Messbarkeit und Integrierbarkeit in Banachräumen

Clemens Schindler

Seminararbeit aus Analysis
2017S

Inhaltsverzeichnis

Zusammenfassung

In dieser Seminararbeit werden zunächst Funktionen mit Werten in Banachräumen im Lichte des bekannten Konzeptes der Messbarkeit untersucht. Der Verlust der Approximierbarkeit durch Treppenfunktionen gibt Anlass zur Definition der *starken Messbarkeit*, die dann durch den Messbarkeitssatz von Pettis charakterisiert wird. Starke Messbarkeit ist auch der Schlüssel zum *Bochner-Integral*, einer Verallgemeinerung des Lebesgue-Integrals. Abschließend wird dieser Integralbegriff verwendet, um ein Analogon des bekannten Darstellungssatzes von Riesz zu beweisen und die als Integrale bezüglich eines regulären Maßes darstellbaren Operatoren aus $L_b(C(S,X),X)$ für einen kompakten Hausdorff-Raum S und einen Banachraum X zu charakterisieren.

Die ersten drei Kapitel folgen weitgehend [N]; Teile stammen auch aus [DU]. Die Gegenbeispiele, Teile von Korollar 1.6 sowie der Abschnitt über das Bochner-Integral nach einem komplexen Maß stammen vom Autor. Das vierte und letzte Kapitel folgt [M], wobei der darin genannte Beweis durch Verwendung der Resultate aus früheren Kapiteln kürzer dargestellt werden konnte.

In der gesamten Arbeit bezeichne $(X, \|\cdot\|)$ einen Banachraum über $\mathbb{C}$ und X' seinen topologischen Dualraum, versehen mit der Abbildungsnorm.

1 Starke Messbarkeit

Sei in diesem Kapitel $(\Omega, \mathfrak{A})$ stets ein Messraum, also $\mathfrak{A}$ eine σ-Algebra auf Ω.
Prinzipiell lässt sich das Problem der Messbarkeit einer Funktion $f : \Omega \to X$ unmittelbar mit den aus der Maßtheorie bekannten Mitteln behandeln: Man betrachtet die von $\|\cdot\|$ auf X erzeugte Topologie $\mathcal{T} := \mathcal{T}(\|\cdot\|)$ und die davon induzierten Borelmengen $\mathcal{B}(X) := \mathcal{B}(\mathcal{T})$. Die Funktion f nennen wir $\mathfrak{A}|\mathcal{B}(X)$-messbar (kurz messbar), wenn $f^{-1}(B) \in \mathfrak{A}$ für alle $B \in \mathcal{B}(X)$. Es zeigt sich aber (vgl. Satz 1.4), dass eine der wichtigsten Eigenschaften von messbaren Funktionen mit Bild in $\mathbb{C}$ oder $\mathbb{C}^n$, nämlich die Approximierbarkeit durch Treppenfunktionen, verloren gehen kann, wenn man unendlichdimensionale Bildräume zulässt. Daher definieren wir:

Definition 1.1.

(i) Eine *Treppenfunktion* ist eine Funktion der Form[1] $\sum_{i=1}^n \mathbb{1}_{A_i} x_i$, $A_i \in \mathfrak{A}, x_i \in X$.

(ii) Eine Funktion $f : \Omega \to X$ heißt *stark messbar*, wenn es eine Folge $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Treppenfunktionen gibt, sodass $f(\omega) = \lim_{n\to\infty} g_n(\omega)$ für alle $\omega \in \Omega$.

Unmittelbar klar ist, dass sowohl die Treppenfunktionen als auch die stark messbaren Funktionen Untervektorräume von X^Ω, dem Raum aller Funktionen $f : \Omega \to X$, bilden, wobei jede Treppenfunktion stark messbar ist. Ist $f : \Omega \to X$ stark messbar und $h : \Omega \to \mathbb{C}$ messbar, so kann man beide Funktionen durch Treppenfunktionen (mit unterschiedlichen Bildräumen) approximieren: $f = \lim_{n\to\infty} g_n$, $h = \lim_{n\to\infty} h_n$. Dann gilt $h \cdot f = \lim_{n\to\infty} h_n \cdot g_n$, wobei die $h_n \cdot g_n$ Treppenfunktionen $\Omega \to X$ sind, sodass $h \cdot f : \Omega \to X$ stark messbar ist.

Mit demselben Beweis wie im reell-/komplexwertigen Fall existiert für jede Treppenfunktion eine *Standardform*, d.h. $A_i \neq \emptyset$ und $A_i \cap A_j = \emptyset$, $x_i \neq x_j$ für $i \neq j$. Damit sieht man auch, dass jede Treppenfunktion $g = \sum_{i=1}^n \mathbb{1}_{A_i} x_i$ stets messbar ist:

$$g^{-1}(B) = \bigcup_{\substack{i=1,\\ x_i \in B}}^{n} A_i \in \mathfrak{A}, \quad \text{als endliche Vereinigung messbarer Mengen.}$$

Eine weitere Möglichkeit, von Messbarkeit zu sprechen, die sich sofort anbietet, ist die der schwachen Messbarkeit.

[1] Man beachte die Reihenfolge in der Multiplikation von Skalar und Vektor.

Definition 1.2. Eine Funktion $f : \Omega \to X$ heißt *schwach messbar*, wenn für jedes $x' \in X'$ die Funktion $\langle f, x' \rangle := x' \circ f : \Omega \to \mathbb{C}$ messbar im klassischen Sinne, also bzgl. der σ-Algebren $\mathfrak{A}$ und $\mathcal{B}(\mathbb{C})$, ist.

Aus der Stabilität der komplexwertigen messbaren Funktionen bzgl. punktweiser Grenzwerte, der Approximierbarkeit ebenjener Funktionen durch Treppenfunktionen und
$\mathbb{C}' = \{(z \mapsto \alpha \cdot z) : \alpha \in \mathbb{C}\}$ folgt, dass für $X = \mathbb{C}$ die drei Konzepte von Messbarkeit zusammenfallen. Wie der Messbarkeitssatz von Pettis zeigen wird, liegt dies daran, dass $\mathbb{C}$ separabel ist; es gibt eine abzählbare, dichte Menge. Bevor wir diesen Satz beweisen können, benötigen wir jedoch noch einige technische Aussagen zur Separabilität.

Lemma 1.3.

(i) Ist $M \subseteq X$ separabel (bzgl. der Spurtopologie) und $N \subseteq M$, dann ist auch N separabel.

(ii) Ist $M \subseteq X$ separabel, so gibt es eine Folge $(x'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus normierten Funktionalen in X' mit $\|y\| = \sup_{n\in\mathbb{N}} |\langle y, x'_n \rangle|$ für alle $y \in M$.

Beweis. (i) Nach [A2, Proposition 12.14.7] ist für einen metrischen Raum die Separabilität äquivalent zur Existenz einer abzählbaren Basis der zugeordneten Topologie. Teilmengen von X sind klarerweise wieder metrische Räume, sodass die Aussage daraus folgt, dass sich das zweite Abzählbarkeitsaxiom auf Teilräume überträgt.

(ii) Sei $\{y_m : m \in \mathbb{N}\}$ dicht in M. Nach dem Satz von Hahn-Banach, [FA, Korollar 5.2.4], gilt $\|x\| = \sup\big\{|\langle x, x' \rangle| : x' \in X', \|x'\| = 1\big\}$ für alle $x \in X$. Ist $(\epsilon_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge aus positiven Zahlen, dann gibt es also für alle $(m, k) \in \mathbb{N}^2$ ein $x'_{mk} \in X'$ mit $\|x'_{mk}\| = 1$ und $\big|\langle y_m, x'_{mk} \rangle\big| \geq (1 - \epsilon_k) \|y_m\|$. Seien $y \in Y$ und $\delta > 0$ mit oBdA $\delta < 1$ gegeben. Dann gibt es ein $k_0 \in \mathbb{N}$ mit $\epsilon_{k_0} \leq \delta$ und ein $M \in \mathbb{N}$ mit $\|y - y_M\| \leq \delta$. Es folgt

$$(1-\delta)\|y\| \leq (1-\epsilon_{k_0})\|y\| \leq (1-\epsilon_{k_0})\|y_M\| + (1-\epsilon_{k_0})\|y - y_M\| \leq \Big|\big\langle y_M, x'_{M,k_0}\big\rangle\Big| + \delta \leq$$
$$\Big|\big\langle y, x'_{M,k_0}\big\rangle\Big| + \underbrace{\Big|\big\langle y_M - y, x'_{M,k_0}\big\rangle\Big|}_{\leq \|y_M - y\| \leq \delta} + \delta \leq \sup_{(m,k)\in\mathbb{N}^2} \big|\langle y, x'_{mk}\rangle\big| + 2\delta.$$

Da $\delta > 0$ beliebig war, folgt $\|y\| \leq \sup_{(m,k)\in\mathbb{N}^2} \big|\langle y, x'_{mk}\rangle\big|$; die Ungleichung
$\sup_{(m,k)\in\mathbb{N}^2} \big|\langle y, x'_{mk}\rangle\big| \leq \|y\|$ ist offensichtlich. Ist $(m(n), k(n))_{n\in\mathbb{N}}$ eine Durchnummerierung von $\mathbb{N}^2$ und definieren wir $x'_n := x'_{m(n),k(n)}$, dann folgt das Gewünschte.

□

Damit kommen wir zum schon angekündigten

Satz 1.4 (Messbarkeitssatz von Pettis, Fassung I)**.** *Sei $f : \Omega \to X$ eine Funktion. Dann sind die folgenden drei Aussagen äquivalent:*

(i) f ist stark messbar.

(ii) f ist messbar und hat separables Bild $f(\Omega) \subseteq X$.

(iii) f ist schwach messbar und hat separables Bild $f(\Omega) \subseteq X$.

Beweis. (i) $\Rightarrow$ (ii): Sei $f = \lim_{n\to\infty} f_n$ punktweise mit Treppenfunktionen f_n. Da $\mathcal{B}(X)$ von den offenen Mengen erzeugt wird, folgt die Messbarkeit, wenn $f^{-1}(O) \in \mathfrak{A}$ für alle offenen $O \subseteq X$

gezeigt ist. Definiere dazu für $r > 0$ die Mengen $O_r := \{y \in X : d(y, O^c) > r\}$ $(\subseteq O)$. Da die O_r als offene Mengen in $\mathcal{B}(X)$ enthalten und die f_n messbar sind, genügt es,

$$f^{-1}(O) = \bigcup_{m\in\mathbb{N}} \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bigcap_{k\geq n} f_k^{-1}(O_{1/m}) \tag{1}$$

zu zeigen.

Aus $f_k(\omega) \in O_{1/m}$ für alle $k \geq n$ folgt $f(\omega) \in \overline{O_{1/m}} \subseteq O_{1/2m} \subseteq O$, d.h. $\omega \in f^{-1}(O)$. Ist andererseits ω im Komplement der rechten Seite enthalten, dann gibt es für alle $m, n \in \mathbb{N}$ ein $k(m,n) \geq n$ mit $d(f_{k(m,n)}(\omega), O^c) \leq 1/m$. Die Folge $(f_{k(n,n)})_{n\in\mathbb{N}}$ ist nun eine Teilfolge von $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, sodass $f(\omega) = \lim_{n\to\infty} f_{k(n,n)}(\omega)$, also

$$d(f(\omega), O^c) = \lim_{n\to\infty} \underbrace{d(f_{k(n,n)}(\omega), O^c)}_{\leq \frac{1}{n}} = 0.$$

Aus der Analysis ist bekannt, dass dies gleichbedeutend ist zu $f(\omega) \in \overline{O^c} = O^c$, sodass ω im Komplement der linken Seite enthalten ist.
Weiters gilt $f(\Omega) \subseteq \overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} f_n(\Omega)} =: M$. Da jedes f_n endlichen Bildbereich hat, ist M separabel und nach Lemma 1.3(i) auch $f(\Omega)$.
(ii) $\Rightarrow$ (iii): Folgt sofort aus der bekannten Tatsache, dass Verkettungen messbarer Funktionen wieder messbar sind, und daraus, dass die $x' \in X'$ als stetige Funktionen messbar sind.
(iii) $\Rightarrow$ (i): Sei $\{y_n : n \in \mathbb{N}\}$ eine dichte Teilmenge von $f(\Omega)$. Klarerweise ist auch

$$D := \{y_n - y_m : n, m \in \mathbb{N}\}$$

abzählbar, sodass $M := \overline{D}$ separabel ist; M umfasst sicher $\{f(\omega) - y_m : \omega \in \Omega, m \in \mathbb{N}\}$. Nach Lemma 1.3(ii) gibt es eine Folge $(x'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus normierten Vektoren in X' mit $\|z\| = \sup_{n\in\mathbb{N}} |\langle z, x'_n\rangle|$ für alle $z \in M$. Mit den $\langle f, x'_n\rangle$ ist für festes $k \in \mathbb{N}$ auch

$$\omega \mapsto \sup_{n\in\mathbb{N}} \left|\left\langle f(\omega) - y_k, x'_n\right\rangle\right| = \|f(\omega) - y_k\| \tag{2}$$

messbar. Um die punktweise gegen f konvergente Folge von Treppenfunktionen zu finden, benötigen wir zunächst Hilfsfunktionen. Sei dazu für $\omega \in \Omega$

$$k(n,\omega) := \min\left\{k \in \{1, ..., n\} : \|f(\omega) - y_k\| = \min_{1\leq j\leq n} \|f(\omega) - y_j\|\right\},$$

und setze $g_n(\omega) := y_{k(n,\omega)}$. Da $\{y_n : n \in \mathbb{N}\}$ dicht in $f(\Omega)$ ist, gilt $\lim_{n\to\infty} g_n(\omega) = f(\omega)$ für alle $\omega \in \Omega$. Jedes g_n nimmt offenbar nur endlich viele Werte an, nämlich höchstens $y_1, ..., y_n$. Also ist nur noch zu zeigen, dass $g_n^{-1}(\{y_k\}) \in \mathfrak{A}$ für alle $1 \leq k \leq n$. Das folgt aber sofort aus

$$\begin{aligned} g_n^{-1}(\{y_k\}) = \left\{\omega \in \Omega : \|f(\omega) - y_k\| = \min_{1\leq j\leq n} \|f(\omega) - y_j\|\right\} \cap \\ \bigcap_{i=1}^{k-1} \left\{\omega \in \Omega : \|f(\omega) - y_i\| > \min_{1\leq j\leq n} \|f(\omega) - y_j\|\right\} \end{aligned}$$

und der Messbarkeit von (2). $\square$

Bemerkung 1.5. Mit demselben Beweis wie im Schritt (i) $\Rightarrow$ (ii), insbesondere unter Verwendung von (1), zeigt man, dass der punktweise Grenzwert messbarer Funktionen mit Werten in X wieder messbar ist. Das ist insofern bemerkenswert als der klassische Beweis dieser für reellwertige

Funktionen wohlbekannten Tatsache[2] entscheidend auf der Ordnungsrelation auf $\mathbb{R}$ aufbaut, indem er $\liminf$ und $\limsup$ benützt. Die Approximationseigenschaft durch Treppenfunktionen fußt in $\mathbb{R}$ genauso auf der Ordnung, lässt sich aber nicht vollständig verallgemeinern.

Korollar 1.6.

(i) Seien $(\Omega', \mathfrak{A}')$ ein Messraum, $g : \Omega' \to \Omega$ messbar und $f : \Omega \to X$ stark messbar. Dann ist auch $f \circ g : \Omega' \to X$ stark messbar.

(ii) Seien $(Y, \|\cdot\|_Y)$ ein weiterer Banachraum, $g : X \to Y$ stetig und $f : \Omega \to X$ stark messbar. Dann ist auch $g \circ f : \Omega \to Y$ stark messbar.

(iii) Sind Funktionen ($n \in \mathbb{N}$) $f_n : \Omega \to X$ stark messbar und punktweise konvergent, so ist auch die Grenzfunktion $f : \Omega \to X$ stark messbar.

(iv) Sei $(S, \mathcal{T})$ ein kompakter topologischer Raum. Dann ist jede stetige Funktion $f : S \to X$ stark messbar, wenn man S mit den Borelmengen $\mathcal{B}(\mathcal{T})$ versieht.

Beweis.

(i) Die Funktion $f \circ g$ hat nach Lemma 1.3(i) wegen $(f \circ g)(\Omega') \subseteq f(\Omega)$ separables Bild und ist als Verkettung messbarer Funktionen messbar, sodass die Aussage aus dem Messbarkeitssatz von Pettis folgt.

(ii) Es gilt $f(\Omega) = \overline{D}^{f(\Omega)} = \overline{D} \cap f(\Omega)$ für ein abzählbares $D \subseteq X$, d.h. $f(\Omega) \subseteq \overline{D}$. Da g stetig ist, gilt weiter
$$(g \circ f)(\Omega) \subseteq g(\overline{D}) \subseteq \overline{g(D)},$$
sodass $g \circ f$ nach Lemma 1.3(i) separables Bild hat; $g(D)$ ist ja abzählbar. $g \circ f$ ist als Verkettung messbarer Funktionen wieder messbar.

(iii) Wegen der Stetigkeit der Funktionale $x' \in X'$ ist $\langle f, x' \rangle = \lim_{n\to\infty} \langle f_n, x' \rangle$ als punktweiser Grenzwert messbarer komplexwertiger Funktionen messbar, d.h. f ist schwach messbar. Wie im letzten Punkt gilt $f_n(\Omega) \subseteq \overline{D_n}$ für abzählbare Mengen D_n. Daraus folgt
$$f(\Omega) \subseteq \overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} f_n(\Omega)} \subseteq \overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} D_n}.$$
Da $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} D_n$ wieder abzählbar ist, ergibt sich mit Lemma 1.3(i) die Separabilität von $f(\Omega)$.

(iv) Die Menge $M := f(S)$ ist als stetiges Bild eines Kompaktums wieder kompakt. Da X insbesondere ein metrischer Raum ist, ist M aber auch metrisch. Aus [A2, Korollar 12.14.6] folgt dann, dass M als kompakter, metrischer Raum separabel ist. Schließlich ist f als stetige Funktion sicher messbar.

□

Die Kompaktheitsvoraussetzung in Korollar 1.6(iv) ist notwendig, wie das folgende Beispiel zeigt.

Beispiel 1.7. Sei X ein nichtseparabler Banachraum, beispielsweise $\ell^2(\mathbb{R})$, und $f : X \to X$ die Identität auf X. Dann ist f klarerweise stetig und damit messbar, hat aber nichtseparables Bild.

[2] Die Verallgemeinerung auf komplexwertige Funktionen ist dann offensichtlich.

2 μ-starke Messbarkeit

Wir spezialisieren nun auf Maßräume $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$, die wir als σ-endlich und vollständig annehmen. Wesentlich ist dabei vor allem die erste Voraussetzung, da nach [R2, Theorem 1.36] jeder Maßraum eine Vervollständigung hat. Beim Übergang zu ebenjener erhalten wir nur mehr messbare Mengen und damit mehr messbare Funktionen.

Definition 2.1.

(i) Eine μ-*Treppenfunktion*[3] ist eine Treppenfunktion $\sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{A_i} x_i$ mit $\mu(A_i) < +\infty$ für alle $i \in \{1, \dots, n\}$.

(ii) Eine Funktion $f : \Omega \to X$ heißt μ-*stark messbar*, wenn es eine Folge $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von μ-Treppenfunktionen gibt, sodass $f(\omega) = \lim_{n \to \infty} g_n(\omega)$ für μ-fast alle $\omega \in \Omega$.

(iii) Eine Funktion $f : \Omega \to X$ habe μ-*f.ü. separables Bild*[4], wenn es eine μ-Nullmenge $N \in \mathfrak{A}$ gibt, sodass $f(\Omega \setminus N) \subseteq X$ separabel ist.

Wie in Kapitel 1 gilt, dass die μ-Treppenfunktionen und die μ-stark messbaren Funktionen für sich genommen Vektorräume bilden und letztere unter Multiplikation mit messbaren Funktionen $h : \Omega \to \mathbb{C}$ abgeschlossen sind.

Mit der folgenden Aussage können wir die Ergebnisse des letzten Kapitels auf μ-starke Messbarkeit verallgemeinern. Außerdem zeigt sie, dass μ-starke Messbarkeit eine Verallgemeinerung der starken Messbarkeit ist[5].

Lemma 2.2. *Für eine Funktion $f : \Omega \to X$ sind die folgenden beiden Aussagen äquivalent:*

(i) f ist μ-stark messbar.

(ii) Es gibt eine stark messbare Funktion $\tilde{f} : \Omega \to X$ mit $f = \tilde{f}$ μ-f.ü.

Insbesondere folgt aus der μ-starken Messbarkeit von f auch die von jedem f', das μ-f.ü. mit f übereinstimmt.

Beweis.
(i) $\Rightarrow$ (ii): Sei $f = \lim_{n\to\infty} g_n$ auf $\Omega \setminus N$ mit $\mu(N) = 0$ für μ-Treppenfunktionen g_n. Dann ist $\tilde{g}_n := \mathbb{1}_{N^c} \cdot g_n$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine Treppenfunktion, wobei $\lim_{n\to\infty} \tilde{g}_n = \mathbb{1}_{N^c} \cdot f =: \tilde{f}$ stark messbar ist. Aus $\mu(N) = 0$ folgt $f = \tilde{f}$ μ-f.ü.
(ii) $\Rightarrow$ (i): Sei $f = \tilde{f}$ μ-f.ü. und $\tilde{f} = \lim_{n\to\infty} \tilde{g}_n$ punktweise mit Treppenfunktionen $\tilde{g}_n$. Wegen der σ-Endlichkeit gibt es eine monoton wachsende Folge messbarer Mengen $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \Omega$ und $\mu(A_n) < +\infty$, $n \in \mathbb{N}$. Die Funktionen $g_n := \mathbb{1}_{A_n} \cdot \tilde{g}_n$ sind μ-Treppenfunktionen mit $\lim_{n\to\infty} g_n = \tilde{f}$ punktweise, also $f = \lim_{n\to\infty} g_n$ μ-f.ü. $\square$

Mit Lemma 2.2 ergibt sich leicht folgende Version des Messbarkeitssatzes von Pettis.

Satz 2.3 (Messbarkeitssatz von Pettis, Fassung II)**.** *Sei $f : \Omega \to X$ eine Funktion. Dann sind die folgenden drei Aussagen äquivalent:*

(i) f ist μ-stark messbar.

(ii) f ist messbar und hat μ-f.ü. separables Bild.

[3] Die Zusatzbedingung wird bei der Einführung des Integrals in Kapitel 3 unabdingbar sein.
[4] engl: μ-separably valued; vom Autor übersetzt
[5] Hierfür ist σ-Endlichkeit gefordert.

(iii) f ist schwach messbar und hat μ-f.ü. separables Bild.

Beweis.
(i) $\Rightarrow$ (ii): Nach Lemma 2.2 gibt es ein stark messbares $\tilde{f}$ mit $f = \tilde{f}$ μ-f.ü., das wegen Fassung I des Pettis'schen Messbarkeitssatzes, Satz 1.4, separables Bild hat. Ist $f(\omega) = \tilde{f}(\omega)$ für $\omega \in \Omega \setminus N$ mit $\mu(N) = 0$, dann ist $f(\Omega \setminus N) = \tilde{f}(\Omega \setminus N) \subseteq \tilde{f}(\Omega)$ nach Lemma 1.3(i) separabel. Da $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ vollständig ist, vererbt sich die Messbarkeit[6] von $\tilde{f}$ auf f.
(ii) $\Rightarrow$ (iii): Folgt wie im Beweis von Fassung I.
(iii) $\Rightarrow$ (i): Sei $N \in \mathfrak{A}$ eine μ-Nullmenge, für die $f(\Omega \setminus N) \subseteq X$ separabel ist. Die Funktion $\tilde{f} := \mathbb{1}_{N^c} \cdot f$ hat separables Bild, denn ist D dicht in $f(\Omega \setminus N)$, so ist $D \cup \{0\}$ dicht in $\tilde{f}(\Omega)$. Zudem stimmt $\tilde{f}$ μ-f.ü. mit f überein, womit $\left\langle \tilde{f}, x' \right\rangle = \langle f, x' \rangle$ μ-f.ü. für alle $x' \in X'$. Wegen der Vollständigkeit ist $\tilde{f}$ daher schwach messbar. Nach Fassung I des Pettis'schen Messbarkeitssatzes, Satz 1.4, ist $\tilde{f}$ stark messbar, sodass aus Lemma 2.2 die μ-starke Messbarkeit von f folgt. $\square$

Korollar 2.4.

(i) Seien $(Y, \|\cdot\|_Y)$ ein weiterer Banachraum, $g : X \to Y$ stetig und $f : \Omega \to X$ μ-stark messbar. Dann ist auch $g \circ f : \Omega \to Y$ μ-stark messbar.

(ii) Sind Funktionen $f_n : \Omega \to X$ $(n \in \mathbb{N})$ μ-stark messbar und μ-f.ü. konvergent, so ist auch die Grenzfunktion $f : \Omega \to X$ μ-stark messbar.

(iii) Ist X separabel, so sind alle vier Messbarkeitsbegriffe, starke Messbarkeit, μ-starke Messbarkeit, Messbarkeit und schwache Messbarkeit, äquivalent.

Beweis.

(i) Nach Lemma 2.2 gibt es ein stark messbares $\tilde{f} : \Omega \to X$ mit $f = \tilde{f}$ μ-f.ü. Dann gilt $g \circ f = g \circ \tilde{f}$ μ-f.ü., wobei die rechte Seite nach Korollar 1.6(ii) stark messbar ist. Wiederum aus Lemma 2.2 folgt jetzt die Aussage.

(ii) Sind N_n die Nullmengen, sodass $f_n(\Omega \setminus N_n)$ separabel ist, und N_0 die Ausnahmenullmenge zur Konvergenz, so ist $N := \bigcup_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}} N_n$ ebenfalls eine Nullmenge, sodass $f_n = \mathbb{1}_{N^c} \cdot f_n =: \tilde{f}_n$ und $f = \mathbb{1}_{N^c} \cdot f =: \tilde{f}$, jeweils μ-f.ü. Die $\tilde{f}_n$ sind stark messbar und konvergieren punktweise gegen $\tilde{f}$. Letztere ist infolge ebenfalls stark messbar. Aus Lemma 2.2 folgt nun die Aussage.

(iii) Die letzte Aussage ist klar.

$\square$

In Korollar 2.4(iii) findet sich auch die bekannte Tatsache wieder, dass eine Funktion $f : \Omega \to \mathbb{C}^n$ genau dann messbar ist, wenn alle ihre Komponentenfunktionen messbar sind.

Korollar 1.6(i) lässt sich nicht auf μ-starke Messbarkeit verallgemeinern, wie man an folgendem Beispiel sieht.

Beispiel 2.5. Definiere $\Omega := [0,1] \cup \{2\}$, $\mathfrak{A} := \mathcal{B} \cap \Omega$[7] und μ als das Punktmaß in 2, $\mu(A) := \mathbb{1}_A(2)$. $X := \ell^2([0,1])$ ist sogar ein Hilbertraum und hat die Orthonormalbasis $\{e_t : t \in [0,1]\}$, wobei $e_t := (\delta_{st})_{s \in [0,1]}$. Die Funktion $f : \Omega \to X$,

$$f(\omega) := \begin{cases} e_\omega, & \omega \in [0,1] \\ 0, & \omega = 2 \end{cases}$$

[6] Genau wegen dieser Tatsache ist Vollständigkeit gefordert worden.
[7] Spur-σ-Algebra der Borelmengen auf Ω

stimmt μ-f.ü. mit der Nullfunktion überein, ist daher nach Lemma 2.2 μ-stark messbar. Definiere weiter $\Omega' := \Omega$, $\mathfrak{A}' := \mathfrak{A}$, μ' als die Einschränkung des Lebesgue-Maßes auf Ω und $g = \mathrm{id}_\Omega$. Dann ist $g : \Omega' \to \Omega$ offenbar $\mathfrak{A}'|\mathfrak{A}$ messbar und $(f \circ g)(\omega) = e_\omega$, $\omega \in \Omega'$. Da $(f \circ g)(A)$ genau dann separabel ist, wenn $|A| \leq \aleph_0$, und das Lebesgue-Maß (auf Ω') keine coabzählbaren Nullmengen hat, hat $f \circ g$ nicht μ'-f.ü. separables Bild. Damit ist $f \circ g$ nicht μ'-stark messbar.

3 Bochner-Integral

Sei weiterhin $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein σ-endlicher und vollständiger Maßraum. In diesem Kapitel wollen wir eine Verallgemeinerung des bekannten Lebesgue-Integrals für μ-stark messbare Funktionen einführen.

Definition 3.1.

(i) Sei $g = \sum_{i=1}^n \mathbb{1}_{A_i} x_i$ eine μ-Treppenfunktion in Standardform. Dann definieren wir[8]

$$\int_\Omega g\, d\mu := \sum_{i=1}^n \mu(A_i) x_i.$$

(ii) Sei $f : \Omega \to X$ eine μ-stark messbare Funktion. Dann heißt f *(μ-)Bochner-integrierbar* oder einfach *integrierbar*, wenn es eine Folge $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von μ-Treppenfunktionen gibt mit

$$\lim_{n\to\infty} g_n = f \quad \mu\text{-fü} \quad \text{und} \tag{3a}$$

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega \|f - g_n\|\ d\mu = 0. \tag{3b}$$

In diesem Fall ist das *Bochner-Integral* von f nach μ definiert durch

$$\int_\Omega f\, d\mu := \lim_{n\to\infty} \int_\Omega g_n\, d\mu. \tag{4}$$

Bemerkung 3.2. Diese Definition ist etwas redundant, da die starke μ-Messbarkeit per definitionem aus (3a) folgt. Außerdem könnte man auch nur von (3b) ausgehen, da - wie aus der Maßtheorie bekannt - für eine Teilfolge dann auch (3a) gilt. Weiters beachte man, dass der Integrand in (3b) messbar ist: $f - g_n$ ist μ-stark messbar, insbesondere messbar (nach dem Messbarkeitssatz von Pettis, Satz 2.3), und $\|\cdot\| : X \to [0, +\infty)$ ist stetig.

Wie im skalarwertigen Fall (siehe [K, Lemma 9.6]) zeigt man, dass man das Integral einer μ-Treppenfunktion von jeder beliebigen Darstellung aus bilden kann und nicht auf die Standardform zurückgreifen muss. Damit folgt für Treppenfunktionen die Linearität des Integrals sowie $\left\|\int_\Omega g\, d\mu\right\| \leq \int_\Omega \|g\|\ d\mu$. Für den Nachweis dieser Ungleichung stellt man g in Standardform dar, da dann $\|g\| = \sum_{i=1}^n \mathbb{1}_{A_i} \cdot \|x_i\|$ gilt. Durch Blick auf die Definition von μ-Treppenfunktionen ist mit dieser Formel auch klar, dass $\|g\|$ Lebesgue-integrierbar ist.

Es ist nicht auf Anhieb klar, dass (4) einen Vektor aus X wohldefiniert.

Lemma 3.3. *Ist f μ-Bochner-integrierbar, dann ist das Bochner-Integral von f nach μ wohldefiniert.*

[8]Nach Definition ist $\mu(A_i) < +\infty$.

Beweis. Zu zeigen ist, dass der Grenzwert in (4) existiert und nicht von der Wahl der Folge $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in (3a)-(3b) abhängt. Wegen

$$\begin{aligned}\left\|\int_\Omega g_n\,d\mu - \int_\Omega g_m\,d\mu\right\| = \left\|\int_\Omega g_n - g_m\,d\mu\right\| &\leq \int_\Omega \|g_n - g_m\|\;d\mu\\ &\leq \int_\Omega \|g_n - f\|\;d\mu + \int_\Omega \|f - g_m\|\;d\mu\end{aligned}$$

und (3b) ist $(\int_\Omega g_n\,d\mu)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge im Banachraum X, womit sie konvergent ist.

Ist $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine weitere Folge von μ-Treppenfunktionen mit (3a)-(3b), dann folgt mit analoger Rechnung

$$\left\|\int_\Omega g_n\,d\mu - \int_\Omega h_n\,d\mu\right\| \leq \int_\Omega \|g_n - f\|\;d\mu + \int_\Omega \|f - h_n\|\;d\mu\,,$$

also

$$\begin{aligned}\left\|\lim_{n\to\infty}\int_\Omega g_n\,d\mu - \lim_{n\to\infty}\int_\Omega h_n\,d\mu\right\| &= \lim_{n\to\infty}\left\|\int_\Omega g_n\,d\mu - \int_\Omega h_n\,d\mu\right\|\\ &\leq \limsup_{n\to\infty}\left(\int_\Omega \|g_n - f\|\;d\mu + \int_\Omega \|f - h_n\|\;d\mu\right) = 0.\end{aligned}$$

□

Da die Folge approximierender Treppenfunktionen also beliebig gewählt werden kann, ist unmittelbar klar, dass das Bochner-Integral linear ist. Außerdem folgt, dass die Definitionen 3.1(i) und (ii) konsistent sind, indem man für eine μ-Treppenfunktion g in (3a)-(3b) die konstante Folge $g_n := g$ wählt. Weiters sieht man, dass mit einer μ-stark messbaren Funktion auch alle damit μ-f.ü. übereinstimmenden Funktionen integrierbar sind, wobei die Integrale gleich sind.

Das folgende Ergebnis gemeinsam mit Korollar 2.4(iii) zeigt, dass für $X = \mathbb{C}$ das Bochner-Integral mit dem Lebesgue-Integral zusammenfällt, Ersteres also eine Verallgemeinerung des bekannten Integrals ist.

Satz 3.4. *Eine μ-stark messbare Funktion $f : \Omega \to X$ ist genau dann Bochner-integrierbar, wenn $\|f\| \in L^1(\Omega, \mathfrak{A}, \mu) =: L^1(\mu)$, d.h. $\int_\Omega \|f\|\;d\mu < +\infty$.*

Beweis. ad „⇒“: Sei $(g_n)n \in \mathbb{N}$ die Folge aus (3a)-(3b) und $N \in \mathbb{N}$ so gewählt, dass $\int_\Omega \|f - g_N\|\;d\mu \leq 1$. Dann gilt

$$\int_\Omega \|f\|\;d\mu \leq \int_\Omega \|f - g_N\|\;d\mu + \int_\Omega \|g_N\|\;d\mu \leq 1 + \int_\Omega \|g_N\|\;d\mu < +\infty.$$

ad „⇐“: Da f μ-stark messbar ist, gilt $f = \lim_{n\to\infty} g_n$ μ-f.ü. für μ-Treppenfunktionen g_n. Definiert man $B_n := \{\omega \in \Omega : \|g_n(\omega)\| \leq 2\,\|f(\omega)\|\}$ und $\tilde{g}_n := \mathbb{1}_{B_n} \cdot g_n$, dann gilt offenbar $f = \lim_{n\to\infty} \tilde{g}_n$ μ-f.ü. (d.h. (3a)) und $\|\tilde{g}_n\| \leq 2\,\|f\|$ bzw. $\|f - \tilde{g}_n\| \leq 3\,\|f\| \in L^1(\mu)$. Der Satz über die Konvergenz durch Majorisierung zeigt nun (3b), also die Bochner-Integrierbarkeit von f. □

Lemma 3.5. *Sei $f : \Omega \to X$ Bochner-integrierbar, $(Y, \|\cdot\|_Y)$ ein weiterer Banachraum und $T \in L_b(X,Y)$. Dann ist auch $Tf : \Omega \to Y$ Bochner-integrierbar, wobei*

$$T\left(\int_\Omega f\,d\mu\right) = \int_\Omega Tf\,d\mu.$$

Insbesondere gilt für jedes $x' \in X'$, dass $\langle f,\, x'\rangle \in L^1(\mu)$ und

$$\left\langle \int_\Omega f\,d\mu,\, x'\right\rangle = \int_\Omega \langle f,\, x'\rangle\;d\mu.$$

Beweis. Ist $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ wie in (3a)-(3b) für f, dann folgt, da T stetig ist, $Tf = \lim_{n\to\infty} Tg_n$ μ-fü. Offenbar sind die Tg_n wieder μ-Treppenfunktionen und erfüllen

$$\int_\Omega \|Tf - Tg_n\|_Y \, d\mu \le \|T\| \int_\Omega \|f - g_n\| \, d\mu \overset{n\to\infty}{\to} 0.$$

$(Tg_n)_{n\in\mathbb{N}}$ erfüllt also (3a)-(3b) für Tf, sodass Tf Bochner-integrierbar ist. Da Integrale von Treppenfunktionen mit linearen Abbildungen vertauschen, gilt dabei

$$\int_\Omega Tf \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega Tg_n \, d\mu = \lim_{n\to\infty} T\left(\int_\Omega g_n \, d\mu\right) = T\left(\lim_{n\to\infty} \int_\Omega g_n \, d\mu\right) = T\left(\int_\Omega f \, d\mu\right).$$

□

Korollar 3.6. *Ist $f : \Omega \to X$ Bochner-integrierbar, dann gilt $\left\|\int_\Omega f \, d\mu\right\| \le \int_\Omega \|f\| \, d\mu$.*

Beweis. Nach Lemma 3.5 gilt für $x' \in X'$ mit $\|x'\| = 1$

$$\left|\left\langle \int_\Omega f \, d\mu, \, x' \right\rangle\right| = \left|\int_\Omega \langle f, \, x'\rangle \, d\mu\right| \le \int_\Omega |\langle f, \, x'\rangle| \, d\mu \le \int_\Omega \|f\| \, d\mu.$$

Aus dem Satz von Hahn-Banach folgt damit

$$\left\|\int_\Omega f \, d\mu\right\| = \sup\left\{\left|\left\langle \int_\Omega f \, d\mu, \, x' \right\rangle\right| : x' \in X', \|x'\| = 1\right\} \le \int_\Omega \|f\| \, d\mu.$$

□

Nimmt man zu Satz 3.4 und Korollar 2.4(iii) noch Lemma 3.5 dazu, so ergibt sich, dass auch für $X = \mathbb{C}^n$ Bochner- und Lebesgue-Integral zusammenfallen.

Als Faustregel gilt, dass sich diejenigen Sätze über das Lebesgue-Integral, die keine Nichtnegativitätsvoraussetzungen haben, auf das Bochner-Integral übertragen lassen. Als Beispiel der vielen derartigen Resultate sei der Satz von der beschränkten Konvergenz angeführt.

Satz 3.7 (von Lebesgue über die beschränkte Konvergenz)**.** *Seien $f_n : \Omega \to X$, $n \in \mathbb{N}$, Bochner-integrierbare Funktionen, die μ-f.ü. gegen eine Grenzfunktion $f : \Omega \to X$ konvergieren. Weiters gebe es ein $h \in L^1(\mu)$ mit $\|f_n\| \le h$ μ-f.ü. Dann gilt $\lim_{n\to\infty} \int_\Omega \|f - f_n\| \, d\mu = 0$. Insbesondere ist f Bochner-integrierbar mit*

$$\int_\Omega f \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n \, d\mu. \tag{5}$$

Beweis. Nach Korollar 2.4(iii) ist f μ-stark messbar. Klarerweise gilt $\|f\| \le h$ μ-f.ü., sodass einerseits f wegen Satz 3.4 integrierbar ist und andererseits $\|f - f_n\| \le 2h$ μ-f.ü. gilt. Das klassische Resultat angewandt auf $\|f - f_n\|$ liefert nun $\lim_{n\to\infty} \int_\Omega \|f - f_n\| \, d\mu = 0$. Daraus folgt mit Korollar 3.6 die Beziehung (5). □

Für eine messbare Funktion $f : \Omega \to \mathbb{C}^n$ ist bekannt bzw. sieht man aus Satz 3.4, dass sie genau dann integrierbar ist, wenn alle ihre Komponentenfunktionen integrierbar sind. Es ist zu erwarten, dass man in allgemeinen Banachräumen diese Eigenschaft verliert. Allerdings stellt sich die Frage, ob sie daran hängt, dass $\mathbb{C}^n$ endlichdimensional ist, oder ob Hilberträume ausreichend sind. Das folgende Beispiel zeigt, dass Ersteres der Fall ist.

Beispiel 3.8. Sei H der separable, unendlichdimensionale Hilbertraum $\ell^2(\mathbb{N})$ mit Orthonormalbasis $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$, wobei $e_n := (\delta_{mn})_{m\in\mathbb{N}}$. Seien weiters $\Omega = (0,1)$, $\mathfrak{A} := \mathcal{B} \cap \Omega$ und μ das Lebesgue-Maß auf Ω. Definiere für $n \in \mathbb{N}$ die Funktionen

$$f_n : \begin{cases} \Omega \to \mathbb{C} \\ t \mapsto \frac{2^n}{n} \mathbb{1}_{(2^{-n}, 2^{-(n-1)})}(t) \end{cases}$$

und damit $f : \Omega \to H$ durch $f(t) := \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) e_n$. Da für jedes $t \in \Omega$ höchstens ein $f_n(t)$ von 0 verschieden ist, ist f wohldefiniert. Jedes Funktional in H' kann man in der Form $(\cdot, v)$ schreiben mit einem $v \in H$, das sich als $v = \sum_{n=1}^{\infty} (v, e_n) e_n$ ausdrücken lässt. Damit folgt

$$(f(t), v) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n} (v, e_n) \mathbb{1}_{(2^{-n}, 2^{-(n-1)})}(t),$$

f ist also schwach messbar und daher (μ-)stark messbar nach Korollar 2.4(iii). Da die Mengen $(2^{-n}, 2^{-(n-1)})$ disjunkt sind, folgt daraus $|(f(t), v)| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n} |(v, e_n)| \, \mathbb{1}_{(2^{-n}, 2^{-(n-1)})}(t)$. Somit erhalten wir

$$\int_\Omega |(f(t), v)| \; d\mu(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_\Omega \frac{2^n}{n} |(v, e_n)| \, \mathbb{1}_{(2^{-n}, 2^{-(n-1)})}(t) \, d\mu(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} |(v, e_n)| \, .$$

Beachte dabei, dass man das Integral und die Reihe vertauschen darf, da alle Summanden nichtnegativ sind. Nach Cauchy-Schwarz ist dieser Ausdruck endlich, da $(\frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}}$ und $(|(v, e_n)|)_{n\in\mathbb{N}}$ quadratsummierbar sind. Alle Verkettungen von f mit stetigen Funktionalen sind also integrierbar,[9] insbesondere ist f komponentenweise integrierbar. Trotzdem ist f nicht integrierbar: Wieder da die $(2^{-n}, 2^{-(n-1)})$ disjunkt sind, gilt $\|f(t)\| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n} \mathbb{1}_{(2^{-n}, 2^{-(n-1)})}(t)$ und somit

$$\int_\Omega \|f(t)\| \; d\mu(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty.$$

Als nächstes soll eine Verallgemeinerung vom Mittelwertsatz der Integralrechnung bewiesen werden. Hier ist zu beachten, dass dieser Satz im klassischen Fall sehr stark von der Ordnung lebt. Dennoch lässt er sich mithilfe des Satzes von Hahn-Banach auch für das Bochner-Integral zeigen.

Satz 3.9 (Mittelwertsatz für das Bochner-Integral)**.** *Sei $f : \Omega \to X$ Bochner-integrierbar und $\mu(\Omega) = 1$. Dann gilt*

$$\int_\Omega f \, d\mu \in \overline{\mathrm{co}}(f(\Omega)).$$

Also ist das Integral von f in der abgeschlossenen konvexen Hülle ihres Bildbereiches enthalten.

Beweis. Setze $C := \mathrm{co}(f(\Omega))$. Diese Menge ist natürlich konvex, sodass nach einer Folgerung des Satzes von Hahn-Banach, siehe [FA, Korollar 5.2.6],

$$\overline{C} = \bigcap_{\substack{x' \in X', \gamma \in \mathbb{R} \\ C \subseteq (\mathrm{Re}\, x')^{-1}(-\infty, \gamma]}} (\mathrm{Re}\, x')^{-1}(-\infty, \gamma].$$

Sei also $\mathrm{Re}\, \langle z, x' \rangle \leq \gamma$ für alle $z \in C$, insbesondere für $z = f(\omega)$. Dann gilt

$$\mathrm{Re} \left\langle \int_\Omega f \, d\mu, \, x' \right\rangle = \mathrm{Re} \int_\Omega \langle f, \, x' \rangle \; d\mu = \int_\Omega \mathrm{Re} \, \langle f, \, x' \rangle \; d\mu \leq \gamma \cdot \mu(\Omega) = \gamma.$$

$\square$

[9] Man sagt, f ist *schwach integrierbar.*

Für das nächste Kapitel benötigen wir noch das Bochner-Integral nach einem komplexen Maß. Im Folgenden werden wir einige Aussagen über komplexe Maße, insbesondere über Integrale komplexwertiger Funktionen nach komplexen Maßen, verwenden, die teilweise leicht gekürzt aus [A3, 16.1-16.2] übernommen wurden und der Vollständigkeit halber aufgelistet werden. Dazu sei $(\Omega, \mathfrak{A})$ wieder nur ein Messraum, $M(\Omega, \mathfrak{A})$ der Raum aller komplexen Maße darauf und sei für $\mu \in M(\Omega, \mathfrak{A})$ die *Variation* von μ definiert durch

$$|\mu|(A) := \sup \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} |\mu(A_j)| : \dot{\bigcup}_{j\in\mathbb{N}} A_j = A \right\}.$$

Lemma 3.10.

(i) *$|\mu|$ ist ein endliches, nichtnegatives Maß mit $|\mu(A)| \leq |\mu|(A)$ für alle $A \in \mathfrak{A}$. Dabei gilt für ein nichtnegatives Maß ν, dass $|\mu(A)| \leq \nu(A)$ für alle $A \in \mathfrak{A}$ genau dann, wenn $|\mu|(A) \leq \nu(A)$ für alle $A \in \mathfrak{A}$.*

(ii) *Versehen mit $\|\mu\| := |\mu|(\Omega)$ wird $M(\Omega, \mathfrak{A})$ zu einem Banachraum.*

(iii) *Sei μ ein σ-endliches Maß. Dann ist ein Maß $\nu \in M(\Omega, \mathfrak{A})$ genau dann absolut stetig bezüglich μ, d.h. aus $\mu(A) = 0$ folgt $\nu(A) = 0$, wenn es eine Funktion $w \in L^1(\Omega, \mathfrak{A}, \mu, \mathbb{C})$ gibt, sodass*

$$\nu(A) = \int_A w \, d\mu, \quad A \in \mathfrak{A}.$$

Der Zusammenhang zwischen ν und w ist bijektiv, wobei

$$|\nu|(A) = \int_A |w| \, d\mu, \quad A \in \mathfrak{A},$$

und damit $\|w\|_1 = \|\nu\|$.

(iv) *Ist für $\mu \in M(\Omega, \mathfrak{A})$ das Maß ν σ-endlich mit $\mu \ll \nu$[10] und w die Dichte von μ bezüglich ν, dann heißt g bezüglich μ integrierbar, wenn gw bezüglich ν integrierbar ist. In diesem Fall ist das Integral von g nach μ definiert durch*

$$\int_\Omega g \, d\mu := \int_\Omega gw \, d\nu. \tag{6}$$

Dieses Integral ist wohldefiniert in dem Sinne, dass es nicht von der konkreten Wahl von ν abhängt.

(v) *Sind $\mu, \nu \in M(\Omega, \mathfrak{A})$ mit $\mu \ll \nu$, d.h. per definitionem $\mu \ll |\nu|$, dann existiert eine $|\nu|$-f.ü. eindeutig bestimmte Dichte von μ bezüglich ν, nämlich $w := \frac{w_1}{w_2}$, wobei w_1 die Dichte von μ bezüglich $|\nu|$ sowie w_2 die unimodulare Dichte von ν bezüglich $|\nu|$ ist. Dabei ist eine messbare Funktion $g : \Omega \to \mathbb{C}$ genau dann nach μ integrierbar, wenn gw nach ν integrierbar ist. In diesem Fall gilt weiterhin* (6).

(vi) *$\int_\Omega g \, d\mu$ ist linear in g sowie in μ.*

Nun wollen wir die Definition aus Lemma 3.10(iv) auf das Bochner-Integral ausdehnen.

[10] $\nu = |\mu|$ ist eine Möglichkeit

Definition 3.11. Sei $\mu \in M(\Omega, \mathfrak{A})$ und $f : \Omega \to X$ stark messbar. Sei ν ein σ-endliches Maß mit $\mu \ll \nu$ und sei $w : \Omega \to \mathbb{C}$ die Dichte von μ bezüglich ν. Dann heißt f integrierbar bezüglich μ, wenn[11] $w \cdot f$ integrierbar bezüglich ν ist. In diesem Fall definiert man

$$\int_\Omega f \, d\mu := \int_\Omega w \cdot f \, d\nu. \tag{7}$$

Bemerkung 3.12. Es ist auch möglich, nur $|\mu|$-starke Messbarkeit von f zu fordern, da $w \cdot f$ in diesem Fall ν-stark messbar ist. Hier geht wesentlich ein, dass für eine μ-Nullmenge A schon $w|_A = 0$ μ-f.ü. Da wir diese erweiterte Definition im Folgenden nicht benötigen werden und die Formulierungen und Beweise der Aussagen in Satz 3.13 technisch (noch) aufwändiger würden, werden wir darauf aber verzichten.

Dieses Integral hat folgende Eigenschaften:

Satz 3.13. *Sei $\mu \in M(\Omega, \mathfrak{A})$ und $f : \Omega \to X$ stark messbar.*

(i) Definition 3.11 hängt nicht von der Wahl des Maßes ν mit $\mu \ll \nu$ ab.

(ii) f ist genau dann nach μ integrierbar, wenn $\int_\Omega \|f\| \, d|\mu| < +\infty$. In diesem Fall gilt

$$\left\| \int_\Omega f \, d\mu \right\| \leq \int_\Omega \|f\| \, d|\mu| \, .$$

(iii) Sei $(Y, \|\cdot\|_Y)$ ein weiterer Banachraum und $T \in L_b(X, Y)$. Ist f nach μ integrierbar, so auch $Tf : \Omega \to Y$, wobei

$$T\left(\int_\Omega f \, d\mu\right) = \int_\Omega Tf \, d\mu.$$

Insbesondere gilt für jedes $x' \in X'$, dass $\langle f, x' \rangle$ integrierbar ist und dass

$$\left\langle \int_\Omega f \, d\mu, x' \right\rangle = \int_\Omega \langle f, x' \rangle \, d\mu.$$

(iv) Sei ν ein komplexes Maß mit $\mu \ll \nu$, d.h. $\mu \ll |\nu|$, und $w = \frac{w_1}{w_2} : \Omega \to \mathbb{C}$ die Dichte von μ bezüglich ν. Dann ist f genau dann nach μ integrierbar, wenn $w \cdot f$ nach ν integrierbar ist. In diesem Fall gilt weiterhin (7).

(v) Das Bochner-Integral ist linear, sowohl in f als auch in μ.

Beweis. Die Integrierbarkeit von $w \cdot f$ nach ν ist nach Satz 3.4 äquivalent zu

$$\int_\Omega \|w \cdot f\| \, d\nu < +\infty.$$

Nach Lemma 3.10(iii) ist $|w|$ die Dichte von $|\mu|$ bezüglich ν, sodass

$$\int_\Omega \|w \cdot f\| \, d\nu = \int_\Omega |w| \cdot \|f\| \, d\nu = \int_\Omega \|f\| \, d|\mu| \, . \tag{8}$$

Ist $\tilde{\nu}$ ein weiteres σ-endliches Maß mit $\mu \ll \tilde{\nu}$ und der Dichte $\tilde{w}$ von μ bezüglich $\tilde{\nu}$, dann folgt aus (8), dass $\tilde{w} \cdot f$ genau dann nach $\tilde{\nu}$ integrierbar ist, wenn $w \cdot f$ nach ν integrierbar ist. In diesem Fall gilt für jedes $x' \in X'$ nach Lemma 3.5:

$$\left\langle \int_\Omega w \cdot f \, d\nu, x' \right\rangle = \int_\Omega \langle w \cdot f, x' \rangle \, d\nu = \int_\Omega w \cdot \langle f, x' \rangle \, d\nu \overset{(6)}{=} \int_\Omega \langle f, x' \rangle \, d\mu,$$

[11] Wie in Kapitel 1 erwähnt ist $w \cdot f$ stark messbar.

was nach analogen Umformungen in die andere Richtung mit $\left\langle \int_\Omega \tilde{w} \cdot f \, d\tilde{\nu},\, x' \right\rangle$ übereinstimmt. Da X' auf X punktetrennend operiert, folgt

$$\int_\Omega w \cdot f \, d\nu = \int_\Omega \tilde{w} \cdot f \, d\tilde{\nu}.$$

Damit haben wir (i) und den ersten Teil von (ii) gezeigt. Der zweite Teil folgt aus

$$\left\| \int_\Omega f \, d\mu \right\| = \left\| \int_\Omega w \cdot f \, d\nu \right\| \leq \int_\Omega \|w \cdot f\| \, d\nu \overset{(8)}{=} \int_\Omega \|f\| \, d\,|\mu| \,.$$

ad (iii): Wegen $w \cdot Tf = T(w \cdot f)$ folgt die Aussage sofort aus der Definition und Lemma 3.5.
ad (iv): Nach (ii) ist f genau dann nach μ integrierbar wenn

$$\int_\Omega \|f\| \, d\,|\mu| < +\infty. \tag{9}$$

$|w_1|$ ist nach Lemma 3.10(iii) die Dichte von $|\mu|$ bezüglich $|\nu|$, sodass (9) äquivalent ist zur Endlichkeit von

$$\int_\Omega \|f\| \, |w_1| \, d\,|\nu| = \int_\Omega \|f\| \, |w| \, d\,|\nu| = \int_\Omega \|w \cdot f\| \, d\,|\nu| \,,$$

also zur Integrierbarkeit von $w \cdot f$ nach ν. Beachte für die erste Gleichheit, dass w_2 unimodular ist. Im Falle der Integrierbarkeit gilt für jedes $x' \in X'$ nach (iii)

$$\left\langle \int_\Omega f \, d\mu,\, x' \right\rangle = \int_\Omega \langle f,\, x' \rangle \, d\mu \overset{(6)}{=} \int_\Omega \langle f,\, x' \rangle \, w \, d\nu = \int_\Omega \langle w \cdot f,\, x' \rangle \, d\nu = \left\langle \int_\Omega w \cdot f \, d\nu,\, x' \right\rangle.$$

Die Aussage folgt nun wieder daraus, dass X' auf X punktetrennend operiert.
ad (v): Die Linearität in f folgt unmittelbar aus der Definition und der entsprechenden Aussage für das Integral nach nichtnegativen Maßen.

Seien jetzt $\mu_1, \mu_2 \in M(\Omega, \mathfrak{A})$ und $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}$. Wegen ($A \in \mathfrak{A}$ beliebig)

$$|(\alpha_1\mu_1 + \alpha_2\mu_2)(A)| \leq |\alpha_1| \, |\mu_1(A)| + |\alpha_2| \, |\mu_2(A)| \leq |\alpha_1| \, |\mu_1| \, (A) + |\alpha_2| \, |\mu_2| \, (A)$$

und da die rechte Seite ein nichtnegatives Maß definiert, gilt nach Lemma 3.10(i)

$$|\alpha_1\mu_1 + \alpha_2\mu_2| \leq |\alpha_1| \, |\mu_1| + |\alpha_2| \, |\mu_2| \,,$$

sodass aus der Integrierbarkeit von f nach μ_1 und μ_2 wegen (ii) die Integrierbarkeit nach $\alpha_1\mu_1 + \alpha_2\mu_2$ folgt. Die Gleichung

$$\int_\Omega f \, d(\alpha_1\mu_1 + \alpha_2\mu_2) = \alpha_1 \int_\Omega f \, d\mu_1 + \alpha_2 \int_\Omega f \, d\mu_2$$

zeigt man nun wie oben durch Zurückführen auf den skalaren Fall. □

Bemerkung 3.14. Es sei nicht verschwiegen, dass das Bochner-Integral bei weitem nicht der einzige Integralbegriff in topologischen Vektorräumen ist. Hervorzuheben ist hier vor allem das *Pettis-Integral* oder *schwache Integral*, bei dem der abstrakte Vektor $\int_\Omega f \, d\mu$ einzig durch

$$\left\langle \int_\Omega f \, d\mu,\, x' \right\rangle = \int_\Omega \langle f,\, x' \rangle \, d\mu \quad \text{für alle } x' \in X'$$

definiert ist. Der Vorteil dieser Begriffsbildung ist, dass f nicht (μ-)stark messbar sein muss, sondern schwache Messbarkeit kombiniert mit schwacher Integrierbarkeit, d.h. $\langle f,\, x' \rangle \in L^1(\mu)$, ausreichend ist. Außerdem muss X kein Banachraum sein; in lokalkonvexen Räumen ist die Eindeutigkeit von $\int_\Omega f \, d\mu$ stets gegeben, sodass man nur Bedingungen für die Existenz benötigt (siehe zB [DU] oder [R1]).

4 Darstellungssatz von Riesz

In diesem Kapitel seien $(S, \mathcal{T})$ ein kompakter Hausdorff-Raum und $\mathcal{B}(S) := \mathcal{B}(\mathcal{T})$ die Borelmengen darauf. Interessiert man sich für die beschränkten linearen Funktionale auf $C(S) := C(S, \mathbb{C})$, stößt man unweigerlich auf den Darstellungssatz von Riesz, der den Begriff des regulären Maßes verwendet.

Definition 4.1. Ein nichtnegatives Maß μ auf den Borelmengen $\mathcal{B}(Y)$ eines lokalkompakten Hausdorffraums Y heißt *regulär*, wenn für jedes $B \in \mathcal{B}(Y)$ gilt, dass

$$\mu(B) = \inf\{\mu(O) : B \subseteq O \,\text{offen}\} \quad \text{sowie} \quad \mu(B) = \sup\{\mu(K) : B \supseteq K \,\text{kompakt}\}.$$

Ein komplexes Maß $\mu \in M(Y, \mathcal{B}(Y))$ heißt regulär, wenn $|\mu|$ in diesem Sinne regulär ist; bezeichne den Raum der regulären komplexen Maße mit $M_{reg}(Y, \mathcal{B}(Y))$[12].

Damit kann man den Darstellungssatz von Riesz beweisen, der in einer recht allgemeinen Formulierung wie folgt lautet (siehe [R2, Theorem 6.19][13]):

Satz 4.2. *If Y is a locally compact Hausdorff space, then every bounded linear functional Φ on $C_0(Y)$ is represented by a unique regular complex Borel measure μ, in the sense that*

$$\Phi f = \int_Y f \, d\mu$$

for every $f \in C_0(Y)$. Moreover, the norm of Φ is the total variation of μ:

$$\|\Phi\| = |\mu|(Y).$$

Aus diesem Satz folgt sofort, dass $M_{reg}(Y, \mathcal{B}(Y))$ für sich schon ein Banachraum ist. In unserer Situation für $Y = S$ ergibt sich

Korollar 4.3. *Jedes beschränkte lineare Funktional Φ auf $C(S)$ lässt sich schreiben als*

$$\Phi f = \int_S f \, d\mu,$$

für ein eindeutiges $\mu \in M_{reg}(S, \mathcal{B}(S))$. Dabei gilt $\|\Phi\| = \|\mu\|$ und die Zuordnung $\Phi \mapsto \mu$ ist linear, insgeamt also ein isometrischer Isomorphismus $C(S)' \to M_{reg}(S, \mathcal{B}(S))$.

Nun wollen wir das Bochner-Integral aus dem letzten Kapitel verwenden, um eine Verallgemeinerung des Darstellungssatzes von Riesz, genau genommen von Korollar 4.3, für stetige Operatoren zu beweisen, die auf den stetigen Funktionen $f : S \to X$ operieren und nach X abbilden[14]. Betrachte für ein $\mu \in M_{reg}(S, \mathcal{B}(S))$ als Motivation den Operator

$$\Psi : \begin{cases} C(S, X) \to X \\ f \mapsto \int_\Omega f \, d\mu \end{cases}$$

Jedes $f \in C(S, X)$ ist gemäß Korollar 1.6(iv) stark messbar und wegen

$$\int_S \|f(s)\| \, d|\mu|(s) \le \|f\|_\infty \|\mu\| < +\infty \tag{10}$$

[12] Nach [A3, Lemma 17.3.5] ist $M_{reg}(Y, \mathcal{B}(Y))$ ein Unterraum von $M(Y, \mathcal{B}(Y))$.
[13] In der Originalquelle wird der lokalkompakte Hausdorffraum mit X bezeichnet.
[14] Paradebeispiel für einen solchen Operator ist die Punktauswertung $f \mapsto f(s)$ für ein $s \in S$.

integrierbar. Ψ ist also wohldefiniert, linear und wegen Satz 3.13(ii) und (10) auch beschränkt, also $\Psi \in L_b(C(S,X),X)$, wobei $\|\Psi\| \leq \|\mu\|$. Weiters erfüllt Ψ eine Kompatibilitätseigenschaft: Für $f,g \in C(S,X)$ und $x',y' \in X'$ gilt wegen Satz 3.13(iii)

$$\big\langle f,\, x' \big\rangle = \big\langle g,\, y' \big\rangle \Rightarrow \big\langle \Psi f,\, x' \big\rangle = \big\langle \Psi g,\, y' \big\rangle\,. \tag{11}$$

Diese Bedingung ist also notwendig für die Darstellbarkeit als Bochner-Integral. Es wird sich zeigen, dass sie sogar hinreichend ist; dies ist der Inhalt dieses Kapitels. Interessant und im Folgenden wichtig ist noch der Zusammenhang zwischen Ψ und dem von μ induzierten Operator $\Phi \in C(S)' = L_b(C(S),\mathbb{C})$: aus Satz 3.13(iii) folgt

$$(x' \circ \Psi)f = \big\langle \Psi f,\, x' \big\rangle = \Phi(\big\langle f,\, x' \big\rangle) = \Phi(x' \circ f).$$

Bevor wir das Resultat formulieren, führen wir einige Kurzschreibweisen ein.

Definition 4.4.

(i) $C_X := C(S,X)$,

$$\mathcal{A}_X := \Big\{ \Psi \in L_b(C_X,X) \,\Big|\, \forall f,g \in C_X\, \forall x',y' \in X' \colon \big\langle f,\, x' \big\rangle = \big\langle g,\, y' \big\rangle \Rightarrow \big\langle \Psi f,\, x' \big\rangle = \big\langle \Psi g,\, y' \big\rangle \Big\}$$

(ii) Definiere für $x' \in X'$ den Operator

$$U_{x'} : \begin{cases} C_X \to C(S) \\ f \mapsto \langle f,\, x' \rangle \; (= x' \circ f) \end{cases}$$

Bemerkung 4.5.

- Da norm-konvergente Folgen aus $L_b(C_X,X)$ insbesondere in der schwachen Operatortopologie konvergieren, ist $\mathcal{A}_X$ ein abgeschlossener Unterraum von $L_b(C_X,X)$, also selbst ein Banachraum.
- Mit der Notation aus Definition 4.4 gilt $C_{\mathbb{C}} = C(S)$ und $\mathcal{A}_{\mathbb{C}} = L_b(C_{\mathbb{C}},\mathbb{C}) = C(S)'$, da $\mathbb{C}'$ nur aus den Funktionalen $z \mapsto \alpha \cdot z$, $\alpha \in \mathbb{C}$, besteht und das Integral linear ist.
- Einfache Abschätzungen unter Beachtung der Tatsache, dass die konstanten Funktionen in C_X enthalten sind, zeigen, dass $U_{x'} \in L_b(C_X, C(S))$ mit $\|U_{x'}\| = \|x'\|$.

Aus beweistechnischen Gründen werden wir das Resultat in der folgenden Form zeigen; aus dem Beweis wird sich dann als Korollar das Analogon des Darstellungssatzes von Riesz ergeben.

Satz 4.6. *Die Banachräume $\mathcal{A}_X$ und $C(S)'$ sind isometrisch isomorph. Insbesondere enthält $L_b(C_X,X)$ eine isometrisch isomorphe Kopie von $C(S)'$.*

Für den Beweis benötigen wir ein Lemma.

Lemma 4.7. *Es gibt ein $z' \in X'$ mit $\|z'\| = 1$, sodass $U_{z'}$ surjektiv ist. Für jedes $h \in C(S)$ gibt es also ein $f \in C_X$ mit $h = \langle f,\, z' \rangle$. Dabei gilt noch $\|f\|_\infty = \|h\|_\infty$.*

Beweis. Sei $x \in X$ mit $\|x\| = 1$ beliebig. Nach dem Satz von Hahn-Banach gibt es ein $z' \in X'$ mit $\|z'\| = 1 = \langle x,\, z' \rangle$. Dieses Funktional erfüllt die Bedingungen: Für $h \in C(S)$ definiere $f(s) = h(s) \cdot x$. Dann gilt $f \in C_X$, $\langle f(s),\, z' \rangle = h(s) \cdot \langle x,\, z' \rangle = h(s)$ und offenbar $\|f\|_\infty = \|h\|_\infty$. □

Aus diesem Lemma folgt insbesondere $\bigcup_{x' \in X'} \operatorname{ran} U_{x'} = C(S)$.

Beweis (von Satz 4.6). Wir werden $\Phi \in C(S)'$ und $\Psi \in \mathcal{A}_X$ einander so zuordnen, dass die Gleichung

$$x' \circ \Psi = \Phi \circ U_{x'} \tag{12}$$

für alle $x' \in X'$ gilt.
Eindeutigkeit: Ist Φ gegeben, so ist Ψ sicherlich eindeutig bestimmt, da X' auf X punktetrennend operiert. Ist umgekehrt Ψ gegeben, so ist Φ auf $\bigcup_{x' \in X'} \operatorname{ran} U_{x'} = C(S)$ eindeutig bestimmt.
Existenz: Sei zunächst Φ gegeben. Nach dem klassischen Darstellungssatz von Riesz gilt

$$\Phi h = \int_S h \, d\mu$$

für ein $\mu \in M_{reg}(S, \mathcal{B}(S))$, wobei $\|\Phi\| = \|\mu\|$. Definiere damit

$$\Psi f := \int_S f \, d\mu;$$

nach den Ausführungen vor Definition 4.4 ist Ψ ein wohldefinierter beschränkter Operator aus $\mathcal{A}_X$, der (12) erfüllt. Dabei ist

$$\|\Psi\| \le \|\mu\| = \|\Phi\| \, . \tag{13}$$

Sei umgekehrt $\Psi \in \mathcal{A}_X$ gegeben. Die Definition

$$\Phi : \begin{cases} C(S) = \bigcup_{x' \in X'} \operatorname{ran} U_{x'} & \to \mathbb{C} \\ h = x' \circ f & \mapsto \langle \Psi f, \, x' \rangle \end{cases}$$

ist zulässig, da $\Psi \in \mathcal{A}_X$ und daher aus $x' \circ f = y' \circ g$ gemäß (11) schon $\langle \Psi f, \, x' \rangle = \langle \Psi g, \, y' \rangle$ folgt. Wählt man für $h \in C(S)$ die Darstellung $z' \circ f$ mit $\|f\|_\infty = \|h\|_\infty$ aus Lemma 4.7, dann kann man für $h_1 = z' \circ f_1$ und $h_2 = z' \circ f_2$ sowie $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ den Ausdruck $\alpha h_1 + \beta h_2$ als $z' \circ (\alpha f_1 + \beta f_2)$ schreiben, woraus sich die Linearität von Φ ergibt. Weiters folgt $|\Phi h| \le \|z'\| \, \|\Psi f\| \le \|\Psi\| \, \|f\|_\infty = \|\Psi\| \, \|h\|_\infty$, also die Beschränktheit von Φ, wobei

$$\|\Phi\| \le \|\Psi\| \, . \tag{14}$$

Damit ist $\Phi \in C(S)'$; (12) ist nach Konstruktion erfüllt.
Wir haben damit eine bijektive Beziehung zwischen $\mathcal{A}_X$ und $C(S)'$ hergestellt.
Linearität der Zuordnung: Sind Ψ_1 bzw. Ψ_2 die gemäß (12) zu Φ_1 bzw. Φ_2 gehörigen Operatoren, so erfüllt $(\alpha, \beta \in \mathbb{C})$ $\alpha\Psi_1 + \beta\Psi_2$ Bedingung (12) zu $\alpha\Phi_1 + \beta\Phi_2$, woraus die Linearität von $\Phi \mapsto \Psi$ folgt. $\Psi \mapsto \Phi$ ist dann als Umkehrfunktion einer linearen Abbildung ebenfalls linear.
Isometrie der Zuordnung: Folgt sofort aus (13) und (14). □

Nun kommen wir zum angekündigten Hauptergebnis.

Korollar 4.8 (Darstellungssatz von Riesz in Banachräumen)**.** *Jeder Operator $\Psi \in \mathcal{A}_X$ lässt sich schreiben als*

$$\Psi f = \int_S f \, d\mu,$$

für ein eindeutiges $\mu \in M_{reg}(S, \mathcal{B}(S))$, wobei genau die Elemente von $\mathcal{A}_X$ als derartige Operatoren auftreten. Dabei gilt $\|\Psi\| = \|\mu\|$ und die Zuordnung $\Psi \mapsto \mu$ ist linear, insgesamt also ein isometrischer Isomorphismus $\mathcal{A}_X \to M_{reg}(S, \mathcal{B}(S))$.

Beweis. Sei Φ der gemäß (12) zu Ψ gehörige Operator. Wegen der Eindeutigkeit der Zuordnung aus dem letzten Satz stimmt Ψ mit dem Φ zugeordneten Operator überein. Aus dem Beweis des Satzes folgt die Darstellung von Ψ mit dem Φ induzierenden Maß $\mu \in M_{reg}(S, \mathcal{B}(S))$, wobei $\|\Psi\| = \|\Phi\| = \|\mu\|$. Sind μ_1, μ_2 zwei verschiedene Maße aus $M_{reg}(S, \mathcal{B}(S))$, so sind die induzierten Operatoren $\Phi_1, \Phi_2 \in C(S)'$ nach dem klassischen Darstellungssatz verschieden und damit wegen der Eindeutigkeit der Zuordnung $\Psi \mapsto \Phi$ auch die induzierten Operatoren $\Psi_1, \Psi_2 \in \mathcal{A}_X$. Das beweist die Eindeutigkeit von μ. Aus den Bemerkungen vor Definition 4.4 folgt, dass genau die Operatoren aus $\mathcal{A}_X$ auftreten, aus Satz 3.13(v) die Linearität der Zuordnung $\mu \mapsto \Psi$ und damit auch die von $\Psi \mapsto \mu$. □

Zum Abschluss noch ein Beispiel, das zeigt, dass nur für $X \cong \mathbb{C}$ *jeder* Operator aus $L_b(C_X, X)$ im obigen Sinne als Integral darstellbar ist.

Beispiel 4.9. Sei $\dim X \geq 2$. Dann gibt es zwei normierte, linear unabhängige Vektoren $b_1, b_2 \in X$. Nach einer Anwendung des Satzes von Hahn-Banach, [FA, Proposition 5.2.8], hat $M := \operatorname{span}\{b_1, b_2\}$ ein abgeschlossenes Komplement, wobei die Projektion $P : X \to M$ stetig ist. Bezeichne mit b_1^* bzw. b_2^* die klarerweise stetigen Koordinatisierungen von b_1 bzw. b_2 in M. Definiert man $x_1'(x) := \langle Px, b_1^* \rangle_M$, $x_2'(x) := \langle Px, b_2^* \rangle_M$ und $x' := x_1' + x_2'$, so gilt offenbar $x_1', x_2', x' \in X'$. Sei jetzt $s_0 \in S$ gegeben. Es gibt stetige Funktionen $h_1, h_2 : S \to \mathbb{C}$ mit $h_1 + h_2 \equiv 0$ und $h_1(s_0) \neq 0$, beispielsweise $h_1 \equiv 1$ und $h_2 \equiv -1$. Dann ist $h : S \to X$ definiert durch $h(s) := h_1(s)b_1 + h_2(s)b_2$ stetig, d.h. $h \in C_X$, und es gilt $x' \circ h \equiv 0$, also $\langle h, x' \rangle = \langle 0, x' \rangle$. Für ein $\alpha \in (0, 1)$ liegt der Operator

$$\Psi : \begin{cases} C_X \to X \\ g \to \alpha \, \langle g(s_0), \, x_1' \rangle \, b_1 + \langle g(s_0), \, x_2' \rangle \, b_2 \end{cases}$$

in $L_b(C_X, X)$ und erfüllt

$$\left\langle \Psi h, \, x' \right\rangle = \alpha \left\langle h(s_0), \, x_1' \right\rangle + \left\langle h(s_0), \, x_2' \right\rangle = \alpha h_1(s_0) + h_2(s_0) = (\alpha - 1) h_1(s_0) \neq 0,$$

also $\langle \Psi h, \, x' \rangle \neq \langle \Psi 0, \, x' \rangle$. Damit haben wir gezeigt, dass Ψ Bedingung (11) nicht erfüllt; also $\Psi \notin \mathcal{A}_X$.

Literatur

[DU] Joseph Diestel, Jerry Uhl: *Vector Measures*, Providence: American Mathematical Society 1977.

[A2] Michael Kaltenbäck: *Analysis 2*, Vorlesungsskriptum Version SS 2015. URL: http://www.asc.tuwien.ac.at/funkana/skripten/ANA_II.pdf, abgerufen am 4. Juni 2017.

[A3] Michael Kaltenbäck: *Analysis 3*, Vorlesungsskriptum Version WS 2011/12. URL: http://www.asc.tuwien.ac.at/funkana/skripten/ANA_III_alt.pdf, abgerufen am 4. Juni 2017.

[K] Norbert Kusolitsch: *Maß- und Wahrscheinlichkeitstheorie*, Berlin Heidelberg: Springer Spektrum 2014 (2. Auflage).

[M] Lakhdar Meziani: *Integral representation for a class of vector valued operators*, Proc. Amer. Math. Soc. 130 (2002), no. 7, 2067-2077.

[N] Jan van Neerven: *Stochastic Evolution Equations*, 2016. TU Delft OpenCourseWare. URL: https://ocw.tudelft.nl/courses/stochastic-evolution-equations , abgerufen am 4. Juni 2017.

[R1] Walter Rudin: *Functional Analysis*, New York u.a.: McGraw-Hill 1973.

[R2] Walter Rudin: *Real and Complex Analysis*, International Edition, New York: McGraw-Hill Education 1987 (3.Auflage).

[FA] Harald Woracek, Michael Kaltenbäck, Martin Blümlinger: *Funktionalanalysis*, Vorlesungsskriptum Version SS 2016 (11.Auflage).