Optimaler Transport und der Satz von Brenier

Stefan Schrott

21. Juni 2020

1 Einleitung und Beispiele

Die Fragestellung von optimalen Transport ist, wie man ein Wahrscheinlichkeitsmaß μ möglichst "billig" in ein anderes Wahrscheinlichkeitsmaß ν transformieren kann.

Dabei kann man sich anschaulich μ als Verteilung einer Masse vorstellen (zB ein Sandhaufen), die man so bewegen will, dass man eine andere gewünschte Masseverteilung ν entsteht (zB man hat aus dem Sandhaufen eine Burg gebaut).[1]

Mit transportieren meinen wir, dass $\nu = T(\mu)$. Dazu erinnern wir an folgende Definition des Bildmaßes:[2]

Definition 1.1. Sei μ ein Maß auf X und sei $T : X \to Y$ eine messbare Abbildung. Dann heißt das Maß $T(\mu)$ definiert durch

$$T(\mu)(A) := \mu(T^{-1}(A)) \qquad A \subseteq Y \text{ messbar}$$

das Bildmaß von μ unter der Abbildung T. Es ist ein Maß auf Y. Offenbar ist das Bildmaß eines W-Maßes wieder ein W-Maß.

Eine zentrale Eingenschaft von Bildmaßen ist die Transformationsformel für Bildmaße:

Proposition 1.2. *Sei μ ein Maß auf X, $T : X \to Y$ und $f : Y \to \mathbb{R}$ messbar. Dann gilt*

$$\int_Y f dT(\mu) = \int_X f \circ T d\mu.$$

Beweisskizze. Für Indikatorfunktionen ist das eine andere Schreibweise der Definition. Der Beweis ist nun einfach "maßtheoretische Induktion", d.h. per Linarität gilt sie für nicht-negative

[1] Tatsächlich stammt die erste Formulierung des optimalen Transportproblems aus der Zeit der französischen Revolution und hatte das Ziel den Transportaufwand von Baumaterialen zu minimieren. Diese Formulierung hat natürlich noch keine Maße verwendet, sondern nur Funktionen (die hier den Dichten der Maße entsprechen). Diese Formulierung führt auf eine PDE, gennant Monge-Ampere-Gleichung, die hoch nichtlinear ist und somit schwer zu lösen. Die Lösungstheorie dieser Gleichung beruht heute großteils auf der Theorie des optimalen Transportes. Wir werden hier aber nicht mehr darauf eingehen.

[2] Im folgenden sind X und Y immer topologische Räume (zumindest polnische Räume, meist $\mathbb{R}^n$) und es ist klar, welche Topologie wir verwenden und somit ist auch klar, welche σ-Algebra wir werden, nämlich die Borel-Mengen bezüglich dieser Topologie. Wir notieren mit $\mathcal{P}(X)$ die Menge der Borel-Wahrscheinlichkeitsmaße auf X.

einfache Funktionen, mit monotoner Konvergenz für alle nicht negativen messbaren Funktionen. ■

Damit haben wir nun "transportieren" rigoros gemacht, wir müssen nun noch formulieren, was "billig" heißt. Dazu sei $c : X \times Y \to \mathbb{R}$ eine Kostenfunktion, das heißt wir stellen uns den Wert $c(x, y)$ als die Kosten vom Transport von x nach y vor. Dann beschreibt $c(x, T(x))$ die Kosten des Transportes T für Masse im Punkt x. Entsprechend sind die Kosten vom Transport T von μ nach ν geben durch

$$\int_X c(x, T(x)) d\mu(x).$$

Damit können wir das Monge Problem definieren:

Definition 1.3 (Monge Problem). Gegeben $\mu \in \mathcal{P}(X)$ und $\nu \in \mathcal{P}(Y)$ und eine messbare Kostenfunktion $c : X \times Y \to \mathbb{R}$ betrachten wir nun das Problem

$$\mathrm{MP}_c(\mu, \nu) := \inf \left\{ \int_X c(x, T(x)) d\mu(x) : T(\mu) = \nu \right\}.$$

Wir sind nun an folgenden Fragestellungen interessiert:

- Existiert eine solche Abbildung T überhaupt?
- Existiert ein Minimierer, dh wird das Infimum angenommen?
- Ist ein solcher Minimierer eindeutig?
- Gibt es eine Darstellung für den Minimierer?

Es stellt sich heraus, dass dieses Problem sehr "schlecht gestellt" ist, das heißt konkret:

- Die Abbildung $T \mapsto c(x, T(x))$ hat im allgemeinen keine "schönen Eigenschaften", dh sie ist zB nicht linear.
- Die Menge, über die optimiert wird, dh die Menge der Abbildungen T, sodass $T(\mu) = \nu$, hat ebenfalls keine schönen Eigenschaften: sie ist i.A. nicht konvex und möglicherweise leer.

Beispiel 1.4 (Keine Existenz für Monge-Problem). Sei $\mu = \delta_{x_0}$ und $T : X \to Y$ eine messbare Abbildung. Dann ist $T(\mu) = \delta_{T(x_0)}$. Daraus folgt nun:

- $\nu = \delta_{y_0}$, dann ist $T \equiv y_0$ der μ-fast sicher eindeutige Transportplan und die Kosten des Transportes betragen $c(x_0, T(x_0))$.
- In allen anderen Fällen, dh ν kein Dirac-Maß, existiert keine Monge-Abbildung.

Beispiel 1.5 (Die Menge der Monge-Pläne ist nicht konvex). Sei $X = Y = \mathbb{R}$ und sei $\mu = \nu = 1/2(\delta_{-1} + \delta_1)$. Es gibt nun genau zwei Transportpläne (wie immer bzgl. μ-f.s. Gleichheit)

- Man lässt die Masse, wo sie ist, dh: $T_1(x) = x$.
- Man vertauscht die beiden Punkte, dh: $T_2(x) = -x$.

Eine Konvexkombination der beiden Pläne ist nun

$$\frac{1}{2}T_1(x) + \frac{1}{2}T_2(x) = \frac{x}{2} + \frac{-x}{2} = 0,$$

das heißt $T(\mu) = \delta_0 \neq \nu$.

Man findet auch relativ einfach ein Beispiel, dass das Infimum im Monge-Problem nicht angenommen wird. Wir gehen hier nicht darauf ein (oder vlt in einem Anhang...)

Aus diesem Grund ändern wir das Problem ab, indem wir über eine größere Klasse von Objekten minimieren, die eine bessere Struktur aufweisen. Anschließend stellen wir dann die Frage, ob der Minimierer im neuen Problem mit einem Minimierer im alten Problem korrespondiert.

Um unsere neues Problem beschreiben zu können benötigen wir eine weitere Definition:

Definition 1.6. Sei $\pi \in \mathcal{P}(X \times Y)$ und bezeichnen $pr_X : X \times Y \to X$ sowie $pr_Y : X \times Y \to Y$ die Projektionen. Dann heißen die W-Maße $pr_X(\pi)$ und $pr_Y(\pi)$ die Randverteilungen (oder Marginalien) von π.

Die Menge

$$\Pi(\mu, \nu) := \{\pi \in \mathcal{P}(X \times Y) : pr_X(\pi) = \mu, pr_Y(\pi) = \nu\}$$

ist die Menge der Transportpläne (oder auch Kopplungen) zwischen μ und ν.

Definition 1.7 (Kontorovich Problem)**.** Gegeben $\mu \in \mathcal{P}(X)$ und $\nu \in \mathcal{P}(Y)$ sowie eine messbare Kostenfunktion $c : X \times Y \to \mathbb{R}$ betrachten wir nun das Problem

$$\mathrm{KP}_c(\mu, \nu) := \inf \left\{ \int_{X \times Y} c d\pi : \pi \in \Pi(\mu, \nu) \right\}.$$

Diese Problem ist nun eindeutig einfacher zu handhaben:

- Die Menge $\Pi(\mu, \nu)$ ist konvex, denn die beiden Bedingungen an die Marginalien sind linear. Sie ist auch nicht-leer, denn sie enthält das Produktmaß $\mu \otimes \nu$. Im nächsten Kapitel werden wir auch sehen, dass die Menge (in einer nützlichen Topologie) kompakt ist.
- Die Funktion, die wir minimieren wollen ist linear, denn das Lebesgue-Integral ist im Integrator linear. Wir werden ebenfalls im nächsten Kapitel sehen, dass sie auch (unterhalb)stetig ist.

Bevor wir im nächsten Kapitel diese "guten" Eingenschaften nutzen, um einen Existenzsatz zu zeigen, betrachten wir noch ein paar Beispiele, um mit dem Problem vertraut zu werden und gehen auf den Zusammenhang zwischen den beiden Problemen ein.

Definition 1.8. Um die Notation im Folgen zu vereinfachen definierten wir auch die Menge der Monge-Transportpläne

$$\Pi_M(\mu, \nu) := \{(id, T)(\mu) : T(\mu) = \nu\} \subseteq \Pi(\mu, \nu).$$

Proposition 1.9. *Seien $\mu \in \mathcal{P}(X)$, $\nu \in \mathcal{P}(Y)$ und c eine Kostenfunktion, dann gilt*

$$\mathrm{KP}_c(\mu, \nu) \leq \mathrm{MP}_c(\mu, \nu),$$

Beweis. Wir zeigen zuerst, dass $\Pi_M(\mu,\nu) \subseteq \Pi(\mu,\nu)$ gilt: Dazu sei $T : X \to Y$ beliebig, sodass $T(\mu) = \nu$. Für den Transportplan $\pi := (id, T)(\mu)$, gilt nun:

$$\begin{aligned} pr_X(\pi) &= pr_X((id,T)(\mu)) = (pr_X \circ (id,T))(\mu) = id(\mu) = \mu \\ pr_Y(\pi) &= pr_Y((id,T)(\mu)) = (pr_Y \circ (id,T))(\mu) = T(\mu) = \nu. \end{aligned}$$

Mit der abstrakten Transformationsformel sieht man auch, dass dieser Transportplan π dieselben Kosten wie T hat:

$$\int c d\pi = \int c d(id,T)(\mu) = \int c \circ (id,T) d\mu = \int c(x, T(x)) d\mu(x).$$

Somit gilt:

$$\mathrm{MP}_c(\mu,\nu) = \inf_{\pi \in \Pi_M(\mu,\nu)} \int c d\pi \leq \inf_{\pi \in \Pi(\mu,\nu)} \int c d\pi = \mathrm{KP}_c(\mu,\nu).$$

■

Beispiel 1.10. In Anschluss an Beispiel 1.5 sei wieder $X = Y = \mathbb{R}$ und $\mu = \nu = \frac{1}{2}(\delta_{-1} + \delta_1)$. Wir haben vorher die Abbildungen $T_1(x) = x$ und $T_2(x) = -x$ betrachtet und berechnen nun die davon induzierten Transportpläne:

$$\begin{aligned} \pi_1 &:= (id, T_1)(\mu) = (id, id)\left(\frac{1}{2}(\delta_{-1} + \delta_1)\right) = \frac{1}{2}\left(\delta_{(-1,-1)} + \delta_{(1,1)}\right) \\ \pi_2 &:= (id, T_2)(\mu) = (id, -id)\left(\frac{1}{2}(\delta_{-1} + \delta_1)\right) = \frac{1}{2}\left(\delta_{(-1,1)} + \delta_{(1,-1)}\right). \end{aligned}$$

Deren Konvexkombination

$$\frac{1}{2}(\pi_1 + \pi_2) = \frac{1}{4}(\delta_{(-1,-1)} + \delta_{(1,1)} + \delta_{(-1,1)} + \delta_{(1,-1)}) = \mu \otimes \nu$$

ist nun tatsächlich wieder ein Transportplan. Man sieht also dass Konvexkombination der Transportpläne π etwas ganz anderes bewirkt als Konvexkombination der Abbildungen $\mathcal{T}$.

Eine weitere wichtige Beobachtung ist: Der konvexkombinininierte Transportplan $\frac{1}{2}(\pi_1 + \pi_2)$ wird von keiner Abbildung induziert, dh es gibt keine Abbildung $T : X \to Y$, sodass $(id, T)(\mu) = \frac{1}{2}(\pi_1 + \pi_2)$.

Intuitiv lässt sich das so begründen: Der Plan $\frac{1}{2}(\pi_1 + \pi_2)$ transportiert Masse vom Punkt 1 sowohl in den Punkt 1 als auch in den Punkt -1. Eine Abbildung hat aber ein eindeutiges Bild und kann daher Masse aus einem Punkt in genau einen anderen Punkt transportieren und nicht in zwei verschiedene.

Diese Tatsache ist keine Besonderheit dieses Beispiels, sondern gilt allgemein. Wir zeigen dies nun, da es uns beim Beweis einer Eindeutigkeitsaussage mit letzten Kapitel hilfreich sein wird. Davor ein einfaches Lemma:

Lemma 1.11. *Sei $\pi \in \Pi(\mu,\nu)$. Dann gilt: $\pi \in \Pi_M(\mu,\nu)$ genau dann, wenn es eine messbare Abbildung $T : X \to Y$ gibt, sodass $\pi(\mathrm{graph}(T)) = 1$.*

Beweis. Falls $\pi \in \Pi_M(\mu,\nu)$, so gibt es eine Abbildung T gibt, sodass $\pi = (id, T)(\mu)$ und es folgt

$$\pi(\mathrm{graph}(T)) = \mu\Big((id, T)^{-1}(\mathrm{graph}(T))\Big) = \mu(X) = 1.$$

Ist umgekehrt T eine messbare Abbildung mit $\pi(\mathrm{graph}(T)) = 1$, dann gilt

$$\begin{aligned}\pi(A \times B) = \pi\Big((A \times B) \cap \mathrm{graph}(T)\Big) &= \pi(\{(x, T(x)) : x \in A, T(x) \in B\}) \\ &= \mu(\{x : (x, T(x)) \in A \times B\}) = (id, T)(\mu)(A \times B),\end{aligned}$$

dh $\pi = (id, T)(\mu)$ und somit $\pi \in \Pi_M(\mu, \nu)$. ■

Proposition 1.12. *Seien $\mu \in \mathcal{P}(X)$, $\nu \in \mathcal{P}(Y)$ und seien $T_i : X \to Y$, sodass $T_i(\mu) = \nu$ und bezeichne $\pi_i := (id, T_i)(\mu)$.*

Falls $\mu(T_1 \neq T_2) > 0$ wird $\pi := \frac{1}{2}(\pi_1 + \pi_2)$ von keiner Abbildung $T : X \to Y$ induziert.

Beweis. Nach dem vorherigen Lemma reicht also für jedes Abbildung T gilt $\pi(\mathrm{graph}(T)) < 1$. Zuerst bemerken wir, dass

$$\pi_i(\mathrm{graph}(T)) = (id, T_i)(\mu)(\mathrm{graph}(T)) = \mu(\{x : (x, T_i(x)) \in \mathrm{graph}(T)\}) = \mu(T = T_i).$$

Wegen $\{T_1 \neq T_2\} \subseteq \{T \neq T_1\} \cup \{T \neq T_2\}$ folgt $\mu(T_1 \neq T_2) \leq \mu(T \neq T_1) + \mu(T \neq T_2)$ und somit

$$\begin{aligned}\pi(\mathrm{graph}(T)) &= \frac{1}{2}\mu(T = T_1) + \frac{1}{2}\mu(T = T_2) = 1 - \frac{1}{2}\Big(\mu(T \neq T_1) + \mu(T \neq T_2)\Big) \\ &\leq 1 - \mu(T_1 \neq T_2) < 1.\end{aligned}$$

■

Wir geben nun ein vergleichsweise einfach, aber dennoch nicht-triviales Beispiel an, in dem man zeigen kann, dass $\mathrm{KP}_c = \mathrm{MP}_c$.

Beispiel 1.13. Sei $X = Y = \mathbb{R}^n$ und seien $x_1, \ldots, x_N \in \mathbb{R}^n$ und $y_1, \ldots, y_N \in \mathbb{R}^n$ jeweils paarweise verschieden und c messbar. Definiere

$$\mu = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \delta_{x_i} \qquad \nu = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \delta_{y_i}.$$

Wir wollen nun zeigen, dass $\Pi(\mu, \nu) = \mathrm{conv}(\Pi_M(\mu, \nu))$. Dann folgt die Behauptung $\mathrm{KP}_c(\mu, \nu) = \mathrm{MP}_c(\mu, \nu)$ sofort, da die Abbildung $\pi \mapsto \int c d\pi$ linear ist.

Jeder Transportplan $\pi \in \Pi(\mu, \nu)$ induziert eine Matrix $M_\pi \in \mathbb{R}^{N \times N}$ durch

$$M_\pi(i, j) := \pi(\{(x_i, y_j)\}).$$

Offenbar ist die Bedingung $\pi \in \Pi(\mu, \nu)$ äquivalent zu

$$\forall i : \sum_{j=1}^{N} \pi(\{(x_i, y_j)\}) = \mu(\{x_i\}) \qquad \forall j : \sum_{i=1}^{N} \pi(\{(x_i, y_j)\}) = \nu(\{y_j\}).$$

und dies ist wiederum äquivalent dazu das M_π Zeilen- und Spaltensumme $1/N$ hat. Insbesondere induziert also auch jede Matrix M mit nicht-negativen Einträgen sowie Zeilen- und Spaltensumme $1/N$ einen Transportplan $\pi_M \in \Pi(\mu, \nu)$ via $\pi_M(\{(x_i, y_j)\}) := M(i, j)$.

Die Abbildung $\Phi : \pi \mapsto NM_\pi$ ist also eine Bijektion zwischen $\Pi(\mu, \nu)$ und der Menge der bistochastischen Matrizen. Man sieht leicht, dass Φ linear ist. Daher ist Φ auch eine Bijektion zwischen den Extremaltpunkten von $\Pi(\mu,\nu)$ und den Extremalpunkten der Menge der bistochastischen Matrizen, welche nach dem Satz von Birkhoff genau die Permutationsmatrizen sind.

Man sieht auch leicht, dass das Φ-Urbild einer Permutationsmatrix $P_\sigma := (\mathbf{1}_{j=\sigma(i)})_{i,j=1}^N$ die Monge-Abbildung $x_i \mapsto y_{\sigma(i)}$ ist. Somit ist $\Pi(\mu,\nu) = \mathrm{conv}(\Pi_M(\mu,\nu))$ gezeigt. Aus der Linearität von $\pi \mapsto \int c d\pi$ folgt nun

$$\inf_{\pi\in\Pi_M(\mu,\nu)} \int c d\pi = \inf_{\pi\in\Pi(\mu,\nu)} \int c d\pi.$$

Da $\Pi_M(\mu,\nu)$ eine endliche Menge ist (es hat $N!$ Elemente) ist das Infimum tatsächlich auch ein Minimum.

Zuletzt erwähnen wir noch den Satz von Brenier, dessen Beweis das Ziel des Restes dieser Arbeit ist. Wir benötigen noch eine letzte Definition

Definition 1.14. Sei $p \in [1,\infty)$ und $\mu \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$. Dann ist das p-te Moment von μ definiert als $\int |x|^p d\mu(x)$.

Satz 1.15 (Brenier)**.** *Seien μ und ν Maße auf $\mathbb{R}^n$ mit endlichen zweiten Momenten und sei μ überdies absolut stetig und sei $c(x,y) = |x-y|^2$. Dann existiert genau ein Minimierer für $\mathrm{KP}_c(\mu,\nu)$ und dieser ist von der Form $(id, \nabla\phi)(\mu)$, wobei $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine konvexe Funktion ist. Insbesondere gilt also auch $\mathrm{KP}_c(\mu,\nu) = \mathrm{MP}_c(\mu,\nu)$.*

2 Existenz für das Kantorovich Problem

Das Ziel dieses Abschnittes ist der Beweis des folgenden relativ einfachen, aber sehr wichtigen Existenz-Satzes.

Satz 2.1. *Seien X, Y Polnische Räume (zB $X = Y = \mathbb{R}^n$), $\mu \in \mathcal{P}(X), \nu \in \mathcal{P}(Y)$ und $c : X \times Y \to [0,\infty]$ stetig. Falls $\mathrm{KP}(\mu,\nu) < \infty$, gibt es einen Minimierer, dh es gibt ein $\pi \in \Pi(\mu,\nu)$, sodass*

$$\int c d\pi = \mathrm{KP}(\mu,\nu).$$

Für den Beweis benötigen wir das Konzept der schwachen Konvergenz von Wahrscheinlichkeitsmaßen: Im Folgenden ist X immer ein Polnischer Raum, für unsere Zwecke reicht es sich aber über $X = \mathbb{R}^n$ Gedanken zu machen. Wir schreiben $C_b(X)$ für die Menge der stetigen beschränkten Funktionen von X nach $\mathbb{R}$.

Definition 2.2. Eine Folge $(\mu_n)_n$ von Wahrscheinlichkeitsmaßen auf X konvergiert schwach gegen ein $\mu \in \mathcal{P}(X)$, in Zeichen $\mu_n \rightharpoonup \mu$, falls

$$\forall f \in C_b(\mathbb{R}) : \int f d\mu_n \to \int f d\mu.$$

Bemerkung 2.3. Die schwache Konvergenz vom Maßen ist nicht die schwache Konvergenz wie man sie aus der Funktionalanalysis kennt, sondern eher die schwach-$*$-Konvergenz. Falls nämlich X kompakt ist, so ist der Dualraum der stetigen Funktionen auf X die der Raum der signierten Maße $\mathcal{M}(X)$. Dann ist die schwache Konvergenz von Wahrscheinlichkeitsmaßen genau die Konvergenz die schwach-$*$-Konvergenz auf $\mathcal{P}(X)$ als Teilmenge von $\mathcal{M}(X)$.

Wir geben nun ein sehr wichtiges Kompaktheitskriterum auf $\mathcal{P}(X)$ an. Dazu benötigen wir zuerst eine Begriffsbildung:

Definition 2.4. Sei Menge $M \subseteq \mathcal{P}(X)$ heißt straff, falls

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists K \subseteq X \text{ kompakt } : \sup_{\mu \in M} \mu(K^c) \leq \varepsilon.$$

Das Kompaktheitskrierium lautet nun:

Satz 2.5 (Satz von Prokhorov). *M ist genau dann schwach folgen relativ kompakt, wenn es straff ist.*

Die für uns relevante Tatsache ist also noch einmal explizit: Wenn M straff ist, hat jede Folge in M eine schwach konvergente Teilfolge. Ist M zusätzlich schwach abgeschlossen, so liegt dieser Grenzwert auch in M.

Bemerkung 2.6. Auf den Beweis müssen wir hier leider verzichten, wir gehen aber kurz auf den Spezialfall ein, dass X kompakt ist. In diesem Fall ist $\mathcal{P}(X)$ offensichtlich straff. Außerdem ist $\mathcal{P}(X)$ eine abgeschlossene Teilmenge der Einheitskugel im $\mathcal{M}(X)$ und somit nach Banach-Alaoglu kompakt.[3]

Die für uns entscheidende Anwendung des Satzes von Prokhorov ist:

Lemma 2.7. *Sei $\mu \in \mathcal{P}(X), \nu \in \mathcal{P}(Y)$, dann ist $\Pi(\mu, \nu)$ kompakt (bzgl der schwachen Konvergenz von W-Maßen).*

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Wir finden jeweils kompakte Mengen $K_X \subseteq X$ und $K_Y \subseteq Y$ sodass, dass $\mu(K_X^c) < \varepsilon/2$ und $\nu(K_Y^c)\varepsilon/2$. (zB weil endliche Borelmaße von innen regulär sind). Wir definieren nun $K := K_X \times K_Y$. Sei nun $\pi \in \Pi(\mu, \nu)$ beliebig.

$$\pi(K^c) \leq \pi(K_X^c \times Y \cup X \times K_Y^c) \leq pi(K_X^c \times Y) + \pi(X \times K_Y^c) = \mu(K_X^c) + \nu(K_Y^c) < \varepsilon,$$

also ist $\Pi(\mu, \nu)$ straff und somit relativ kompakt. Es verbleibt also zu zeigen, dass $\Pi(\mu, \nu)$ abgeschlossen ist. Dies folgt aus der Tatsache, dass[4]

$$\Pi(\mu, \nu) = \bigcap_{\substack{f \in C_b(X) \\ g \in C_b(Y)}} \left\{ \pi \in \mathcal{P}(X \times Y) : \int f d\pi = \int f d\mu, \int g d\pi = \int g d\nu \right\}.$$

■

Wir benötigen nun ein weiteres Lemma:

Lemma 2.8. *Sei $X = Y = \mathbb{R}^n$ und $c : X \times Y \to \mathbb{R}_+$ stetig. Dann ist die Abbildung*

$$\mathcal{P}(X \times Y) \ni \pi \mapsto \int c d\pi$$

unterhalb stetig für die schwache Konvergenz von W-Maßen, das heißt explizit:

$$\pi_n \rightharpoonup \pi \implies \int c d\pi \leq \liminf_{n \to \infty} \int c d\pi_n.$$

[3] Genaugenommen reicht dies nicht für die Existenz einer konvergenten Teilfolge. Allerdings ist für X kompakt $C(X)$ seperabel und daher ist die schwach-$*$-Konvergenz metrisierbar.

[4] Wir verwenden hier, dass die Menge der Funktionale $\mu \mapsto \int f d\mu$, $f \in C_b(X)$ punktetrennend ist.

Beweis. Für $k \in \mathbb{N}$ sei $c_k := \min\{c, k\}$. Da c_k stetig und beschränkt ist, ist die Abbildung $\pi \mapsto \int c_k d\pi$ per definitonem stetig. Daher gilt

$$\forall k \in \mathbb{N} : \int c_k d\pi = \lim_{n\to\infty} \int c_k d\pi_n = \liminf_{n\to\infty} \int c_k d\pi_n \leq \liminf_{n\to\infty} \int c d\pi_n.$$

Wendet man nun auf beide Seiten der Ungleichung den Limes $k \to \infty$ erhält man mit monotoner Konvergenz die gewünschte Aussage. ∎

Damit erhält man den Beweis vom Existenzsatz nun mit Standardargumenten:

Beweis von Satz 2.1. Da $\mathrm{KP}(\mu, \nu) < \infty$ existieren $\pi_n \in \Pi(\mu, \nu)$, sodass

$$\int c d\pi_n \leq \mathrm{KP}_c(\mu, \nu) + \frac{1}{n}.$$

Da $\Pi(\mu, \nu)$ kompakt ist, können wir oBdA annehmen, dass $\pi_n \rightharpoonup \pi$. Wegen der Unterhalbstetigkeit gilt nun

$$\mathrm{KP}_c(\mu, \nu) \leq \int c d\pi \leq \liminf_{n\to\infty} \int c d\pi_n \leq \liminf_{n\to\infty} \mathrm{KP}_c(\mu, \nu) + \frac{1}{n},$$

dh $\int c d\pi = \mathrm{KP}_c(\mu, \nu)$. ∎

Die Voraussetzung $\mathrm{KP}(\mu, \nu) < \infty$ besagt, dass es einen Transportplan gibt, der endliche Kosten hat. Da das Produktmaß immer ein Transportplan ist, ist $\int c d\mu \otimes \nu < \infty$ ein einfaches hinreichendes Kriterium dafür.

3 Konvexe Funktionen

In diesem Kapitel geben wir eine Einführung in die Theorie der konvexen Funktionen soweit wir sie benötigen. Wir werden auch nicht alle Resultate beweisen.

Definition 3.1. Eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ heißt konvex, falls für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$ und $t \in [0, 1]$ gilt

$$f((1-t)x + ty) \leq (1-t)f(x) + tf(y).$$

Der Domain einer konvexen Funktion ist $\mathrm{dom}(f) := \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) < \infty\}$. Eine konvexe Funktion heißt eigentlich, falls $\mathrm{dom}(f) \neq \emptyset$. Es gilt nun:

Satz 3.2. *Sei f konvex. Dann ist $\partial\mathrm{dom}(f)$ eine Nullmenge.*

Beweisskizze. Man sieht leicht, dass der Domain einer konvexen Funktion konvex ist. In der Maßtheorie zeigt man, dass der Rand einer konvexen Menge Borelmessbar ist und eine Nullmenge ist. ∎

Eine einfache, aber wichtige Tatsache ist:

Lemma 3.3. *Das Supremum konvexer (und somit insbesondere affin linearer) Funktionen ist konvex.*

Beweis. Seien $(f_i :\in I)$ konvexe Funktionen und $f := \sup_{i\in I} f_i$. Für $x, y \in \mathbb{R}^n$ und $t \in [0,1]$ gilt nun

$$\begin{aligned} f((t-t)x+ty) &= \sup_{i\in I} f_i((1-t)x+ty) \le \sup_{i\in I}(1-t)f_i(x) + tf_i(y) \\ &\le \sup_{i\in I}(1-t)f_i(x) + \sup_{i\in I} tf_i(y) = (1-t)f(x) + tf(y). \end{aligned}$$

■

Definition 3.4. Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ eine Funktion, die nicht konstant $+\infty$ ist. Dann definieren wir die Legendre-Transformierte von f als

$$f^*(y) := \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \langle x, y\rangle - f(x).$$

Als Supremum affin linearer Funktionen ist die Legendre-Transformierte konvex.

Definition 3.5. Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ eine konvexe Funktion. Dann ist ihr Subdifferential im Punkt x definiert als

$$\partial f(x) := \{y \in \mathbb{R}^n : \forall z \in \mathbb{R}^n : f(z) \ge f(x) + \langle z - x, y\rangle\}$$

und ihr Subdifferential definiert als

$$\partial f := \{(x, y) : y \in \partial f(x)\}.$$

Wir gehen nun auf den Zusammenhang zwischen Legendre-Transformierte und Subdifferenzial ein. Zuerst ein einfaches, aber wichtiges Lemma:

Lemma 3.6. *Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ eine eigentliche konvexe Funktion. Dann gilt*

$$f(x) + f^*(y) \ge \langle x, y\rangle,$$

wobei Gleichheit genau dann gilt, wenn $y \in \partial f(x)$. Insbesondere gilt also:

$$\partial f = \{(x, y) : f(x) + f^*(y) = \langle x, y\rangle\}.$$

Beweis. Offenbar gilt $f^*(y) = \sup_z \langle z, y\rangle - f(z) \ge \langle x, y\rangle - f(x)$. Setzen wir nun zusätzlich $y \in \partial f(x)$ voraus gilt

$$\forall z \in \mathbb{R}^n : f(z) \ge f(x) + \langle z - x, y\rangle$$

und daraus erhalten wir durch Umformen

$$\forall z \in \mathbb{R}^n : \langle z, y\rangle - f(z) \le \langle x, y\rangle - f(x).$$

Setzen wird das nun in die Definition der Legrende-Transformierten ein, so folgt

$$f(x) + f^*(y) = f(x) + \sup_z \langle z, y\rangle - f(z) \le f(x) + \langle x, y\rangle - f(x) = \langle x, y\rangle.$$

Umgekehrt folgt aus $f(x) + f^*(y) = \langle x, y\rangle$ insbesondere $f(x) + \langle z, y\rangle - f(z) \le \langle x, y\rangle$ und da z beliebig war $y \in \partial f(x)$. ■

Korrolar 3.7. *Sei f eine eigentliche konvexe Funktion und $x, y \in \mathbb{R}^n$, so gilt*

$$y \in \partial f(x) \iff x \in \partial f^*(y).$$

Beweis. $y \in \partial f(x) \iff f(x) + f^*(y) = \langle x, y\rangle \iff f^*(y) + f(x) = \langle y, x\rangle \iff x \in \partial f^*(y)$. ■

Wir erwähnen nun die Differenzierbarkeitseigenschaften von konvexen Funktionen sowie deren Zusammenhang zum Subdifferenzial.

Satz 3.8. *Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ eine eigentliche konvexe Funktion und x im Inneren von* $\mathrm{dom}(f)$*. Dann gilt*

(i) $\partial f(x) \neq \emptyset$.

(ii) f ist genau dann in x differenzierbar, wenn $\partial f(x)$ einelementig ist. In diesem Fall gilt $\partial f(x) = \{\nabla f(x)\}$.

(iii) f ist im Inneren von $\mathrm{dom}(f)$ *lokal Lipschitz-stetig und somit fast überall differenzierbar.*

(iv) $\partial f(x)$ ist für fast alle x im Inneren von $\mathrm{dom}(f)$ *einelementig.*

Beweisskizze. Mit Hilfe des (endlichdimensionalen) Satzes von Hahn-Banach kann man zeigen, dass der Subgradient nicht leer ist. Die Beweise der zweite Aussage und der lokalen Lipschitz-Stetigkeit sind elementar, aber dennoch recht aufwendig. Aus der lokalen Lipschitz-Stetigkeit folgt mit dem Satz von Rademacher die f.ü. Differenzierbarkeit. Die vierte Aussage folgt aus der zweiten und dritten. ■

Bemerkung 3.9. Aus Satz 3.8 und Korollar 3.7 kann man eine bessere Intuition für die Legendre-Transformierte bekommen: Ist ϕ hinreichend regulär (dh: strikt konvex, stetig differenzierbar und superlinear), so gilt $\nabla\phi^* = (\nabla\phi)^{-1}$.

Wir gehen nun auf eine weitere Eigenschaft des Subgradienten ein: Seien $(x_1, y_1), \ldots, (x_k, y_k) \in \partial f$. Aus der Definition des Subgradienten erhält man nun folgende Ungleichungen:

$$\begin{aligned}
f(x_1) - f(x_2) &\geq \langle x_1 - x_2, y_2\rangle \\
f(x_2) - f(x_3) &\geq \langle x_2 - x_3, y_3\rangle \\
&\vdots \\
f(x_k) - f(x_1) &\geq \langle x_n - x_1, y_1\rangle.
\end{aligned}$$

Wir vereinbaren nun die Bezeichnung $y_{k+1} := y_1$, um die Notation zu vereinfachen und addieren die Ungleichungen:

$$0 \geq \sum_{i=1}^{k} \langle x_i - x_{i+1}, y_{i+1}\rangle.$$

Wir geben dieser wichtigen Eigenschaft nun einen Namen:

Definition 3.10. Eine Menge $\Gamma \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ heißt zyklisch monoton, falls für alle $k \in \mathbb{N}$ und für alle $(x_1, y_1), \ldots, (x_k, y_k) \in \Gamma$ gilt:

$$\sum_{i=1}^{k} \langle x_i, y_i\rangle \geq \sum_{i=1}^{k} \langle x_i, y_{i+1}\rangle.$$

Ein wichtiges Resultat aus der Theorie der konvexen Funktionen ist nun

Satz 3.11 (Rockafellar)**.** *Eine Menge $\Gamma \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ ist genau dann zyklisch monoton, wenn es eine eigentliche konvexe Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ gibt, sodass $\Gamma \subseteq \partial f$.*

Beweis. Wir haben schon gesehen, dass der Subgradient einer konvexen Funktion zyklisch monoton ist und offensichtlich sind Teilmengen zyklisch monotoner Mengen wieder zyklisch monoton.

Es verbleibt also die andere Richtung zu zeigen. Sei $\Gamma \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ zyklisch monoton. Wir fixieren ein $(x_1, y_1) \in \Gamma$ und definieren

$$f(x) := \sup \left\{ \langle x - x_k, y_k \rangle + \sum_{i=2}^{k} \langle x_{i+1} - x_i, y_i \rangle : k \in \mathbb{N}, (x_2, y_2), \dots, (x_k, y_k) \in \Gamma \right\}.$$

Als Supremum affin linearer Funktionen ist f konvex und aus der Definition von zyklischer Monotonie folgt nun, dass $f(x_1) \leq 0$ gilt, also ist f auch eigentlich.

Wir haben nun für ein beliebiges $(\widehat{x}, \widehat{y}) \in \Gamma$ zu zeigen, dass auch $(\widehat{x}, \widehat{y}) \in \partial f$ gilt. Sei dazu $\varepsilon > 0$ beliebig. Nach der Definition von f gibt es dann $(x_2, y_2), \dots, (x_k, y_k) \in \Gamma$, sodass

$$f(\widehat{x}) - \varepsilon < \langle \widehat{x} - x_k, y_k \rangle + \sum_{i=2}^{k} \langle x_{i+1} - x_i, y_i \rangle.$$

Wenn wir in der Definition von f aber $(x_{k+1}, y_{k+1}) = (\widehat{x}, \widehat{y})$ setzen, erkennen wir, dass für alle x gilt

$$f(x) \geq \langle x - \widehat{x}, \widehat{y} \rangle + \langle \widehat{x} - x_k, y_k \rangle + \sum_{i=2}^{k} \langle x_{i+1} - x_i, y_i \rangle.$$

Aus den beiden Ungleichungen folgt nun

$$f(x) \geq \langle x - \widehat{x}, \widehat{y} \rangle + f(\widehat{x}) - \varepsilon \geq \langle x - \widehat{x}, \widehat{y} \rangle + f(\widehat{x}),$$

das heißt $(\widehat{x}, \widehat{y}) \in \partial f$. ∎

4 Duales Problem und c-cyklische Monotonie

Wir gehen von einem Minimierungsproblem, nämlich $\mathrm{KP}_c(\mu, \nu)$ aus und wollen ein dazu duales Problem $\mathrm{DP}_c(\mu, \nu)$ definieren. Darunter versteht man ein Maximierungsproblem, das jedenfalls die Eigenschaft $\mathrm{KP}_c(\mu, \nu) \leq \mathrm{DP}_c(\mu, \nu)$ hat. Findet man einen Kandidaten für $\mathrm{KP}_c(\mu, \nu)$ und einen für $\mathrm{DP}_c(\mu, \nu)$, die die selben Werte liefern hat man automatisch bewiesen, dass man jeweils Optimierer hat. In diesem Fall gilt also $\mathrm{KP}_c(\mu, \nu) = \mathrm{DP}_c(\mu, \nu)$, man sagt auch es gibt keine duality gap.

Dafür zeigen wir zuerst eine triviale Ungleichung:

Lemma 4.1. *Sei $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ eine beliebige Funktion, dann gilt*

$$\sup_{x \in X} \inf_{y \in Y} f(x, y) \leq \inf_{y \in Y} \sup_{x \in X} f(x, y). \tag{1}$$

Beweis. Wir müssen die Infima Suprema nur in richtigen Reihenfolge anwenden:

$$\begin{aligned}
\forall x' \in X \;\; \forall y' \in Y: \qquad & f(x',y') \leq f(x',y') \\
\forall x' \in X \;\; \forall y' \in Y: \qquad & f(x',y') \leq \sup_{x\in X} f(x,y') \\
\forall x' \in X: \qquad & \inf_{y\in Y} f(x',y) \leq \inf_{y\in Y} \sup_{x\in X} f(x,y) \\
& \sup_{x\in X} \inf_{y\in Y} f(x,y) \leq \inf_{y\in Y} \sup_{x\in X} f(x,y).
\end{aligned}$$

■

Die Fragestellung, ob hier Gleichheit gilt, ist weitaus weniger trivial. Es gibt eine Aussagen, genannt Min-Max-Theoreme, die Voraussetzungen angeben, unter denen hier Gleichheit gilt. Leider sind die Voraussetzungen dafür in unserem Fall nicht erfüllt. Wir können daher nur die eine Ungleichung zeigen und werden die Gleichheit dann in dem Spezialfall, wo wir sie benötigen auf andere Weise zeigen.[5]

Wir bemerken, dass für $\pi \in \mathcal{M}_+(X \times Y)$ gilt

$$\sup_{\substack{\phi\in L_1(\mu)\\ \psi\in L_1(\nu)}} \int \phi(x)(\mu(dx) - \pi(dx,dy)) + \int \psi(y)(\nu(dy) - \pi(dx,dy)) = \begin{cases} 0 & \pi \in \Pi(\mu,\nu) \\ +\infty & \text{sonst} \end{cases}$$

und für $(\phi, \psi) \in L^1(\mu) \times L^1(\nu)$ gilt

$$\inf_{\pi\in\mathcal{M}_+(X\times Y)} \int c(x,y) - \phi(x) - \psi(y) d\pi(x,y) = \begin{cases} 0 & \phi(x) + \psi(y) \leq c(x,y) \\ -\infty & \text{sonst.} \end{cases}$$

Mit diesen beiden Fakten können wir nun die Nebenbedingungen "auflösen" und anschließend inf sup durch sup inf austauschen:

$$\begin{aligned}
\mathrm{KP}_c(\mu,\nu) &= \inf_{\pi\in\Pi(\mu,\nu)} \int c d\pi \\
&= \inf_{\pi\in\mathcal{M}_+(X\times Y)} \sup_{\substack{\phi\in L_1(\mu)\\ \psi\in L_1(\nu)}} \int c d\pi + \int \phi(x)(\mu(dx) - \pi(dx,dy)) + \int \psi(y)(\nu(dy) - \pi(dx,dy)) \\
&\overset{(1)}{\geq} \sup_{\substack{\phi\in L_1(\mu)\\ \psi\in L_1(\nu)}} \inf_{\pi\in\mathcal{M}_+(X\times Y)} \int \phi d\mu + \int \psi d\nu + \int c(x,y) - \phi(x) - \psi(y) d\pi(x,y) \\
&= \sup_{\substack{\phi\in L_1(\mu)\\ \psi\in L_1(\nu)\\ \phi(x)+\psi(y)\leq c(x,y)}} \int \phi d\mu + \int \psi d\nu =: \mathrm{DP}_c(\mu,\nu).
\end{aligned}$$

Wir haben also gezeigt:

Proposition 4.2. *Seien $\mu \in \mathcal{P}(X), \nu \in \mathcal{P}(Y)$ und $c : X \times Y \to \mathbb{R}$ messbar. Dann gilt*

$$\mathrm{KP}_c(\mu,\nu) \leq \mathrm{DP}_c(\mu,\nu).$$

[5] Auch wenn wir die Gleichheit zwischen Kantorovich und dualem Problem nur in einem sehr eingeschränkten Spezialfall beweisen, sei bemerkt, dass sie unter sehr schwachen Voraussetzungen gilt.

Wir geben nun eine Verallgemeinerung des Begriffes der zyklischen Monotonie an:

Definition 4.3. Sei $c : X \times Y \to \mathbb{R}$ eine Kostenfunktion. Eine Menge $\Gamma \subseteq X \times Y$ heißt c-zyklisch monoton, falls

$$\forall k \in \mathbb{N} \ \ \forall (x_1, y_1), \dots (x_k, y_k) \in \Gamma : \sum_{i=1}^{k} c(x_i, y_i) \leq \sum_{i=1}^{k} c(x_i, y_{i+1}),$$

wobei wir hier $y_{k+1} := y_1$ setzen.

Bemerkung 4.4. (a) Zyklische Monotonie ist dasselbe wie c-zyklische Monotonie für die Funktion $c(x, y) = -\langle x, y\rangle$.

(b) Da jede Permutation als Produkt von Zyklen geschrieben werden kann ist c-zyklische Monotonie äquivalent zu:

$$\forall k \in \mathbb{N} \ \ \forall \sigma \in S_k \ \ \forall (x_1, y_1), \dots (x_k, y_k) \in \Gamma : \sum_{i=1}^{k} c(x_i, y_i) \leq \sum_{i=1}^{k} c(x_i, y_{\sigma(i)}).$$

Die Bedeutung des Begriffes der c-zyklischen Monotonie liegt in der folgenden Aussage:

Satz 4.5. *Seien $\mu \in \mathcal{P}(X), \nu \in \mathcal{P}(Y)$ und $c : X \times Y \to \mathbb{R}$ eine stetige Kostenfunktion sowie π optimal für $\mathrm{KP}(\mu, \nu)$. Dann ist $\mathrm{spt}(\pi)$ c-zyklisch monoton.*

Beweis. Angenommen $\mathrm{spt}(\pi)$ is nicht zyklisch monoton, dann gibt es $(x_1, y_1), \dots, (x_k, y_k) \in \mathrm{spt}(\pi)$, sodass

$$\sum_{i=1}^{k} c(x_i, y_i) > \sum_{i=1}^{k} c(x_i, y_{i+1}).$$

Wähle ein ε, sodass

$$0 < \varepsilon < \frac{1}{2k} \left[\sum_{i=1}^{k} c(x_i, y_i) - \sum_{i=1}^{k} c(x_i, y_{i+1}) \right].$$

Dann gibt es wegen der Stetigkeit von c ein $r > 0$, sodass

$$\begin{aligned} \forall i \forall (x, y) \in B_r(x_i) \times B_r(y_i) &: c(x, y) > c(x_i, y_i) - \varepsilon \\ \forall i \forall (x, y) \in B_r(x_i) \times B_r(y_{i+1}) &: c(x, y) < c(x_i, y_{i+1}) + \varepsilon. \end{aligned}$$

Wir definieren nun:

$$\begin{aligned} V_i &:= B_r(x_i) \times B_r(y_i) \quad \text{(bemerke, dass } \pi(V_i) > 0 \text{ nach Def } \mathrm{spt}(\pi)) \\ \pi_i &:= \frac{1}{\pi(V_i)} \pi|_{V_i} \\ \mu_i &:= pr_X(\pi_i), \nu_i := pr_Y(\pi_i) \\ \widetilde{\pi}_i &:= \mu_i \otimes \nu_{i+1}. \end{aligned}$$

Wir wählen $\delta < \frac{1}{k} \min_i \pi(V_i)$ und stören nun π ein wenig:

$$\widetilde{\pi} := \pi - \delta \sum_{i=1}^{k} \pi_i + \delta \sum_{i=1}^{k} \widetilde{\pi}_i.$$

Wir wollen nun zeigen, dass $\widetilde{\pi} \in \Pi(\mu, \nu)$. Dazu bemerken wir als erstes, dass durch die Wahl von δ gewährleistet ist, dass

$$\pi - \delta \sum_{i=1}^{k} \pi_i$$

wieder ein positives Maß ist, daher ist erst recht $\widetilde{\pi}$ ein positives Maß. Man überprüft auch leicht, dass $\widetilde{\pi}$ wider richtigen Marginalien hat:

$$\begin{aligned} pr_X(\widetilde{\pi}) &= \mu - \delta \sum_{i=1}^{k} \mu_i + \delta \sum_{i=1}^{k} \mu_i = \mu \\ pr_Y(\widetilde{\pi}) &= \nu - \delta \sum_{i=1}^{k} \nu_i + \delta \sum_{i=1}^{k} \nu_{i+1} = \nu. \end{aligned}$$

Jetzt verbleibt nur mehr zu zeigen, dass $\widetilde{\pi}$ tatsächlich geringere Kosten hat als π:

$$\begin{aligned} \int c d\pi - \int c d\widetilde{\pi} &= \delta \sum_{i=1}^{k} \int c d\pi_i - \delta \sum_{i=1}^{k} \int c d\widetilde{\pi}_i \\ &\geq \delta \sum_{i=1}^{k} \big(c(x_i, y_i) - \varepsilon \big) - \delta \sum_{i=1}^{k} \big(c(x_i, y_{i+1} + \varepsilon) \big) \\ &= \delta \left(\sum_{i=1}^{k} c(x_i, y_i) - \sum_{i=1}^{k} c(x_i, y_{i+1}) - 2k\varepsilon \right) > 0. \end{aligned}$$

■

5 Der Satz von Brenier

Wir wenden uns nun dem eigentlichen Beweis des Satz von Brenier zu. Dafür vereinbaren wir folgende Voraussetzungen für dieses Kapitel:

- Es sei immer$X = Y = \mathbb{R}^n$,
- die Maße sind μ und ν sind immer absolut stetig und haben endliche zweite Momente
- und wir betrachten die Kostenfunktion $c(x, y) = \frac{1}{2}|x - y|^2$.

Wir machen nun eine sehr wichtige Beobachtung über die Kosten bezüglich der Kostenfunktion $c(x, y) = \frac{1}{2}|x - y|^2$. Wegen

$$|x - y|^2 \leq (2 \max\{|x|, |y|\})^2 = 4 \max\{|x|^2, |y|^2\} \leq 4(|x|^2 + |y|^2).$$

gilt für alle $\pi \in \Pi(\mu, \nu)$:

$$\int \frac{|x - y|^2}{2} d\pi(x, y) \leq \int 2(|x|^2 + |y|^2) d\pi(x, y) = 2 \int |x|^2 d\mu(x) + 2 \int |y|^2 d\nu(y) < \infty.$$

Es gilt auch weiters

$$\int c d\pi = \int \frac{|x|^2}{2} d\pi - \int \langle x, y \rangle d\pi + \int \frac{|y|^2}{2} d\pi = \int \frac{|x|^2}{2} d\mu + \int \frac{|y|^2}{2} d\nu - \int \langle x, y \rangle d\pi.$$

Somit ist π genau dann ein Minimierer für die Kosten $\frac{1}{2}|x-y|^2$, wenn es ein Maximierer für die Kosten $\langle x, y \rangle$ ist. Mit diesem Wissen kann man nun eine abgeändertes Kantorovich und ein abgeändertes duales Problem definieren:

$$\begin{aligned} \widetilde{\mathrm{KP}}(\mu, \nu) &:= \max \left\{ \int \langle x, y \rangle d\pi(x, y) : \pi \in \Pi(\mu, \nu) \right\} \\ \widetilde{\mathrm{DP}}(\mu, \nu) &:= \min \left\{ \int \phi d\mu + \int \psi d\nu : \phi(x) + \psi(y) \geq \langle x, y \rangle \right\}. \end{aligned}$$

Der Vorteil dieser neuen Probleme ist, dass sie den Methoden der konvexen Analysis zugänglich sind. Aus Proposition 4.2 folgt nun auch:

$$\widetilde{\mathrm{KP}}(\mu, \nu) \leq \widetilde{\mathrm{DP}}(\mu, \nu) \tag{2}$$

Wir können nun unsere bisherigen Resultate verbinden und kommen so dem Beweis des Satzes von Brenier ein großes Stück näher:

Satz 5.1 (Brenier)**.** *Seien μ und ν Maße auf $\mathbb{R}^n$ mit endlichen zweiten Momenten und sei μ überdies absolut stetig und sei $c(x, y) = |x - y|^2$. Dann existiert genau ein Minimierer für $\mathrm{KP}_c(\mu, \nu)$ und dieser ist von der Form $(id, \nabla\phi)(\mu)$, wobei $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine konvexe Funktion ist. Insbesondere gilt also auch $\mathrm{KP}_c(\mu, \nu) = \mathrm{MP}_c(\mu, \nu)$.*

Beweis. Wir haben gerade vorher gesehen, dass $\mathrm{KP}(\mu, \nu) < \infty$ gilt und daher existiert nach Satz 2.1 ein Minimierer π. Nach dem vorherigen ist π auch ein Maximierer für $\widetilde{\mathrm{KP}}$.

Nach Satz 4.5 und Bemerkung 4.4 ist $\mathrm{spt}(\pi)$ zyklisch Monoton. Nach dem Satz 3.11 von Rockafellar ist gibt es nun eine eigentliche konvexe Funktion ϕ, sodass

$$\mathrm{spt}(\pi) \subseteq \partial\phi = \{(x, y) : \phi(x) + \phi^*(x) = \langle x, y \rangle\}, \tag{3}$$

wobei wir die Darstellung von $\partial\phi$ aus Lemma 3.6 verwenden. Als konvexe Funktionen sind ϕ und ϕ^* von unten durch eine lineare Funktion beschränkt und aufgrund der Endlichkeit der zweiten Momente sind die daher quasi-integrierbar bezüglich μ bzw. ν und deren Integrale sind größer $-\infty$. Mit (3) können wir somit folgern:

$$\int \phi d\mu + \int \phi^* d\nu = \int \phi(x) + \phi^*(y) d\pi = \int \langle x, y \rangle d\pi = \widetilde{\mathrm{KP}}(\mu, \nu) < \infty.$$

Daraus folgt nun, dass $\phi \in L^1(\mu)$, $\psi \in L^1(\nu)$. Da laut Lemma 3.6 auch $\phi(x) + \phi^*(y) \geq \langle x, y \rangle$ gilt, ist (ϕ, ϕ^*) auch zulässig für $\widetilde{\mathrm{DP}}$. Somit ist $\widetilde{\mathrm{KP}}(\mu, \nu) \leq \widetilde{\mathrm{DP}}(\mu, \nu)$ und die andere Ungleichung aus (2) bekannt ist gilt auch $\widetilde{\mathrm{KP}}(\mu, \nu) = \widetilde{\mathrm{DP}}(\mu, \nu)$.

Da $\phi \in L^1(\mu)$, ist es μ-f.s. endlich, das heißt $\mu(\overline{\mathrm{dom}(\phi)}) = 1$. Nach Satz 3.2 ist $\partial\mathrm{dom}(\phi)$ eine Lebesgue-Nullmenge und da μ absolut-stetig ist auch eine μ-Nullmenge. Daher ist sogar $\mu(\mathrm{dom}(\phi)^\circ) = 1$. Nach Satz 3.8 ist $\partial\phi$ im Inneren von $\mathrm{dom}(\phi)$ fast überall differenzierbar und

$\partial f(x) = \{\nabla f(x)\}$. Insbesondere ist also $T(x) := \nabla f(x)$ eine f.ü. und μ-f.s. wohldefinierte Abbildung. Wegen $\mathrm{spt}(\pi) \subseteq \partial\phi$ folgt mit Lemma 1.11 daraus $\pi = (id, T)(\mu)$.

Um die Eindeutigkeit zu zeigen nehmen wir an, dass es zwei Minimierer $\pi_1 \neq \pi_2$ von KP gibt. Nach obigem gibt es nun Abbildungen T_1, T_2, sodass $\pi_1 = (id, T_1)(\mu)$ und $\pi_2 = (id, T_2)$. Da $\pi_1 \neq \pi_2$ folgt $\mu(T_1 \neq T_2) > 0$. Da $\pi \mapsto \int c d\pi$ linear ist, ist aber auch $\pi := \frac{1}{2}(\pi_1 + \pi_2)$ ein Minimierer von KP. Einerseits gibt es nach vorherigem wiederum ein T sodass $\pi = (id, T)(\mu)$, andererseits aber erfüllt π die Voraussetzungen von Proposition 1.12, das heißt π kann von keiner Abbildung induziert sein – ein offensichtlicher Widerspruch. Daher kann es höchstens einen Minimierer geben. ■

Literatur

[1] F. Santambrogio. *Optimal transport for applied mathematicians*, volume 87 of *Progress in Nonlinear Differential Equations and their Applications*. Birkhäuser/Springer, Cham, 2015. Calculus of variations, PDEs, and modeling.

[2] R. Schneider. *Basic convexity*, page 1–73. Encyclopedia of Mathematics and its Applications. Cambridge University Press, 2 edition, 2013.

[3] C. Villani. *Topics in optimal transportation*, volume 58 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2003.

Die Arbeit basiert im wesentlichen auf [3, Kapitel 2] und [1, Kapitel 1]. In [2, Kapiel 1.5] findet man eine Einführung in die Theorie konvexer Funktionen, die ziemlich genau dem Umfang entspricht, der hier benötigt wird und in dem die hier ausgelassenen Beweise ausgeführt sind.