Danach folgt der Satz durch Induktion. Sei also $x = \sum_{k=1}^{M} a_k (v_k \otimes w_k)$. Dann spannen $(v_k)_{k=1}^{M}$ und $(w_k)_{k=1}^{M}$ jeweils Unterräume $M_1 \subseteq \mathcal{H}$ und $M_2 \subseteq \mathcal{H}$ auf. Sind $(\phi)_{k=1}^{N_1}$ und $(\psi)_{l=1}^{N_2}$ Orthonormalbasen dieser Unterräume, so erhält man

$$x = \sum_{(k,l) \in M_1 \times M_2} c_{kl} (\phi_k \otimes \psi_l)$$

und damit

$$\begin{aligned}
\langle x, x \rangle_2 &= \langle \sum_{(k,l) \in M_1 \times M_2} c_{kl} (\phi_k \otimes \psi_l), \sum_{(m,n) \in M_1 \times M_2} c_{mn} (\phi_m \otimes \psi_n) \rangle_2 \\
&= \sum_{(k,l) \in M_1 \times M_2} \left(\sum_{(m,n) \in M_1 \times M_2} c_{kl} \bar{c}_{mn} \langle \phi_k \otimes \psi_l \rangle \langle \phi_m \otimes \psi_n \rangle \right) \\
&= \sum_{(k,l) \in M_1 \times M_2} |c_{kl}|^2.
\end{aligned}$$

□

1.8 Definition. Ist $\mathcal{H}$ versehen mit dem Skalarprodukt $\langle .,. \rangle$ ein Hilbertraum, so nennt man die Vervollständigung von $\mathcal{H} \otimes_a \ldots \otimes_a \mathcal{H}$ bezüglich des Skalarproduktes $\langle .,. \rangle_n$ das n-fache (Hilbertraum-) Tensorprodukt von $\mathcal{H}$ und bezeichnet diese als $\mathcal{H}^{\otimes n}$.

1.9 Bemerkung. Sei $\mathcal{H}$ versehen mit dem Skalarprodukt $\langle .,. \rangle$ ein Hilbertraum. Für $f, g \in \bigoplus_{n \in \mathbb{N}_0} \mathcal{H}^{\otimes n}$, $f = \sum_{n \in \mathbb{N}_0} f_n$, $g = \sum_{n \in \mathbb{N}_0} g_n$ ist auf $\bigoplus_{n \in \mathbb{N}_0} \mathcal{H}^{\otimes n}$ ein Skalarprodukt gegeben durch

$$\langle f, g \rangle_\omega := \sum_{n \in \mathbb{N}} \langle f_n, g_n \rangle_n.$$

1.10 Definition. Ist $\mathcal{H}$ versehen mit dem Skalarprodukt $\langle .,. \rangle$ ein Hilbertraum, so nennt man $\bigoplus_{n \in \mathbb{N}_0} \mathcal{H}^{\otimes n}$ versehen mit $\langle .,. \rangle_\omega$ den Fock-Raum von $\mathcal{H}$. Man bezeichnet diesen Raum auch als $\mathcal{F}(\mathcal{H})$.

1.11 Lemma. Sind $x_1 \otimes \ldots \otimes x_n \in \mathcal{H}^{\otimes n}$ und $y_1 \otimes \ldots \otimes y_n \in \mathcal{H}^{\otimes n}$ gegeben und definiert man

$$t_{k,j} := \begin{cases} (x_j - y_j) & \text{für } j = k, \\ x_j & \text{für } j > k, \\ y_j & \text{für } j < k, \end{cases}$$

so gilt

$$x_1 \otimes \ldots \otimes x_n - y_1 \otimes \ldots \otimes y_n = \sum_{k=1}^{n} t_{k,1} \otimes \ldots \otimes t_{k,n}.$$

Beweis. Seien $t_{k,j}$ wie oben definiert. Der Beweis erfolgt durch vollständige Induktion. Zuerst der Induktionsanfang für $n = 2$:

$$\begin{aligned} x_1 \otimes x_2 - y_1 \otimes y_2 &= x_1 \otimes x_2 - y_1 \otimes x_2 + y_1 \otimes x_2 - y_1 \otimes y_2 \\ &= (x_1 - y_1) \otimes x_2 + y_1 \otimes (x_2 - y_2) \\ &= t_{1,1} \otimes t_{1,2} + t_{2,1} \otimes t_{2,2}. \end{aligned}$$

Nun der Induktionsschritt $n \longrightarrow n + 1$:

$$x_1 \otimes \ldots \otimes x_{n+1} - y_1 \otimes \ldots \otimes y_{n+1}$$

$$\begin{aligned} = x_1 \otimes x_2 \otimes \ldots \otimes x_n \otimes x_{n+1} - y_1 \otimes y_2 \otimes \ldots \otimes y_n \otimes x_{n+1} \\ + y_1 \otimes y_2 \otimes \ldots \otimes y_n \otimes x_{n+1} - y_1 \otimes y_2 \otimes \ldots \otimes y_n \otimes y_{n+1} \end{aligned}$$

$$= (x_1 \otimes x_2 \otimes \ldots \otimes x_n - y_1 \otimes y_2 \otimes \ldots \otimes y_n) \otimes x_{n+1} + y_1 \otimes y_2 \otimes \ldots \otimes y_n \otimes (x_{n+1} - y_{n+1})$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{k=1}^{n} (t_{k,1} \otimes \ldots \otimes t_{k,n} \otimes t_{k,n+1}) + t_{n+1,1} \otimes t_{n+1,2} \otimes \ldots \otimes t_{n+1,n} \otimes (t_{n+1,n+1}) \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} t_{k,1} \otimes \ldots \otimes t_{k,n+1}. \end{aligned}$$

□

1.12 Satz. Für einen Hilbertraum $\mathcal{H}$ mit Orthonormalbasis $\mathcal{B}$ ist auf dem n-fachen Hilbertraum-Tensorprodukt eine Orthonormalbasis gegeben durch

$$\mathcal{B}_n := \{b_1 \otimes \ldots \otimes b_n : \ b_1, \ldots, b_n \in \mathcal{B}\}.$$

Auf dem Fock-Raum $\mathcal{F}(\mathcal{H})$ ist eine Orthonormalbasis gegeben durch

$$\mathcal{B}^* := \{b_1 \otimes \ldots \otimes b_n : \ n \in \mathbb{N}, \ b_1, \ldots, b_n \in \mathcal{B}\} \cup \{1\}.$$

Beweis. Ein Orthonormalsystem $\mathcal{A}$ ist eine Orthonormalbasis eines Hilbertraumes $\mathcal{G}$, wenn deren lineare Hülle span($\mathcal{A}$) dicht in $\mathcal{G}$ ist. Durch die Konstruktion von $\mathcal{H}^{\otimes n}$, muss also nur gezeigt werden, dass span($\mathcal{B}_n$) dicht in $\mathcal{H}^{\otimes_a n}$ liegt.
Sei also $x = x_1 \otimes \cdots \otimes x_n \in \mathcal{H}^{\otimes_a n}$ fest und $\epsilon > 0$ beliebig gegeben. Wähle $y_1 \in \operatorname{span}\{\mathcal{B}\}$, sodass

$$\|x_1 - y_1\| \cdot \|x_2\| \cdot \ldots \cdot \|x_n\| < \frac{\epsilon}{n}.$$

Für $k > 1$ wähle induktiv $y_k \in \operatorname{span}\{\mathcal{B}\}$, sodass

$$\|y_1\| \cdot \|y_2\| \cdot \ldots \cdot \|y_{k-1}\| \, \|x_k - y_k\| \, \|x_{k+1}\| \cdot \ldots \cdot \|x_n\| < \frac{\epsilon}{n}.$$

Aus Lemma 1.11 folgt

$$\|x_1 \otimes \ldots \otimes x_n - y_1 \otimes \ldots \otimes y_n\| = \left\| \sum_{k=1}^{n} t_{k,1} \otimes \ldots \otimes t_{k,n} \right\| \leq \sum_{k=1}^{n} \|t_{k,1} \otimes \ldots \otimes t_{k,n}\| < \epsilon.$$

Dass $\mathcal{B}^*$ dicht in $\bigoplus_{n \in \mathbb{N}_0} \mathcal{H}^{\otimes n}$ liegt, folgt sofort aus der gerade bewiesenen Tatsache, dass $\mathcal{B}_n$ dicht in $\mathcal{H}^{\otimes n}$ liegt. □

Erste Vereinfachungen

Reduktion des Problems

Anhand der Darstellung der Elemente des Fock-Raumes, kann man bereits erahnen, dass ein Beweis sehr umständlich werden wird. Immerhin ist es bereits für eine endliche Basis von $\mathcal{H}$ sehr mühsam, die Elemente des Raumes $\mathcal{F}(\mathcal{H})$ durch unendliche Summen darzustellen. Für eine unendliche Basis wird es noch komplizierter, weshalb das Problem reduziert wird und eine Notation eingeführt wird, welche die Beweisführung angenehmer gestaltet.

1.13 Proposition. Für $v \in \mathcal{H}$ definiert man den (links-) Erzeuger Operator $l(v)$ als

$$l(v): \; \mathcal{F}(\mathcal{H}) \longrightarrow \mathcal{F}(\mathcal{H}), \; f \longmapsto v \otimes f.$$

Dann erfüllt dessen adjungierter Operator $l(v)^*(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n) = \langle x_1, v\rangle \cdot x_2 \otimes \cdots \otimes x_n$ für $x_i \in \mathcal{H}$, $i = 1 \ldots n$ und $l(v)^*(1) = 0$.

Beweis. $l(v)^*(1) = 0$ ist klar. Für beliebiges $n \in \mathbb{N}$ und reine Tensoren $x := x_1 \otimes \ldots \otimes x_n$ und $y := y_0 \otimes y_1 \otimes \ldots \otimes y_n$ gilt

$$\begin{aligned}
\langle x, l(v)^* y\rangle = \langle l(v)x, y\rangle &= \langle v \otimes x_1 \otimes \ldots \otimes x_n, y_0 \otimes y_1 \otimes \ldots \otimes y_n\rangle \\
&= \langle v, y_0\rangle \langle x_1, y_1\rangle \ldots \langle x_n, y_n\rangle \\
&= \langle v, y_0\rangle \langle x_1 \otimes \ldots \otimes x_n, y_1 \otimes \ldots \otimes y_n\rangle \\
&= \langle x, \langle y_0, v\rangle y_1 \otimes \ldots \otimes y_n\rangle.
\end{aligned}$$

Diese Gleichheit stimmt auch für reine Tensoren y einer Länge ungleich $n+1$, da ganz links und ganz rechts dann Null steht. Also gilt die Gleichheit für Linearkombinationen reiner Tensoren.

Da diese im Fock-Raum dicht liegen, erhalten wir die Aussage. $\square$

Seien nun $v, w \in \mathcal{H}$ mit $\|v\| = \|w\| = 1$ und $v \perp w$ gegeben und $l(v)$ sowie $l(w)$ wie in (1) definiert. Die Menge $\{v, w\}$ erweitert man zuerst zu einer ONB $\mathcal{B}$ von $\mathcal{H}$. Für $\mathcal{H}' := \operatorname{span}\{v, w\}$ interpretiert man nun den Raum $\mathcal{F}(\mathcal{H}')$ als Teilmenge von $\mathcal{F}(\mathcal{H})$ auf kanonische Art und Weise. Weiters sei $\mathcal{B}^* := \{b_1 \otimes \cdots \otimes b_n : \ n \in \mathbb{N},\ b_1, \ldots, b_n \in \mathcal{B}\} \cup \{1\}$. Zuerst wird gezeigt, dass das Problem, das Spektrum von $l(v) + l(w)^*$ in $\mathcal{F}(\mathcal{H})$ zu berechnen, darauf reduziert werden kann, das Spektrum auf dem Unterraum $\mathcal{F}(\mathcal{H}') \subseteq \mathcal{F}(\mathcal{H})$ zu berechnen.

1.14 Proposition. Der Raum $\mathcal{F}(\mathcal{H})$ ist die orthogonale direkte Summe von Unterräumen $\{\mathcal{U}_f : \ f \in I\}$, welche invariant unter den Operatoren $l(v), l(w), l(v)^*, l(w)^*$ sind. Dabei ist die Einschränkung eines dieser Operatoren auf einen Unterraum $\mathcal{U}_f$ unitär äquivalent, zu seiner Einschränkung auf $\mathcal{F}(\mathcal{H}')$.

Beweis. Wähle $I := \mathcal{B}^* \cap \ker(l(v)^*) \cap \ker(l(w)^*)$. Aus Proposition 1.13 erkennt man, dass für $f \neq 1,\ f = f_1 \otimes \cdots \otimes f_n \in \mathcal{B}$ genau dann $f \in \ker(l(v)^*)$ gilt, falls $\langle f_1, v\rangle = 0$, also wenn $f_1 \neq v$. Daher gilt

$$I = \{f_1 \otimes \cdots \otimes f_n \in \mathcal{B} : \ f_1 \notin \{v, w\}\} \cup \{1\}.$$

Wir setzen $z \otimes f = z \cdot f$ für alle $z \in \mathbb{C}$ und $f \in \mathcal{B}^*$ (siehe Bemerkung 1.3). Für $f \in I$ definieren wir

$$\mathcal{U}_f := \{f' \otimes f : \ f' \in \mathcal{F}(\mathcal{H}')\}.$$

Mit obigen Überlegungen erkennt man sofort, dass diese Unterräume eine geeignete Zerlegung bilden. Die Invarianz unter $l(v)$ und $l(w)$ ist sofort ersichtlich. Für $z \in \mathbb{C}$ und $f \in I$ gilt

$$l(v)^*(z \otimes f) = l(v)^*(z \cdot f) = 0 \in \mathcal{U}_f.$$

Für $f \in I,\ f' \in \mathcal{F}(\mathcal{H}'),\ f' \neq 1$ gilt mit Proposition 1.13 $l(v)^*(f') \in \mathcal{F}(\mathcal{H}')$ und damit folgt

$$l(v)^*(f' \otimes f) = l(v)^*(f') \otimes f \in \mathcal{U}_f.$$

Also sind die Unterräume auch invariant unter $l(v)^*$ und $l(w)^*$. Um die unitäre Äquivalenz einzusehen, setzen wir

$$U_f : \ \mathcal{F}(\mathcal{H}') \longrightarrow \mathcal{U}_f,\ f' \mapsto f' \otimes f.$$

Für $f \in \mathcal{B}$ ist die Funktion U_f isometrisch und bijektiv. Die Isometrie und damit die Injektivität folgt aus $\langle g, h\rangle = \langle g, h\rangle\langle f, f\rangle = \langle g \otimes f, h \otimes f\rangle = \langle U_f(g), U_f(h)\rangle$. Die Surjektivität ist durch die Konstruktion sofort ersichtlich. Exemplarisch rechnen wir für $l(v)$ die unitäre Äquivalenz nach. Für $f \in I$ und $f' \in \mathcal{F}(\mathcal{H}')$ gilt

$$(l(v)\big|_{\mathcal{U}_f})(f' \otimes f) = v \otimes f' \otimes f = U_f(v \otimes f') = (U_f \circ l(v)\big|_{\mathcal{F}(\mathcal{H}')})(f') = (U_f \circ l(v)\big|_{\mathcal{F}(\mathcal{H}')} \circ U_f)^*(f' \otimes f).$$

Ähnlich beweist man die Aussage für den adjungierten Operator $l(v)^*$ $\square$

Von nun an können wir also o.B.d.A annehmen, dass $\mathcal{H} = \mathcal{H}'$ und $\mathcal{B} = \{v, w\}$. Dann gilt

$$\mathcal{B}^* = \{1, v, w, v \otimes v, v \otimes w, w \otimes v, w \otimes w, \cdots\}$$

Notation

Die Elemente in B^* werden nun folgendermaßen abgekürzt:

$$\begin{aligned} f_\epsilon &= 1 & f_v &= v & f_w &= w \\ f_{vv} &= v \otimes v & f_{vw} &= v \otimes w & f_{ww} &= w \otimes w \\ f_{vvv} &= v \otimes v \otimes v & f_{vvw} &= v \otimes v \otimes w & & \dots \end{aligned}$$

Mit $\Sigma^* = \{\epsilon,\ v,\ w,\ vv,\ vw,\ ww,\ vvv,\ vvw,\ \dots\}$ bezeichnen wir die Menge aller möglichen Indizes. Das sind alle endlichen Strings, bestehend aus den Buchstaben v und w, wobei ϵ den leeren String bezeichnet.

1.15 Definition. Für $s \in \Sigma^*$ definiert man die Länge $|s|$ von s induktiv durch

$$|\epsilon| = 0,\ \ |vs| = |ws| = 1 + |s|,\ \ s \in \Sigma^*,$$

wobei vs und ws die Strings bezeichnet, die man erhält, wenn man v beziehungsweise w links and den String s anhängt. Mit dieser Notation kann jedes $f \in \mathcal{F}(\mathcal{H})$ bezüglich der Basis $\mathcal{B}$ folgendermaßen dargestellt werden:

$$f = \sum_{s \in \Sigma^*} c(s) f_s \text{ mit } \sum_{s \in \Sigma^*} |c(s)|^2 = \|f\|^2 < +\infty. \tag{1}$$

Um den folgenden Beweis zu formulieren, verwenden wir also den zu $\mathcal{F}(\mathcal{H})$ isomorphen Hilbertraum $l^2(\Sigma^*) = \{c \in \mathbb{C}^{\Sigma^*} :\ \sum_{s \in \Sigma^*} |c(s)|^2 < \infty\}$ mit der Norm $\|c\|^2 = \sum_{s \in \Sigma^*} |c(s)|^2$.

1.16 Definition. Für $c \in l^2(\Sigma^*)$ definiert man

$$c(v^{-1}) = 0 \text{ und } \ c(v^{-1}ws) = 0, \quad c(v^{-1}vs) = c(s), \quad s \in \Sigma^*.$$

1.17 Bemerkung. Mit Definition 1.16 , der Definition von $l(v)$, sowie Darstellung (1) erhält man

$$l(v)f = \sum_{s \in \Sigma^*} c(v^{-1}s) f_s \quad \text{und infolge} \quad l(w)^* f = \sum_{s \in \Sigma^*} c(ws) f_s. \tag{2}$$

1.18 Korollar. Aus Definition 1. 16, sowie Darstellungen (2) und (3) folgt, dass die zu $l(v)$ und $l(w)^*$ unitär äquivalenten Abbildungen V und W^* in $l^2(\Sigma^*)$ gegeben sind durch

$$(Vc)(s) = c(v^{-1}s), \quad (W^*c)(s) = c(ws), \quad s \in \Sigma^*. \tag{3}$$

Mit all diesen Überlegungen kann die in der Einführung aufgestellte Aussage folgendermaßen formuliert werden:

1.19 Satz. Ist $\Sigma^* = \{\epsilon,\ v,\ w,\ vv,\ vw,\ ww,\ vvv,\ vvw,\ \ldots\}$ und sind V und W^* Operatoren auf $l^2(\Sigma^*)$, definiert durch Darstellung (3), dann ist das Spektrum des Operators $T := V + W^*$ rein stetig und stimmt mit dem Einheitskreis überein:

$$\sigma(T) = \sigma_c(T) = \{z \in \mathbb{C} :\ |z| \leq 1\}.$$

Der Beweis

Die Resolventenmenge

1.20 Lemma. Ist $\Sigma^* = \{\epsilon,\ v,\ w,\ vv,\ vw,\ ww,\ vvv,\ vvw,\ \ldots\}$ und sind V und W^* Operatoren auf $l^2(\Sigma^*)$, definiert durch Darstellung (3), dann gilt $\|V\| = \|W\| = 1$, $W^*V = 0$.

Beweis. Die erste Aussage folgt aus der Tatsache, dass V und W Shift-Operatoren sind. Aus Darstellung (3) und Definition 1.16 erhält man die zweite Aussage:

$$(W^*Vc)(s) = (Vc)(ws) = c(v^{-1}ws) = 0, \quad c \in l^2(\Sigma^*),\ s \in \Sigma^*.$$

□

1.21 Lemma. Ist $\Sigma^* = \{\epsilon,\ v,\ w,\ vv,\ vw,\ ww,\ vvv,\ vvw,\ \ldots\}$ und sind V und W^* Operatoren auf $l^2(\Sigma^*)$, definiert durch Darstellung (3), dann gilt für die Resolventenmenge von T

$$\rho(T) \supseteq \{z \in \mathbb{C} :\ |z| > 1\}.$$

Beweis. Aus Lemma 1.20 erhält man

$$\|T^n\| = \left\| \sum_{k=0}^{n} V^{n-k} W^{*k} \right\| \leq n + 1.$$

Für $|z| > 1$ konvergiert daher die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{T^n}{z^{n+1}}$ absolut und ihr Grenzwert stimmt überein mit $(z - T)^{-1}$, also $z \in \rho(T)$. □

Das Punktspektrum und das Residualspektrum

1.22 Lemma. Für $z \in \mathbb{C}$, $a = (a_0, a_1, a_2, \ldots) \in l^2(\mathbb{N})$ mit $a_0 = 1$ gilt

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_{k-1} - z \cdot a_k|^2 \geq 1 - |z|^2.$$

Beweis. Wir halten $z \in \mathbb{C}$ fest. Für $a \in l^2(\mathbb{N})$ definieren wir

$$\nu(a) := \sum_{k=1}^{\infty} |a_{k-1} - z \cdot a_k|^2, \text{ und } \mu := \inf_{a \in l^2(\mathbb{N}),\ a_0 = 1} \nu(a).$$

Es bleibt $\mu \geq 1 - |z|^2$ zu zeigen. Dazu berechnen wir

$$\begin{aligned}
\mu &= \inf_{a_0=1,\ a_1\in\mathbb{C}} (|a_0 - z\cdot a_1|^2 + \inf_{(a_2,a_3,\cdots)\in l^2(\mathbb{N})} \nu((a_1,a_2,a_3,\ldots)) \\
&= \inf_{a_1\in\mathbb{C}} (|1 - z\cdot a_1|^2 + \inf_{a'\in l^2(\mathbb{N}),\ a'_0=a_1} \nu(a')) \\
&= \inf_{a_1\in\mathbb{C}} (|1 - z\cdot a_1|^2 + |a_1|^2\mu) \\
&\overset{*}{=} \inf_{t\geq 0} ((1 - |z|\cdot t)^2 + t^2\mu) \\
&\overset{**}{=} \inf_{t\geq 0} (t\sqrt{|z|^2+\mu} - \frac{|z|}{\sqrt{|z|^2+\mu}})^2 + 1 - \frac{|z|^2}{|z|^2+\mu} \\
&= \frac{\mu}{|z|^2+\mu}
\end{aligned}$$

Wobei (*) aus folgt. Denn man berechnet

$$\begin{aligned}
|1 - |z|\cdot w|^2 + |w|^2\mu &= |1 - |z|\cdot(\mathrm{Re}(w) + i\cdot\mathrm{Im}(w))|^2 + |\mathrm{Re}(w) + i\cdot\mathrm{Im}(w)|^2\mu \\
&= 1 - 2|z|\cdot\mathrm{Re}(w) + |z|^2\cdot\mathrm{Re}(w)^2 + |z|^2\cdot\mathrm{Im}(w)^2 + (\mathrm{Re}(w)^2 + \mathrm{Im}(w)^2)\mu \\
&= \Big[1 + \mathrm{Re}(w)\cdot\big(\mathrm{Re}(w)|z|^2 - 2|z| + \mathrm{Re}(w)\mu\big)\Big] + \Big[\mathrm{Im}(w)^2\cdot(|z|^2+\mu)\Big].
\end{aligned}$$

Da $(z^2 + \mu)$ immer größer Null oder gleich Null ist, wird dieser Term minimal, falls $\mathrm{Im}(w) = 0$ gilt. Daraus folgt

$$\begin{aligned}
\inf_{a_1\in\mathbb{C}} (|1 - z\cdot a_1|^2 + |a_1|^2\mu) &= \inf_{a_1\in\mathbb{C}} (|1 - |z|\cdot a_1|^2 + |a_1|^2\mu) \\
&= \inf_{a_1\in\mathbb{C},\mathrm{Im}(a_1)=0} (|1 - |z|\cdot a_1|^2 + |a_1|^2\mu) \\
&= \inf_{t\in\mathbb{R}} ((1 - |z|\cdot t)^2 + t^2\mu) \\
&= \inf_{t\geq 0} ((1 - |z|\cdot t)^2 + t^2\mu).
\end{aligned}$$

Die Gleichheit (**) ist nach ausmultiplizieren des quadratischen Terms ersichtlich.

Um die ursprüngliche Aussage zu zeigen, unterschieden wir mehrere Fälle:

Fall 1: $|z| \geq 1$. In diesem Fall ist die Ungleichung trivialerweise erfüllt. Zudem folgt aus $\mu = \frac{\mu}{|z|^2+\mu}$, dass μ gleich 0 sein muss.

Fall 2: $|z| < 1$. In diesem Fall bemüht man abermals einer Fallunterscheidung. Für $\mu \neq 0$ folgt aus $\mu = \frac{\mu}{|z|^2+\mu}$, dass $\mu = 1 - |z|^2$.

Der verbleibende Fall kann nicht eintreten, denn falls $\mu = 0$, so müsste ein $a \in l^2(\mathbb{N})$ existieren, mit $a_0 = 1$ und $\nu(a) < (1 - |z|)^2$. Insbesondere gilt diese Ungleichung auch für jeden der Summanden, also $|a_{k-1} - z\cdot a_k| < (1 - |z|)^2$. Da die Folge $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ als Element von $l^2(\mathbb{N})$ eine Nullfolge ist, existiert $m := \min\{k \in \mathbb{N} :\ |a_k| < 1\}$. Wobei $m \geq 1$, da $a_0 = 1$ gewählt wurde. Daraus erhält man den Widerspruch

$$1 - |z| \leq |a_{m-1}| - |z\cdot a_m| \leq |a_{m-1} - z\cdot a_m| < (1 - |z|)^2.$$

$\square$

1.23 Lemma. Für $c \in l^2(\Sigma^*)$, $s' \in \Sigma^*$ definieren wir $c'(s) := c(ss'), s \in \sigma^*$. Dann gilt

$$((T-z)c')(s) = ((T-z)c)(ss'), \quad s \in \Sigma^* \quad \Leftrightarrow \quad c(v^{-1}s') = 0.$$

Beweis. Aus der Definition von T folgt

$$\begin{aligned}((T-z)c')(s) &= c'(v^{-1}s) + c'(ws) - z \cdot c'(s), \quad s \in \Sigma^* \\ ((T-z)c)(ss') &= c(v^{-1}ss') + c(wss') - z \cdot c(ss'), \quad s \in \Sigma^*.\end{aligned}$$

Gemäß der Definition von c' folgt

$$\begin{aligned}&c'(ws) = c(wss'),\ c'(s) = c(ss'), \quad s \in \Sigma^* \\ &c'(v^{-1}s) = c(v^{-1}ss'), \quad s \in \Sigma^* \setminus \{\epsilon\}.\end{aligned}$$

Somit gilt Gleichheit genau dann, wenn $c(v^{-1}s') = 0$ $\square$

1.24 Lemma. Ist $\Sigma^* = \{\epsilon,\ v,\ w,\ vv,\ vw,\ ww,\ vvv,\ vvw,\ \ldots\}$ und sind V und W^* Operatoren auf $l^2(\Sigma^*)$, definiert durch Darstellung (3), dann gilt $\sigma_p(T) = \emptyset$.

Beweis. Wir wollen die Annahme, dass $z \in \mathbb{C}$ ein Eigenwert von T ist, auf einen Widerspruch führen. Dafür definieren wir

$$M := \{c \in l^2(\Sigma^*) :\ Tc = zc,\ c(\epsilon) = 1\},\ \mu := \inf_{c \in M} \|c\|^2 .$$

Um $M \neq \emptyset$ einzusehen, wähle man $c \in l^2(\Sigma^*),\ c \neq 0$, einen beliebigen Eigenvektor von T zum Eigenwert z. Sei $s' \in \Sigma^*$, sodass $|s'| = \min_{s \in \Sigma^*}\{|s| :\ c(s) \neq 0\}$.
Definiere nun $\tilde{c} \in l^2(\Sigma^*)$, sodass $\tilde{c}(s) = \frac{c(ss')}{c(s')},\ s \in \Sigma^*$. Gemäß Lemma 1.24 ist $\tilde{c}$ ein Eigenvektor von T zum Eigenwert z und damit ein Element von M.

Wir setzen

$$v^0 := \epsilon, v^{k+1} = vv^k, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Sei $c \in M$ beliebig aber fest gewählt. Für $k \in \mathbb{N}_0$ definieren wir $c_k \in l^2(\Sigma^*)$ durch

$$c_k(s) = c(swv^k), \quad s \in \Sigma^*.$$

Lemma 1.24 angewendet auf c_k, liefert uns wieder, dass dies ein Eigenvektor zum Eigenwert z ist, womit

$$\|c_k\|^2 \ \geq\ |c_k(\epsilon)|^2\mu, \quad k \in \mathbb{N}_0.$$

Wegen $Tc = zc$ gilt $c(v^{-1}s) + c(ws) = z \cdot c(s)$ und in Folge $c_k(\epsilon) = c(wv^k) = z \cdot c(v^k) - c(v^{k-1})$.

Wir wenden nun die Folge $(c(v^k))_{k\in\mathbb{N}_0}$ auf Lemma 1.22 an und erhalten

$$\begin{aligned}
\|c\|^2 &= \sum_{k=0}^{\infty}(|c(v^k)|^2 + \|c_k\|^2) \\
&\geq \sum_{k=0}^{\infty}(|c(v^k)|^2 + |c_k(\epsilon)|^2 \cdot \mu) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}(|c(v^k)|^2 + |z \cdot c(v^k) - c(v^{k-1})|^2 \cdot \mu) \\
&= |c(\epsilon)|^2 + |z \cdot c(\epsilon)|^2 \cdot \mu + \sum_{k=1}^{\infty}(|c(v^k)|^2 + |z \cdot c(v^k) - c(v^{k-1})|^2 \cdot \mu) \\
&\geq 1 + |z|^2\mu + (1 - |z|^2) \cdot \mu + \sum_{k=1}^{\infty} |c(v^k)|^2 \\
&\geq 1 + \mu.
\end{aligned}$$

Wegen $\mu = \inf_{c\in M} \|c\|^2$ folgt der Widerspruch $\mu \geq 1 + \mu$. □

1.25 Korollar. Ist $\Sigma^* = \{\epsilon,\ v,\ w,\ vv,\ vw,\ ww,\ vvv,\ vvw,\ \ldots\}$ und sind V und W^* Operatoren auf $l^2(\Sigma^*)$, definiert durch Darstellung (3), dann gilt $\sigma_r(T) = \emptyset$.

Beweis. Für alle $s \in \Sigma^*$ definiere $\overline{s} \in \Sigma^*$ durch

$$\overline{\epsilon} = \epsilon,\ \overline{vs} = w\overline{s},\ \overline{ws} = v\overline{s}, \quad s \in \Sigma^*$$

Also wird v in einem String durch w ersetzt und umgekehrt. Nun definieren wir die offensichtlich unitäre Abbildung U durch

$$U : l^2(\Sigma^*) \longrightarrow l^2(\Sigma^*),\ (Uc)(s) = c(\overline{s}), \quad c \in l^2(\Sigma^*),\ s \in \Sigma^*.$$

Mit Definition 1.16 und Darstellung (3) berechnet man

$$\begin{aligned}
&(U^{-1}VUc)(\epsilon) = (VUc)(\epsilon) = (Uc)(v^{-1}) = 0 = c(w^{-1}) = (Wc)(\epsilon) \\
&(U^{-1}VUc)(vs) = (VUc)(w\bar{s}) = (Uc)(v^{-1}w\bar{s}) = 0 = c(w^{-1}vs) = (Wc)(vs) \\
&(U^{-1}VUc)(ws) = (VUc)(v\bar{s}) = (Uc)(v^{-1}v\bar{s}) = c(s) = c(w^{-1}ws) = (Wc)(ws)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&(U^{-1}W^*Uc)(\epsilon) = (W^*Uc)(\epsilon) = (Uc)(w) = c(v) = (V^*c)(\epsilon) \\
&(U^{-1}W^*Uc)(s) = (W^*Uc)(\bar{s}) = (Uc)(w\bar{s}) = c(vs) = (V^*c)(s).
\end{aligned}$$

Damit folgt

$$U^{-1}TU = U^{-1}(V + W^*)U = U^{-1}VU + U^{-1}W^*U = W + V^* = T^*.$$

Also sind T und T^* unitär äquivalent. Aus Lemma 1.24 folgt daher $\sigma_\rho(T^*) = \emptyset$. Wegen $\ker(A^*) = \operatorname{ran}(A)^\perp$ für $A \in L_b(\mathcal{H})$, folgt $\sigma_r(T) = \emptyset$. □

Das approximative Punktspektrum und das stetige Spektrum

Wir haben im letzten Abschnitt gezeigt, dass Punkt- sowie Residualspektrum des Operators T leer sind. Es bleibt zu zeigen, dass das stetige Spektrum Obermenge des Einheitskreises ist. Dies ist erfüllt, wenn folgendes Lemma bewiesen wird:

1.26 Lemma. Ist $\Sigma^* = \{\epsilon,\ v,\ w,\ vv,\ vw,\ ww,\ vvv,\ vvw,\ \ldots\}$ und sind V und W^* Operatoren auf $l^2(\Sigma^*)$, definiert durch Darstellung (4), dann gilt $\sigma_{app}(T) \supseteq \{z \in \mathbb{C} :\ |z| \leq 1\}$

Beweis. Aufgrund der Abgeschlossenheit des approximativen Spektrums, reicht es $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} :\ |z| < 1\} \subseteq \sigma_{app}(T)$ zu zeigen. Für $z \in \mathbb{D}$ beliebig aber fest gewählt definieren wir die Folge $(c_n)_{n\in\mathbb{N}_0} \in l^2(\Sigma^*)$ rekursiv durch

$$
\begin{gathered}
c_0(\epsilon) = 1,\ c_0(sw) = c_0(sv) = 0, \quad s \in \Sigma^* \\
c_{n+1}(v^k) = \bar{z}^k,\ c_{n+1}(sw) = z \cdot c_n(s),\ c_{n+1}(swv^{k+1}) = \bar{z}^k \cdot (|z|^2 - 1) \cdot c_n(s),\ s \in \Sigma^*, \\
\text{für } k \in \mathbb{N}_0,\ n \in \mathbb{N}_0
\end{gathered}
$$

Wegen $\Sigma^* = \{v^k :\ k \in \mathbb{N}_0\} \mathbin{\dot\cup} \{sw :\ s \in \Sigma^*\} \mathbin{\dot\cup} \{swv^{k+1} :\ s \in \Sigma^*,\ k \in \mathbb{N}_0\}$ gilt

$$
\|c\|^2 = \sum_{k\in\mathbb{N}_0} |c(v^k)|^2 + \sum_{s\in\Sigma^*} |c(sw)|^2 + \sum_{s\in\Sigma^*} \sum_{k\in\mathbb{N}_0} |c(swv^{k+1})|^2.
$$

Wegen $|z| < 1$ konvergiert $\sum_{k\in\mathbb{N}_0} |\bar{z}|^2$, womit für $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$
\|c_0\|^2 = 1, \qquad \|c_{n+1}\|^2 = \frac{1}{1-|z|^2} + |z|^2 \cdot \|c_n\|^2 + \frac{(|z|^2-1)^2}{1-|z|^2} \cdot \|c_n\|^2 = \frac{1}{1-|z|^2} + \|c_n\|^2 .
$$

Daraus folgt $\|c_n\|^2 = 1 + \frac{n}{1-|z|^2}$ mit Induktion nach $n \in \mathbb{N}_0$.
Um $z \in \sigma_{app}(T)$ zu zeigen, reicht es für $d_n := (T - z)c_n$ zu zeigen, dass $\frac{\|d_n\|}{\|c_n\|} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.
Für $s \in \Sigma^*$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$
d_n(s) = c_n(v^{-1}s) + c_n(ws) - z \cdot c_n(s).
$$

Setzt man in die Definition dieser Terme ein, erhält man

$$
d_0(\epsilon) = c_0(v^{-1}) + c_0(w) - z \cdot c_0(\epsilon) = 0 + 0 - z \cdot 1 = -z
$$

$$
d_0(v) = c_0(\epsilon) + c_0(wv) - z \cdot c_n(v) = 1 - 0 + z \cdot 0 = 1
$$

$$
d_0(ss') = c_0(v^{-1}ss') + c_0(wss') - z \cdot c_0(ss') = 0,\ s' \in \{w, wv, vv\},\ s \in \Sigma^*.
$$

Also gilt $\|d_0\|^2 = 1 + |z|^2$.

Genauso berechnet man:

$$
\begin{aligned}
d_{n+1}(v^k) &= c_{n+1}(v^{-1}v^k) + c_{n+1}(wv^k) - z \cdot c_{n+1}(v^k) \\
&= \bar{z}^{k-1} + \bar{z}^{k-1} \cdot (|z|^2 - 1) \cdot c_n(\epsilon) - z\bar{z}^k \\
&= \bar{z}^{k-1} + \bar{z}^{k-1} \cdot (z\bar{z} - 1) \cdot 1 - z\bar{z}^k \\
&= \bar{z}^{k-1} + z\bar{z}^k - \bar{z}^{k-1} - z\bar{z}^k = 0
\end{aligned}
$$

Für $s \in \Sigma^*$ mit $s = ws'$ für ein $s' \in \Sigma^*$ gilt

$$c_{n+1}(v^{-1}sw) = c_{n+1}(v^{-1}ws'w) = 0 = z \cdot c_n(v^{-1}ws') = z \cdot c_n(v^{-1}s).$$

Im Fall $s = vs'$ für ein $s' \in \Sigma^*$ folgt

$$c_{n+1}(v^{-1}sw) = c_{n+1}(s'w) = z \cdot c_n(s') = z \cdot c_n(v^{-1}s).$$

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} d_{n+1}(sw) &= c_{n+1}(v^{-1}sw) + c_{n+1}(wsw) - z \cdot c_{n+1}(sw) = \\ &= zc_n(v^{-1}s) + zc_n(ws) - z(z \cdot c_n(s)) \\ &= z \cdot d_n(s). \end{aligned}$$

Mit der gleichen Fallunterscheidung begründet man $c_{n+1}(v^{-1}swv^{k+1}) = \bar{z}^k \cdot (|z|^2 - 1) \cdot c_n(v^{-1}s)$, weshalb

$$\begin{aligned} d_{n+1}(swv^{k+1}) &= c_{n+1}(v^{-1}swv^{k+1}) + c_{n+1}(wswv^{k+1}) - z \cdot c_{n+1}(swv^{k+1}) \\ &= \bar{z}^k \cdot (|z|^2 - 1) \cdot c_n(v^{-1}s) + \bar{z}^k \cdot (|z|^2 - 1) \cdot c_n(ws) - z \cdot \bar{z}^k \cdot (|z|^2 - 1) \cdot c_n(s) \\ &= \bar{z}^k \cdot (|z|^2 - 1) \cdot (c_n(v^{-1}s) + c_n(ws) - z \cdot c_n(s)) \\ &= \bar{z}^k \cdot (|z|^2 - 1) \cdot d_n(s). \end{aligned}$$

Insgesamt erhält man

$$\|d_n + 1\|^2 = |z|^2 \cdot \|d_n\|^2 + \frac{(|z|^2 - 1)^2}{1 - |z|^2} \cdot \|d_n\|^2 = \|d_n\|^2 .$$

Also folgt $\|d_n\|^2 = 1 + |z|^2$ und damit $z \in \sigma_{app}(T)$. □

Literaturverzeichnis

[G] W.H. Greub, *Multilineare Algebra*, Grundlehren Band 136, Springer, 1967

[KM] A.I. Kostrikin und Yu.I. Manin, *Linear Algebra and Geometry*, Gordon and Breach, New York, 1989

[B] B. Bodenstorfer, *The spectrum of annihilation plus orthogonal creation*, Acta Math. Hungar. 90 (2001), no. 3, p. 199–207