Cantor- und Peanofunktionen

Moritz Albert Schöbi
Seminararbeit aus Analysis

12.02.2021

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Was die Beziehungen endlicher Mengen zueinander anbelangt, kann man sich zumeist auf die eigene Intuition verlassen. Ob es Injektionen beziehungsweise Surjektionen von einer Menge in eine andere gibt, ist mit dem Schubfachprinzip schnell beantwortet und dementsprechend auch nicht übermäßig interessant. Ganz anders verhält es sich mit unendlichen Mengen. Dass beispielsweise die Vereinigung abzählbar unendlich vieler Kopien einer abzählbar unendlichen Menge wieder abzählbar unendlich ist, ist uns von den rationalen Zahlen her bekannt.

Im Kapitel 3 dieser Arbeit wollen wir einen Schritt weitergehen und uns am Beispiel des Kontinuums veranschaulichen, dass auch für überabzählbare Mengen M Bijektionen zwischen M und $M \times M$ existieren können[1]. Solche Abbildungen werden wir als *Cantorfunktionen* bezeichnen. Zusätzlich zum Existenznachweis werden wir uns die Frage stellen, ob solche Bijektionen $f\colon [0,1] \to [0,1] \times [0,1]$ bzw. $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ oder auch ihre Umkehrfunktionen stetig sein können. Das können sie nämlich nicht.

In Kapitel 4 werden wir Abbildungen $f : [0,1] \to [0,1] \times [0,1]$ betrachten und deren Stetigkeit voraussetzen. Es wird sich herausstellen, dass sich das mit der Forderung nach Surjektivität vereinbaren lässt, es also stetige, surjektive Wege $f : [0,1] \to [0,1] \times [0,1]$ (sogenannte *Peanokurven*) gibt, die bildlich gesprochen

[1] Sie existieren sogar immer, vgl.[Mar20] Satz 11.4.8.6, uns geht es aber um den konkret anschaulichen Fall und zusätzliche Eigenschaften dieser Bijektionen.

„das Einheitsquadrat ausmalen“.

Diese Arbeit fußt zum Großteil auf dem Buch *Strange functions in real analysis* von A.B. Karazishvili [Kar00], genauer auf dessen Kapitel *Cantor and Peano type functions*.

2 Definitionen und Voraussetzungen

Wir beginnen mit ein paar notwendigen Defintitionen sowie aus der Analysis oder Funktionalanalysis bekannten Resultaten, die wir angeben, aber nicht beweisen werden.

Definition 2.1. Mit den natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ sei im Folgenden die Menge $\{1, 2, 3, ...\}$ gemeint. Für die Menge $\mathbb{N} \cup \{0\}$ werden wir $\mathbb{N}_0$ schreiben.

Definition 2.2. Das Einheitsintervall $[0, 1]$ wird im Folgenden mit $\mathcal{I}$ bezeichnet, das Einheitsquadrat $[0, 1] \times [0, 1]$ mit $\mathcal{Q}$.

Aus der Analysis Grundvorlesung ist folgende Tatsache bekannt.

Lemma 2.3. *Sei*

$$D := \{(z_n)_{n\in\mathbb{N}_0} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}_0} | z_0 \in \mathbb{N}_0, z_n \in \{0, ..., 9\} \wedge \forall N \in \mathbb{N}\, \exists n \in \mathbb{N}, n > N : z_n \neq 9\}.$$

Dann existiert für jede nichtnegative reelle Zahl ξ genau ein $(z_n)_{n\in\mathbb{N}_0} \in D$ derart, dass $\xi = z_0 + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{z_j}{10^j}$.

Mit anderen Worten: Wenn man periodisch 9 nicht zulässt, hat jede nichtnegative reelle Zahl eine eindeutige Dezimaldarstellung.

Bemerkung 2.4. Indem man für negative Zahlen ein Minus vor die Summe setzt, lässt sich diese Existenz- und Eindeutigkeitsaussage natürlich auf alle reellen Zahlen ausdehnen.

Definition 2.5. Für eine beliebige Menge M bezeichnen wir mit $\wp(M)$ die Potenzmenge von M.

Wir wollen noch an folgenden Satz erinnern. Für einen Beweis verweisen wir auf [Har20], Satz 4.1.1.

Satz 2.6. *(von Baire). Sei X ein vollständiger metrischer Raum. Ist $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge abgeschlossener Teilmengen von X mit leerem Inneren, so hat auch $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ leeres Inneres.*

3 Cantorfunktionen

Definition 3.1. Eine Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ respektive $f\colon \mathcal{I} \to \mathcal{Q}$ heißt *Cantorfunktion*, wenn Sie bijektiv ist.

Um die Existenz von Cantorfunktionen nachzuweisen, könnte man explizit Bijektionen zwischen den gegebenen Mengen konstruieren. Es ist jedoch einfacher, die Existenz von Injektionen in beide Richtungen nachzuweisen. Wie der folgende Satz zeigt, ist das äquivalent zur Existenz einer Bijektion.

Satz 3.2. *(von Cantor-Schröder-Bernstein). Seien A, B Mengen. Gibt es Injektionen $f : A \to B$ und $g : B \to A$, so existiert auch eine Bijektion zwischen A und B.*

Beweis. Wir führen den Beweis wie in [Mar20], Satz 11.4.3.6. Definiere induktiv $C_1 := A \setminus g(B)$, $C_{n+1} := g(f(C_n))$ sowie $C := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n$. Nun sei $h := f|_C \cup g^{-1}|_{A\setminus C}$, also

$$h(a) = \begin{cases} f(a), & a \in C, \\ g^{-1}(a), & a \in A \setminus C. \end{cases}$$

Diese Funktion ist wohldefiniert, da $g\colon B \to A \setminus C_1$ bijektiv ist, und, wie sich nun zeigen wird, sogar eine Bijektion.

- Für die Surjektivität sei $b \in B$ beliebig. Im Fall $b \in f(C)$ ist nichts zu zeigen. Es gelte also $b \in B \setminus f(C)$ und sei $a := g(b)$.
  - Nach Definition von C_1 gilt $a \notin C_1$.
  - b liegt nicht in $f(C)$, insbesondere liegt b in keiner Menge $f(C_n)$. Folglich liegt a in keiner Menge $g(f(C_n)) = C_{n+1}$.
  - Also gilt $a \notin C$ und somit $b = g^{-1}(a) \in h(A)$.
- Die Injektivität von h wird aus jener von f und g folgen: $h|_C$ und $h|_{A\setminus C}$ sind sicher injektiv. Angenommen, es gäbe $c \in C$ sowie $a \in A \setminus C$ mit $h(c) = h(a)$. Dann müsste c insbesondere in einer Menge C_n liegen, wodurch $g(h(c)) = g(f(c))$ in der Menge $C_{n+1} \subseteq C$ liegen würde. Gleichzeitig müsste aber nach Konstruktion von h gelten, dass $g(h(a)) = g(g^{-1}(a)) = a$, was ein Element von $A \setminus C$ ist. ↯

□

Bevor wir uns um die Existenz von Cantorfunktionen kümmern, können wir mit dem soeben gezeigten Satz 3.2 von Cantor-Schröder-Bernstein direkt eine weitere wohlbekannte und hilfreiche Aussage zeigen.

Satz 3.3. *Die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ sind gleichmächtig wie das Einheitsintervall $\mathcal{I}$, in Zeichen*

$$\mathbb{R} \cong [0, 1].$$

Beweis. Unter Berücksichtigung des Satzes von Cantor-Schröder-Bernstein müssen wir nur eine Injektion $\mathbb{R} \to \mathcal{I}$ angeben, da die Einbettung von $[0,1]$ in $\mathbb{R}$ offenbar injektiv ist. Bekanntlich ist der Arkustangens eine Injektion von $\mathbb{R}$ ins Intervall $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, weshalb die Abbildung

$$x \mapsto \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \cdot \arctan(x)$$

das Gewünschte liefert. □

Gemäß Satz 3.3 gilt also $\mathcal{I} \cong \mathbb{R}$ und dementsprechend auch $\mathcal{Q} \cong \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Insbesondere ist die Existenz von Bijektionen $f\colon \mathcal{I} \to \mathcal{Q}$ zu jener von Bijektionen $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ äquivalent.

Satz 3.4. *Es existieren Cantorfunktionen* $f\colon [0,1] \to [0,1] \times [0,1]$.

Beweis. Um diese Aussage zu beweisen, wollen wir Satz 3.2 bemühen. Wir müssen eine Injektion $f : [0,1] \times [0,1] \to [0,1]$ angeben, die Abbildung $t \mapsto (t, 0)$ ist offenbar eine Injektion in die andere Richtung. Um die Konstruktion noch ein wenig einfacher zu machen, bemerken wir, dass[2] $[0,1] \cong [0,1)$. Seien also $a, b \in [0,1)$ und seien $0, a_1a_2a_3...$, $0, b_1b_2b_3...$ ihre nach Lemma 2.3 eindeutigen Dezimaldarstellungen. Dann definieren wir $f(a,b) := 0, a_1b_1a_2b_2a_3b_3....$ Diese Abbildung ist aufgrund der Eindeutigkeit der Dezimaldarstellung wohldefiniert und[3] injektiv. Also gilt nach dem Satz von Cantor-Schröder-Bernstein $[0,1) \cong [0,1) \times [0,1)$ und damit $[0,1] \cong [0,1] \times [0,1]$ sowie $\mathbb{R} \cong \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. □

Die Existenz von Cantorfunktionen ist also gesichert. Bezüglich ihrer Stetigkeit gilt aber

Satz 3.5. *Eine Cantorfunktion* $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ *ist niemals stetig.*

Für den Beweis bringen wir ein Lemma.

Lemma 3.6. *Seien* $x \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \delta > 0$ *und bezeichne* $\partial K_\delta(x) \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ *den Rand der Kugel um* x *mit Radius* δ *in der Ebene. Dann gibt es keine stetige, injektive Abbildung von* $\partial K_\delta(x)$ *in die reellen Zahlen.*

Beweis. (Lemma) Sei $g\colon \partial K_\delta(x) \to \mathbb{R}$ stetig, aber nicht konstant. Die Kugeloberfläche $\partial K_\delta(x)$ ist kompakt, also nimmt g in zwei Punkten x_{max} und x_{min} ihr Maximum bzw. Minimum an. Diese beiden sicher verschiedenen Punkte teilen $\partial K_\delta(x)$ in zwei Kreisbogen γ_1 und γ_2, für die

$$\gamma_1 \cap \gamma_2 = \{x_{max}, x_{min}\}$$

[2]Eine Bijektion $g\colon [0,1] \to [0,1)$ ist beispielsweise durch

$$\begin{cases} x \mapsto x/2 & x = 2^{-n}, n \in \mathbb{N}_0, \\ x \mapsto x & \textit{sonst}, \end{cases}$$

gegeben.

[3]Sie ist auch surjektiv, aber das brauchen wir hier nicht.

gilt. Aufgrund ihrer Stetigkeit muss g in zwei Punkten $\xi_1 \in \gamma_1, \xi_2 \in \gamma_2$ jeweils den Funktionswert $\frac{g(x_{max})+g(x_{min})}{2}$ annehmen und kann somit nicht injektiv sein. $\square$

Beweis. (Satz) Angenommen, $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ wäre bijektiv und stetig. Dann hätten wir

$$\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} f([-n, n]),$$

wobei alle der vereinigten Mengen kompakt und somit abgeschlossen wären. Nach dem Satz 2.6 von Baire hätte mindestens eine der Mengen nichtleeres Inneres.
Ist $n \in \mathbb{N}$ derart, dass $f([-n,n])^{\circ} \neq \emptyset$, so bildet $f|_{[-n,n]}\colon [-n,n] \to f([-n,n])$ einen Homöomorphismus, denn es werden alle abgeschlossenen (und somit kompakten) Teilmengen von $[-n,n]$ auf (kompakte und somit) abgeschlossene Teilmengen von $f([-n,n])$ abgebildet. Wegen $f([-n,n])^{\circ} \neq \emptyset$ enthält $f([-n,n])$ eine gewisse Kugel $K_\delta(x)$ und somit auch ihren Rand $\partial K_\delta(x)$. Im Widerspruch zu Lemma 3.6 wäre $(f|_{\partial K_\delta(x)})^{-1}\colon \partial K_\delta(x) \to \mathbb{R}$ injektiv und stetig. ↯ $\square$

Wenn wir Cantorfunktionen zwischen $\mathcal{I}$ und $\mathcal{Q}$ betrachten, brauchen wir für dasselbe Resultat nicht einmal den Satz von Baire. Unter einer stetigen Bijektion $f\colon \mathcal{I} \to \mathcal{Q}$ hätte $f(\mathcal{I})$ nichtleeres Inneres. Zudem würden alle abgeschlossenen Teilmengen von $\mathcal{I}$ auf abgeschlossene Teilmengen von $\mathcal{Q}$ abgebildet, f wäre also ein Homöomorphismus. Damit würde f^{-1} den Rand jeder Kugel in $\mathcal{Q}$ stetig und injektiv ins Einheitsintervall $\mathcal{I}$ und damit in die reellen Zahlen abbilden, was einen Widerspruch zu Lemma 3.6 darstellen würde. Wir haben also gezeigt:

Satz 3.7. *Es gibt keine stetige Cantorfunktion $f\colon \mathcal{I} \to \mathcal{Q}$.*

Cantorfunktionen sind also niemals stetig. Da sie aber bijektiv sind, ergibt es auch Sinn, ihre Inverse auf diese Eigenschaft zu untersuchen. Hier lassen sich bereits Injektivität und separate Stetigkeit in beiden Variablen nicht vereinbaren:

Proposition 3.8. *Sei $f\colon \mathcal{Q} \to \mathcal{I}$ stetig in der ersten und in der zweiten Variable. Dann ist f nicht injektiv. Insbesondere können stetige Funktionen $f\colon \mathcal{Q} \to \mathcal{I}$ nicht injektiv sein.*

Beweis. Angenommen, f wäre injektiv. Nach Voraussetzung ist dann

$$\phi(x) := f(x, \frac{1}{2})$$

eine stetige, injektive Funktion von $\mathcal{I}$ nach $\mathcal{I}$. Sei $a := \phi(0), b := \phi(1)$ mit oBdA. $a < b$. Aufgrund der Stetigkeit von ϕ folgt aus dem Zwischenwertsatz

$$\{\phi(x)\colon x \in [0,1]\} \supseteq [a,b].$$

Insbesondere gibt es $\xi \in (0,1)$ mit $\phi(\xi) = \frac{a+b}{2}$. Wieder nach Voraussetzung ist $\psi\colon \mathcal{I} \to \mathcal{I}$ mit

$$\psi(y) := f(\xi, y),\ y \in \mathcal{I},$$

stetig und injektiv. Wegen

$$a < \psi(\frac{1}{2}) = \frac{a+b}{2} < b,$$

gibt es eine Umgebung $U \in \mathfrak{U}(\frac{1}{2})$, $U \subseteq [0,1]$ mit

$$\forall y \in U\colon a < \psi(y) = f(\xi, y) < b,$$

weshalb

$$\{f(\xi, y)\colon y \in U \setminus \{\frac{1}{2}\}\} \subseteq (a, b).$$

Gleichzeitig gilt aber (siehe oben)

$$\{f(x, 1/2)\colon x \in [0,1]\} \supseteq [a, b].$$

Folglich gibt es $y_0 \in [0,1] \setminus \{\frac{1}{2}\}, x_0 \in [0,1]$, mit

$$f(\xi, y_0) = f(x_0, \frac{1}{2}). \ \lightning$$

$\square$

Da man jede stetige Abbildung $f\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch Einschränkung zu einer stetigen Abbildung

$$f|_{[0,1]\times[0,1]}\colon [0,1] \times [0,1] \to [\alpha, \beta]$$

mit Zahlen $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ machen kann[4] und da die genauen Intervallgrenzen im Beweis vorher keine Rolle gespielt haben, gilt natürlich auch:

Korollar 3.9. *Sei $f\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig. Dann ist f nicht injektiv.*

[4] Die Bilder kompakter, zusammenhängender Mengen unter stetigen Abbildungen sind stets kompakt und zusammenhängend.

4 Peanofunktionen

Die Bijektivität einer Abbildung $f: \mathcal{I} \to \mathcal{Q}$ verunmöglicht nach dem vorherigen Abschnitt ihre Stetigkeit. Für Funktionen in umgekehrter Richtung lassen sich nicht einmal Stetigkeit und Injektivität vereinbaren. Um stetige Abbildungen zwischen diesen Mengen zu studieren, werden wir deshalb einen anderen Ansatz wählen als für Cantorfunktionen. Wir werden uns im folgenden Kapitel auf Funktionen der Form $f: \mathcal{I} \to \mathcal{Q}$ beschränken und deren Stetigkeit voraussetzen. Dann zeigen wir, dass sich diese mit Surjektivität vereinbaren lässt. Injektivität kann dann gemäß den Ergebnissen des vorangegangenen Kapitels aber sicher nicht mehr gegeben sein.

Definition 4.1. Eine Funktion $f: \mathcal{I} \to \mathcal{Q}$ heißt *Peanofunktion*, wenn sie stetig und surjektiv ist.

Der Nachweis der Existenz solcher Funktionen läuft anders ab als im zweiten Kapitel. Zunächst sei an die aus der Maßtheorie bekannte Cantormenge erinnert, die wir wie in [Blü19] vorgeführt konstruieren: Auf dem kompakten Intervall [0,1] seien die beiden Abbildungen T_0, T_1 durch $T_0(x) = \frac{x}{3}$, $T_1(x) = \frac{2}{3} + \frac{x}{3}$ erklärt. Damit ist die Abbildung

$$T\colon \begin{cases} \wp([0,1]) \to \wp([0,1]) \\ B \mapsto T_0(B) \cup T_1(B) \end{cases}$$

wohldefiniert. Induktiv definieren wir die Mengenfolge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ durch

$$A_0 := [0,1] \text{ und } A_{n+1} := T(A_n),\ n \in \mathbb{N}_0.$$

Für alle n besteht A_n aus 2^n abgeschlossenen Intervallen der Länge 3^{-n}, wobei A_{n+1} aus A_n durch Entfernen des mittleren offenen Drittels aus allen 2^n Intervallen hervorgeht. Insbesondere gilt

$$\bigcap_{i=0}^{n} A_{k_i} = A_{max_{i=0}^{n} k_i},$$

womit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ die endliche Durchschnittseigenschaft besitzt und die Cantormenge $\mathfrak{C} := \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$ eine nichtleere, abgeschlossene und kompakte Menge ist.

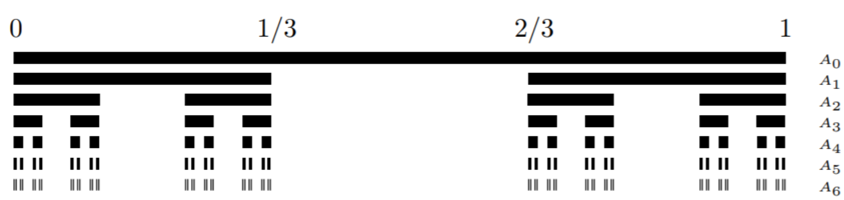

Abbildung 1: Konstruktion der Cantormenge ([Blü19], S.83).

Für den Beweis des folgenden Satzes von Hausdorff-Alexandroff, der den Großteil der Arbeit zum Nachweis der Existenz von Peanofunktionen darstellen wird, brauchen wir eine Überlegung zur Cantormenge und zu kompakten metrischen Räumen im Allgemeinen.

Definition 4.2. Sei M eine Menge und $\{N_i,\, i \in I\}$ eine Überdeckung von M. Wenn zusätzlich $N_i \subseteq M$ für alle $i \in I$ gilt, so nennen wir $\{N_i,\, i \in I\}$ eine *Teilmengenüberdeckung* von M.

Lemma 4.3.

(i) *Sei $\mathfrak{C}$ mit der Relativtopologie versehen. Zu $\varepsilon > 0, A \subseteq \mathfrak{C}$ abgeschloffen (offen und abgeschlossen) gibt es eine endliche Partitionierung von A in abgeschloffene Mengen mit Durchmesser kleiner ε.*

(ii) *Ist (M, d) ein kompakter, metrischer Raum, $N \subseteq M$ abgeschlossen und $\delta > 0$, dann existiert eine endliche Teilmengenüberdeckung von N durch nichtleere, abgeschlossene Mengen mit Durchmesser kleiner δ.*

Beweis.

(i) Für $n \in \mathbb{N}$ mit $3^{-n} < \varepsilon$ seien $(B_k)_{k\in\{1,\ldots,2^n\}}$ die 2^n abgeschlossenen und paarweise disjunkten Intervalle, aus denen A_n besteht und die alle bereits Durchmesser $3^{-n} < \varepsilon$ haben. Dann ist die gewünschte Partition von A durch $\{B_k \cap A : k \in \{1, ..., 2^n\}\} \setminus \{\emptyset\}$ gegeben. Diese Mengen sind offensichtlich[5] abgeschlossen. Wegen $B_l = A_n \setminus (\bigcup_{k\neq l, k\in\{1,\ldots,2^n\}} B_k)$ ist B_l in A_n und folglich auch $A \cap B_l = A \cap (B_l \cap \mathfrak{C})$ in $\mathfrak{C}$ offen.

(ii) Offensichtlich gilt

$$N \subseteq \bigcup_{x\in N} U_{\frac{\delta}{3}}(x),$$

wobei der Durchmesser von $U_{\frac{\delta}{3}}(x)$ kleiner δ ist. Da N kompakt ist, gibt es endlich viele Punkte $x_1, ..., x_n \in N$, sodass bereits $N \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} U_{\frac{\delta}{3}}(x_i)$. Indem wir hier zum Abschluss aller Kugeln übergehen, bleibt die Überdeckungseigenschaft natürlich erhalten und auch die Durchmesser verändern sich nicht. Zudem enthalten alle Mengen ihre Mittelpunkte und sind somit nichtleer. Also bilden die Mengen $\{N \cap \overline{U_{\frac{\delta}{3}}(x_i)} \colon i \in \{1, ..., n\}\}$ eine Teilmengenüberdeckung von N mit den geforderten Eigenschaften.

$\square$

Satz 4.4. *(von Hausdorff-Alexandroff). Sei (M, d) ein kompakter, nichtleerer metrischer Raum. Dann existiert eine stetige, surjektive Abbildung von $\mathfrak{C}$ auf M.*

[5] Da die B_k als Teilmengen von $\mathbb{R}$ abgeschlossen sind, ist $A \cap B_k = (A \cap \mathfrak{C}) \cap B_k =$ abgeschlossen in der Relativtopologie.

Beweis. Durch iteratives Anwenden des vorangegangenen Lemmas können Mengenfolgen

$$\{(X_{n,k})_{1\leq k\leq m(n)} : n \in \mathbb{N}\},$$
$$\{(Y_{n,k})_{1\leq k\leq m(n)} : n \in \mathbb{N}\},$$

derart gewählt werden, dass

1. $\forall n \in \mathbb{N}$ ist $(X_{n,k})_{1\leq k\leq m(n)}$ eine endliche Partition von $\mathfrak{C}$ bestehend aus abgeschloffenen Mengen mit Durchmesser kleiner $\frac{1}{n+1}$.
2. $\forall n \in \mathbb{N}$ ist $(Y_{n,k})_{1\leq k\leq m(n)}$ eine endliche Überdeckung von M bestehend aus nichtleeren, abgeschlossenen Mengen mit Durchmesser kleiner $\frac{1}{n+1}$.
3. $\forall n \in \mathbb{N}, \forall l \in \{1, ..., m(n+1)\}\ \exists! k \in \{1, ..., m(n)\} : X_{n+1,l} \subseteq X_{n,k}$.
4. $\forall n \in \mathbb{N}, \forall k \in \{1, ..., m(n)\}, \forall l \in \{1, ..., m(n+1)\} : X_{n+1,l} \subseteq X_{n,k} \Rightarrow Y_{n+1,l} \subseteq Y_{n,k}$.

Für $n = 1$ wählen wir gemäß Lemma 4.3 eine Partition $\tilde{X}_{1,1} ..., \tilde{X}_{1,p}$ aus abgeschloffenen Mengen von $\mathfrak{C}$ und eine Überdeckung[6] $\tilde{Y}_{1,1} ..., \tilde{Y}_{1,q}$ aus abgeschlossenen, nichtleeren Mengen von M mit Durchmesser kleiner $\frac{1}{2}$. Im Fall $p = q$ sind wir fertig. Ansonsten müssen wir die Anzahl der verwendeten Mengen noch aneinander angleichen. Im Fall von $p > q$ definieren wir $\tilde{Y}_{1,q+1}, ..., \tilde{Y}_{1,p} := \tilde{Y}_{1,q}$. Wenn $p < q$ gilt, partitionieren wir wieder entsprechend Lemma 4.3 jede Menge $\tilde{X}_{1,i}$ durch abgeschloffene Mengen $\hat{X}_{1,i,1}, ..., \hat{X}_{1,i,p_i}$ mit Durchmesser kleiner $\operatorname{diam}(\tilde{X}_{1,i})/2$ und verwenden die Vereinigung all dieser neuen Partitionen, also $\bigcup_{i=1}^{p}\{\hat{X}_{1,i,1}, ..., \hat{X}_{1,i,p_i}\}$, als neue Partition von $\mathfrak{C}$. Da sich die Anzahl der in der Partition auftretenden Mengen durch die Halbierung aller Durchmesser mindestens verdoppelt[7], kommen wir durch mehrfaches Anwenden dieser Methode und entsprechendes Umbenennen der in der Partition vorkommenden Mengen wieder zum Fall $p \geq q$, in dem bereits Gleichheit herrscht oder wir sie wie oben beschrieben herstellen können. Zuletzt definieren wir $m(1) := p$ und bezeichnen die Mengen mit $X_{1,1}, ..., X_{1,m(1)}$ respektive $Y_{1,1}, ..., Y_{1,m(1)}$. Die Reihenfolge ist im ersten Schritt noch unerheblich.

Sei jetzt $n \geq 2$ und seien die Partitionen und Teilmengenüberdeckungen für alle $j < n$ bereits passend gewählt. Gilt für ein $k \in \{1, ..., m(n-1)\}$ bereits $\operatorname{diam}(X_{n-1,k}) < \frac{1}{n+1}$ und $\operatorname{diam}(Y_{n-1,k}) < \frac{1}{n+1}$, so können die Mengen im nächsten Iterationsschritt übernommen werden, wir werden sie dort zunächst als $\tilde{X}_{n-1,k,1}$ und $\tilde{Y}_{n-1,k,1}$ bezeichnen. Andernfalls wissen wir nach Lemma 4.3, dass es eine entsprechende Partition von $X_{n-1,k}$ und Teilmengenüberdeckung von $Y_{n-1,k}$ mit Durchmesser kleiner $\frac{1}{n+1}$ gibt. Diese können wie im vorangegangenen Absatz sogar gleichmächtig gewählt werden. Wir notieren für Sie $\{\tilde{X}_{n-1,k,i} \colon i \in \{1, .., \kappa(k)\}\}$ sowie $\{\tilde{Y}_{n-1,k,i} \colon i \in \{1, .., \kappa(k)\}\}$. Indem wir für

[6] Alle Überdeckungen der Grundmenge sind Teilmengenüberdeckungen.
[7] Singletons sind nach Defintion der Relativtopologie nie offen in $\mathfrak{C}$.

alle $k \in \{1, ..., m(n-1)\}$ so vorgehen, erhalten wir $m(n-1)$ viele Partitionen und Überdeckungen. Diese müssen jetzt noch passend indiziert werden. Wir setzen

$$\begin{aligned} X_{n,1} &:= \tilde{X}_{n-1,1,1}, \\ &\vdots \\ X_{n,\kappa(1)} &:= \tilde{X}_{n-1,1,\kappa(1)}, \\ X_{n,\kappa(1)+1} &:= \tilde{X}_{n-1,2,1}, \\ &\vdots \\ X_{n,\sum_{k=1}^{m(n-1)} \kappa(k)} &:= \tilde{X}_{n-1,m(n-1),\kappa(m(n-1))} \end{aligned}$$

und dementsprechend $m(n) := \sum_{k=1}^{m(n-1)} \kappa(k)$. Mit den Mengen $\tilde{Y}_{n-1,k,i}$ verfahren wir ganz analog. Die Mengen $\{(X_{n,k})_{1 \le k \le m(n)} : n \in \mathbb{N}\}$ und $\{(Y_{n,k})_{1 \le k \le m(n)} : n \in \mathbb{N}\}$ erfüllen die Eigenschaften 1.-4. nach Konstruktion.

Für $x \in \mathfrak{C}$ ist durch die Forderung $x \in X_{n,k_n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ eine Folge $(k_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $1 \le k_n \le m(n)$, $n \in \mathbb{N}$, definiert. Für die korrespondierende Folge $(Y_{n,k_n})_{n \in \mathbb{N}}$ gilt nach 4. $Y_{n+1,k_{n+1}} \subseteq Y_{n,k_n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und nach 2. $\lim_{n \to \infty} \operatorname{diam}(Y_{n,k_n}) = 0$.
Die Mengen Y_{n,k_n} haben offensichtlich die endliche Durchschnittseigenschaft und M ist voraussetzungsgemäß kompakt. Es muss also genau einen Punkt $y \in M$ geben, der in allen Mengen Y_{n,k_n}, $n \in \mathbb{N}$, liegt. Indem wir diesen eindeutigen Punkt mit $f(x)$ bezeichnen, ist eine Funktion $f \colon \mathfrak{C} \to M$ definiert.
Um den Satz zu beweisen, müssen wir noch Stetigkeit und Surjektivität von f zeigen. Da wir es mit metrischen Räumen zu tun haben, reicht für ersteres Folgenstetigkeit. Sei $(x_m)_{m \in \mathbb{N}} \in \mathfrak{C}^{\mathbb{N}}$ eine gegen x konvergente Folge und sei $(k_n)_{n \in \mathbb{N}}$ wie oben in Bezug auf x gewählt. Dann gilt[8]

$$\forall n \in \mathbb{N}\, \exists M \in \mathbb{N}\, \forall m \ge M : x_m \in X_{n,k_n},$$

wodurch in Verbindung mit $f(x) \in Y_{n,k_n}$

$$\forall n \in \mathbb{N}\, \exists M \in \mathbb{N}\, \forall m \ge M : f(x_m) \in Y_{n,k_n} \subseteq U_{\frac{1}{n+1}}(f(x)),$$

also $\lim_{n \to \infty} f(x_n) = f(x)$. Für die Surjektivität sei $y \in M$ beliebig aber fest. Setzen wir

$$F_n := \bigcup \{X_{n,k} \colon 1 \le k \le m(n) \wedge y \in Y_{n,k}\},$$

dann bildet F_n, $n \in \mathbb{N}$, eine Folge von[9] nichtleeren, abgeschlossenen Mengen.
Zudem ist die Folge F_n bezüglich der Mengeninklusion absteigend geordnet, da es zu jedem $n \in \mathbb{N}$ und $l \in \{1, ..., m(n+1)\}$ mit $y \in Y_{n+1,l}$ und folglich

[8] Die Mengen X_{n,k_n} sind offen, also Umgebungen von x.

[9] Die $Y_{n,k}$, $k \in \{1, ..., m(n)\}$ überdecken für jedes n die Menge M.

$X_{n+1,l} \subseteq F_{n+1}$ ein $k \in \{1, ..., m(n)\}$ gibt mit $X_{n+1,l} \subseteq X_{n,k}$. Nach 4. gilt dann $y \in Y_{n+1,l} \subseteq Y_{n,k}$, woraus $X_{n,k} \subseteq F_n$ folgt. Somit hat die Mengenfamilie die endliche Durchschnittseigenschaft, wodurch $F := \bigcap_n F_n$ nichtleer ist. Nach Konstruktion von f werden alle Elemente von F auf y abgebildet. □

Dieser Satz liefert uns auf einfache Art und Weise die Hauptaussage des Kapitels.

Satz 4.5. *Peanofunktionen, also stetige und surjektive Abbildungen von* $[0, 1]$ *auf* $[0, 1] \times [0, 1]$*, existieren.*

Beweis. $[0, 1] \times [0, 1]$ ist eine kompakte Teilmenge des $(\mathbb{R}^2, d_2)$ und dementsprechend mit der durch die eingeschränkte Metrik erzeugten Topologie, welche genau die Relativtopologie ist, ein kompakter metrischer Raum. Nach Satz 4.4 gibt es eine stetige, surjektive Abbildung $f : \mathfrak{C} \to [0, 1] \times [0, 1]$. Gemäß der Konstruktion der Cantormenge gilt

$$[0, 1] = \mathfrak{C} \cup \dot{\bigcup}_{(a,b)\in M} (a, b), \text{ wobei } M := \{(a, b) : [a, b] \cap \mathfrak{C} = \{a, b\}\}.$$

Für $(a, b) \in M$ setzen wir f linear auf das Intervall (a, b) durch

$$\tilde{f}(a + \gamma(b - a)) := f(a) + \gamma(f(b) - f(a)),\ \gamma \in (0, 1),$$

fort. Indem wir mit allen Intervallen in M so verfahren und $\tilde{f}|_{\mathfrak{C}} = f$ setzen, erhalten wir eine stetige und surjektive Abbildung $\tilde{f} \colon [0, 1] \to [0, 1] \times [0, 1]$. □

Literatur

[Blü19] Martin Blümlinger. *Analysis 3.* TU Verlag, 2019.

[Har20] Harald Woracek, Michael Kaltenbäck und Martin Blümlinger. *Funktionalanalysis.* TU Verlag, 2020.

[Kar00] A.B. Karazishvili. *Strange functions in real analysis.* Marcel Dekker, 2000.

[Mar20] Martin Goldstern und Reinhard Winkler. *Algebra.* TU Verlag, 2020.

Abbildungsverzeichnis