Seminar Arbeit aus Analysis
Der Satz von Birkhoff und von Neuman
unter der Anleitung vonAo.Univ.Prof. Dipl.-Ing.
Dr.techn. Michael Kaltenbäck

Hosan Youssef
1648939

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Doppelt-stochastische Matrizen sind jene quadratische Matrizen mit nicht negativen Einträgen, bei denen die Summe jeder Zeile sowie jeder Spalte gleich 1 ist. In dieser Arbeit wird der Satz von Birkhoff und von Neuman bewiesen, welcher besagt, dass eine quadratische Matrix genau dann doppelt-stochastisch ist, wenn sie eine Konvexkombination von Permutationsmatrizen ist. Der Beweis wurde schon auf viele verschiedene Arten geführt. In der vorliegenden Arbeit wird er durch perfektes Matching und als eine Konsequenz des Satzes von Krein-Milman bewiesen.

1 Doppelt-stochastische Matrizen

1.1 **Definition**. Eine quadratische Matrix $Q \in \mathbb{R}^{n \times n},\ n \in \mathbb{N}$ heißt doppelt-stochastisch, wenn $q_{ij} \in [0,1]$ für alle $i, j = 1, \ldots, n$, und $\sum_{i=1}^{n} q_{ij} = 1$ für alle $j = 1, \ldots, n$ sowie $\sum_{j=1}^{n} q_{ij} = 1$ für alle $i = 1, \ldots, n$ gilt.

Die Menge aller $(n \times n)$-doppelt-stochastischen Matrizen bezeichnen wir mit Ω_n. Diese Menge heißt auch das Birkhoff Polytop.
1.2 **Definition**. Ist X eine endliche Menge, dann nennen wir die Abbildung $p : X \to X$ Permutation, falls p bijektiv ist. Im Fall $X = \{1, \ldots, n\}$ schreiben wir S_n für die Menge aller Permutationen auf X.

1.3 **Satz**. Es gilt $|S_n| = n!$, wobei $|.|$ die Anzahl der Elemente einer Menge bezeichnet.

Beweis. Für $p \in S_n$ und $X = \{1, \ldots, n\}$ kann $p(1)$ n verschiedene Werte annehmen. Wegen der Bijektivität von p kann $p(2)$ dann $(n-1)$ verschiedene Werte annehmen. Induktiv erhält man schließlich für $p(n)$ nur noch eine Möglichkeit. Das sind zusammen

$$n \cdot (n-1) \cdot \cdots \cdot 1 = n!$$

viele Möglichkeiten für eine Bijektion von X in sich. $\square$

1.4 **Definition**. Eine quadratische Matrix $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ heißt Permutationsmatrix, wenn sie in jeder Zeile und jeder Spalte genau einen Eintrag 1 hat und alle andere Einträge der jeweiligen Zeile und Spalte gleich 0 sind.Wir schreiben $\mathcal{P}_n$ für die Menge aller $(n \times n)$-Permutationsmatrizen.

Jede Permutation $p \in S_n$ kann eindeutig mit einer Permutationsmatrix $P \in \mathcal{P}_n$ identifiziert werden, indem man $P_{i,j} := \delta_{i,p(j)}$ setzt, wobei $\delta_{i,j}$ das Kronecker-Delta

$$\delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{falls } i = j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

bezeichnet. Folglich gilt $|S_n| = |\mathcal{P}_n| = n!$.

Der Permutation $p \in S_3$ mit $p(1) = 2$, $p(2) = 3$ und $p(3) = 1$ entspricht etwa der Permutationsmatrix

$$P_{i,j} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1.5 **Bemerkung**. Nach der Definition von Permutationsmatrizen sind diese spezielle doppelt-stochastische Matrizen, genauer doppelt-stochastische Matrizen mit genau n Einträge ungleich Null. Damit gilt $\mathcal{P}_n \subset \Omega_n$.

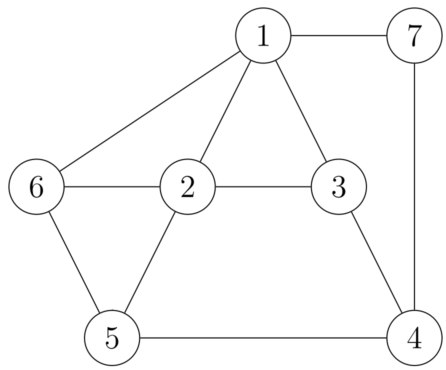
2 Graphen

2.1 **Definition**. Ein ungerichteter Graph ist ein Paar $G = (V, E)$ disjunkter Mengen V und E, wobei $E \subseteq \mathcal{P}(V)$ mit $|e| = 2$ für alle $e \in E$. Die Elemente von V heißen Knoten des Graphen G und die Elemente von E Kanten zwischen Paaren von Knoten. Für eine Kante zwischen den Konten $a, b \in V$ schreiben wir $\{a, b\} \in E$.

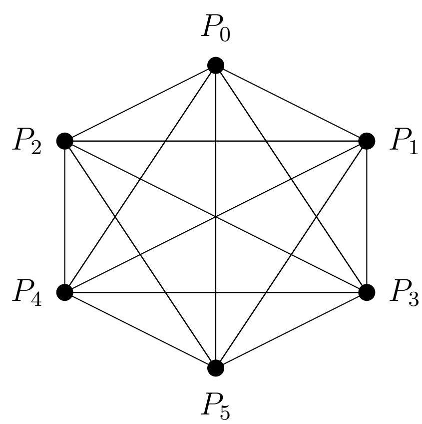
2.2 **Beispiel**. Die untenstehende Abbildung ist der Graph auf der Knotenmenge $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ mit der Kantenmenge

$$E = \{\{1,2\}, \{1,3\}, \{1,6\}, \{1,7\}, \{2,3\}, \{2,5\}, \{2,6\}, \{3,4\},\\ \{4,5\}, \{4,7\}, \{5,6\}\}.$$

Graphlich lässt sich dieser Graph folgendermaßen veranschaulichen.



2.3 **Beispiel**. Die untenstehende Abbildung ist der Graph auf der Knotenmenge $V = \{P_0, P_1, P_2, P_3, P_4, P_5\}$ mit der Kantenmenge $E = \{\{P_i, P_j\} : i, j = 1, ..., n \ und \ i \neq j\}$.



Birkhoffsches Polytop in $\mathbb{R}^{n^2}$ mit $n = 2$.

2.4 **Definition**. Zwei Knoten $v, w \in V$ in einem Graph $G = (V, E)$ heißen benachbart, wenn es eine Kante $e \in E$ gibt mit $e = \{v, w\}$.

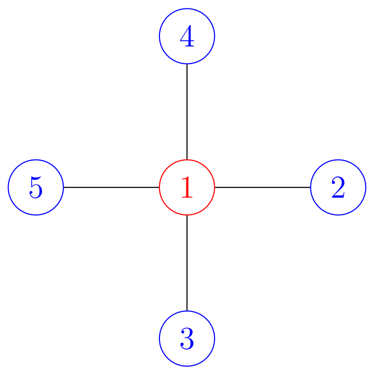
2.5 **Definition**. Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph.

- Eine Teilmenge $S \subset V$ heißt Knotenüberdeckung von G, wenn jede Kante von G mindestens einen Knoten aus S enthält.

- Eine Knotenüberdeckung S von G heißt mininmal, wenn es keinen Knoten $v \in S$ derart gibt, dass $S \setminus \{v\}$ eine Knotenüberdeckung ist.

- $\tau(G)$ bezeichnet die minimale Kardinalität einer Knotenüberdeckung in G, das heißt $\tau(G) = \min\{|S| : S$ ist eine Überdeckung von $G\}$

2.6 **Beispiel**. In der untenstehenden Abbildung ist der Knoten 1 eine minimale Knotenüberdeckung, weshalb $\tau(G) = 1$. Eine ebenfalls minimale Knotenüberdeckung hier wäre zum Beispiel $S = \{2, 3, 4, 5\}$, wobei $|S| > \tau(G)$.



2.7 **Definition**. Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph.

- Ein Matching ist eine Teilmenge $M \subseteq E$ von paarweise disjunkte Kanten.

- Ein Matching M heißt nicht erweiterbar, falls es keine Kante $e \in E \setminus M$ derart gibt, dass $\{e\} \cup M$ ein Matching ist.

- Ein Matching M heißt maximal, falls M als Menge maximale Kardinalität hat unter allen anderen Matchings von G.

- Ein Matching M heißt perfekt, falls jeder Knoten $v \in V$ zu genau einer Kanten von M gehört, womit $|M| = \frac{|V|}{2}$.

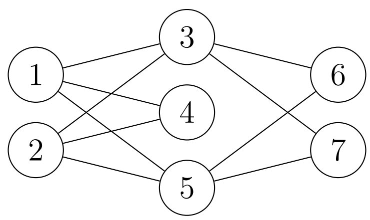
- $\nu(G)$ bezeichnet die Kardinalität des maximalen Matchings in G, das heißt $\nu(G) = \max\{|M| : M$ ist ein Matching von $G\}$.

Bemerkung Für Graphen mit ungerader Anzahl an Knoten existiert kein perfektes Matching.

2.8 **Beispiel** Der untenstehende Graph $G = (V, E)$ mit

$$V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$$
$$E = \{\{1, 3\}, \{1, 4\}, \{1, 5\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{2, 5\}, \{3, 6\},$$
$$\{3, 7\}, \{5, 6\}, \{5, 7\}\}$$

enthält kein perfektes Matching, da $|V| = 7$ ungerade ist. Ein nicht erweiterbares Matching hier wäre zum Beispiel $M = \{\{1, 3\}, \{2, 5\}\}$ und ein Maximales Matching wäre zum Beispiel
$M = \{\{1, 4\}, \{2, 5\}, \{3, 6\}\}$ mit der Kardinalität $|M| = 3$.



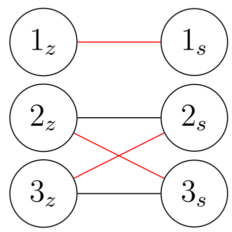
2.9 **Definition**. Ein ungerichteter Graph $G = (V, E)$ heißt bipartit, falls sich seine Knoten in zwei disjunkte Teilmengen A und B aufteilen lassen, also $V = A \dot{\cup} B$, wobei zwischen den Knoten innerhalb eine Teilmenge keine Kanten verlaufen. Das heißt, für jede Kante $\{v, w\} \in E$ folgt aus $v \in A$ (B), dass $w \in B$ (A).

2.10 **Beispiel**. Einer doppelt-stochastischen Matrix $Q \subseteq \mathbb{R}^{n \times n}$ lässt sich ein bipartiter Graph zuordnen. Die Knoten des Graphen sind hierbei $V := A \cup B$ mit $A = \{1_z, ..., n_z\}$ und $B = \{1_s, ..., n_s\}$. Die Kanten Menge E ist definiert als die Menge aller $\{i_z, j_s\}$ derart, dass $q_{i_z, j_s} > 0$.

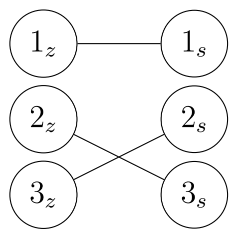
Die Matrix $Q \in \Omega_3$ mit

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 2/3 \\ 0 & 2/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

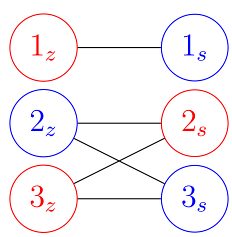
ergibt den bipartiten Graphen



Ein mögliches perfektes Matching hier ist $M = \{\{1_z, 1_s\}, \{2_z, 3_s\}, \{3_z, 2_s\}\}$



und eine minimale Knotenüberdeckung für den Graph wären zum Beispiel die roten Knoten oder auch die blaue Knoten in untenstehender Abbildung.



2.11 **Satz (von König)**. Ist $G = (A, B, E)$ ein bipartiter Graph, so gilt $\nu(G) = \tau(G)$.

Beweis. siehe [KV, Combinatorial Optimization Theory and Algorithms]

2.12 **Definition**. Für eine Teilmenge $X \subseteq V$ ist $N(X)$ die Nachbarschaft der Knotenmenge X, das heißt $N(X) = \bigcup_{v \in X} N(v)$, wobei $N(v)$ die Menge aller Nachbarn des Knoten v ist.

2.13 **Satz (Heiratssatz von Frobenius)**. Ein bipartiter Graph $G = (A, B, E)$ hat ein perfektes Matching M genau dann, wenn

$$|A| = |B| \wedge |N(X)| \geq |X| \quad \text{für alle} \quad X \subseteq A.$$

Beweis. Wir nehmen zuerst an, dass es ein Perfektes Matching M von G gibt. da $f : A \to B$ definiert durch $f(a) = b$ wobei $\{a, b\} \in M$, bijektiv ist, gilt $|A| = |B|$. Falls es ein $X \subseteq A$ mit $|X| > |N(X)|$ geben würde, so könnten nicht alle Knoten aus X zugleich gematcht werden.
Sei nun angenommen, es gäbe kein perfektes Matching und $|A| = |B|$. Dann gilt nach dem Satz von König und unserer Annahme $\tau(G) = \nu(G) < \frac{|V|}{2} = \frac{|A \dot\cup B|}{2} = \frac{|A|+|B|}{2} = |A| = |B|$. Ist S eine minimale Knotenüberdeckung, also $|S| = \tau(G)$ und M das maximale Matching in G, also $|M| = \nu(G)$, dann haben wir

$$\tau(G) = |S \cap A| + |S \cap B| = \nu(G) < \frac{|V|}{2} = |A| = |S \cap A| + |A \setminus S|,$$

womit

$$|S \cap B| = \tau(G) - |S \cap A| < |A| - |S \cap A| = |A \setminus S|.$$

Außerdem gilt $N(A \setminus S) \subseteq S \cap B$, da S Knotenüberdeckung ist und $N(X) \subseteq B$ für $X \subseteq A$ zutrifft. Insgesamt folgt $|N(A \setminus S)| < |A \setminus S|$.
□

2.14 **Lemma**. Der bipartite Graph, welcher einer doppelt-stochastischen Matrix zugeordnet ist, enthält ein perfektes Matching.

Beweis. Sei $Q \in \Omega_n$ und $G = (A, B, E)$ der bipartite Graph zu Q. Für eine Teilmenge $X \subseteq A$ gilt $N(X) = \{j_s : q_{i_z j_s} \neq 0 \text{ für } i_z \in X\} \subseteq B$. Angenommen, der bipartite Graph von Q enthält kein perfektes Matching, dann existiert nach Satz 2.13 eine Teilmenge $X \subseteq A$ mit $|X| > |N(X)|$. Da X eine Teilmenge der Zeilen darstellt und $N(X)$ die Menge der Spalten j_s, für die ein Eintrag $q_{i_z j_s} \neq 0, i_z \in X$ exisitert, gilt $\sum_{i_z \in X, j_s \in N(X)} q_{i_z j_s}$=$|X|$, da diese Summe genau die Einträge aller Zeilen $i_z \in X$ von Q addiert und Q doppelt-stochastisch ist, also die Summer der Einträge einer Zeile gleich 1 ist. Andererseits ist $|N(X)|$ größer oder gleich der Summe $\sum_{i_z \in X, j_s \in N(X)} q_{i_z j_s}$ da die Einträge, die nicht zu einer Zeile in X gehören, nicht negativ sind, und da die Matrix doppelt-stochastisch ist, womit auch die Summe aller Elemente in allen zu $N(X)$ gehörende Spalten genau

$|N(X)|$ ergibt. Insgesamt erhalten wir den Widerspruch

$$\sum_{i_z \in X, j_s \in N(X)} q_{i_z j_s} \leq |N(X)| < |X| = \sum_{i_z \in X, j_s \in N(X)} q_{i_z j_s}.$$

$\square$

3 Konvexe Mengen

3.1 **Definition**. Eine Teilmenge $D \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt konvex, falls für alle $x, y \in D$, $\lambda \in [0,1]$,

$$\lambda x + (1-\lambda)y \in D,$$

also wenn die Menge D mit je zwei Punkten auch deren Verbindungsstrecke ganz enthält.

3.2 **Definition**. Die konvexe Hülle einer Teilmenge $D \subseteq \mathbb{R}^n$ ist der Durchschnitt aller D enthaltenden konvexen Mengen K. Wir bezeichnen diese mit $co(D)$.

Es ist leicht einzusehen, dass $co(D)$ die kleinste konvexe Obermenge von D in $\mathbb{R}^n$ ist und dass sie mit
$\{\sum_{j=1}^k \lambda_j x_j : k \in \mathbb{N}, x_1 \ldots x_k \in D, \lambda_1 \ldots \lambda_k \in [0,1], \sum_{j=1}^k \lambda_j = 1\}$
übereinstimmt.

3.3 **Definition**. Eine Teilmenge $D \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt affin, falls für alle $x, y \in D$, $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\lambda x + (1-\lambda)y \in D.$$

3.4 **Korollar**. Die Menge Ω_n aller $n \times n-$doppelt stochastischer Matrizen als Teilmenge von $\mathbb{R}^{n^2} \cong \mathbb{R}^{n \times n}$ ist kompakt und konvex.

Beweis. Sind $A, B \in \Omega_n$ mit $A = (a_{ij})_{i,j=1\ldots n}$, $B = (b_{ij})_{i,j=1\ldots n}$ und $\lambda \in [0,1]$, dann gilt

$$\lambda A + (1-\lambda)B = (\lambda a_{ij} + (1-\lambda)b_{ij})_{i,j=1\ldots n},$$

wobei $\lambda a_{ij} + (1-\lambda)b_{ij} \geq 0$ für alle i, j, da $a_{ij} \geq 0, b_{ij} \geq 0$. Damit gilt auch

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda a_{ij} + (1-\lambda)b_{ij} = \lambda \underbrace{\sum_{i=1}^{n} a_{ij}}_{=1} + (1-\lambda) \underbrace{\sum_{i=1}^{n} b_{ij}}_{=1} = \lambda + (1-\lambda) = 1$$

für alle $j = 1, \ldots, n$ und

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda a_{ij} + (1-\lambda)b_{ij} = \lambda \underbrace{\sum_{j=1}^{n} a_{ij}}_{=1} + (1-\lambda) \underbrace{\sum_{j=1}^{n} b_{ij}}_{=1} = \lambda + (1-\lambda) = 1$$

für alle $i = 1, \ldots, n$. Insgesamt erhalten wir $A\lambda + (1-\lambda)B \in \Omega_n$, womit die Menge konvex ist.
Da die Menge Ω_n aus Matrizen mit Einträgen kleiner gleich 1 besteht, ist die Menge beschränkt. Außerdem gilt für eine konvergente Folge aus doppelt-stochastischen Matrizen $Q_k = (q_{ij}^{(k)})_{i,j=1,\cdots,n} \in \Omega_n$, dass $\lim\limits_{k\to\infty} Q_k \in \Omega_n$. Um das einzusehen, sei bemerkt, dass

$$\lim_{k\to\infty} Q_k = Q \Leftrightarrow \lim_{k\to\infty} q_{ij}^{(k)} = q_{ij} \text{ für alle } i, j = 1, \ldots, n.$$

Folglich gilt $q_{ij} = \lim\limits_{k\to\infty} q_{ij}^{(k)} \in [0, \infty)$ für $i, j = 1, \cdots n$,

$$\lim_{k\to\infty} \sum_{i=1}^{n} q_{ij}^{(k)} = \lim_{k\to\infty} (\underbrace{q_{1j}^{(k)} + \cdots + q_{nj}^{(k)}}_{=1}) = 1$$

für alle $j = 1, \ldots, n$, sowie

$$\lim_{k\to\infty} \sum_{j=1}^{n} q_{ij}^{(k)} = \lim_{k\to\infty} (\underbrace{q_{i1}^{(k)} + \cdots + q_{in}^{(k)}}_{=1}) = 1$$

für alle $i = 1, \ldots, n$, also $\lim\limits_{k\to\infty} Q_k \in \Omega_n$. Daher ist Ω_n abgeschlossen. Aus der Beschränktheit und Abgeschlossenheit folgt die Kompaktheit von Ω_n. $\square$

3.5 **Satz (von Carathéodory)**. Sei $D \subseteq \mathbb{R}^d$ eine nichtleere Teilmenge. Jeder Punkt in der konvexen Hülle von D ist eine Konvexkombination von höchstens $d+1$ Punkten aus D. Es gilt also

$$co(D) = \{\sum_{j=1}^{d+1} \lambda_j x_j : x_1 \dots x_{d+1} \in D, \lambda_1 \dots \lambda_{d+1} \in [0,1], \sum_{j=1}^{d+1} \lambda_j = 1\}$$

Beweis. Sei $x = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j x_j$ eine Konvexkombination von $m \geq d+2$ Punkten aus D. Wir zeigen, dass x dann auch als Konvexkombination von $m-1$ Punkten aus D geschrieben werden kann. Dazu betrachten wir das homogone lineare Gleichungssystem

$$\sum_{j=1}^{m} \mu_j x_j = 0 \text{ und } \sum_{j=1}^{m} \mu_j = 0$$

mit den m reellen Unbestimmten $\mu_1, \cdots, \mu_m$. Wegen $x_i \in \mathbb{R}^d$ hat dieses System $(d+1)$ Gleichungen und damit weniger als die Anzahl der Unbestimmten. Folglich gibt es eine nicht triviale Lösung $\mu_1, \dots, \mu_m \in \mathbb{R}$. Da sich die μ_i zu Null summieren und nicht alle gleich Null sind, gibt es mindestens ein l mit $\mu_l > 0$.
Für $\alpha := \min\{\frac{\lambda_j}{\mu_j} : j = 1 \dots m, \mu_j > 0\}$ gilt $\alpha = \frac{\lambda_l}{\mu_l} \geq 0$ mit einem geeigenten $l \in \{1, \dots, n\}$. Damit folgt

$$x = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j x_j + 0 = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j x_j - \alpha \underbrace{\sum_{j=1}^{m} \mu_j x_j}_{=0} = \sum_{j=1}^{m} (\lambda_j - \alpha\mu_j) x_j.$$

Hier gilt $\lambda_l - \alpha\mu_l = \lambda_l - \frac{\lambda_l}{\mu_l}\mu_l = 0$, sodass x wie gewünscht als lineare Kombination von $m-1$ Vektoren in D dargestellt werden kann. Noch zu zeigen ist, dass diese Linearkombination eine Konvexkombination ist, also, dass für alle $j = 1, \dots, m$ die Ungleichung $\lambda_j - \alpha\mu_j \geq 0$ gilt. Für $\mu_j \leq 0$ ist $\lambda_j - \alpha\mu_j = \alpha_j - \frac{\lambda_l}{\mu_l}\mu_j \geq 0$ eine Konsequenz aus $\alpha \geq 0$. Für $\mu_j > 0$ gilt gemäß unserer Wahl von l, dass $\frac{\lambda_j}{\mu_j} \geq \frac{\lambda_l}{\mu_l} = \alpha$, wodurch $\lambda_j - \alpha\mu_j \geq 0$. Wegen

$$\sum_{j=1}^{m} (\lambda_j - \alpha\mu_j) = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j - \alpha \underbrace{\sum_{j=1}^{m} \mu_j}_{=0} = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j = 1$$

ist obige lineare kombination eine Konvexkombination. □

3.6 **Definition**. Ein Punkt $z \in D$ einer konvexen Menge D heißt Extremalpunkt, wenn z nicht als echte Konvexkombination von zwei Punkten der Menge dargestellt werden kann. Gilt also $z = \lambda a + (1-\lambda)b$ mit $a, b \in D$ und $\lambda \in (0,1)$, so folgt $z = a = b$. Die Menge aller Extremalpunkte der Menge D bezeichnen wir als $E(D)$.

3.7 **Satz** (von Krein-Milman). Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ eine nichtleere, kompakte und konvexe Teilmenge von $\mathbb{R}^n$. Dann ist D die abgeschlossene konvexe Hülle von $E(D)$, also gilt $D = \bar{co}(E(D))$.

Beweis. Für den Fall $V = \mathbb{R}^n$ siehe [AB, A Course in Convexity]. Für den allgemeinen Fall siehe [BWK, Funktionalanalysis 1].

3.8 **Korollar**. Eine Matrix $Q \in \Omega_n$ ist ein Extremalpunkt von Ω_n genau dann, wenn $Q \in \mathcal{P}_n$. Es gilt also $E(\Omega_n) = \mathcal{P}_n$.

Beweis. Wenn für $Q = (q_{ij}) \in \mathcal{P}_n$ die Gleichheit $Q = \lambda A + (1-\lambda)B$ mit $A = (a_{ij}), B = (b_{ij}) \in \Omega_n$, $\lambda \in (0,1)$ gilt, dann muss wegen $a_{ij} \geq 0, b_{ij} \geq 0$ sogar $a_{ij} = 0, b_{ij} = 0$ gelten, falls $q_{ij} = 0$. Aus $q_{ij} = 1$ folgt wegen $a_{ij} \leq 1, b_{ij} \leq 1$ sogar $a_{ij} = b_{ij} = 1$. Also gilt $Q = A = B$. Somit sind die Permutationsmatrizen Extremalpunkte der Menge aller doppelt-stochastischen Matrizen. Sei nun $Q \in \Omega_n \backslash \mathcal{P}_n$, womit mindestens ein Eintrag $q_{i_0 j_0}$ von Q mit $0 < q_{i_0 j_0} < 1$ existiert. Weil Q doppelt-stochastisch ist, die Zeilensumme also gleich 1 sein muss, gibt es ein $j_1 \neq j_0$ mit $0 < q_{i_0 j_1} < 1$. Wiederum muss ein $i_1 \neq i_0$ existieren mit $0 < q_{i_1 j_1} < 1$. Wir setzen das fort, bis das erste mal $j_{m+1} \in \{j_0, \cdots, j_m\}$ oder $i_m \in \{i_0, \cdots, i_{m-1}\}$. Dann gilt $j_{m+1} = j_k$ mit $k < m$ bzw. $i_m = i_k$ mit $k < m-1$. Wir setzen $V = \{(i_k, j_k), (i_k, j_{k+1}), \cdots, (i_m, j_{m+1})\}$ bzw. $V = \{(i_k, j_{k+1}), \cdots, (i_m, j_m)\}$. Jedes $i \in \{1, \cdots, n\}$ kommt in den vorderen Einträgen von entweder 0 oder 2 Elementen von V vor. Dasselbe gilt für $j \in \{1, \cdots, n\}$ bzgl. der hinteren Einträge der

Elemente von V.

$$\begin{pmatrix}
q_{i_k j_k} & \cdots & \cdots & q_{i_k j_{k+1}} & & & & \\
\vdots & & & \vdots & & & & \\
\vdots & & & q_{i_{k+1} j_{k+1}} & \cdots & \cdots & q_{i_{k+1} j_{k+2}} & \\
\vdots & & & & & & \vdots & \\
\vdots & & & & & & \vdots & \\
\vdots & & & & & & \vdots & \\
\vdots & & & & & & \ddots & \\
q_{i_m j_{m+1}} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & & q_{i_m j_m}
\end{pmatrix}.$$

Wir definieren eine $(n \times n)$ Matrix N durch
$N_{i_l, j_l} = 1, N_{i_l, j_{l+1}} = -1$ für $l = k, \cdots, m$ bzw.
$N_{i_l, j_{l+1}} = 1, N_{i_{l+1}, j_{l+1}} = -1$ für $l = k, \cdots, m-1$ und
$N_{i,j} = 0$ für $(i,j) \notin V$. Sie hat die Eigenschaft, dass die Summe aller Einträge in einer Zeile bzw. Spalte gleich Null ist. Wir können daher zwei Matrizen $A, B \in \Omega_n$ definieren durch $A = Q + \epsilon N$ und $B = Q - \epsilon N$ mit einem $\epsilon > 0$ so klein, dass für alle $(i,j) \in V$ $q_{ij} \pm \epsilon \in [0,1]$ erfüllt ist. Dann gilt

$$Q = \frac{A+B}{2}$$

mit $A \neq B \neq Q$ und $A, B \in \Omega_n$. Also ist Q eine echte Konvexkombination von zwei Elementen aus Ω_n und daher kein Extremalpunkt. Da $Q \in \Omega_n \backslash \mathcal{P}_n$ beliebig war, beinhaltet die Menge $\Omega_n \backslash \mathcal{P}_n$ keine Extremalpunkte von Ω_n. $\square$

3.9 **Beispiel**. Für $a \in (0,1)$ und $Q \in \Omega_4 \backslash \mathcal{P}_4$ mit

$$Q = \begin{pmatrix} a & 1-a & 0 & 0 \\ 1-a & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

gilt

$$Q = \frac{1}{2}\underbrace{\begin{pmatrix} a-\epsilon & 1-a+\epsilon & 0 & 0 \\ 1-a+\epsilon & a-\epsilon & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{=A} + \frac{1}{2}\underbrace{\begin{pmatrix} a+\epsilon & 1-a-\epsilon & 0 & 0 \\ 1-a-\epsilon & a+\epsilon & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{=B},$$

wobei für $\epsilon \in (0, c)$ mit $c := \min\{a, 1-a\}$ die Matrizen A und B in Ω_4 liegen.

3.10 **Satz**. Die konvexe Hülle einer kompakten Menge $D \subseteq \mathbb{R}^n$ ist kompakt.

Beweis. Seien

$$B := \{(\lambda_1, \ldots, \lambda_{n+1}) : \sum_{j=1}^{n+1} \lambda_j = 1, n \in \mathbb{N}, \lambda_j \in [0,1] \text{ für } j = 1, \ldots, n+1\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$$

und

$$f : \mathbb{R}^{n+1} \times \underbrace{\mathbb{R}^n \times \cdots \times \mathbb{R}^n}_{(n+1)\text{-mal}} = \mathbb{R}^{(n+1)^2} \to \mathbb{R}^n$$

mit

$$f = (\lambda_1, \ldots, \lambda_{n+1}, \underbrace{x_{1,1}, \ldots, x_{1,n}}_{\in \mathbb{R}^n}, \ldots, \underbrace{x_{n+1,1}, \ldots, x_{n+1,n}}_{\in \mathbb{R}^n}) := \sum_{j=1}^{n+1} \lambda_j (x_{j,1}, \ldots, x_{j,n}).$$

Ist $D \subseteq \mathbb{R}^n$ kompakt, so gilt nach dem Satz von Carathéodory

$$co(D) = \{\sum_{j=1}^{n+1} \lambda_j x_j : x_1 \ldots x_{n+1} \in D, \lambda_1 \ldots \lambda_{n+1} \in [0,1], \sum_{j=1}^{n+1} \lambda_j = 1\}.$$

Damit bildet f die Menge

$$B \times \underbrace{D \times \cdots \times D}_{(n+1)-mal} (\subseteq \mathbb{R}^{n+1} \times \underbrace{\mathbb{R}^n \times \cdots \times \mathbb{R}^n}_{(n+1)-mal})$$

auf $co(D)$ ab. Da f stetig ist und das kartesische Produkt kompakter Mengen eine kompakte Menge ist, folgt die Kompaktheit von $co(D)$, wenn wir zeigen können, dass B kompakt ist, wozu es reicht, B als beschränkt und abgeschlossen zu identifizieren.
Die Beschränktheit ist eine Konsequenz von $B \subseteq [0,1]^{n+1}$.
Die Abbildung $g : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ mit $g(x) = g(x_1, \cdots, x_{n+1}) := \sum_{j=1}^{n+1} x_j$ ist als Summer stetiger Funktionen stetig. Folglich ist

$$H := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : g(x) = 1\}$$

als Urbild $g^{-1}\{1\}$ der einelementige Menge $\{1\} \in \mathbb{R}$ abgeschlossen. Wegen der Abgeschlossenheit von $[0,1]^{n+1}$ ist auch $B = H \cap [0,1]^{n+1}$ abgeschlossen. □

3.11 **Definition**. Die Dimension $dim(C)$ einer konvexen Teilmenge $C = co(D)$ von $\mathbb{R}^d$ ist die Dimension des kleinsten affinen Unterraum von $\mathbb{R}^d$, der C enthält.
Der kleinste affine Unterraum, der D enthält, stimmt überein mit

$$\{\sum_{j=1}^{k} \lambda_j x_j : k \in \mathbb{N}, x_1 \ldots x_k \in D, \lambda_1 \ldots \lambda_k \in \mathbb{R}, \sum_{j=1}^{k} \lambda_j = 1\}.$$

4 Satz von Birkhoff und von Neumann

4.1 **Satz von Birkhoff und von Neumann**. Eine Matrix Q ist genau dann doppelt-stochastisch, wenn sie konvexe Kombination von höchstens $n^2 - 2n + 2$ Permutationsmatrizen ist.

Beweis.Den Beweis in eine Richtung ist eine Konsquenz aus Korollar 3.4. Dort haben wir gezeigt, dass eine Konvexkombination von zwei doppelt-stochastischen Matrizen wieder doppelt-stochastisch ist. Da Permutationsmatrizen doppelt-stochastisch sind, besteht die konvexe Hülle der Permutationsmatrizen aus doppelt-stochastischen

Matrizen.
Die andere Richtung des Satzes beweisen wir auf zwei Arten.

Beweis 1. Sei

$$L = \{(q_{i,j}) \in \mathbb{R}^{n^2} : \sum_{k=1}^{n} q_{kj} = \sum_{k=1}^{n} q_{ik} = 1 \text{ für alle } i,j = 1,\cdots,n\}.$$

Wir können die Elemente der letzten Zeile bzw. Spalte durch die anderen Elemente der Zeile bzw Spalte darstellen mittels $q_{n,j_0} = 1 - \sum_{i=1}^{n-1} q_{ij_0}, q_{i_0,n} = 1 - \sum_{j=1}^{n-1} q_{i_0 j}$ mit $i,j = 1,\ldots,n-1$ und $q_{nn} = (2-n) + \sum_{i,j=1}^{n-1} q_{ij}$. Folglich gilt $dim(L) = (n-1)^2$. Wegen $\Omega_n \subseteq L$ und da L der kleinste affine Unterraum ist, der Ω_n enthält, gilt $dim(\Omega_n) = dim(L) = (n-1)^2$. Nach dem Satz von Carathéodory mit $d = (n-1)^2$ und wegen $\mathcal{P}_n \subseteq \Omega_n$ ist jedes Element von $co(\mathcal{P}_n)$ darstellbar als Konvexkombination von $d+1 = (n-1)^2+1 = n^2-2n+2$ Elementen aus $\mathcal{P}_n$. Gemäß Korollar 3.4 wissen wir, dass Ω_n nichtleer, kompakt und konvex ist, weshalb aus dem Satz von Krein-Milmann und Korollar 3.8 folgt, dass $\Omega_n = \bar{co}(\mathcal{P}_n)$. Da $\mathcal{P}_n$ als endliche Teilmenge kompakt ist und infolge gemäß Satz 3.10 auch $co(\mathcal{P}_n)$ kompakt ist, erhalten wir $\Omega_n = co(\mathcal{P}_n)$. Also folgt insgesamt, dass jede Matrix $Q \in \Omega_n$ darstellbar ist als Konvexkombination von höchstens $n^2 - 2n + 2$ Permutationsmatrizen. □

Beweis 2. Nach Lemma 2.14 enthält der bipartite Graph zu einer doppelt-stochastischen Matrix $Q_0 = (q_{i,j})$ ein perfektes Matching M mit $|M| = n$. Folglich ist P_0 definiert durch $p_{i,j} = 1$ für $(i,j) \in M$ und $p_{i,j} = 0$ sonst eine Permutationmatrix. weiteres sei $\alpha_0 := min\{q_{i,j} : (i,j) \in M\}$.
Im Fall $\alpha_0 = 1$ ist $Q_0 = P_0$ eine Permutationsmatrix und es ist nichts zu zeigen.
Nun betrachten wir den Fall $\alpha_0 < 1$, womit $Q_0 \in \Omega_n \backslash \mathcal{P}_n$. Dann hat die Matrix $Q_0 - \alpha_0 P_0$ keine negativen Einträge und die Spaltensummen bzw. die Zeilensummen dieser Matrix sind gleich $1 - \alpha_0$. Die Matrix $Q_1 := \frac{Q_0 - \alpha_0 P_0}{1-\alpha_0}$ hat mindestens einen 0-Eintrag mehr als Q_0, wobei $Q_0 = \alpha_0 P_0 + (1-\alpha_0)Q_1$. Zudem ist Q_1 eine doppelt-stochastische Matrix. Sei α_1 basierend auf Q_1 definiert wie α_0 basierend auf Q_0. Im Fall $\alpha_1 = 1$ sind wir fertig. Sei also $\alpha_1 < 1$. Wenn wir den Vorgang nun mit Q_1 wiederholen, erhalten wir analog eine doppelt-stochastisches Matrix Q_2 mit $Q_1 = \alpha_1 P_1 + (1-\alpha_1)Q_2$, al-

so $Q_0 = \alpha_0 P_0 + (1-\alpha_0)\alpha_1 P_1 + (1-\alpha_0)(1-\alpha_1)Q_2$. Hier hat auch Q_2 mindestens einen Eintrag gleich Null mehr als Q_1, also mindestens zwei Einträge gleich Null mehr als Q_0. Wir führen das weiter bis $\alpha_k = 1$ oder bis Q_k genau n Stellen ungleich 0 hat. Zweiteres impliziert aber, dass $P_k := Q_k$ eine Permutations-matrix ist, wobei

$$\begin{aligned} Q_0 = \alpha_0 P_0 &+ (1-\alpha_0)\alpha_1 P_1 \\ &+ (1-\alpha_0)(1-\alpha_1)\alpha_2 P_2 \\ &\cdots \\ &+ (1-\alpha_0)(1-\alpha_1)\cdots(1-\alpha_{k-2})\alpha_{k-1}P_{k-1} \\ &+ (1-\alpha_0)(1-\alpha_1)\cdots(1-\alpha_{k-2})(1-\alpha_{k-1})P_k. \end{aligned} \tag{1}$$

Nun ist noch zu zeigen, dass dies eine Konvexkombination ist. Wegen $\alpha_i \in [0,1]$ gilt auch $1-\alpha_i \in [0,1]$ und die Multiplikation von beliebig vielen Elementen aus dem Einheitsinterval ergibt wieder ein Element aus dem Einheitsinterval. Weiters gilt für die Folge

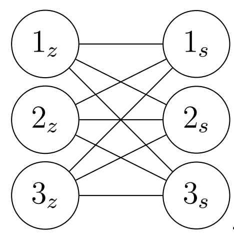
$$\begin{aligned} a(k) = \alpha_0 &+ (1-\alpha_0)\alpha_1 \\ &+ (1-\alpha_0)(1-\alpha_1)\alpha_2 \\ &\cdots \\ &+ (1-\alpha_0)(1-\alpha_1)\cdots(1-\alpha_{k-2})\alpha_{k-1} \\ &+ (1-\alpha_0)(1-\alpha_1)\cdots(1-\alpha_{k-2})(1-\alpha_{k-1}), \end{aligned}$$

dass $a(k) = 1$ für alle $k \in \mathbb{N}$, was wir durch Induktion nachweisen wollen:
IA: Für $k = 1$ ist $a(1) = \alpha_0 + (1-\alpha_0)\alpha_1 + (1-\alpha_0)(1-\alpha_1) = \alpha_0 + \alpha_1 - \alpha_0\alpha_1 + 1 + \alpha_0\alpha_1 - \alpha_0 - \alpha_1 = 1$.
IV: Für $k \in \mathbb{N}$ ist $a(k) = 1$.
IS: Betrachte $k+1$, dann gilt
$a(k+1) = \alpha_0 + (1-\alpha_0)\alpha_1 + \cdots + (1-\alpha_0)(1-\alpha_1)\cdots(1-\alpha_{k-2})\alpha_{k-1} + (1-\alpha_0)(1-\alpha_1)\cdots(1-\alpha_{k-1})\alpha_k + (1-\alpha_0)(1-\alpha_1)\cdots(1-\alpha_k) = \alpha_0 + (1-\alpha_0)\alpha_1 + \cdots + (1-\alpha_0)(1-\alpha_1)\cdots(1-\alpha_{k-2})\alpha_{k-1} + (1-\alpha_0)(1-\alpha_1)\cdots(1-\alpha_{k-1})\alpha_k + (1-\alpha_0)\cdots(1-\alpha_{k-1}) - (1-\alpha_0)\cdots(1-\alpha_{k-1})\alpha_k = \alpha_0 + (1-\alpha_0)\alpha_1 + \cdots + (1-\alpha_0)(1-\alpha_1)\cdots(1-\alpha_{k-2})\alpha_{k-1} + (1-\alpha_0)\cdots(1-\alpha_{k-1}) = a(k)$. Mit der Induktionsvorraussetzung folgt die Behauptung. Schließlich gilt nach dem Satz von Carathéodory, genauso wie am Anfang von Beweis 1, dass sich Q_0 als Konvexe kombination von höchstesns $n^2 - 2n + 2$ vielen Permutationsmatrizen schreiben lässt. $\square$

Als Beispiel betrachten wir eine (3×3) doppelt-stochastische Matrix Q_0, in welcher alle Einträge voneinander verschiden sind, und die Hauptdiagonalsumme gleich 1 hat:

$$\begin{pmatrix} \nicefrac{8}{15} & \nicefrac{1}{15} & \nicefrac{6}{15} \\ \nicefrac{3}{15} & \nicefrac{5}{15} & \nicefrac{7}{15} \\ \nicefrac{4}{15} & \nicefrac{9}{15} & \nicefrac{2}{15} \end{pmatrix}$$

Der zu Q_0 gehöriger bipartite Graph ist



.

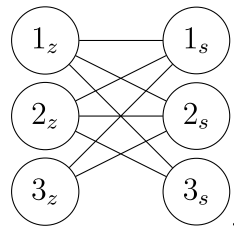
Ein perfektes Matching hier wäre $\{\{1_z, 1_s\}, \{2_z, 2_s\}, \{3_z, 3_s\}\}$. Mit der Permutationsmatrix

$$P_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$\alpha_0 = \frac{2}{15}$ und $Q_1 = \frac{Q_0 - \alpha_0 P_0}{1-\alpha_0}$ folgt

$$\begin{aligned} Q_0 =& \alpha_0 P_0 - (1-\alpha_0) Q_1 \\ =& \frac{2}{15}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{13}{15}\begin{pmatrix} \nicefrac{6}{13} & \nicefrac{1}{13} & \nicefrac{6}{13} \\ \nicefrac{3}{13} & \nicefrac{3}{13} & \nicefrac{7}{13} \\ \nicefrac{4}{13} & \nicefrac{9}{13} & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

und wir erhalten $Q_1 = \begin{pmatrix} \nicefrac{6}{13} & \nicefrac{1}{13} & \nicefrac{6}{13} \\ \nicefrac{3}{13} & \nicefrac{3}{13} & \nicefrac{7}{13} \\ \nicefrac{4}{13} & \nicefrac{9}{13} & 0 \end{pmatrix}$ als doppelt-stochastische Matrix mit einem Eintrag gleich Null mehr als Q_0. Tun wir das Gleiche mit Q_1, so schaut der zugehöriger Graph folgendermaßen aus.



.

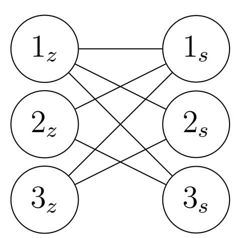
Ein perfektes Matching hier wäre $\{\{3_z, 1_s\}, \{2_z, 2_s\}, \{1_z, 3_s\}\}$. Mit der Permutationsmatrix

$$P_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$\alpha_1 = \frac{3}{13}$ und $Q_2 = \frac{Q_1 - \alpha_1 P_1}{1-\alpha_1}$ haben wir

$$\begin{aligned} Q_0 &= \alpha_0 P_0 + (1-\alpha_0)\alpha_1 P_1 + (1-\alpha_0)(1-\alpha_1) Q_2 \\ &= \frac{2}{15}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{13}{15}\frac{3}{13}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{13}{15}\frac{10}{13}\begin{pmatrix} 6/10 & 1/10 & 3/10 \\ 3/10 & 0 & 7/10 \\ 1/10 & 9/10 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

also $Q_2 = \begin{pmatrix} 6/10 & 1/10 & 3/10 \\ 3/10 & 0 & 7/10 \\ 1/10 & 9/10 & 0 \end{pmatrix}$. Der bipartite Graph zu Q_2 ist



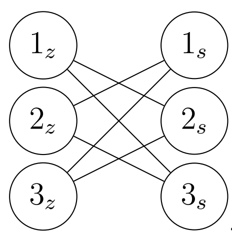
und ein perfektes Matching hier wäre $\{\{1_z, 1_s\}, \{2_z, 3_s\}, \{3_z, 2_s\}\}$. Mit der Permutationsmatrix

$$P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$\alpha_2 = \frac{6}{10}$ und $Q_3 = \frac{Q_2 - \alpha_2 P_2}{1-\alpha_2}$ erhalten wir wieder

$$Q_0 = \alpha_0 P_0 + (1-\alpha_0)\alpha_1 P_1 + (1-\alpha_0)(1-\alpha_1)\alpha_2 P_2 + (1-\alpha_0)(1-\alpha_1)$$
$$(1-\alpha_2)Q_3 = \tfrac{2}{15}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} + \tfrac{13}{15}\tfrac{3}{13}\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix} + \tfrac{10}{13}\tfrac{13}{15}\tfrac{6}{10}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix} +$$
$$\tfrac{13}{15}\tfrac{10}{13}\tfrac{6}{10}\frac{\begin{pmatrix}0&1/10&3/10\\3/10&0&7/10\\1/10&9/10&0\end{pmatrix}}{\frac{4}{10}} = \tfrac{2}{15}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} + \tfrac{13}{15}\tfrac{3}{13}\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix} +$$
$$\tfrac{10}{13}\tfrac{13}{15}\tfrac{6}{10}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix} + \tfrac{13}{15}\tfrac{10}{13}\tfrac{6}{10}\begin{pmatrix}0&1/4&3/4\\3/4&0&1/4\\1/4&3/4&0\end{pmatrix}$$

Der bipartite Graph zu Q_3 ist



.

Ein Perfektes Matching hier wäre $\{\{1_z, 3_s\}, \{2_z, 1_s\}, \{3_z, 2_s\}\}$. Mit der Permutationsmatrix

$$P_3 = \begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix},$$

$\alpha_3 = \frac{3}{4}$ und $Q_4 = \frac{Q_3 - \alpha_3 P_3}{1-\alpha_3}$ haben wir dann

$$Q_0 = \alpha_0 P_0 + (1-\alpha_0)\alpha_1 P_1 + (1-\alpha_0)(1-\alpha_1)\alpha_2 P_2 + (1-\alpha_0)(1-\alpha_1)$$
$$(1-\alpha_2)\alpha_3 P_3 + (1-\alpha_0)(1-\alpha_1)(1-\alpha_2)(1-\alpha_3)Q_4 = \tfrac{2}{15}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} +$$
$$\tfrac{13}{15}\tfrac{3}{13}\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix} + \tfrac{10}{13}\tfrac{13}{15}\tfrac{6}{10}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix} + \tfrac{10}{13}\tfrac{13}{15}\tfrac{4}{10}\tfrac{3}{4}\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix} +$$

$$\frac{13}{15}\frac{10}{13}\frac{4}{10}\frac{1}{4}\frac{\begin{pmatrix} 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 \\ 1/4 & 0 & 0 \end{pmatrix}}{\frac{1}{4}} = \frac{2}{15}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{3}{13}\frac{13}{15}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} +$$

$$\frac{6}{10}\frac{10}{13}\frac{13}{15}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \frac{3}{4}\frac{4}{10}\frac{10}{13}\frac{13}{15}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{4}\frac{4}{10}\frac{10}{13}\frac{13}{15}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$\frac{2}{15}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{3}{15}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{6}{15}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \frac{3}{15}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} +$$

$$\frac{1}{15}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Also ist Q_4 eine Permutationsatrix und wir haben Q_0 als eine Konvexkombination von genau $3^2 - 2 \cdot 3 + 2 = 5$ Permutationsmatrizen geschrieben.

Literatur

[L] Steven R. Lay,*Convex Sets and Their Applications* , Wiley 1982

[BWK] M. Blümlinger, H. Woracek, M. Kaltenbäck, *Funktionalanalysis 1*, Vorlesungsskript 2019

[GRY] Joseph P. S. Kung, Gian-Carlo Rota, Catherine H. Yan ,*Combinatorics: The Rota Way*, Cambridge University Press 2009

[AB] Alexander Barvinok ,*A Course in Convexity*, Graduate Studies in Mathematics Volume 54. American Mathematical Society, Providence, RI, 2002.

[KV] Bernhard Korte, Jens Vygen ,*Combinatorial Optimization Theory and Algorithms*, Springer-Verlag GmbH Germany 2000, 2002, 2006, 2008, 2012, 2018