Seminormale Operatoren

Cornelia Michlits
SE Analysis

11. Mai 2020

Definition (Seminormaler Operator)

Ein Operator $S \in L(\mathcal{H})$ ist seminormal $\Leftrightarrow [S^*, S] \geq$ oder ≤ 0.

- $[S^*, S] \geq 0$ *hyponormal*
- $[S^*, S] \leq 0$ *co-hyponormal*

Beispiele

Example

Jeder *subnormale* Operator ist hyponormal.

Definition (subnormal)

Die Einschränkung eines normalen Operators $N \in L(K)$ auf einen invarianten Teilraum $H \subseteq K$.

Beispiele II

Example

Unilaterale Shift $U_+ : l^2(\mathbb{N}) \to l^2(\mathbb{N})$ mit
$U_+(x_0, x_1, ...) = (0, x_0, x_1, ...)$

Zerlegung von seminormalen Operatoren

Theorem

Sei S ein seminormaler Operator auf $\mathcal{H}$. $\mathcal{M}_0(S)$ sei der kleinste Teilraum von $\mathcal{H}$ der S auf das Bild von $[S^*, S]$ einschränkt und $\mathcal{M}_1(S) := \mathcal{M}_0(S)^\perp$. Dann kann $S = S_0 + S_1$ in Bezug auf die Zerlegung $\mathcal{H} = \mathcal{M}_0(S) + \mathcal{M}_1(S)$ geschrieben werden. S_0 ist rein seminormal und S_1 ist normal.

Definition (pure)

Ein seminormaler Operator $S \in L(H)$ heißt *pure*, falls sein normaler Anteil der Nullraum ist.

Spektralradius

$$r(T) := max_{\lambda \in \sigma(T)} |\lambda|$$

Proposition

Sei S seminormal in $L(H)$. Dann ist $||S|| = r(S)$.

Wachstumsbedingung für die Resolvente

Korollar

Sei S ein seminormaler Operator und $\lambda_0 \in \mathbb{C}$, $\lambda_0 \notin \sigma(S)$. Dann gilt

$$||(S - \lambda_0)^{-1}|| = \frac{1}{dist(\lambda_0, \sigma(S))}$$

Numerische Wertebereich

Proposition

Sei $S \in L(H)$ ein hyponormaler Operator. Dann gilt

$$\overline{W(T)} = conv\, \sigma(T).$$

Cut-downs

Definition (Cut-down)

Sei $S = X + iY \in L(H)$ ein hyponormaler Operator. Dann ist der *cut-down* von S bzgl. der Borelmenge $\delta \subseteq \mathbb{R}$ der Operator

$$T_\delta = X + iE(\delta)YE(\delta),$$

auf dem Raum $E(\delta)H$.

Analog für Y auf der imaginären Achse.

Eigenschaften hyponormale Operatoren

- Die Einschränkung eines hyponormalen Operators auf eine abgeschlossenen invarianten Unterraum ist hyponormal.
- Wenn $S = X + iY \in L(H)$ hyponormal und X oder Y invertierbar, dann $X^{-1} - iY$ bzw. $X - iY^{-1}$ hyponormal.
- Die Menge alle hyponormalen Operatoren auf einen Hilbertraum ist abgeschlossen in der starken Operatortopologie.

Cut-down und rein hyponormale Operatoren

Proposition

Sei $S \in L(H)$ ein hyponormaler Operator and sei $\delta \subset \mathbb{R}$ eine Borelmenge. Wenn S rein hyponormal ist, dann ebenfalls S_δ.

Spectral mapping results

Lemma

Sei $S \in L(H)$ *ein beliebiger Operator und* $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$ *stetige Kurve, sodass* $\gamma([0,1]) \cap \sigma(S) \neq \emptyset$ *und* $\gamma([0,1]) \cap \sigma_{ap}(S) = \emptyset$*. Dann ist* $\gamma([0,1]) \subset \sigma_r(S)$*.*

Lemma

Sei $A : [0,1] \to L(H)$ *ein stetiger Weg und* $\tau : [0,1] \to \mathbb{C}$ *stetig. Falls*

- $\tau(0) \in \sigma(A(0))$,
- $\tau(t) \in \mathbb{C} - \sigma_{ap}(A(t)), t \in [0,1]$

Dann $\tau(t) \in \sigma_r(A(t))$ *für jedes* $t \in [0,1]$*.*

Spectral mapping results

Proposition

Sei $A : [0,1] \to L(H)$ *stetig bzgl der Normtopologie und* $\sigma \subset \mathbb{C}$ *and* $\theta : [0,1] \times \sigma \to \mathbb{C}$, *so dass*

- $\theta(\cdot, \lambda) : [0,1] \to \mathbb{C}$ *stetig für jedes* $\lambda \in \sigma$
- $\theta_t = \theta(t, \cdot) : \sigma \to \mathbb{C}$ *injektiv für jedes* $t \in [0,1]$ *und* $\theta_0|\sigma = id$

Falls $\sigma_{ap}(A(t)) \cap \theta_t(\sigma) = \theta_t(\sigma_{ap}(A(0)) \cap \sigma), t \in [0,1]$
dann $\sigma_r(A(t)) \cap \theta_t(\sigma) = \theta_t(\sigma_r(A(0)) \cap \sigma), t \in [0,1]$.

Spectral mapping results

Theorem (Putnam)

Sei $S = X + iY \in L(H)$ *ein hyponormaler Operator, dann gilt*

$$Re\, \sigma(S) = \sigma(X) \text{ und } Im\, \sigma(S) = \sigma(Y).$$

$Re\, \sigma(S) = \{x \in \mathbb{R} : \exists y \in \mathbb{R} \text{ mit } x + iy \in \sigma(S)\}$, *analog* $Im\, \sigma(S)$.

Spectral mapping results

Proposition

Sei $S \in L(H)$ hyponormal und $\Delta = (a, b)$ ein offenes Intervall von $\mathbb{R}$. Dann gilt

$$\sigma_{ap}(S) \cap (\Delta \times \mathbb{R}) = \sigma_{ap}(S_\Delta) \cap (\Delta \times \mathbb{R}).$$

Spectral mapping results

Theorem (Putnam)

Sei $S \in L(H)$ *hyponormal und* $\Delta = (a, b)$ *ein offenes Intervall von* $\mathbb{R}$*. Dann gilt*

$$\sigma(S) \cap (\Delta \times \mathbb{R}) = \sigma(S_\Delta) \cap (\Delta \times \mathbb{R}).$$

Ungleichung von Putnam

Theorem

Sei $S \in L(H)$ seminormal mit $D = S^*S - SS^*$. Dann gilt

$$\pi ||D|| \leq meas_2(\sigma(S)).$$

Ausblick

Theorem (Berger & Shaw)

$\pi \, Trace[T^*, T] \leq m(T) meas_2(\sigma(T))$

Unbeschränkte hyponormale Operatoren

Definition

Sei T ein dicht definierter Operator in H. Dann heißt T in H hyponormal, falls

- $D(T) \subset D(T^*)$
- $||Tx|| \geq ||T^*x||, x \in D(T)$.

Example

Gewichteter Shift mit $|\alpha_k| \leq |\alpha_{k+1}|$ ist hyponormal.

Unbeschränkte hyponormale Operatoren

Sei T dicht definiert in H. Dann gilt

- T hyponormal genau dann wenn $T^*|_{D(T)} = KT$ mit Kontraktion K.
- Wenn T_1 und T_2 abgeschlossene, hyponormale Operatoren sind und es existieren injektive, beschränkte Operatoren X, Y mit dichtem Bild, sodass $XT_1 \subseteq T_2X$, $YT_2 \subseteq T_1Y$, dann $\sigma(T_1) = \sigma(T_2)$.
- T_k hyponormal und $||T_mx - T_nx||$ sowie $||T_m^*y - T_n^*y||$ geeignet. Dann ist $\sigma(T) = \bigcap_{n=1} \overline{\bigcup_{k=n}^{\infty} \sigma(T_k)}$

Unbeschränkte hyponormale Operatoren

Proposition

Falls $\mathbb{R}_+ \ni t \to T_t$ *eine stetige Halbgruppe von hyponormalen Operatoren ist, dann ist der Erzeuger*

$$Af = \lim_{t\to 0+} t^{-1}(T_t f - f)$$

hyponormal.

Unbeschränkte hyponormale Operatoren

Example

$T = \left(a_0 - \frac{i}{2}a_1' - ia_1\frac{d}{dx}\right)\big|_{C_0^\infty(\mathbb{R})}$ mit a_0, a_1 Funktionen aus C^1 sodass

- Re $a_0 \neq 0$
- $a_1 = ib_1$ mit $b_1(x) = \frac{cx}{Re a_0(x)}$, $c \in \mathbb{R}$.

Zusammenfassung

- $r(S)$, Bedingung für Resolvente, numerischer Wertebereich ähnlich zu normalen Operatoren
- Subnormale Operatoren, unilaterale Shift
- Ungleichung von Putnam
- Unbeschränkte seminormale Operatoren

References [3], [1], [4], [5], [2]

- Kevin Clancey.
  Seminormal operators.
  In *Seminormal Operators*, pages 1–36. Springer, 1979.

- Björn Gustafsson and Mihai Putinar.
  Hyponormal quantization of planar domains.
  Lecture Notes in Mathematics, 2199, 2017.

- Jan Janas.
  On unbounded hyponormal operators.
  Arkiv för Matematik, 27(1-2):273, 1989.

- Mihai Putinar and Mircea Martin.
  Lectures on hyponormal operators, volume 39.
  Birkhäuser, 2012.

- Mohammad Rashid and Basem Masaedeh.
  Some applications of the co-hyponormal operators.
  2009.