Seminar aus Analysis: Normale Abbildungen auf Räumen mit indefinitem Skalarprodukt

Sebastian Schön
betreut von Ao.Univ.Prof. Dipl.-Ing. Dr.techn. Michael Kaltenbäck

11.09.2020

Zusammenfassung

In der vorliegenden Seminararbeit wird zunächst das bekannte Konzept eines positiv definiten Skalarprodukts auf einem komplexen Vektorraum zu dem eines indefiniten verallgemeinert und die Geometrie der so entstehenden Räume, insbesondere deren Unterräume, untersucht. Dabei und auch sonst überall beschränkt sich die Diskussion auf den endlichdimensionalen Fall.

Im nächsten Schritt werden lineare Abbildungen und deren Adjungierte betrachtet, der Begriff der normalen Abbildung definiert und das Konzept der unitären Ähnlichkeit eingeführt.

Schließlich werden normale Abbildungen im Hinblick auf eine Klassifikation modulo unitärer Ähnlichkeit untersucht. Außerdem wird gezeigt, dass jede lineare Abbildung bezüglich eines geeignet gewählten Skalarprodukts normal ist.

Der gesamten Arbeit liegt primär [1] zugrunde. Für Beweise von bloß zitierten Resultaten aus der (positiv definiten) Linearen Algebra wird vereinzelt auch auf [2] verwiesen.

Inhaltsverzeichnis

1 Indefinite Skalarprodukte **1**

1.1 Definition und Darstellung bezüglich des Standardskalarprodukts 1

1.2 Orthogonalität 2

1.3 Unterräume 3

2 Lineare Abbildungen **4**

2.1 Adjungierte Abbildungen 4

2.2 Unitäre Ähnlichkeit 6

2.3 Jordan'sche Normalform und Normale Abbildungen 8

2.4 Zerlegbarkeit normaler Abbildungen 12

Literatur **14**

1 Indefinite Skalarprodukte

Wir beschränken uns auf den Fall eines endlichdimensionalen komplexen Vektorraumes und werden daher durchgehend den Vektorraum $\mathbb{C}^n, n \in \mathbb{N}$, zugrunde legen. Weiters identifizieren wir gelegentlich lineare Abbildungen auf $\mathbb{C}^n$ mit ihren Matrixdarstellungen bezüglich diverser Basen. Zumeist liegt diesen Darstellungen die kanonische Basis, bestehend aus den Vektoren $e_i = (\delta_{ij})^T_{j=1,\dots,n}, i = 1, \dots, n$, zugrunde.

1.1 Definition und Darstellung bezüglich des Standardskalarprodukts

Definition 1.1.1 Eine Abbildung $[.,.] : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}, (x, y) \mapsto [x, y]$ heißt *indefinites Skalarprodukt auf* $\mathbb{C}^n$, falls sie folgende Eigenschaften hat:

(i) Linearität im 1. Argument: $\forall x, y, z \in \mathbb{C}^n, \alpha, \beta \in \mathbb{C} : [\alpha x + \beta y, z] = \alpha[x, z] + \beta[y, z]$

(ii) Antisymmetrie: $\forall x, y \in \mathbb{C}^n : [y, x] = \overline{[x, y]}$

(iii) Nichtdegeneriertheit: $\forall x \in \mathbb{C}^n : (\forall y \in \mathbb{C}^n : [x, y] = 0) \implies x = 0$

Dabei bezeichnet $\overline{\alpha}$ die komplex konjugierte Zahl von $\alpha \in \mathbb{C}$.

Bemerkung 1.1.2 Die Eigenschaften (i) und (ii) aus Definition 1.1.1 implizieren, dass $[.,.]$ konjugiert linear im 2. Argument ist, also

$$[x, \alpha y + \beta z] = \overline{\alpha}[x, y] + \overline{\beta}[x, z] \text{ für alle } x, y, z \in \mathbb{C}^n, \alpha, \beta \in \mathbb{C}.$$

Beispiel 1.1.3 Das wichtigste Beispiel ist das aus der positiv definiten Linearen Algebra bekannte *Standardskalarprodukt* $(.,.)$, definiert durch $(x, y) := \sum_{j=1}^n x_j \overline{y_j}$, mit $x = (x_1, \dots, x_n)^T, y = (y_1, \dots, y_n)^T \in \mathbb{C}^n$.

Indefinite Skalarprodukte lassen sich in eindeutiger Weise bezüglich des Standardskalarprodukts darstellen. Um das zu zeigen, brauchen wir das folgende, wohlbekannte Resultat.

Lemma 1.1.4 Die Abbildung $\Phi : \mathbb{C}^n \to (\mathbb{C}^n)^*, x \mapsto (., x)$ ist eine konjugiert-lineare Bijektion zwischen $\mathbb{C}^n$ und seinem Dualraum $(\mathbb{C}^n)^*$.

Beweis: Siehe [2, 11.2.1] und [2, Satz 11.2.2].

■

Proposition 1.1.5 Ist $[.,.]$ ein indefinites Skalarprodukt auf $\mathbb{C}^n$, so existiert eine reguläre hermitesche Abbildung $H_{[.,.]} \in L(\mathbb{C}^n)$ derart, dass für alle $x, y \in \mathbb{C}^n$ die Gleichung $[x, y] = (H_{[.,.]}x, y)$ gilt. Ist umgekehrt $H \in L(\mathbb{C}^n)$ regulär und hermitesch, so ist $[.,.]_H$, definiert durch $[x, y]_H := (Hx, y)$ für $x, y \in \mathbb{C}^n$, ein indefinites Skalarprodukt auf $\mathbb{C}^n$. Die Abbildungen $[.,.] \mapsto H_{[.,.]}$ und $H \mapsto [.,.]_H$ sind invers zueinander und etablieren einen bijektiven Zusammenhang zwischen den indefiniten Skalarprodukten auf $\mathbb{C}^n$ und den regulären hermiteschen Abbildungen aus $L(\mathbb{C}^n)$.

Beweis: Sei zunächst $[.,.]$ ein indefinites Skalarprodukt auf $\mathbb{C}^n$. Für festes $y \in \mathbb{C}^n$ ist die Abbildung $x \mapsto [x, y]$ ein lineares Funktional auf $\mathbb{C}^n$. Nach Lemma 1.1.4 existiert genau ein $z \in \mathbb{C}^n$ mit $[., y] = (., z)$, nämlich $z = \Phi^{-1}([., y])$. Durch $H_{[.,.]}y := z$ wird eine Abbildung $H_{[.,.]} : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ defniert, die wegen der Eigenschaften (i), (ii) und (iii) von $[., .]$ und $(., .)$ aus Definition 1.1.1 und der von Φ aus Lemma 1.1.4 linear, hermitesch und regulär ist. Umgekehrt folgen für $[., .]_H$ die Eigenschaften (i), (ii) und (iii) von Definition 1.1.1 aus der Linearität, Hermitezität und Regularität von H und den entsprechenden Eigenschaften von $(., .)$. Dass sich die beiden Abbildungen umkehren und daher den behaupteten bijektiven Zusammenhang herstellen, ist dann offensichtlich.

■

In weiterer Folge werden wir - zur Abkürzung von Formulierungen und wenn nichts anderes gesagt wird - $\mathbb{C}^n$ immer als mit einem mit $[., .]$ bezeichneten indefiniten Skalarprodukt ausgestattet verstehen, die dazu gehörige reguläre hermitesche Abbildung mit H bezeichnen und die beiden Objekte stellvertretend füreinander verwenden.

1.2 Orthogonalität

Definition 1.2.1 Zwei Vektoren $x, y \in \mathbb{C}^n$ heißen *orthogonal bezüglich* $[., .]$, i.Z. $x\,[\perp]\,y$, falls $[x, y] = 0$. Für eine Teilmenge $M \subseteq \mathbb{C}^n$ heißt

$$M^{[\perp]} := \{x \in \mathbb{C}^n : x\,[\perp]\,y \text{ für alle } y \in M\}$$

das *orthogonale Komplement von M bezüglich* $[., .]$. Orthogonalität bezüglich $(., .)$ wird mit dem Zeichen $\perp$ notiert.

Für einen Unterraum M von $\mathbb{C}^n$ ist bekannt, dass die Zerlegung $\mathbb{C}^n = M \dot{+} M^\perp$ gilt, wobei $\dot{+}$ die direkte Summe von Unterräumen bezeichnet. Dies ist für indefinite Skalarprodukte nicht mehr richtig, es gilt aber folgende schwächere Aussage:

Lemma 1.2.2 Für jeden Unterraum M von $\mathbb{C}^n$ gilt

(i) $\dim(M) + \dim(M^{[\perp]}) = n$,

(ii) $(M^{[\perp]})^{[\perp]} = M$.

Beweis: Wegen

$$x \in M^{[\perp]} \iff 0 = [x, y] = (Hx, y), \forall y \in M \iff Hx \in M^\perp \iff x \in H^{-1}M^\perp$$

gilt $M^{[\perp]} = H^{-1}M^\perp$ und infolge $\dim(M^{[\perp]}) = \dim(M^\perp) = n - \dim(M)$, also (i). Per definitionem hat man $M \subseteq (M^{[\perp]})^{[\perp]}$. Wegen (i) gilt zudem $\dim(M) = n - \dim(M^{[\perp]}) = \dim((M^{[\perp]})^{[\perp]})$, und infolge (ii).

■

Definition 1.2.3 Sei M ein Unterraum von $\mathbb{C}^n$. Wir nennen M *nichtdegeneriert*, falls $[., .]|_{M\times M}$ ein indefinites Skalarprodukt auf M ist, also dass für $x \in M$ aus $[x, y] = 0$ für alle $y \in M$ bereits $x = 0$ folgt. Andernfalls heißt M *degeneriert*.

Lemma 1.2.4 Für einen Unterraum M von $\mathbb{C}^n$ gilt $\mathbb{C}^n = M \dot{+} M^{[\perp]}$ genau dann, wenn M nichtdegeneriert ist.

Beweis: Die Aussage folgt aus Lemma 1.2.2, (i) und der Tatsache, dass die Nichtdegeneriertheit von M äquivalent ist zu $M \cap M^{[\perp]} = \{0\}$.

■

1.3 Unterräume

Definition 1.3.1 Ist M ein Unterraum von $\mathbb{C}^n$, so heißt M

(i) positiv, wenn $[x,x] > 0$ für alle $x \in M$ gilt,

(ii) nichtnegativ, wenn $[x,x] \geq 0$ für alle $x \in M$ gilt,

(iii) negativ, wenn $[x,x] < 0$ für alle $x \in M$ gilt,

(iv) nichtpositiv, wenn $[x,x] \leq 0$ für alle $x \in M$ gilt,

(v) neutral, wenn $[x,x] = 0$ für alle $x \in M$ gilt.

Das Ziel dieses Unterabschnittes ist es, die maximale Dimension der Typen von Unterräumen aus Definition 1.3.1 zu ermitteln. Dazu bringen wir zunächst das folgende

Lemma 1.3.2 Seien $[.,.]_1, [.,.]_2$ zwei indefinite Skalarprodukte auf $\mathbb{C}^n$ mit zugehörigen regulären hermiteschen Abbildungen $H_1, H_2 \in L(\mathbb{C}^n)$, und seien letztere kongruent, also existiere ein reguläres $S \in L(\mathbb{C}^n)$ mit $H_1 = S^* H_2 S$, wobei $.^*$ das gewöhnliche Adjungieren bezüglich $(.,.)$ bezeichnet. Dann hat ein Unterraum M von $\mathbb{C}^n$ genau dann eine der Eigenschaften (i)-(v) aus Definition 1.3.1 bezüglich $[.,.]_1$, wenn sie der Unterraum SM bezüglich $[.,.]_2$ hat.

Beweis: Die Aussage folgt direkt daraus, dass $[Sx, Sx]_2 = (H_2 Sx, Sx) = (S^* H_2 Sx, x) = (H_1 x, x) = [x,x]_1$ für alle $x \in M$ gilt.

■

Definition 1.3.3 Sei $H \in L(\mathbb{C}^n)$ hermitesch. Dann bezeichnet $i_+(H), i_-(H)$ und $i_0(H)$ die Anzahl der positiven, negativen und verschwindenden Eigenwerte von H, wobei die einzelnen Eigenwerte gemäß ihrer Vielfachheit gezählt werden.

Für ein reguläres H gilt natürlich $i_0(H) = 0$.

Lemma 1.3.4 Sei $H \in L(\mathbb{C}^n)$ hermitesch. Dann gilt $i_+(H) + i_-(H) + i_0(H) = n$ und die Matrixdarstellung von H ist kongruent zu

$$\begin{pmatrix} I_{i_+(H)} & 0 & 0 \\ 0 & -I_{i_-(H)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Hierin bezeichnet $I_m \in \mathbb{C}^{m \times m}$ die Einheitsmatrix.

Beweis: Siehe [1, Theorem A.1.1].

■

Lemma 1.3.5 Sei $H \in L(\mathbb{C}^n)$ hermitesch und bezeichne $\lambda_1 \geq \ldots \geq \lambda_n$ die absteigend angeordneten, nicht notwendigerweise verschiedenen Eigenwerte von H. Dann gilt

$$\forall p \in \{1, \ldots, n\} : \lambda_p = \max_{\substack{N \subseteq \mathbb{C}^n \text{ Unterraum}, \\ \dim(N) = p}} \min_{\substack{x \in N, \\ (x,x)=1}} (Hx, x)$$

Beweis: Siehe [1, Theorem A.1.6].

$\blacksquare$

Jetzt können wir das Hauptresultat dieses Unterabschnittes formulieren.

Proposition 1.3.6 Sei $[.,.]$ ein indefinites Skalarprodukt auf $\mathbb{C}^n$ und $H \in L(\mathbb{C}^n)$ die zugehörige reguläre hermitesche Abbildung. Dann gilt:

(i) Die maximale Dimension eines positiven bzw. eines nichtnegativen Unterraumes von $\mathbb{C}^n$ ist $i_+(H)$.

(ii) Die maximale Dimension eines negativem bzw. eines nichtpositiven Unterraumes von $\mathbb{C}^n$ ist $i_-(H)$.

(iii) Die maximale Dimension eines neutralen Unterraumes von $\mathbb{C}^n$ ist $\min(i_+(H), i_-(H))$.

Beweis: Zunächst zu (i): Sei $M \subseteq \mathbb{C}^n$ ein positiver bzw. nichtnegativer Unterraum. Angenommen $p := \dim(M) > i_+(H)$, dann existiert wegen Lemma 1.3.5 ein $y \in M$ mit $[y, y] = (Hy, y) = \min_{x \in M, (x,x)=1}(Hx, x) \leq \lambda_p$. Da H regulär ist, gilt $\lambda_i > 0$ für $i = 1, \ldots, i_+(H)$ und $\lambda_i < 0$ für $i = i_+(H) + 1, \ldots, n$, was auf den Widerspruch $0 \leq [y, y] \leq \lambda_p < 0$ führt. Also gilt $\dim(M) \leq i_+(H)$ für einen jeden solchen Unterraum. Um zu zeigen, dass es einen derartigen Unterraum mit Dimension $i_+(H)$ gibt, verwenden wir, dass nach Lemma 1.3.4 ein reguläres $S \in L(\mathbb{C}^n)$ derart existiert, dass

$$\begin{pmatrix} I_{i_+(H)} & 0 \\ 0 & -I_{i_-(H)} \end{pmatrix} =: H_0 = S^* H S$$

Bezüglich $[.,.]_{H_0}$ ist der $i_+(H)$-dimensionale Unterraum $\operatorname{span}\{e_1, \ldots, e_{i_+(H)}\}$ positiv bzw. nichtnegativ, und daher gilt selbiges nach Lemma 1.3.2 für den gleichdimensionalen Raum $M := S\left(\operatorname{span}\{e_1, \ldots, e_{i_+(H)}\}\right)$ bezüglich $[.,.]$. (ii) zeigt man analog.

Für (iii) beachte man zunächst, dass jeder neutrale Unterraum sowohl nichtnegativ als auch nichtpositiv ist, und daher nach Obigem seine Dimension durch $\min(i_+(H), i_-(H))$ nach oben beschränkt ist. Ein neutraler Unterraum, der diese maximale Dimension hat, ist nach analogen Überlegungen zu oben gegeben durch

$$M := S\left(\operatorname{span}\{e_1 + e_n, \ldots, e_{\min(i_+(H), i_-(H))} + e_{n+1-\min(i_+(H), i_-(H))}\}\right).$$

$\blacksquare$

2 Lineare Abbildungen

Wir wenden uns jetzt der Untersuchung von linearen Abbildungen auf $\mathbb{C}^n$ im Lichte eines indefiniten Skalarproduktes $[.,.]$ auf diesem Raum mit zugehöriger regulärer hermitescher Abbildung H zu.

2.1 Adjungierte Abbildungen

Wir verallgemeinern zunächst den Begriff der adjungierten Abbildung auf indefinite Skalarprodukte.

Lemma 2.1.1 Für $A \in L(\mathbb{C}^n)$ gibt es eine eindeutig bestimmte Abbildung $A^{[*]} \in L(\mathbb{C}^n)$ mit der Eigenschaft

$$\forall x, y \in \mathbb{C}^n : [Ax, y] = [x, A^{[*]}y].$$

Wir nennen diese die *Adjungierte von A bezüglich* [.,.] oder auch die *H-Adjungierte von A*. Dabei gilt

$$A^{[*]} = H^{-1}A^*H. \tag{2.1}$$

Beweis: Die Existenz und Eindeutigkeit der Adjungierten bezüglich des Standardskalarprodukts liefert gemeinsam mit

$$[Ax, y] = (HAx, y) = (x, A^*Hy) = (Hx, H^{-1}A^*Hy) = [x, H^{-1}A^*Hy]$$

für alle $x, y \in \mathbb{C}^n$ die Existenz und Eindeutigkeit von $A^{[*]}$ sowie die behauptete Gleichheit.

■

Folgende Eigenschaften der Adjungierten bezüglich $[.,.]$ ergeben sich direkt aus den entsprechenden Eigenschaften der Adjungierten bezüglich $(.,.)$ und (2.1).

Lemma 2.1.2 Für $A, B \in L(\mathbb{C}^n)$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ gilt

(i) $(A^{[*]})^{[*]} = A$,

(ii) $(\alpha A + \beta B)^{[*]} = \overline{\alpha}A^{[*]} + \overline{\beta}B^{[*]}$,

(iii) $(AB)^{[*]} = B^{[*]}A^{[*]}$.

Lemma 2.1.3 Sei $A \in L(\mathbb{C}^n)$. Dann gilt:

(i) $\ker(A^{[*]}) = (\mathrm{ran}(A))^{[\perp]}$, $\mathrm{ran}(A^{[*]}) = (\ker(A))^{[\perp]}$,

(ii) $\dim(\ker(A^{[*]})) = \dim(\ker(A))$, $\dim(\mathrm{ran}(A^{[*]})) = \dim(\mathrm{ran}(A))$.

Insbesondere ist A genau dann regulär, wenn das für $A^{[*]}$ der Fall ist.

Beweis: Für $x \in \mathbb{C}^n$ gelten die folgenden Äquivalenzen:

$$\begin{aligned} A^{[*]}x = 0 &\iff \forall y \in \mathbb{C}^n : [A^{[*]}x, y] = 0 \\ &\iff \forall y \in \mathbb{C}^n : [x, Ay] = 0 \\ &\iff x \in (\mathrm{ran}(A))^{[\perp]} \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich die erste Gleichheit in (i). Infolge haben wir aber auch $\ker((A^{[*]})^{[*]}) = (\mathrm{ran}(A^{[*]}))^{[\perp]}$ und mit Lemma 1.2.2, (ii), sowie Lemma 2.1.2, (i), durch Bildung des orthogonalen Komplements die zweite Gleichheit.

(ii) folgt direkt aus (i) in Verbindung mit der Rangformel $\dim(\ker(A)) + \dim(\mathrm{ran}(A)) = n$ und Lemma 1.2.2, (i).

■

Lemma 2.1.4 Für $A \in L(\mathbb{C}^n)$ und einen Unterraum $M \subseteq \mathbb{C}^n$ ist M *A-invariant*, also $AM \subseteq M$, genau dann, wenn $M^{[\perp]}$ $A^{[*]}$-invariant ist.

Beweis: Man hat unter Berücksichtigung von Lemma 1.2.2, (ii), folgende Äquivalenzen:

$$
\begin{aligned}
M \text{ ist } A\text{-invariant} \quad &\iff \quad \forall x \in M : Ax \in M \\
&\iff \quad \forall x \in M, y \in M^{[\perp]} : [Ax, y] = 0 \\
&\iff \quad \forall x \in M, y \in M^{[\perp]} : [x, A^{[*]}y] = 0 \\
&\iff \quad \forall y \in M^{[\perp]} : A^{[*]}y \in M^{[\perp]} \\
&\iff \quad M^{[\perp]} \text{ ist } A^{[*]}\text{-invariant}
\end{aligned}
$$

■

Definition 2.1.5 Eine Abbildung $A \in L(\mathbb{C}^n)$ heißt *normal bezüglich* $[.,.]$ oder H*-normal*, falls A und $A^{[*]}$ kommutieren, also $AA^{[*]} = A^{[*]}A$.

Unter Berücksichtigung von (2.1) bedeutet die H-Normalität von $A \in L(\mathbb{C}^n)$ also

$$AH^{-1}A^*H = H^{-1}A^*HA \tag{2.2}$$

Das nächste Resultat wird für den nachfolgenden Unterabschnitt 2.2 entscheidend sein.

Proposition 2.1.6 Seien $[.,.]_1, [.,.]_2$ indefinite Skalarprodukte auf $\mathbb{C}^n$ mit zugehörigen regulären hermiteschen Abbildungen $H_1, H_2 \in L(\mathbb{C}^n)$ und $A \in L(\mathbb{C}^n)$. Sind H_1 und H_2 kongruent, existiert also ein reguläres $S \in L(\mathbb{C}^n)$ mit $H_2 = S^*H_1S$, dann ist $A_1 := A$ genau dann H_1-normal, wenn $A_2 := S^{-1}A_1S$ H_2-normal ist.

Beweis: Angenommen, A_1 ist H_1-normal. Dann folgt mit Lemma 2.1.1

$$
\begin{aligned}
A_2A_2^{[*]_2} &= S^{-1}A_1SH_2^{-1}S^*A_1^*(S^*)^{-1}H_2 \\
&= S^{-1}A_1(SH_2^{-1}S^*)A^*((S^*)^{-1}H_2S^{-1})S \\
&= S^{-1}A_1H_1^{-1}A_1^*H_1S \\
&= S^{-1}A_1A_1^{[*]_1}S \\
&= S^{-1}A_1^{[*]_1}A_1S \\
&= S^{-1}SH_2^{-1}S^*A_1^*(S^*)^{-1}H_2S^{-1}A_1S \\
&= H_2^{-1}A_2^*H_2A_2 \\
&= A_2^{[*]_2}A_2.
\end{aligned}
$$

Die umgekehrte Richtung folgt direkt aus dem Gezeigten, da ja $H_1 = (S^{-1})^*H_2S^{-1}$ und $A_1 = SA_2S^{-1}$ gilt.

■

2.2 Unitäre Ähnlichkeit

In diesem Unterabschnitt seien $[.,.]_i$ und H_i mit $i = 1,2$ indefinite Skalarprodukte auf $\mathbb{C}^n$ mit zugehörigen regulären hermiteschen Abbildungen aus $L(\mathbb{C}^n)$.

Definition 2.2.1 Eine lineare Abbildung T auf $\mathbb{C}^n$ heißt (H_1, H_2)*-unitär*, falls $[Tx, Ty]_2 = [x, y]_1$ für alle $x, y \in \mathbb{C}^n$ gilt. Im Falle $H_1 = H_2$ nennen wir T auch *unitär bezüglich* $[.,.]$ oder H*-unitär*.

Lemma 2.2.2 $T \in L(\mathbb{C}^n)$ ist genau (H_1, H_2)-unitär, wenn T eine Kongruenz zwischen H_1 und H_2 etabliert, also wenn T regulär ist mit $H_1 = T^* H_2 T$.

Beweis: T ist (H_1, H_2)-unitär genau dann, wenn

$$\forall x, y \in \mathbb{C}^n : (H_1 x, y) = [x, y]_1 = [Tx, Ty]_2 = (H_2 Tx, Ty) = (T^* H_2 Tx, y)$$

■

Bezeichne $(\mathbb{C}^n, [.,.]_i)$ bzw. $\mathbb{C}^n(H_i)$ für $i = 1, 2$ den Raum $\mathbb{C}^n$ ausgestattet mit dem Skalarprodukt $[.,.]_i$. Wir betrachten die Menge

$$\mathcal{M} := \{(A, H) \in L(\mathbb{C}^n) \times L(\mathbb{C}^n) : H \text{ ist regulär und hermitesch}\},$$

wobei für ein Paar $(A, H) \in \mathcal{M}$ der erste Eintrag A als lineare Abbildung auf $\mathbb{C}^n(H)$ gedacht wird. Definition 2.2.1 und Lemma 2.2.2 legen die folgende Begriffsbildung nahe.

Definition 2.2.3 Wir nennen $(A_1, H_1), (A_2, H_2) \in \mathcal{M}$ *unitär ähnlich*, i.Z. $(A_1, H_1) \sim (A_2, H_2)$, falls es ein reguläres $T \in L(\mathbb{C}^n)$ gibt derart, dass

$$H_1 = T^* H_2 T \quad \text{und} \quad A_1 = T^{-1} A_2 T$$

erfüllt ist.

$(A_1, H_1) \sim (A_2, H_2)$ gilt also genau dann, wenn es ein (H_1, H_2)-unitäres $T \in L(\mathbb{C}^n)$ gibt, dass eine Ähnlichkeit zwischen A_1 und A_2 etabliert.

Man sieht sofort, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf $\mathcal{M}$ ist. Bezeichnen wir weiters $(A, H) \in \mathcal{M}$ als normal, wenn A H-normal ist, so impliziert Proposition 2.1.6 direkt das folgende

Korollar 2.2.4 Sind $(A_1, H_1), (A_2, H_2) \in \mathcal{M}$ unitär ähnlich, so ist A_1 genau dann H_1-normal, wenn es A_2 H_2-normal ist. Somit ist die Eigenschaft der Normalität mit $\sim$ verträglich und daher eine Eigenschaft der ganzen Äquivalenzklasse aus $\mathcal{M}/\sim$.

Das Problem des nächsten und letzten Abschnittes lässt sich nun sehr prägnant wie folgt formulieren: Identifiziere in jeder normalen Äquivalenzklasse aus $\mathcal{M}/\sim$ einen möglichst einfachen, kanonischen Repräsentanten. Beim Angehen dieses Problems sind die folgenden beiden Resultate hilfreich.

Lemma 2.2.5 Seien A_k für $k = 1, 2$ lineare Abbildungen auf $\mathbb{C}^n(H_k)$, $\mathcal{B}_k := \{u_1^{(k)}, \ldots, u_n^{(k)}\}$ Basen und $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ die Matrixdarstellung von A_k bezüglich $\mathcal{B}_k$. Dann sind (A_1, H_1) und (A_2, H_2) unitär ähnlich, wenn

$$[u_i^{(1)}, u_j^{(1)}]_1 = [u_i^{(2)}, u_j^{(2)}]_2 \text{ für alle } i, j = 1, \ldots, n$$

Beweis: Sei $A := (a_{ij})_{i,j=1,\ldots,n}$ und definiere die lineare Abbildung T vermöge $Tu_i^{(1)} := u_i^{(2)}, i = 1, \ldots, n$. Dann gilt für alle $i \in \{1, \ldots, n\}$

$$A_2 T u_i^{(1)} = A_2 u_i^{(2)} = \sum_{j=1}^n a_{ji} u_j^{(2)} = T \left(\sum_{j=1}^n a_{ji} u_j^{(1)} \right) = T A_1 u_i^{(1)}$$

und damit $A_1 = T^{-1} A_2 T$. Außerdem hat man für alle $i, j \in \{1, \ldots, n\}$

$$[u_i^{(1)}, u_j^{(1)}]_1 = (u_i^{(1)}, H_1 u_j^{(1)}) \quad \text{und} \quad [u_i^{(2)}, u_j^{(2)}]_2 = (u_i^{(2)}, H_2 u_j^{(2)}) = (u_i^{(1)}, T^* H_1 T u_j^{(1)}).$$

Somit gilt $H_1 = T^* H_2 T$ genau dann, wenn die Bedingung aus der Aussage erfüllt ist.

■

Korollar 2.2.6 Sei A_1 eine lineare Abbildung auf $\mathbb{C}^n(H_1)$, die bezüglich der Basis $\mathcal{B}_1 := \{u_1^{(1)}, \ldots, u_n^{(1)}\}$ die Matrixdarstellung $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ hat und sei $\mathcal{B}_2 := \{u_1^{(2)}, \ldots, u_n^{(2)}\}$ eine bezüglich des Standardskalarprodukts orthonormale Basis. Definiere zwei lineare Abbildungen A_2 und H_2 auf $\mathbb{C}^n$ durch ihre Matrixdarstellungen bezüglich $\mathcal{B}_2$ wie folgt: A_2 habe die Matrixdarstellung A und H_2 die Matrixdarstellung $(H_{2,ij})_{i,j=1,\ldots,n}$, wobei $H_{2,ij} := [u_j^{(1)}, u_i^{(1)}]_1, i, j = 1, \ldots, n$. Dann sind (A_1, H_1) und (A_2, H_2) unitär ähnlich.
Beweis: Es gilt

$$\begin{aligned}
[u_i^{(2)}, u_j^{(2)}]_2 &= (H_2 u_i^{(2)}, u_j^{(2)}) \\
&= \left(\sum_{k=1}^{n} H_{2,ki} u_k^{(2)}, u_j^{(2)} \right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} H_{2,ki} (u_k^{(2)}, u_j^{(2)}) \\
&= \sum_{k=1}^{n} H_{2,ki} \delta_{kj} \\
&= H_{2,ji} \\
&= [u_i^{(1)}, u_j^{(1)}]_1,
\end{aligned}$$

weshalb die Aussage aus Lemma 2.2.5 folgt.

■

2.3 Jordan'sche Normalform und Normale Abbildungen

Wir beginnen mit einer kurzen Wiederholung der wichtigsten Resultate aus der Theorie der Jordan'schen Normalform.

Definition 2.3.1 Ist $\lambda \in \mathbb{C}$, dann heißt

$$J_m(\lambda) := \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & \lambda & 1 \\ 0 & \ldots & & 0 & \lambda \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{m\times m}$$

Jordan-Block der Größe m zum Eigenwert λ.

Definition 2.3.2 Sei A eine lineare Abbildung auf $\mathbb{C}^n$. Wir nennen die Menge $\sigma(A)$ der Eigenwerte von A das *Spektrum von A* und für $\lambda \in \sigma(A)$ bezeichnen wir

$$\mathcal{E}_A(\lambda) := \ker(A - \lambda I_n) \quad \text{bzw.} \quad \mathcal{R}_A(\lambda) := \ker(A - \lambda I_n)^n$$

als den *Eigenraum* bzw. *Hauptraum von A zum Eigenwert* λ. Die Zahl $g_A(\lambda) := \dim \mathcal{E}_A(\lambda)$ heißt *geometrische Vielfachheit* des Eigenwerts λ.

Die Relevanz dieser Begriffsbildungen artikuliert sich in dem folgenden

Satz 2.3.3 Sei A eine lineare Abbildung auf $\mathbb{C}^n$, repräsentiert durch ihre Matrixdarstellung aus $\mathbb{C}^{n\times n}$ bezüglich der kanonischen Basis. Bezeichne weiter $\sigma(A) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_l\}$ die verschiedenen Eigenwerte von A und $g_i := g_A(\lambda_i), i = 1, \dots, n$, deren geometrische Vielfachheiten. Dann gelten folgende Aussagen.

(i) $\mathbb{C}^n$ lässt sich schreiben als $\mathbb{C}^n = \mathcal{R}_A(\lambda_1) \dot{+} \dots \dot{+} \mathcal{R}_A(\lambda_l)$

(ii) Für $i = 1, \dots, l$ sind die Räume $\mathcal{E}_A(\lambda_i)$ und $\mathcal{R}_A(\lambda_i)$ A-invariant und A hat auf diesen genau den Eigenwert λ_i.

(iii) A ist ähnlich zu einer Jordan-Blockdiagonalmatrix der Form

$$J = \operatorname{diag}(J_{m_{1,1}}(\lambda_1), \dots, J_{m_{1,g_1}}(\lambda_1), \dots, J_{m_{l,1}}(\lambda_l), \dots, J_{m_{l,g_l}}(\lambda_l))$$

mit $\sum_{j=1}^{g_i} m_{i,j} = \dim(\mathcal{R}_A(\lambda_i)), i = 1, \dots, l$, und diese ist bis auf die Reihenfolge der sie aufbauenden Blöcke eindeutig durch A bestimmt.

Beweis: Siehe [1, Abschnitt A.2].

■

Lemma 2.3.4 Seien A, B lineare Abbildungen auf $\mathbb{C}^n$ mit $AB = BA$, $\{\lambda_1, \dots, \lambda_l\} := \sigma(A)$ die verschiedenen Eigenwerte von A und $\{\mu_1, \dots, \mu_m\} := \sigma(B)$ die verschiedenen Eigenwerte von B. Definiere weiters für $(i,j) \in \{1, \dots, l\} \times \{1, \dots, m\}$ den Unterraum $Q_{ij} := \mathcal{R}_A(\lambda_i) \cap \mathcal{R}_B(\mu_j)$ und $\Omega := \{(i,j) \in \{1, \dots, l\} \times \{1, \dots, m\} : Q_{ij} \neq \{0\}\}$. Dann gilt:

(i) $\forall (i,j) \in \{1, \dots, l\} \times \{1, \dots, m\} : Q_{ij}$ ist invariant für A und B

(ii) $\bigoplus_{(i,j)\in\Omega} Q_{ij} = \mathbb{C}^n$

(iii) $\forall (i,j) \in \{1, \dots, l\} \times \{1, \dots, m\}$: In Q_{ij} hat A genau den Eigenwert λ_i und B genau den Eigenwert μ_j

Beweis: Mit Ausnahme der gleichzeitigen Invarianz der Q_{ij} unter A und B folgen alle Aussagen direkt aus Satz 2.3.3. Die gleichzeitige Invarianz ist aber eine unmittelbare Konsequenz des Kommutierens von A und B, da Letzteres ja

$$A(B - \mu_j I)^n = (B - \mu_j I)^n A \quad \text{und} \quad B(A - \lambda_i I)^n = (A - \lambda_i I)^n B$$

impliziert.

■

Wir wollen an dieser Stelle noch die Eigen- und Haupträume der Adjungierten einer linearen Abbildung untersuchen.

Proposition 2.3.5 Ist $A \in L(\mathbb{C}^n)$, so gilt

(i) $\sigma(A^{[*]}) = \overline{\sigma(A)}$,

(ii) $\dim(\mathcal{R}_{A^{[*]}}(\overline{\lambda})) = \dim(\mathcal{R}_A(\lambda))$ für alle $\lambda \in \sigma(A)$,

(iii) $(\mathcal{R}_A(\lambda) \cap \mathcal{R}_{A^{[*]}}(\overline{\mu}))\,[\perp]\,(\mathcal{R}_A(\kappa) \cap \mathcal{R}_{A^{[*]}}(\overline{\nu}))$ für alle $\lambda, \mu, \kappa, \nu \in \sigma(A)$ mit $(\kappa, \nu) \neq (\mu, \lambda)$.

(iv) Ist zusätzlich A H-normal, so gilt $\dim(\mathcal{R}_A(\lambda) \cap \mathcal{R}_{A^{[*]}}(\overline{\mu})) = \dim(\mathcal{R}_A(\mu) \cap \mathcal{R}_{A^{[*]}}(\overline{\lambda}))$ für alle $\lambda, \mu \in \sigma(A), \lambda \neq \mu$.

Beweis: Wegen Lemma 2.1.2, (ii) und (iii), gilt $(A - \lambda I_n)^{[*]} = A^{[*]} - \overline{\lambda} I_n$, $((A - \lambda I_n)^n)^{[*]} = (A^{[*]} - \overline{\lambda} I_n)^n$. Damit folgen die Aussagen (i) und (ii) sofort aus Lemma 2.1.3, (ii).

Für (iii) seien $x \in \mathcal{R}_A(\lambda) \cap \mathcal{R}_{A^{[*]}}(\overline{\mu}), y \in \mathcal{R}_A(\kappa) \cap \mathcal{R}_{A^{[*]}}(\overline{\nu})$ mit $(\kappa, \nu) \neq (\mu, \lambda)$ beliebig vorgegeben. Im Falle $\nu \neq \lambda$ ist $(A - \nu I_n)^n$ nach Satz 2.3.3, (i), eine Bijektion von $\mathcal{R}_A(\lambda)$ auf sich. Also gibt es ein $z \in \mathcal{R}_A(\lambda)$ mit $x = (A - \nu I_n)^n z$. Damit folgt die Behauptung wegen

$$[x, y] = [(A - \nu I_n)^n z, y] = [z, (A^{[*]} - \overline{\nu} I_n)^n y] = [x, 0] = 0.$$

Den Fall $\kappa \neq \mu$ behandelt man entsprechend.

Für (iv) bemerken wir zunächst, dass wir für ein H-normales A mit $B := A^{[*]}$ genau in der Situation von Lemma 2.3.4 sind. Folglich haben wir unter Berücksichtigung von (i) die Zerlegung

$$\mathbb{C}^n = \bigoplus_{\lambda, \mu \in \sigma(A)} \mathcal{R}_A(\lambda) \cap \mathcal{R}_{A^{[*]}}(\overline{\mu}). \tag{2.3}$$

Aus (iii) erhalten wir unmittelbar

$$\bigoplus_{\substack{\kappa, \nu \in \sigma(A) \\ (\kappa, \nu) \neq (\mu, \lambda)}} \mathcal{R}_A(\kappa) \cap \mathcal{R}_{A^{[*]}}(\overline{\nu}) \subseteq (\mathcal{R}_A(\lambda) \cap \mathcal{R}_{A^{[*]}}(\overline{\mu}))^{[\perp]}, \tag{2.4}$$

woraus wir nach Lemma 1.2.2, (ii), sowie (2.3) folgern, dass

$$\begin{aligned}
\dim(\mathcal{R}_A(\mu) \cap \mathcal{R}_{A^{[*]}}(\overline{\lambda})) &= n - \sum_{\substack{\kappa, \nu \in \sigma(A) \\ (\kappa, \nu) \neq (\mu, \lambda)}} \dim(\mathcal{R}_A(\kappa) \cap \mathcal{R}_{A^{[*]}}(\overline{\nu})) \\
&\geq n - \dim\left((\mathcal{R}_A(\lambda) \cap \mathcal{R}_{A^{[*]}}(\overline{\mu}))^{[\perp]}\right) \\
&= \dim(\mathcal{R}_A(\lambda) \cap \mathcal{R}_{A^{[*]}}(\overline{\mu}))
\end{aligned}$$

Vertauschen wir die Rollen von λ und μ in diesem Argument, so erhalten wir die umgekehrte Ungleichung und damit insgesamt die Behauptung.

■

Definition 2.3.6 Die Matrix

$$S_n := \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \\ \vdots & & \iddots & 0 \\ 0 & \iddots & & \vdots \\ 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

heißt *sip-Matrix* (englisch für: standard involutory permutation) *der Größe n.*

Offensichtlich ist die Matrix S_n involutorisch, also $S_n^2 = I_n$, sowie regulär und hermitesch. Sie definiert somit ein indefinites Skalarprodukt auf $\mathbb{C}^n$.

Proposition 2.3.7 Seien $J_1 := J_{n_1}(\lambda_1), \dots, J_k := J_{n_k}(\lambda_k)$ Jordan-Blöcke und $S_1 := S_{n_1}, \dots, S_k := S_{n_k}$ die sip-Matrizen der zugehörigen Größen. Dann definiert die Blockdiagonalmatrix $S := \operatorname{diag}(S_1, \dots, S_k)$ ein indefinites Skalarprodukt auf $\mathbb{C}^n$ und die Blockdiagonalmatrix $J := \operatorname{diag}(J_1, \dots, J_k)$ ist S-normal.

Beweis: Man setze $n := n_1 + \ldots + n_k$. Mit den $S_i, i = 1, \dots, k$, ist auch S involutorisch, regulär und hermitesch. Berücksichtigt man Lemma 2.1.1 und $J^* = \operatorname{diag}(J_1^*, \dots, J_k^*)$, so ist die behauptete S-Normalität äquivalent zu

$$JSJ^*S = SJ^*SJ \iff \forall i = 1, \dots, k : J_iS_iJ_i^*S_i = S_iJ_i^*S_iJ_i.$$

Wir nehmen also im Weiteren oBdA. $k = 1$ an und lassen die Indizes weg. Die Multiplikation einer Matrix $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ mit S von links vertauscht die Zeilen dieser Matrix gemäß der Permutation $\pi(i) = n + 1 - i, i = 1, \dots, n$, die von rechts in derselben Weise die Spalten. Gemeinsam mit

$$J^* = \begin{pmatrix} \overline{\lambda} & 0 & \dots & & 0 \\ 1 & \overline{\lambda} & & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & & \\ \vdots & & & \overline{\lambda} & 0 \\ 0 & \dots & & 1 & \overline{\lambda} \end{pmatrix}$$

folgt daraus, dass $SJ^*S = \overline{J}$, wobei $\overline{J}$ für die Matrix steht, die durch komplexes Konjugieren der Einträge von J entsteht. Die Aussage ist somit zu $J\overline{J} = \overline{J}J = \overline{J\overline{J}}$, also zur Reellwertigkeit der Einträge von $J\overline{J}$, äquivalent, was wegen

$$J\overline{J} = \begin{pmatrix} \lambda\overline{\lambda} & \lambda+\overline{\lambda} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda\overline{\lambda} & \lambda+\overline{\lambda} & 1 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & \lambda\overline{\lambda} & \lambda+\overline{\lambda} & 1 \\ & & & & \lambda\overline{\lambda} & \lambda+\overline{\lambda} \\ 0 & \dots & & & 0 & \lambda\overline{\lambda} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n}$$

erfüllt ist.

■

Korollar 2.3.8 Zu jedem $A \in L(\mathbb{C}^n)$ existiert ein reguläres hermitesches $H \in L(\mathbb{C}^n)$ derart, dass A H-normal ist.

Beweis: Wir arbeiten wieder mit den Matrixdarstellungen der involvierten Abbildungen bezüglich der kanonischen Basis. Es sei $J = \operatorname{diag}(J_1, \dots, J_k) \in \mathbb{C}^{n\times n}$ eine gemäß Satz 2.3.3, (iii), existierende Jordan-Normalform von A mit den Jordan-Blöcken $J_1, \dots, J_k$ und $T \in \mathbb{C}^{n\times n}$ regulär mit $A = T^{-1}JT$. Setze $S := \operatorname{diag}(S_1, \dots, S_k)$ wie in Proposition

2.3.7 mit sip-Matrizen passender Größe. Nach Proposition 2.3.7 ist J S-normal, also ist nach Proposition 2.1.6 A bezüglich $H := T^*ST$ normal.

■

Wir sehen also, dass wenn wir von definiten zu indefiniten Skalarprodukten verallgemeinern, jede Abbildung aus $L(\mathbb{C}^n)$ bezüglich eines geeignet definierten Skalarproduktes normal ist. Das motiviert umso mehr die Suche nach einer Klassifikation normaler Abbildungen auf Räumen mit indefiniten Skalarprodukten modulo unitärer Ähnlichkeit, weist aber auch schon auf die große Komplexität dieses Problems hin [1, Abschnitt 8.2].

2.4 Zerlegbarkeit normaler Abbildungen

Definition 2.4.1 Eine lineare Abbildung auf $\mathbb{C}^n(H)$ heißt *zerlegbar*, wenn ein nicht-degenerierter Unterraum $V \subseteq \mathbb{C}^n$ mit $\{0\} \neq V \neq \mathbb{C}^n$ existiert derart, dass V und $V^{[\perp]}$ A-invariant sind, also $AV \subseteq V$ und $AV^{[\perp]} \subseteq V^{[\perp]}$. Andernfalls heißt A *unzerlegbar*. Gemäß Lemma 1.2.4 ist dann $\mathbb{C}^n = V \dot{+} V^{[\perp]}$ und wir sagen, dass A die *orthogonale Summe von* $A_1 := A|_V$ *und* $A_2 := A|_{V^{[\perp]}}$ *bezüglich* $[.,.]$ bzw. deren *H-orthogonale Summe* ist.

Lemma 2.4.2 Für eine lineare Abbildung A auf $\mathbb{C}^n(H)$ ist ein Unterraum $V \subseteq \mathbb{C}^n$ gemeinsam mit seinem H-orthogonalen Komplement $V^{[\perp]}$ genau dann A-invariant, wenn V bezüglich A und $A^{[*]}$ invariant ist.

Beweis: Nach Lemma 1.2.2, (ii) und Lemma 2.1.3 ist $V^{[\perp]}$ genau dann bezüglich A invariant, wenn $(V^{[\perp]})^{[\perp]} = V$ bezüglich $A^{[*]}$-invariant ist.

■

Bemerkung 2.4.3 Ist mit der Terminologie aus Definition 2.4.1 A zerlegbar, so ist nach Lemma 2.4.2 V $A^{[*]}$-invariant und die Adjungierte von $A_1 = A|_V$ bezüglich $[.,.]|_{V\times V}$ offensichtlich $A^{[*]}|_V$. Ist A dabei H-normal, so ist A_1 bezüglich $[.,.]_{V\times V}$ normal. Analoges gilt für A_2 bezüglich $[.,.]_{V^{[\perp]}\times V^{[\perp]}}$.

Iterativ lässt sich basierend auf Definition 2.4.1 die Darstellbarkeit linearer Abbildungen als H-orthogonale Summe auch von $k > 2$ Summanden definieren. Man erhält unmittelbar

Proposition 2.4.4 Jede lineare Abbildung A auf $\mathbb{C}^n(H)$ lässt sich in eine H-orthogonale Summe von unzerlegbaren linearen Abbildungen $A_1, \dots, A_k$ zerlegen.

Schließlich kommen wir an bei

Proposition 2.4.5 Jede H-normale lineare Abbildung N auf $\mathbb{C}^n$ lässt sich in eine H-orthogonale Summe von linearen Abbildungen mit genau einem oder zwei Eigenwerten zerlegen.

Beweis: Ist N H-normal, so kommutiert $A := N$ mit $B := N^{[*]}$ und wir befinden uns in der Situation von Lemma 2.3.4. Bezeichnet wieder $\{\lambda_1, \dots, \lambda_l\} := \sigma(N)$ bzw. $\{\mu_1, \dots, \mu_m\} := \sigma(N^{[*]})$ die verschiedenen Eigenwerte von N bzw. $N^{[*]}$, so gilt nach Proposition 2.4.5, (i), in diesem Fall $\{\mu_1, \dots, \mu_m\} = \{\overline{\lambda_1}, \dots, \overline{\lambda_l}\}$. Weiters haben wir für $(r, s) \neq (j, i)$ nach Proposition 2.4.5, (iii), $Q_{ij}[\perp]Q_{rs}$. Setzt man nun $V_i := Q_{ii}$ für $(i, i) \in \Omega$ und $V_{ij} := Q_{ij} + Q_{ji}$ für $(i, j) \in \Omega$ und $i < j$, so haben unter zusätzlicher Berücksichtigung von Lemma 1.2.4 die zugehörigen Einschränkungen $N|_{V_i}$ und $N|_{V_{ij}}$ genau die behaupteten Eigenschaften.

■

Bemerkung 2.4.6 Um die normalen Abbildungen auf einem gegebenen indefiniten Skalarproduktraum modulo unitärer Ähnlichkeit zu klassifizieren, reicht es nach Bemerkung 2.4.3, Proposition 2.4.4 und Proposition 2.4.5 aus, das für die unzerlegbaren unter ihnen zu tun, die genau einen oder zwei Eigenwerte haben.

Literatur

[1] I. Gohberg, P. Lancaster, L. Rodman: *Indefinite Linear Algebra and Applications*, Basel, Schweiz: Birkhäuser, 2005

[2] H. Havlicek: *Lineare Algebra für Technische Mathematiker*, Berliner Studienreihe zur Mathematik, Band 16, 3. Auflage, Lemgo, Deutschland: Heldermann Verlag, 2012