Topologie

Martin Blümlinger
Inst. 101
TU Wien

Juni 2020

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Dualitätssatz

1.1 Topologische Gruppen

Ist $(G,\cdot,e)$ eine Gruppe und zugleich ein topologischer Raum, so heißt G **topologische Gruppe** falls die Abbildungen $G\times G\to G:\ (x,y)\mapsto xy$ und $G\to G: x\mapsto x^{-1}$ stetig sind.

Viele der in diesem Unterkapitel folgenden Sätze sind auch für topologische Gruppen gültig, die keine Hausdorffräume sind. Da diese Gruppen aber meist nur aufgrund dieser topologischen Besonderheit von Interesse sind wird im Folgenden immer vorausgesetzt, dass die Gruppentopologie Hausdorff ist.

Als unmittelbare Folgerungen erhalten wir:

Satz 1.1.1. *e hat eine Umgebungsbasis bestehend aus symmetrischen Mengen (d.h $U=U^{-1}$).*

Für eine Umgebung U von e und $n\in\mathbb{N}$ gibt es eine Umgebung V von e mit $V^n=V\cdot V\cdots V\subseteq U$.

Beweis. Wegen der Stetigkeit der Inversion ist für eine Umgebung V von e auch V^{-1} eine Umgebung des neutralen Elementes und damit auch die symmetrische Menge $V\cap V^{-1}$.

Da die Mengen der Gestalt $O_1\times O_2$ für $(O_i$ Umgebungen von e eine Umgebungsbasis von (e,e) in $G\times G$ bilden finden wir wegen der Stetigkeit des Produktes zu jeder Umgebung U von e Umgebungen O_1,O_2 von e die unter der Gruppenmultiplikation in U abbilden. Dann ist auch $V:=O_1\cap O_2$ eine Umgebung mit $V_1\cdot V_1\subseteq U$. Induktiv erhält man so Umgebungen V_n, die $V_n\cdot\ldots V_n\subseteq U$ erfüllen (2^n Faktoren) und damit die Behauptung für n Faktoren. $\square$

Satz 1.1.2. *Ist A Untergruppe einer topologischen Gruppe G, so ist $\bar{A}$ eine abgeschlossene Untergruppe.*

Beweis. Wir zeigen zuerst, dass für $A_1\subseteq X_1, A_2\subseteq X_2$ bezüglich der Produkttopologie $\bar{A}_1\times\bar{A}_2=\overline{A_1\times A_2}$ gilt:

Da die Mengen $O_1 \times O_2$, O_1, O_2 offen in X_1 resp. X_2 eine Basis der Produkttopologie in $X_1 \times X_2$ bilden gilt $x \in \overline{A_1 \times A_2}$ genau wenn $\forall O_1 \in \mathcal{T}_1, O_2 \in \mathcal{T}_2$ mit $x \in O_1 \times O_2$ gilt $(O_1 \times O_2) \cap (A_1 \times A_2) \neq \emptyset$, was genau für $O_1 \cap A_1 \neq \emptyset \wedge O_1 \cap A_1 \neq \emptyset$ wenn $x \in O_1 \times O_2$ der Fall ist, $\mathrm{pr}_1 x \in \bar{A}_1 \wedge \mathrm{pr}_2 x \in \bar{A}_2$ gilt, d.h. für $x \in \bar{A}_1 \times \bar{A}_2$.

Eine Abbildung $f : X \to Y$ ist genau dann stetig, wenn für $C \subseteq X$ gilt $f(\bar{C}) \subseteq \overline{f(C)}$. Für die Gruppenmultiplikation $m : G \times G \to G$ gilt also

$$m(\bar{A} \times \bar{A}) = m(\overline{A \times A}) \subseteq \overline{m(A \times A)} = \bar{A},$$

d.h. $\bar{A}$ ist abgeschlossen unter der Multiplikation.

Analog sieht man wegen der Stetigkeit der Inversion $(\bar{A})^{-1} \subseteq \overline{A^{-1}} = \bar{A}$, womit die Inversion auf $\bar{A}$ abgeschlossen ist. □

Satz 1.1.3. *Für eine topologische Gruppe G und $x \in G$ ist die Links(Rechts)translation $L_x : g \mapsto xg$ ($R_x : g \mapsto gx$) ein Homöomorphismus von G auf G.*

Beweis. Aus den Gruppenaxiomen folgt, dass Translationen Bijektionen von G auf sich sind. Die Linkstranslation $g \mapsto xg$ ist als Zusammensetzung der Abbildungen $g \mapsto (x, g)$ und $(x, g) \mapsto xg$ stetig. Ihre Inverse ist die Linkstranslation $L_{x^{-1}}$ und damit ebenfalls stetig. □

Korollar 1.1.4. *Ist $(U_i)_{i \in I}$ eine Umgebungsbasis von $x \in G$, G eine topologische Gruppe, so ist für $y \in G$ $(yU_i)_{i \in I}$ eine Umgebungsbasis von yx.*

Korollar 1.1.5. *Ist ϕ ein Homomorphismus der topologischen Gruppe G in eine topologische Gruppe H, so ist ϕ genau dann stetig, wenn ϕ in e stetig ist.*

Beweis. Da Linkstranslationen L_{x_0} Homöomorphismen sind ist ϕ genau dann in x_0 stetig, wenn $\phi \circ L_{x_0}$ in e stetig ist. Wegen $\phi(x_0 x) = \phi(x_0)\phi(x) = L_{\phi(x_0)} \circ \phi$ und da Linkstranslationen auch in H Homöomorphismen sind, ist diese Abbildung genau dann in e stetig, wenn ϕ in e stetig ist. □

Korollar 1.1.6. *Offene Untergruppen einer topologischen Gruppe sind abgeschlossen.*

Beweis. Ist H Untergruppe von G, so gilt $H^{\complement} = \cup_{x \notin H} xH$. Da Linkstranslationen Homöomorphismen sind ist $H^{\complement}$ für offene Untergruppen H als Vereinigung offener Mengen offen und H damit abgeschlossen. □

Korollar 1.1.7. *Enthält eine topologische Gruppe eine nichtleere offene relativ kompakte Teilmenge, so ist sie lokalkompakt.*

Beweis. Da kompakte Räume normal sind, besitzt jeder Punkt mit einer relativ kompakten Umgebung eine Umgebungsbasis die aus relativ kompakten Mengen besteht. Für topologische Gruppen hat jeder Punkt eine relativ kompakte Umgebung wenn ein Punkt eine relativ kompakte Umgebung besitzt. □

1.2 Kompakt-offene Topologie

Für topologische Räume X,Y bezeichne $C(X,Y)$ den Raum der stetigen Funktionen $X \to Y$. Versieht man $C(X,Y)$ mit der Spurtopologie der Produkttopologie Y^X, so erhält man die Topologie der punktweisen Konvergenz. Eine Basis dieser Topologie besteht aus den Mengen

$$\{f \in C(X,Y):\ f(x_i) \in O_i,\ i = 1,\dots,n\}$$

für $n \in \mathbb{N}$, $x_1,\dots,x_n \in X$, $O_1,\dots,O_n$ offen in Y. Die Topologie der punktweisen Konvergenz ist die gröbste Topologie auf $C(X,Y)$ unter der die Abbildungen $X \times C(X,Y) \to Y$, $(x,f) \to f(x)$ für alle $x \in X$ in der 2. Koordinate stetig sind. Wir suchen die gröbste Topologie auf $C(X,Y)$ unter der diese Abbildung stetig in der Produkttopologie ist. Diese Topologie existiert im Allgemeinen nicht, wohl aber für lokalkompakte Räume Y:

Definition 1.2.1. *Für topologsiche Räume X,Y wird die **kompakt-offene** oder **k.o.-Topologie** auf $C(X,Y)$ durch die Subbasis*

$$M(K,O) := \{f \in C(X,Y):\ f(x) \in O\ \forall x \in K\} \tag{1.1}$$

K kompakt in X, O offen in Y definiert. Wir bezeichnen $C(X,Y)$ versehen mit der k.o.-Topologie durch $C_c(X,Y)$.

Für eine Funktion $f \in C(X \times Y,Z)$ betrachten wir die Funktion $\bar{f}:\ X \to C_c(Y,Z)$, die durch $\bar{f}(x)(y) = f(x,y)$ gegeben ist, also

$$X \times Y \xrightarrow{\ f\ } Z, \qquad X \xrightarrow{\ \bar{f}\ } C_c(Y,Z)$$

und zeigen, dass für lokalkompakte Y f genau dann stetig ist wenn $\bar{f}$ stetig ist, bzw. dass $C(X \times Y,Z) \cong C(X,C_c(Y,Z))$ gilt.

Satz 1.2.2. *Seien X,Y,Z topologische Räume und $f:\ X \times Y \to Z$. Ist f stetig ($X \times Y$ mit Produkttopologie). dann ist auch $\bar{f}:\ X \to C_c(Y,Z)$, $x \mapsto f(x,\cdot)$ stetig. Ist Y lokalkompakt und $\bar{f}$ stetig, so ist auch f stetig.*

Beweis.

$$\begin{aligned} \tilde{x} \in \bar{f}^{-1}(M(K,O)) &\Leftrightarrow \bar{f}(\tilde{x}) \in M(K,O) \Leftrightarrow \bar{f}(\tilde{x})(y) \in O\ \forall y \in K \\ &\Leftrightarrow f(\tilde{x},y) \in O\ \forall y \in K \end{aligned} \tag{1.2}$$

Ist f stetig, so gibt es für alle $y \in K$ Umgebungen Y_y,U_y von x resp. y mit $f(\tilde{x},y) \in O$ für $\tilde{x} \in V_y$ und $y \in U_y$. Da K kompakt ist gibt es $y_1,\dots,y_N$ mit $K \subseteq \cup_{i \le N} v_{y_i}$. Für $V := \cap_{i \le N} V_{y_i}$ gilt dann $f(V,k) \subseteq O$, also $V \subseteq \bar{f}^{-1}(M(K,O)$, wraus die Stetigkeit von $\bar{f}$ folgt.

Ist $\bar{f}$ stetig, so folgt für O offen in Z, K kompakt in Y aus (1.2) dass es eine Umgebung V von x gibt mit $f(V,K) \subseteq O$. Ist Y lokalkompakt, so kann K als kompakte Umgebung von y gewählt werden, womit die Stetigkeit von f in (x,y) folgt. $\square$

Korollar 1.2.3. *Für einen lokalkompakten Raum Y und einen topologischen Raum Z ist die kompakt-offene Topologie die gröbste Topologie $\mathcal{T}$ auf $C(Y,Z)$ für die die Abbildung*

$$C_{\mathcal{T}}(Y,Z) \times Y \to Z,\ (f,y) \mapsto f(y)$$

stetig ist

Beweis. Wählen wir für X in Satz 1.2.2 $C_{\mathcal{T}}(Y,Z)$, so sehen wir, dass eine Abbildung $f:\ C_{\mathcal{T}}(Y,Z) \times Y \to Z,\ (\phi,y) \mapsto \phi(y)$ genau dann stetig ist, wenn $\bar{f}$ stetig ist. Bei unserer Wahl von f ist aber $\bar{f}$ die Identität von $C_{\mathcal{T}}(Y,Z)$ nach $C_c(Y,Z)$. f ist also genau dann stetig, wenn $\mathcal{T}$ feiner als die k.o.-Topologie ist. $\square$

1.3 Duale Gruppen

Auf einer lokalkompakten Abelschen Gruppe G sei die **duale Gruppe** oder **Charaktergruppe** $\widehat{G}$ die Menge aller **Charaktere** das sind stetigen Homomorphismen von G nach $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$. Auf der dualen Gruppe ist ein Produkt durch $(\chi_1\chi_2)(g) = \chi_1(g)\chi_2(g)$ definiert, mit dem trivialen Charakter $G \to \{1\}$ als neutralem Element. Da mit χ auch die konjugiert komplexe Funktion $\bar{\chi}$ ein Charakter ist folgt dass $\widehat{G}$ tatsächlich eine Gruppe ist. Wir betrachten Abelsche Gruppen mit + als Gruppenoperation und bezeichnen das neutrale Element mit 0. Aus offensichtlichen Gründen machen wir für $\mathbb{T}$ eine Ausnahme und betracheten $\mathbb{T}$ als multiplikative Gruppe mit der konstanten 1-Funktion als neutralem Element 1.

Wir suchen jetzt eine Topologie auf $\widehat{G}$ unter der $\widehat{G}$ zu einer topologischen Gruppe wird und die Abbidung $G \times \hat{G} \to \mathbb{T}$, $(g,\chi) \mapsto \chi(g)$ stetig in der Produkttopologie ist. Da, wie sich im Folgenden herausstellt die Theorie lokalkompakter Gruppen wesentlich reichhaltiger als die allgemeine Theorie topologischer Gruppen ist, sollte für G lokalkompakt auch die duale Gruppe $\widehat{G}$ lokalkompakt sein. Die diskrete Topologie erfüllt diese Forderungen und ist klarerweise die feinste dieser Topologien. Wir suchen jetzt die gröbste dieser Topologien auf $\widehat{G}$. Für die Stetigkeit von $(g,\chi) \mapsto \chi(g)$ im trivialen Charakter 1 muss nach Korollar 1.2.3 die Topologie auf $\widehat{G}$ feiner als die Spurtopologie von $C_c(G,\mathbb{T})$ sein. Damit sollten die Charaktere in $M(K,O)$ offen in der Topologie von $\widehat{G}$ sein. Da nach Korollar 1.1.4 mit $M(K,O)$ auch alle Translate offen sein müssen wenn $\widehat{G}$ unter dieser Topologie zu einer topologischen Gruppe werden soll, wählen wir die von der Subbasis bestehend aus den Mengen

$$N(\chi_0,K,\varepsilon) := \{\chi \in \widehat{G} : |(\chi\chi_0^{-1})(x)| < \varepsilon\}, K \subseteq G \text{ kompakt}, \varepsilon > 0, \chi_0 \in \widehat{G}$$

erzeugte Topologie. Diese bezeichnen wir ebenfalls als **kompak-offene oder k.o.-Topologie**.

Satz 1.3.1. *Mit der k.o.-Topologie ist $\widehat{G}$ eine topologische Gruppe.*

Beweis. Wir müssen die Stetigkeit der Multiplikation und der Inversenbildung in $\widehat{G}$ zeigen.

Die Menge $\{\bar{\chi} \in \widehat{G} : |(\chi\chi_0^{-1})(x)| < \varepsilon \; \forall x \in K\}$ ist gleich $\{\chi \in \widehat{G} : |(\chi\chi_0^{-1})(x)| < \varepsilon \; \forall x \in K\}$, also eine Menge aus der Subbasis. Damit führt die Inversion die Menge $N(\chi_0, K, \varepsilon)$ in die Menge $N(\bar{\chi}_0, k, \varepsilon)$ über. Für die Stetigkeit einer Abbildung genügt es aber, dass die Urbilder von Mengen einer Subbasis im Zielraun offen sind. Also ist $\chi \mapsto \bar{\chi}$ stetig in χ_0.

Für $\chi_1\chi_2, \tilde{\chi}_1, \tilde{\chi}_2$ und $g \in G$ gilt

$$\begin{aligned} &|\chi_1(g)\chi_2(g) - \tilde{\chi}_1(g)\tilde{\chi}_2(g)| \leq |\chi_1(g)(\chi_2(g) - \tilde{\chi}_2(g))| + |(\chi_1(g) - \tilde{\chi}_1(g))\tilde{\chi}_2(g)| \\ =&|\chi_2(g) - \tilde{\chi}_2(g)| + |\chi_1(g) - \tilde{\chi}_1(g)|. \end{aligned}$$

Es wird also die Menge $N(\chi_1, K, \varepsilon/2) \times N(\chi_2, K, \varepsilon/2)$ in $N(\chi_1\chi_2, K, \varepsilon/2)$ abgebildet, womit die Stetigkeit der Multiplikation in $(\tilde{\chi}_1, \tilde{\chi}_2)$ bezüglich der k.o.-Topologie folgt. □

Satz 1.3.2. *Ist die Abelsche Gruppe G diskret, so ist $\widehat{G}$ eine kompakte Gruppe.*

Beweis. Die k.o.-Topologie auf $\widehat{G}$ ist für diskrete Gruppen G die Topologie der punktweisen Konvergenz, da in einem diskreten Raum genau die endlichen Mengen kompakt sind. Diese entspricht der Spurtopologie der Produkttopologie, wenn wir $\widehat{G}$ als Teilmenge von $\mathbb{T}^G$ auffassen. Da dieser Raum nach Tichonow kompakt ist, haben wir nur zu zeigen, dass $\widehat{G}$ abgeschlossen in $\mathbb{T}^G$ ist.

Da G diskret ist, ist eine Funktion χ von G nach $\mathbb{T}$ genau dann ein Charakter, wenn für alle $x, y \in G$ $\chi(x)\chi(y) - \chi(xy) = 0$ und $\chi(x)\chi(-x) = 1$ gilt. Die Abbildung $f \mapsto \mathrm{pr}_x\mathrm{pr}_y - \mathrm{pr}_{xy}$ ist als Zusammensetzung stetiger Abbildungen stetig weshalb der Kern dieser Abbildung abgeschlossen ist. Ebenso ist $\mathrm{pr}_x\mathrm{pr}_{-x} - 1$ stetig und damit der Kern dieser Funktion abgeschlossen. Der Durchschnitt dieser Kerne ist, wenn x, y G durchlaufen genau die Menge der Charaktere. □

Definition 1.3.3. *Ist X ein topologischer Raum $x \in X$ und Φ eine Familie von Funktionen $X \to \mathbb{C}$ für die gilt: Gibt es für alle $\varepsilon > 0$ eine Umgebung V von x mit $|f(x) - f(y)| < \varepsilon \; \forall f \in \Phi, \; y \in V$, so heißt Φ **gleichgradig stetig in** x. Ist Φ für alle $x \in X$ gleichgradig stetig in x, so heißt Φ **gleichgradig stetig**.*

Satz 1.3.4. *Ist Φ eine gleichgradig stetige Familie komplexwertiger Funktionen auf einem topologischen Raum X, so stimmt auf Φ die Topologie der punktweisen Konvergenz mit der k.o.-Topologie überein. Jede komplexwertige Funktion auf X im Abschluss von Φ bezüglich der Topologie der punktweisen Konvergenz auf $\mathbb{C}^X$ ist stetig.*

Beweis. Da einelementige Mengen kompakt sind, ist die Topologie der punktweisen Konvergenz gröber als die k.o.-Topologie. Es bleibt also zu zeigen, dass es für $f \in \Phi$, K kompakt in X und $\varepsilon > 0$, eine endliche Menge $F = \{x_1, \ldots, x_M\} \subset X$ und

$\delta > 0$ gibt mit $N(f_0, F, \delta) \subseteq N(f_0, K, \varepsilon)$ gilt, wobei $N(f_0, K, \varepsilon) = \{f \in \Phi : |f(z) - f_0(z)| < \varepsilon \forall z \in K\}$ und $N(f_0, F, \delta) = \{f \in \Phi : |f(x_i) - f_0(x_i)| < \delta$ für $1 \leq i \leq M\}$.

Da Φ eine gleichgradig stetige Familie von Funktionen auf X ist, gibt es für $x \in X$ und $\varepsilon > 0$ eine offene Umgebung V_x von x mit $|f(z) - f(x)| < \varepsilon/3$ für $z \in V_x$ und $f \in \Phi$. Es sei $(V_{x_i})_{i \leq N}$ eine endliche Teilüberdeckung der kompakten Menge K. Es folgt für $z \in V_{x_i}$

$$\begin{aligned} |f(z) - f_0(z)| \leq & |f(z) - f(x_i)| + |f(x_i) - f_0(x_i)| + |f_0(x_i) - f_0(z)| \\ \leq & 2\varepsilon/3 + |f(x_i) - f_0(x_i)|. \end{aligned}$$

Für $F := \{x_1, \ldots, x_M\}$ gilt für $f \in N(f_0, F, \varepsilon/3)$ damit $|f(z) - f_0(z)| \leq \varepsilon \; \forall z \in K$ also $N(f, K, \varepsilon) \supseteq N(f, F, \varepsilon/3)$ für $F = \{x_1, \ldots, x_N\}$. Hieraus folgt, dass die Topologie der punktweisen Konvergenz auch feiner als die der kompakten Konvergenz ist.

Ist f im Abschluss von Φ und $x \in X$, $\varepsilon > 0$, so gibt es eine Umgebung U von x mit $|g(x) - g(y)| < \varepsilon/3$ für $y \in U$ und alle $g \in \Phi$. Ist f im Abschluss von Φ bez. der Topologie der punktweisen Konvergenz, so gibt es ein $g \in \Phi$ mit $|f(x) - g(x)| < \varepsilon/3$ und $|f(y) - g(y)| < \varepsilon/3$. Es folgt

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - g(x)| + |g(x) - g(y)| + |g(y) - f(y)| < \varepsilon$$

und damit die Stetigkeit von f. □

Für eine kompakte Teilmenge K von G bezeichnen wir mit

$$N(K, \delta) := \{\chi \in \widehat{G} : |\chi(z) - 1| < \delta \quad \forall z \in K\} \tag{1.3}$$

die 0-Umgebung $N(\chi_0, K, \delta)$, wenn χ_0 den trivialen Charakter $\chi_0(z) = 1$ bezeichnet. Für den Abschluss $\bar{N}(K, \delta)$ von $N(K, \delta)$ gilt

$$\bar{N}(K, \delta) := \{\chi \in \widehat{G} : \quad |\chi(z) - 1| \leq \delta \forall z \in K\}. \tag{1.4}$$

Man sieht unmittelbar, dass $\bar{N}(K, \delta)$ eine Teilmenge von $\widehat{G}$ ist, die in der Topologie der punktweisen Konvergenz auf $\widehat{G}$ abgeschlossen ist. Damit ist sie auch in der feineren k.o.-Topologie abgeschlossen, sie muss aber nicht gleich dem Abschluss von $N(K, \varepsilon)$ in der k.o.-Topologie sein.

Proposition 1.3.5. *Für eine kompakte 0-Umgebung K der lokalkompakten Abelschen Gruppe G und $\sqrt{2} > \delta > 0$ ist die Menge $\bar{N}(K, \delta)$ von Charakteren gleichgradig stetig.*

Beweis. Es genügt zu zeigen, dass $\bar{N}(K, \delta)$ eine in 0 gleichgradig stetige Familie von Funktionen ist, d.h. für $\varepsilon > 0$ müssen wir eine Umgebung U von 0 finden, für die gilt

$\bar{N}(K, \delta) \subseteq N(U, \varepsilon) = \{\chi : |\chi(x) - 1| < \varepsilon \; \forall x \in U\}$. Es gilt für $|\alpha| < \pi/4$ und $l \in \mathbb{N}$ aus der Summenformel für die geometrische Reihe:

$$\left| \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha} - 1}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha/l} - 1} \right| = |1 + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha/l} + \ldots + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha(l-1)/l}| > \frac{l}{\sqrt{2}}.$$

Wir wählen $l > \sqrt{2}\delta/\varepsilon$ und eine 0-Umgebung U nach Satz 1.1.1 so, dass $U + \ldots + U$ (l-mal) eine Teilmenge von K ist. Nimmt ein Charakter χ in $u \in U$ einen Wert $\chi(u) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha/l}$ mit $|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha/l} - 1| > \varepsilon$ an, so folgt aus obiger Abschätzung $|\chi(u + \ldots + u) - 1| = |\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha} - 1| > \delta$ und wegen $u + \ldots + u \in K$: $\chi \notin \bar{N}(K, \delta)$. □

Satz 1.3.6. *Für eine lokalkompakte Abelsche Gruppe G ist $\widehat{G}$ mit der k.o.-Topologie eine lokalkompakte Abelsche Gruppe. Bezüglich der k.o.-Topologie sind für $\varepsilon \leq \sqrt{2}$ die Umgebungen $1_{\hat{G}}$ von $N(K, \varepsilon)$ relativ kompakt.*

Beweis. Wir haben wegen Satz 1.3.1 nur noch zu zeigen, dass die k.o.-Topologie eine lokalkompakte Topologie induziert. Hierfür reicht es wegen Korollar 1.1.7 zu zeigen, dass $\bar{N}(K, \varepsilon)$ eine kompakte Umgebung der 0 in $\widehat{G}$ ist.

Wir bezeichnen mit G_d die Gruppe G versehen mit der diskreten Topologie. Die k.o.-Topologie ihrer Charaktergruppe $\widehat{G_d}$ ist die Topologie der punktweisen Konvergenz. Für eine kompakte 0-Umgebung K in G ist $\bar{N}(K, \varepsilon)$ für $\varepsilon \leq \sqrt{2}$ nach Proposition 1.3.5 eine Familie gleichgradig stetiger Funktionen auf G. Nach Satz 1.3.4 sind alle Charaktere in $\widehat{G_d}$ aus dem Abschluss von $\bar{N}(K, \varepsilon)$ stetig. Der Abschluss von $\bar{N}(K, \varepsilon)$ in $\widehat{G_d}$ ist also gleich dem Abschluss von $\bar{N}(K, \varepsilon)$ in $\widehat{G}$ bezüglich der Topologie der punktweisen Konvergenz. In $\widehat{G}$ ist $\bar{N}(K, \varepsilon)$ offensichtlich abgeschlossen, damit ist $\bar{N}(K, \varepsilon)$ eine abgeschlossene Teilmenge von $\widehat{G_d}$ bezüglich der Topologie der punktweisen Konvergenz. $\bar{N}(K, \varepsilon)$ ist damit als abgeschlossene Teilmenge der nach Satz 1.3.2 kompakten Menge $\widehat{G_d}$ kompakt bez. der Topologie der punktweisen Konvergenz. Auf $\bar{N}(K, \varepsilon)$ stimmt aber die Topologie der punktweisen Konvergenz mit der Topologie der gleichmäßigen Konvergenz überein. Somit ist $\bar{N}(K, \varepsilon)$ kompakt in $\widehat{G}$. □

Satz 1.3.7. *Für eine kompakte Abelsche Gruppe ist $\widehat{G}$ diskret.*

Beweis. Ist G kompakt, so ist die Menge $N(1 - \hat{G}, G, \sqrt{2})$ eine Umgebung von $\widehat{e}$ in der k.o.-Topologie. Diese Menge besteht aus Charakteren, die auf ganz G nur Werte mit positivem Realteil annehmen. Für $\frac{\pi}{2(n+1)} < \arg(\chi(x)) \leq \frac{\pi}{2n}$ folgt aber $\frac{\pi}{2} < \arg(\chi(x^{n+1})) \leq \frac{n+1}{n}\frac{\pi}{2}$. Also ist der triviale Charakter χ_0 der einzige, der auf ganz G positiven Realteil hat. □

Ziel unserer Bemühungen ist es zu zeigen, dass die kanonische Einbettung $\iota_G : G \mapsto \widehat{\widehat{G}}$, $x \mapsto \iota(x)$, $\iota(x)(\chi) = \chi(x)$ ein Isomorphismus ist (Satz 1.11.4). Schon jetzt können wir zeigen:

Satz 1.3.8. *Für eine topologische Abelsche Gruppe G, $x \in G$ ist die Abbildung $\iota_G(x) : \widehat{G} \to \mathbb{T}, \chi \mapsto \chi(x)$ ein stetiger Gruppenhomomorphismus. Ist G lokalkompakt, so ist die Abbildung $\iota_G : G \to \widehat{\widehat{G}}$, $x \mapsto \iota_G(x)$ stetig.*

Beweis. Wegen $\chi_1(x)\chi_2(x) = \chi_1\chi_2(x)$ gilt $\iota_G(x)(\chi_1)\iota_G(x)(\chi_2) = \iota_G(x)(\chi_1\chi_2)$. $\iota_G(x)$ ist also ein Homomorphismus. Da Punkte kompakt sind, ist für $x \in G$ und $\varepsilon > 0$ die

Menge $\{\chi \in \widehat{G} : |\chi(x) - 1| < \varepsilon\}$ eine Umgebung des trivialen Charakters von $\widehat{G}$. $\iota_G(x)$ ist also stetig bei 0 und mit Korollar 1.1.5 stetig auf $\widehat{G}$.

Die Mengen $N(K,\varepsilon)$, K kompakt, $\varepsilon > 0$, bilden eine Umgebungsbasis von $0 \in \widehat{G}$. Für $x \in K$ und $\chi \in N(K,\varepsilon)$ gilt dann $|\iota_G(x)(\chi) - 1| = |\chi(x) - 1| < \varepsilon$, also ist $x \mapsto \iota(x)$ stetig. □

1.4 Untergruppen lokalkompakter Gruppen

Eine Teilmenge A eines topologischen Raumes X heißt **lokal abgeschlossen** wenn es für alle $x \in A$ eine Umgebung V_x von x gibt, sodass $A \cap V_x$ bez. der Relativtopologie abgeschlossen in V_x ist.

Satz 1.4.1. *Äquivalent sind*

i) A ist lokal abgeschlossen.

ii) A ist als Durchschnitt einer offenen Teilmenge von X mit einer abgeschlossenen Teilmenge von X darstellbar.

iii) A ist bez. der Relativtopologie offen im Abschluss $\bar{A}$ von A .

Beweis. i)⇒ ii): Sei für $x \in A$ V_x eine Umgebung von x in der $A \cap V_x$ abgeschlossen ist, dann gibt es eine in X abgeschlosssene Menge C_x mit $A \cap C_x = A \cap V_x$. Sei $F_x := C_x \cup V_x^{\circ\complement}$ und $F := \cap_{x \in A} F_x$. Dann ist F eine abgeschlossene Obermenge von A. Die Menge $O := \cup_{x \in A} V_x^\circ$ ist eine offene Obermenge von A, also gilt $A \subseteq F \cap O$. Für $y \in O \setminus A$ gibt es $x \in A$ mit $y \in V_x^\circ \setminus A$ und damit $y \notin F_x$ und somit $x \notin F$. Also gilt $A = O \cap F$.

ii)⇒ i): Für $x \in A = O \cap F$, O offen, F abgeschlossen in X, ist $\forall x \in A$ O eine Umgebung in der A als Schnitt von O mit der abgeschlossenen Menge F abgeschlossen bez. der Relativtopologie von O ist.

ii)⇒iii): $A = O \cap F$ ist offen in F und damit in $\bar{A}$.

iii)⇒ii): Ist A offen in $\bar{A}$, so gibt es O offen in X mit $A = O \cap \bar{A}$. □

Lemma 1.4.2. *Eine lokalkompakte Teilmenge eines Hausdorffraumes ist lokal abgeschlossen. Lokal abgeschlossene Untergruppen einer topologischen Gruppe sind abgeschlossen.*

Beweis. Jedes x aus der lokalkompakten Teilmenge M des Hausdorffraumes X besitzt eine kompakte Umgebung K in M. Eine Umgebung von x in M ist der Schnitt von M mit einer Umgebungen von x in X. Also gibt es eine Umgebung V_x von x in X mit $K = V_x \cap M$, Da K als Teilmenge von M kompakt ist, ist K auch kompakt als Teilmenge von X oder als Teilmenge von V_x mit der Relativtopologie. Kompakte Mengen in Hausdorffräumen sind abgeschlossen, also ist K abgeschlossen in V_x und M somit lokal abgeschlossen.

Ist die Untergruppe H von G lokal abgeschlossen, so ist nach 1.4.1 H offen in $\bar{H}$. Als offene Untergruppe ist H aber nach Korollar 1.1.6 auch abgeschlossen in $\bar{H}$, woraus $H = \bar{H}$ folgt. □

Jede abgeschlossene Teilmenge eines lokalkompakten Raumes ist lokalkompakt. Eine Teilmenge eines lokalkompakten Hausdorffraumes kann aber lokalkompakt sein ohne abgeschlossen zu sein (z.B. $(0,1)$ als Teilmenge von $\mathbb{R}$). Für lokalkompakte Gruppen gilt jedoch:

Korollar 1.4.3. *Eine Untergruppe H einer lokalkompakten Gruppe G ist genau dann lokalkompakt, wenn sie abgeschlossen ist.*

Beweis. Da der Schnitt einer kompakten Umgebung von $x \in M$ mit einer abgeschlossenen Teilmenge M eine kompakte Umgebung von x in G bez. der Relativtopologie auf M kompakt in M ist, sind abgeschlossene Teilmengen lokalkompakter Räume lokalkompakt.

Ist H eine lokalkompakte Untergruppe der lokalkompakten Gruppe G, so ist sie nach Lemma 1.4.2 lokal abgeschlossen und damit abgeschlossen. □

Korollar 1.4.4. *Ist ein Morphismus $\varphi : H \to G$ offen als Abbildung $H \to \varphi(H)$ ($\varphi(H)$ mit der Spurtopologie), H und G in LCA, so ist $\varphi(H)$ abgeschlossen in G.*

Beweis. Das stetige Bild einer kompakten Umgebung eines Punktes $h \in H$ unter φ ist eine kompakte Umgebung von $\varphi(h)$ in $\varphi(H)$. $\varphi(H)$ ist damit eine lokalkompakte Untergruppe von G und so nach Korollar 1.4.3 abgeschlossen in G. □

1.5 Charaktergruppen der elementaren Gruppen

Eine Gruppe heißt **zyklisch** , wenn sie von einem Element erzeugt wird. Jede zyklische Gruppe ist das Bild von $\mathbb{Z}$ unter einem Homomorphismus. Nach dem Homomorphiesatz ist sie damit algebraisch isomorph zu $\mathbb{Z}/N$, wobei N eine Untergruppe von $\mathbb{Z}$ ist. Da $n\mathbb{Z}$ die einzigen nichttrivialen Untergruppen von $\mathbb{Z}$ sind, ist eine zyklische Gruppe algebraisch isomorph zu $\mathbb{Z}$ oder zu $Z_n = \mathbb{Z} \mod n$.

Satz 1.5.1. *Eine Abelsche Gruppe A mit n Erzeugern kann als direkte Summe von höchstens n zyklischen Gruppen dargestellt werden, d,h,*

$$A \cong \mathbb{Z}^k \oplus \oplus_{i=1}^l Z_i,\ k+l \leq n.$$

Beweis. Wir beweisen durch Induktion nach der Zahl der Erzeuger.

Hat A eine Darstellung mit n Erzeugern $\{a_1, \ldots, a_n\}$ und keine Relationen, so gilt $A \cong \mathbb{Z}^n$. Anderenfalls wählen wir ein Erzeugendensystem in der in einer Relation R_1 $k_1a_1 + \ldots + k_na_n = 0$ einer der Koeffizienten den betragsmäßig kleinstmöglichen nichtverschwindenden Wert annimmt. Sei dieser Koeffizient o.B.d.A. k_1. Wäre einer der Koeffizienten k_l nicht durch k_1 teilbar, d.h. $k_l = mk_1 + r$ mit $0 \neq |r| < |k_1|$

so bekämen wir in dem Erzeugendensystem $a_1', a_2, \ldots, a_n$, $a_1' = a_1 + ma_l$ aus R_1 die Relation $\sum_{i=1}^n k_i' a_i = 0$ mit $k_l' = k_l - mk_1 = r$, $k_i' = k_i$ für $i \neq l$. Da der Koeffizient k_l' betragsmäßig kleiner als $|k_1|$ ist, ein Widerspruch zu unserer Wahl des Erzeugendensystems und R_1.

In jeder anderen Relation $j_1a_1 + \ldots + j_na_n = 0$ ist j_1 ein Vielfaches von k_1, da wir anderenfalls in der Relation $(j_1 - ck_1)a_1 + \ldots + (j_n - ck_n)a_n$ bei geeigneter Wahl von $c \in \mathbb{Z}$ einen nichtverschwindenden Koeffizienten $j_1 - ck_1$ von a_1 bekämen, der betragsmäßig kleiner als k_1 ist. Wir dürfen deshalb (gegebenenfalls nach Übergang von R zu $R - mR_1$) annehmen, dass in allen anderen Relationen R die Koeffizienten von a_1 verschwinden.

Wählen wir das Erzeugendensystem $a_1', a_2, \ldots, a_n$ mit $a_1' := a_1 + \sum_{i=2}^n k_i/k_1 a_i$, so erhalten wir für R_1 die Relation $k_1a_1' = 0$ und in den anderen Relationen verschwinden die Koeffizienten von a_1' weiterhin. Nach Induktionsvoraussetzung erzeugen $a_2, \ldots, a_n$ eine Gruppe, die isomorph zur Summe zyklischer Gruppen ist. Die Relation $k_1a_1' = 0$ sagt, dass die von a_1' erzeugte Gruppe isomorph zu Z_{k_1} ist. $\square$

Satz 1.5.2. *Es gilt*

$$\widehat{\mathbb{Z}} \cong \mathbb{T}, \quad \widehat{Z_n} \cong Z_n, \quad \widehat{\mathbb{T}} \cong \mathbb{Z}, \quad \widehat{R} \cong \mathbb{R}.$$

Ist A eine dieser Gruppen, so gilt $\iota_A(A) = \widehat{\widehat{A}}$.

Beweis. Ein Homomorphismus χ einer zyklischen Gruppe A ist durch seinen Wert auf einem erzeugenden Element a bestimmt. Da Charaktere Werte in $\mathbb{T}$ annehmen kommt für $\chi(a)$ zunächst jedes $z \in \mathbb{T}$ in Frage. Tatsächlich ist für $A \cong \mathbb{Z}$ für jedes $z \in \mathbb{T}$ ein Charakter durch $\chi(na) = z^n$ bestimmt und die Charaktergruppe ist vermöge

$$t \mapsto \chi_t, \; \chi_t(na) = \exp(\mathrm{i}nt) \tag{1.5}$$

isomorph zu $\mathbb{T}$.

Für $A \cong Z_n$ muss $a = \chi(0) = \chi(na) = z^n$ gelten, z muss also eine n-te Einheitswurzel $z_k = \exp(2k\pi i/n)$, $0 \leq k < n$ sein. Die Abbildungen

$$\chi_k : \; Z_n \to \mathbb{T}, \; l(na) \to \exp(2\pi \mathrm{i} kl/n) \tag{1.6}$$

sind wie man unmittelbar verifiziert tatsächlich Homomorphismen und die Homomorphismengruppe ist isomorph zu Z_n.

Als stetige Funktion muss ein Charakter χ auf $\mathbb{R}$ für eine geeignete 0-Umgebung V Werte aus der Menge $\{z \in \mathbb{T} : |z - 1| < 1/4\}$ annehmen. Für $x \in V$ mit $\chi(x) = z \in \mathbb{T}$ gibt es ein eindeutiges $\lambda \geq 0$ mit $\chi([0,\lambda)) \subset V$ und $z = \exp(2\pi \mathrm{i}\lambda x)$. Ist $\chi(x/2)$ eine der beiden Quadratwurzeln von z. Aus $\chi(x/2)^2 = \chi(x)$ folgt $\chi(x/2) = \pm\exp(2\pi i\lambda 2^{-1})$ und wegen $-\exp(2\pi i 2^{-l-1}\lambda x) \notin V$ folgt $\chi(x/2) = \exp(2\pi i\lambda 2^{-1})$ sowie induktiv $\chi(x2^{-k}) = \exp(2\pi i\lambda 2^{-k})$ und damit $\chi(xl2^{-k}) = \exp(2\pi \mathrm{i}\lambda l 2^{-k})$ und wegen der Stetigkeit von χ: $\chi(\alpha x) = \exp(2\pi \mathrm{i}\lambda\alpha)$. Für $t := 2\pi \mathrm{i}\lambda/x$ und $\alpha x =: y$ schreibt sich diese Beziehung als

$$\chi_t(y) = \exp \mathrm{i}ty. \tag{1.7}$$

Charaktere χ auf $\mathbb{T}$ induzieren vermöge der Abbildung $\chi \circ q$ mit der natürlichen Abbildung $q : \mathbb{R} \to \mathbb{T}, t \mapsto \exp(2\pi i t)$ einen Charakter auf $\mathbb{R}$. Es folgt $\chi \circ q(x) = \chi \circ q(x+n) = \chi \circ q(x)\chi(n)$, was genau für die Charaktere χ_t aus (1.7) mit $t \in \mathbb{Z}$ der Fall ist. Die Charaktere auf $\mathbb{T}$ sind also genau die Abbildungen

$$\chi_n(t) = \exp(2\pi i n t). \tag{1.8}$$

Aus (1.5), (1.8), (1.6), (1.7) folgt $\iota_A(A) = \widehat{\widehat{A}}$ für diese Gruppen. □

Satz 1.5.3. *Sind A_i lokalkompakte Abelsche Gruppen mit dualen Gruppen $\widehat{A_i}$, so ist $(\oplus_{i=1}^n A_i)^\wedge$ kanonisch isomorph zu $\oplus_{i=1}^n \widehat{A_i}$.*

Beweis. Für $1 \le i \le n$ kann A_i vermöge $a_i \mapsto (0, \dots, a_i, \dots 0)$ in kanonischer Weise als Untergruppe von $A := \oplus_{i=1}^n A_i$ aufgefasst werden. Durch Restriktion auf diese Untergruppe definiert jeder Charakter χ auf A Charaktere χ_i auf A_i mit

$$\chi(a_1, \dots, a_n) = \chi\left(\sum_{i=1}^n a_i\right) = \prod_{i=1}^n \chi(a_i) = \prod_{i=1}^n \chi_i(a_i).$$

Ist umgekehrt χ_i eine Familie von Charakteren auf den Untergruppen A_i, so definiert diese Gleichung einen Charakter auf A. Diese Identifikation ist wie man unmittelbar sieht verträglich mit den Gruppenoperationen der Charaktergruppe und ein Homöomorphismus. □

Korollar 1.5.4. *Für eine endlich erzeugte diskrete Abelsche Gruppe A gilt $\iota_A(A) = \widehat{\widehat{A}}$.*

Beweis. Eine endlich erzeugte diskrete Abelsche Gruppe A ist nach Satz 1.5.1 isomorph zu $\mathbb{Z}^n \oplus \oplus_{i=1}^k Z_{n_i}$. Mit Satz 1.5.3 und Satz 1.5.2 folgt $\widehat{A} \cong \mathbb{T}^n \oplus \oplus_{i=1}^k Z_n$ und durch nochmaliges Anwenden dieser Sätze $\widehat{\widehat{A}} \cong \mathbb{Z}^n \oplus \oplus_{i=1}^k Z_{n_i}$. □

1.6 Induktive und projektive Limiten

Wir betrachten eine gerichtete Menge $(I, \preceq)$ und eine Familie von Objekten $(A_i)_{i\in I}$, sowie Morphismen $e_{i,j} : A_i \to A_j$ für $i \preceq j$, die den Verträglichkeitsbedingungen $e_{j,k} \circ e_{i,j} = e_{i,k}$, $e_{i,i} = \mathrm{Id}_{A_i}$ genügen. Die betrachteten Morphismen sind je nach den Gegebenheiten Homomorphismen oder stetige Homomorphismen zwischen einer Klasse von Objekten. Hat $(A_i)_{i\in I}$ ein maximales Element A_m, so ist jede Familie von Morphismen $f_i : A_i \to B$, die den Verträglichkeitsbedingungen $f_i = f_j \circ e_{i,j}$ genügt wegen $f_i = f_m \circ e_{i,m}$ bereits durch den Morphismus f_m eindeutig bestimmt. Im Allgemeinen gibt es in der Familie $(A_i)_{i\in I}$ kein größtes Element. Häufig ist es jedoch möglich ein "kleinstes maximales Element" $\varinjlim A_i$ und Morphismen $e_k : A_k \to \varinjlim A_i$, die $e_k = e_l \circ e_{k,l}$ für $k \preceq l$ genügen, zu definieren, das durch die folgende **universelle Eigenschaft** ausgezeichnet ist: Zu jeder Familie von Morphismen

$f_i : A_i \to B$, die den Verträglichkeitsbedingungen $f_i = f_j \circ e_{i,j}$ für $i \preceq j$ genügt, gibt es einen eindeutig bestimmten Morphismus $f : \varinjlim A_i \to B$, der $f_i = f \circ e_i$ erfüllt.

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r, dotted] & A_i \arrow[r, dashed, "e_{i,j}"] \arrow[rr, bend left, "e_{i,k}"] \arrow[rrrr, bend left=40, "e_i"] \arrow[drrrr, "f_i"'] & A_j \arrow[r, dashed, "e_{j,k}"] \arrow[drrr, "f_j"'] & A_k \arrow[r, dotted] \arrow[rr, bend left, "e_k"] \arrow[drr, "f_k"'] & \cdots & \varinjlim A_i \arrow[d, dashed, "f"] \\
& & & & & B
\end{tikzcd} \tag{1.9}$$

Falls ein solches Element $\varinjlim A_i$ existiert wird es **induktiver** oder **direkter Limes** genannt. Man sieht unmittelbar, dass der induktive Limes, wenn er existiert, bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt ist.

Beispiel 1.6.1. *Sei I eine Indexmenge und V_i für $i \in I$ ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Für die Menge $\mathcal{E}$ aller endlichen Teilmengen E von I bezeichnen wir das direkte Produkt $\prod_{i \in E} V_i$ mit $\bigoplus_{i \in E} V_i$. Für $E \subseteq F \in \mathcal{E}$ gibt es kanonische Morphismen also lineare Abbildungen*

$$e_{E,F} : \bigoplus_{i \in E} V_i \to \bigoplus_{i \in F} V_i,\ \mathrm{pr}_i(e_{E,F}(v)) = \begin{cases} \mathrm{pr}_i(v) & i \in E \\ 0 & i \in F \setminus E. \end{cases}$$

Diese Abbildungen erfüllen die Verträglichkeitsbeingung $e_{F,G} \circ e_{E,F} = e_{E,G}$ für $E \subseteq F \subseteq G \in \mathcal{E}$. Mit $\bigoplus_{i \in I} V_i$ bezeichnen wir den linearen Unterraum von $\prod_{i \in I} V_i$ der aus allen Elementen $v \in \prod_{i \in I} V_i$ besteht für die $\mathrm{pr}_i(v) = 0$ für fast alle $i \in I$ gilt. Wir behaupten $\bigoplus_{i \in I} V_i$ ist der induktive Limes der Familie $(\bigoplus_{i \in E} V_i)_{E \in \mathcal{E}}$. Dafür ist zu zeigen, dass es für lineare Abbildungen $f_E : \bigoplus_{i \in E} V_i \to W$, die der Verträglichkeitsbedingung $f_F \circ e_{E,F} = f_E$ genügen eine eindeutige lineare Abbildung $f : \bigoplus_{i \in E} V_i \to W$ gibt, sodass $f_E = f \circ e_E$ gilt. Für $v \in \bigoplus_{i \in I} V_i$ gibt es $E \in \mathcal{E}$ mit $v \in e_E(\bigoplus_{i \in E} V_i)$ also kann $f \circ e_E(v)$ nur $f_E(v)$ sein. Gilt $E \subset F \in \mathcal{E}$ und $v \in \bigoplus_{i \in E} V_i$ so gilt für jede Familie linearer Abbildungen $(f_E)_{E \in \mathcal{E}}$ die den Verträglichkeitsbedingungen genügen $f_F \circ e_{E,F} = f_E$, womit f wohldefiniert ist.

Fassen wir $\bigoplus_{i \in E} V_i$ als jenen Unterraum von $\bigoplus_{i \in I} V_i$ für den $\mathrm{pr}_i v = 0$ für $i \notin E$ gilt, so ist $\bigoplus_{i \in I} V_i$ also genau der lineare Raum auf den lineare Abbildungen von $\bigoplus_{i \in E} V_i$ in einen linearen Raum W, die den Verträglichkeitsbedingungen genügen, eindeutig fortgesetzt werden können.

In analoger Weise definiert man den **inversen** oder **projektiven Limes**, den man erhält, wenn die Morphismen d_{i_j} für $i \preceq j$ von A_j nach A_i abbilden:

$$\begin{tikzcd}
\cdots & A_i \arrow[l, dotted] & A_j \arrow[l, dashed, "d_{i,j}"'] & A_k \arrow[l, dashed, "d_{j,k}"'] \arrow[ll, bend right, "d_{i,k}"'] & \cdots \arrow[l, dotted] & \varprojlim A_i \arrow[ll, bend right, "d_k"'] \\
& & & & & A \arrow[u, dashed, "f"] \arrow[ullll, "f_i"] \arrow[ulll, "f_j"] \arrow[ull, "f_k"]
\end{tikzcd}$$

Wir suchen dann ein Objekt $\varprojlim A_i$ für das es Morphismen d_i gibt, die für alle $i \preceq j$ $d_i = d_{i,j} \circ d_j$ erfüllen und für jede Familie f_i von Morphismen $A \to A_i$ ein eindutiger Morphismus $f : A \to \varprojlim A_i$ existiert, für den obiges Diagramm kommutiert, als den projektiven Limes. Falls er existiert ist er wiederum bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt.

Beispiel 1.6.2. *Wir betrachten den Ring der a-adischen ganzen Zahlen: Für $a \in \mathbb{N}$ können die Restklassen $\mathbb{Z}/a^n$ modulo a^n für $n \geq m$ durch $d_{m,n} : z + a^n\mathbb{Z} \mapsto z + a^m\mathbb{Z}$ in kanonischer Weise auf die Restklassen $\mathbb{Z}/a^m$ von $\mathbb{Z}$ modulo a^m abgebildet werden. Diese Abbildungen sind Ringhomomorphismen der endlichen Ringe $\mathbb{Z}/a^n$. Wie für die direkte Summe sieht man, dass die Teilmenge des Produktraumes $\prod_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{Z}/a^n$, die $\mathrm{pr}_n \mathbf{x} = \mathrm{pr}_m \mathbf{x}$ für $m \leq n$ erfüllt, mit der koordinatenweisen Addition modulo a^n als Gruppenoperation als projektiver Limes aufgefasst werden kann, da für jede Familie von Morphismen f_i mit $f_m = d_{m,n} f_n$ für $m \leq n$ eine Abbildung f durch $\mathrm{pr}_n \circ f = f_n$ wohldefiniert ist. Wir bezeichnen diesen Ring Z_a als den Ring der **a-adischen ganzen Zahlen**.*

Betrachten wir aber als Morphismen stetige Ringhomomorphismen, so ist Z_a nur dann der projektive Limes der diskreten Ringe $\mathbb{Z}/a^n\mathbb{Z}$, wenn die Topologie auf Z_a so fein ist, dass alle Abbildungen d_n Morphismen sind, was genau dann der Fall ist wenn die Topologie auf Z_a feiner als die Spurtopologie der Produkttopologie ist und andererseits für jede Famile f_n stetiger Homomorphismen einer topologischen Gruppe A nach A_i mit $f_m = d_{m,n} \circ f_n$ für $m \leq n$, die Abbildung f stetig ist. Als Abbildung in einen Produktraum ist f aber genau dann stetig, wenn alle f_i stetig sind, was nach Voraussetzung der Fall ist. Die Topologie muss also um die universelle Eigenschaft des projektiven Limes nicht zu verletzen auch gröber als die Spurtopologie der Produkttopologie sein. Unter der Spurtopologie des Produktraumes ist $\prod_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{Z}_{a^n}$ als abgeschlossene Teilmenge des kompakten Produktraumes $\prod_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{Z}_{a^n}$ eine kompakter Ring. Er ist überabzählbar und total unzusammenhängend. Da für $m \in \mathbb{N}$ die formalen Potenzreihen $a^m \mathbb{Z}_n = \sum_{k=m}^{\infty} a_k a^k$ ein Unterring von Z_a ist, sieht man, dass jede 0-Umgebung in Z_a einen nichttrivialen offenen Unterring enthält, der isomorph zu Z_a ist, womit Z_a total unzusammenhängend ist.

Um die Charaktergruppe von Z_a zu beschreiben stellen wir die Elemente $\mathbf{a}$ von Z_a als formale Potenzreihen $\sum_{k=0}^{\infty} a_k p^k$ mit Koeffizienten $a_k \in Z_p$ dar, für die die Morphismen d_n dann die Abbildungen $\mathbf{a} \to \sum_{k=0}^{n} a_k a^k$ sind. Ein Homomorphismus χ von Z_a nach $\mathbb{T}$ ist wegen Kor. 1.1.5 genau dann stetig, wenn es für jede Umgebung V von 1 eine Umgebung U von $0 \in \mathbb{Z}_p$ gibt, die unter χ in V abgebildet wird. Wir dürfen annehmen, dass V so klein ist, dass es keine nichttriviale Untergruppe von $\mathbb{T}$ enthält und U von der Form $U = \{\mathbf{a} : a_i = 0 \forall i < N\}$ für ein $N \in \mathbb{N}$ ist. Die Menge $U = \{\sum_{i \geq N} a_i a^i, a_i \in Z_a\}$ ist aber eine Untergruppe von Z_a, deren Bild unter dem Homomorphismus χ dann eine Untergruppe von $\mathbb{T}$ ist, die ganz in V liegt und damit trivial ist. D.h. χ hängt nur von den Koeffizienten $a_0, \dots, a_{N-1}$ ab, und ist somit ein Homomorphismus auf $\mathbb{Z}/a^N$. Nach Satz 1.5.2 entspricht χ somit ein $\mathbf{b} = \sum_{1 \leq l \leq N} b_l a^{-l}$ mit $\chi(\mathbf{a}) = \exp\left(2\pi \mathrm{i} \sum_{k=0}^{N-1} a_k a^k \sum_{l=1}^{N} b_l a^{-l}\right)$ vgl. (1.6). $\widehat{Z}_a$ kann so *als* $\varinjlim \frac{1}{a^n}\mathbb{Z}/a^n$ *dargestellt werden. Als duale Gruppe der kompakten Gruppe* Z_a *ist* $\widehat{Z}_a$ *nach Satz 1.3.7 diskret.*

Ist a eine Primzahl p, so ist $\mathbb{Z}/p$ *ist ein Körper, für* $n > 1$ *ist aber die Gleichung* $ax = b/p^n$ *in* $\mathbb{Z}/p^n$ *genau für jene* $a \in \mathbb{Z}_p$ *eindeutig lösbar, die nicht durch p geteilt werden, d.h. es sind genau jene Elemente von* $\mathbb{Z}_p$ *invertierbar, die von der Form* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k p^k$ *mit* $a_0 \neq 0$ *sind.* $\mathbb{Z}_p$ *ist aber ein nullteilerfreier Ring, damit könenn wir den Quotientenkörper von* $\mathbb{Z}_p$ *bilden, der dann als der Körper* $\mathbb{Q}_p$ *der formalen Potenzreiehen die Gestalt* $\sum_{k=-n}^{\infty} a_k p^k$ *dargestellt werden kann, bzw.* $\mathbb{Q}_p = \varinjlim \frac{1}{p^n}\mathbb{Z}_p$*. Dieser wird* ***Körper der p-adischen Zahlen*** *genannt.* $\mathbb{Q}_p$ *ist* σ*-kompakt (d.h. abzählbare Vereinigung kompakter Mengen) aber nicht kompakt.*

Wir werden im Folgenden induktive und projektive Limiten nicht verwenden um aus gegebenen Gruppen neue zu konstruieren, sondern wir gehen aus von Gruppen, die wir als induktive beziehungsweise projektive Limiten einfacherer Gruppen dazustellen versuchen um so die dualen Gruppen zu bestimmen (Proposition 1.10.1, 1.10.2).

1.7 Untergruppen, Faktorgruppen, Morphismen

Stetige Homomorphismen zwischen lokalkompakten Abelschen Gruppen bezeichnen wir als **Morphismen**. Ist für einen bijektiven Morphismus auch seine Inverse stetig, so ist er ein **Isomorphismus**, also ein topologischer Isomorphismus der lokalkompakten Abelschen Gruppen. Die Klasse der lokalkompakten Abelschen Gruppen bezeichnen wir mit LCA.

Für einen Morphismus $\varphi : A \to B$, $A, B \in$ LCA wird die **Adjungierte** von φ $\widehat{\varphi} : \widehat{B} \to \widehat{A}$ durch $\widehat{\varphi}(\widehat{b})(a) = \widehat{b}(\varphi(a))$ definiert ($a \in A$, $\widehat{b} \in \widehat{B}$). Wegen $\widehat{\varphi}(\widehat{b}) = \widehat{b} \circ \varphi$ ist $\widehat{\varphi}(\widehat{b})$ stetig auf A. Man sieht unmittelbar, dass $\widehat{\varphi}(\widehat{b})$ auch ein Homomorphismus auf A ist. $\widehat{\varphi}(\widehat{b})$ ist also für $\widehat{b} \in \widehat{B}$ ein Charakter auf A. Man beachte aber dass das Bild einer lokalkompakte Gruppe unter einem Morphismus nicht lokalkompakt zu sein braucht!

Ist A lokalkompakt Abelsch, so wird durch $\iota_A(a)(\widehat{a}) := \widehat{a}(a)$ ein Morphismus $A \to \widehat{\widehat{A}}$ definiert. Unser Ziel ist es zu zeigen, dass ι_A ein Isomorphismus ist (Satz 1.11.4).

Einfach zu sehen ist

Lemma 1.7.1. *Für lokalkompakte Abelsche Gruppen* A, B, C *gilt:*

i) Ist φ *ein Morphismus von A nach B so ist* $\widehat{\varphi}$ *ein Morphismus von* $\widehat{B}$ *nach* $\widehat{A}$*.*

ii) Ist φ *ein Morphismus von A nach B und* ψ *ein Morphismus von B nach C, so ist* $\psi \circ \varphi$ *ein Morphismus von A nach C mit* $\widehat{\psi \circ \varphi} = \widehat{\varphi} \circ \widehat{\psi}$*.*

iii) $\widehat{\mathrm{Id}_A} = \mathrm{Id}_{\widehat{A}}$*.*

iv) *Für einen Isomorphismus $i: A \to B$ ist $\widehat{i}$ ein Isomorphismus von $\widehat{B}$ auf $\widehat{A}$ mit $\widehat{i^{-1}} = \widehat{i}^{-1}$.*

v) *Ist der Morphismus $\varphi: A \to B$ surjektiv, so ist $\widehat{\varphi}$ injektiv.*

vi) $\widehat{\widehat{\varphi}}(\iota_A(a))(\hat{b}) = \iota_B(\varphi(a))$

Beweis. i) $\widehat{\varphi}$ ist wegen

$$\widehat{\varphi}(\chi_1\chi_2)(a) = (\chi_1\chi_2)(\varphi(a)) = \chi_1(\varphi(a))\chi_2(\varphi(a)) = (\widehat{\varphi}(\chi_1)\widehat{\varphi}(\chi_2))(a)$$

für $\chi_i \in \widehat{B}$, $a \in A$ ein Homomorphismus von $\widehat{B}$ nach $\widehat{A}$. Nach Korollar 1.1.5 genügt es die Stetigkeit von $\widehat{\varphi}$ in 0 zu zeigen: Die Mengen $N(C,\delta)$ bilden für C kompakt in A, $\delta > 0$ eine Umgebungsbasis der 0 in $\widehat{A}$. Es gilt

$$\begin{aligned}
\widehat{\varphi}^{-1}(N(C,\delta)) =& \{\chi \in \widehat{B} : |\widehat{\varphi}(\chi)(c) - 1| < \delta \, \forall c \in C\} \\
=& \{\chi \in \widehat{B} : |(\chi)(\varphi(c)) - 1| < \delta \, \forall c \in C\} \\
=& \{\chi \in \widehat{B} : |\chi(x) - 1| < \delta \, \forall x \in \varphi(C)\} = N(\varphi(C),\delta).
\end{aligned}$$

Da φ stetig und C kompakt ist, ist $\varphi(C)$ kompakt in B und $N(\varphi(C),\delta)$ ist eine Umgebung der 0 in $\widehat{B}$ ist folgt die Stetigkeidt von $\widehat{\varphi}$ in 0.

ii) Für $a \in A$, $\widehat{c} \in \widehat{C}$ gilt

$$\widehat{\psi \circ \varphi}(\widehat{c})(a) = \widehat{c}(\psi \circ \varphi(a)) = \widehat{\psi}(\widehat{c})(\varphi(a)) = \widehat{\varphi} \circ \widehat{\psi}(\widehat{c})(a).$$

iii) Für $a \in A$, $\widehat{a} \in \widehat{A}$ gilt $\mathrm{Id}_{\widehat{A}}(\widehat{a})(a) = \widehat{a}(a) = \widehat{a}(\mathrm{Id}_A(a)) = \widehat{\mathrm{Id}_A}(\widehat{a})(a)$.

iv) Es folgt mit den vorangegeangenen Punkten $\widehat{\mathrm{Id}_B} = \widehat{i \circ i^{-1}} = \widehat{i^{-1}} \circ \widehat{i} = \mathrm{Id}_{\widehat{B}}$ und $\widehat{\mathrm{Id}A} = \widehat{i^{-1} \circ i} = \widehat{i} \circ \widehat{i^{-1}} = \mathrm{Id}_{\widehat{A}}$ und damit $\widehat{i^{-1}} = \widehat{i}^{-1}$.

v) $\widehat{\varphi}(\widehat{b})(a) = 0 \, \forall a \in A \Rightarrow \widehat{b}(\varphi(a)) \, \forall a \in A \Rightarrow \widehat{b}(b) = 0 \, \forall b \in B \Rightarrow \widehat{b} = 0.$

vi) Es gilt für $a \in A, \widehat{b} \in \widehat{B}$:

$$\iota_B(\varphi(a))(\widehat{b}) = \widehat{b}(\varphi(a)) = \widehat{\varphi}(\widehat{b})(a) = \iota_A(a)(\widehat{\varphi}(\widehat{b})) = \widehat{\widehat{\varphi}}(\iota_A(a))(\widehat{b})$$

woraus die Behauptung folgt. □

Lemma 1.7.2. *Für eine abgeschlossene Untergruppe H einer (lokalkompakten) Abelschen Gruppe G ist G/H mit der Quotiententopologie eine (lokalkompakte) Gruppe.*

Beweis. Für eine Nullumgebung O gibt es wegen der Stetigkeit der Multiplikation in G Nullumgebungen O_1, O_2 mit $O_1 + O_2 \subseteq O$. Eine Umgebungsbasis von $x_1 + x_2 + H$ in G/H wird durch $x_1 + x_2 + O + H$ gegeben, wobei O Element einer 0-Umgebungsbasis in G ist. Es folgt $(x_1 + O_1 + H) + (x_2 + O_2 + H) \subseteq x_1 + x_2 + O + H$. Da aber für O_i offen in G auch $x_i + O_i$ offen in G und $x + O_i + H$ offen in G/H (Quotientenabbildungen sind offen!) sind folgt die Stetigkeit der Multiplikation in G/H.

Analog zeigt man die Stetigkeit der Inversion in G/H.

Ist G lokalkompakt, so hat jedes Element $x \in G$ eine kompakte Umgebung. Das Bild unter der offenen stetigen Quotientenabbildung dieser Umgebung ist eine kompakte Umgebung von $x + H$ in G/H, womit G/H lokalkompakt ist. □

Das folgende Lemma gilt allgemeiner (vgl. Satz 1.11.5). Hier können wir zeigen:

Lemma 1.7.3. *Auf einer lokalkompakten Abelschen Gruppe A hat jeder auf einer offenen Untergruppe U definierte Charakter χ_0 eine Fortsetzung zu einem Charakter auf A.*

Beweis. Wir betrachten das System $\mathcal{F}$ aller Fortsetungen (U_i, χ_i) von χ_0 auf offene Untergruppen $U_i \supseteq U$ von A. Auf $\mathcal{F}$ wird durch $(U_i, \chi_i) \preceq (U_j, \chi_j)$ für $U_i \subseteq U_j$ und $\chi_j|_{U_i} = \chi_i$ eine Halbordnung definiert. Für eine totalgeordnete Teilmenge $\{(U_i, \chi_i) : i \in I\}$ von $\mathcal{F}$ ist auf der offenen Untergruppe $\cup_{i \in I} U_i$ durch $\chi_I(u) := \chi_i(u)$ für $u \in U_i$ ein Charakter χ_I wohldefiniert. (U_I, χ_I) ist dann eine obere Schranke der totalgeordneten Teilmenge $\{(U_i, \chi_i) : \mathrm{i} \in I\}$. Nach dem Lemma von Zorn gibt es in $\mathcal{F}$ ein maximales Element (U_m, χ_m).

Ist U_m eine echte Untergruppe von A, so gibt es $x \in A \setminus U_m$. Hat die von x erzeugte Untergruppe $[x]$ trivialen Durchschnitt $\{0\}$ mit U_m, so wird durch $\tilde{\chi}(u + lx) := \chi_m(u)$ eine Erweiterung von χ_m auf die von U_m und x erzeugte Untergruppe definiert. Diese ist als Vereinigung der offenen Mengen $lx + U_m$ offen und $\tilde{\chi}$ ist stetig, da U_m offen ist und χ auf U stetig ist. Gilt $x, 2x, \ldots, (k-1)x \notin U_m$ aber $kx \in U_m$, so wird durch $\tilde{\chi}(u + lx) := \chi_m(u) + lz$ für eine k-te Einheitswurzel z von $\chi(kx)$ eine Erweiterung von (U_m, χ_m) auf die von U_m und x erzeugte offene Gruppe definiert. In beiden Fällen steht die Existenz einer Erweiterung im Widerspruch zur Maximalität von (U_m, χ_m). Als Funktion die auf allen offenen Nebenklassen $mx + U_m$ stetig ist, ist $\tilde{\chi}$ stetig auf der von U_m und x erzeugten Untergruppe. Also gilt $U_m = A$ und χ_m ist eine Erweiterung von χ_0 auf A. □

Korollar 1.7.4. *Für eine offene Untergruppe U der lokalkompakten Abelschen Gruppe G mit Einbettungsabbildung ι ist $\widehat{\iota} : \widehat{G} \to \widehat{U}$ surjektiv.*

Beweis. Ein Charakter χ_0 auf U kann zu einem Charakter χ auf G fortgesetzt werden. Dann gilt $\chi_0(u) = \chi(\iota(u)) = \widehat{\iota}(\chi)(u)$. Also ist $\widehat{\iota}$ surjektiv. □

Lemma 1.7.5. *Seien $G, H \in$ LCA und φ ein Morphismus $H \to G$, der als Abbildung $H \to \varphi(H)$ offen ist ($\varphi(H)$ mit der Relativtopolgie als Teilmenge von G). Dann ist für jede kompakte Teilmenge K von G die Menge $K \cap \varphi(H)$ das Bild einer kompakten Teilmenge C von H unter φ. Ist K eine 0-Umgebung in G, so kann C als 0-Umgebung in H gewählt werden.*

Beweis. $\varphi(H)$ ist nach Korollar 1.4.4 abgeschlossen in G. Es folgt, dass $K \cap \varphi(H)$ kompakt in $\varphi(H)$ ist. Für relativ kompakte offene Teilmengen V_x von H ist das stetige Bild unter der offenen Abbildung φ offen und relativ kompakt. Ist $(V_i)_{i \in I}$ eine Überdeckung von H durch relativ kompakte Mengen, dann gibt es eine endliche Teilmenge F von I mit $\cup_{i \in F} \varphi(V_i) \supseteq K \cap \varphi(H)$ und die Menge $C := \cup_{i \in F} \bar{V}_i \cap \varphi^{-1}(K)$ ist kompakt mit $\varphi(C) = K$.

Ist K eine 0-Umgebung in G, so gibt es eine relativ kompakte 0-Umgebung V_0 in H mit Bild in K. Dann ist die Menge $C := \varphi^{-1}(K) \cap (\cup_{x \in F} \bar{V}_x) \cup V_0)$ eine kompakte 0-Umgebung in H mit Bild $\varphi(C) = K$. $\square$

Für eine Teilmenge A einer lokalkompakten Abelschen Gruppe G bezeichnet der **Annihilator** $A^\perp$ von A die Menge aller Charaktere von G, deren Einschränkung auf A gleich 1 ist.

Proposition 1.7.6. *Für $G \in$ LCA und $H \subseteq G$ ist $H^\perp$ eine abgeschlossene Untergruppe von $\widehat{G}$.*

Ist H eine abgeschlossene Untergruppe von G, so bildet $\widehat{q}$, wenn q die natürliche Abbildung $G \to G/H$ bezeichnet, $\widehat{G/H}$ auf $H^\perp$ ab und ist, aufgefasst als Abbildung $\widehat{G/H} \to H^\perp$, ein Isomorphismus.

Beweis. Da Charaktere Gruppenhomomorphismen sind ist $H^\perp$ eine Untergruppe von $\widehat{G}$. Wegen $H^\perp = \cap_{h \in H} \iota(h)^{-1}(\{1\})$ ist $H^\perp$ nach Satz 1.3.8 abgeschlossen.

Der Morphismen q bildet H auf 0 ab, also gilt $\widehat{q}(\zeta)(h) = \zeta(q(h)) = \zeta(0) = 1$ für $\zeta \in \widehat{G/H}$ und $h \in H$. $\widehat{q}$ kann also als Morphismus von $\widehat{G/H}$ nach $H^\perp$ aufgefasst werden.

Umgekehrt wird durch $\psi(\widehat{g})(g+H) := \widehat{g}(g)$ eine Abbildung $\psi : H^\perp \to \mathbb{T}^{G/H}$ definiert. Diese ist wohldefiniert, d.h. von der Wahl des Representanten $g \in g+H$ unabhängig. Für jedes $\widehat{g} \in H^\perp$ ist $\psi(\widehat{g})$ ein Homomorphismus von G/H nach $\mathbb{T}$, der wegen $\psi(\widehat{g}) \circ q = \widehat{g}$ stetig ist, da G/H mit der durch q induzierten Finaltopologie versehen ist und $\widehat{g}$ stetig ist. ψ kann also als Abbildung $H^\perp \to \widehat{G/H}$ aufgefasst werden und ist offensichtlich ein Homomorphismus von $H^\perp$ nach $\widehat{G/H}$.

Für $\widehat{g} \in H^\perp$ gilt

$$\widehat{q}(\psi(\widehat{g}))(g) = \psi(\widehat{g})(q(g)) = \psi(\widehat{g})(g+H) = \widehat{g}(g)$$

und $\widehat{q}(\widehat{G/H}) = H^\perp$. Da q surjektiv ist, ist $\widehat{q}$ nach Lemma 1.7.1 injektiv und der Morphismus $\widehat{q}$ ist eine Bijektion von $\widehat{G/H}$ auf $H^\perp$.

Es bleibt zu zeigen dass $\widehat{q}$ eine offene Abbildung ist. Eine 0-Umgebungsbasis von $\widehat{G/H}$ ist durch die Mengen

$$N(K,\varepsilon) = \{\zeta \in \widehat{G/H} : \ |\zeta(x+H) - 1| < \varepsilon \ \forall x+H \in K\}$$

K kompakt in G/H, $\varepsilon > 0$ gegeben. Jede kompakte 0-Umgebung K in G/H ist nach Lemma 1.7.5 das Bild einer kompakten 0-Umgebung C in G unter q. Es folgt

$$\begin{aligned}
\widehat{q}(N(K,\varepsilon)) &= \{\widehat{q}(\zeta) : \zeta \in \widehat{G/H},\ |\zeta(x+H) - 1| < \varepsilon \ \forall x+H \in K\} \\
&= \{\widehat{q}(\zeta) : \zeta \in \widehat{G/H},\ |\zeta(q(c)) - 1| < \varepsilon \ \forall c \in C\} \\
&= \{\widehat{q}(\zeta) : \zeta \in \widehat{G/H},\ |\widehat{q}(\zeta)(c) - 1| < \varepsilon \ \forall c \in C\} \\
&= \{\chi \in H^\perp : |\chi(c) - 1| < \varepsilon \ \forall c \in C\} = N(C,\varepsilon) \cap H^\perp.
\end{aligned}$$

Also ist das Bild einer 0-Umgebung in $\widehat{G/H}$ unter $\widehat{q}$ eine 0-Umgebung in $H^\perp$. Da $\widehat{q}$ ein Homomorphismus ist, folgt dass das Bild offener Mengen offen ist. $\square$

Das folgende Lemma gilt allgemeiner für alle abgeschlossene Untergruppen von lokalkompakten Abelschen Gruppen $\iota_G(x)(\chi)$ (vgl. Satz 1.11.5), hier können wir es nur für offene Untergruppen zeigen:

Proposition 1.7.7. *Für eine diskrete Gruppe B mit Untergruppe A ist $\widehat{B}/A^\perp$ isomorph zu $\widehat{A}$.*

Beweis. Nach 1.7.4 ist für die Einbettungsabbildung $\iota : A \to B$ die adjungierte Abbildung $\widehat{\iota} : \widehat{B} \to \widehat{A}$ surjektiv. Der Kern von $\widehat{\iota}$ ist $A^\perp$, also induziert $\widehat{\iota}$ eine Bijektion $\varphi : \widehat{B}/A^\perp \to \widehat{A}$. Diese ist stetig, da $\widehat{B}/A^\perp$ mit der Quotiententopologie ausgestattet ist, also mit der Finaltopologie unter der natürlichen Abbildung $q : \widehat{B} \to \widehat{B}/A^\perp$ und $\varphi \circ q = \widehat{\iota}$ mit $\widehat{\iota}$ stetig gilt. $\widehat{B}/A^\perp$ ist als stetiges Bild der nach 1.3.2 kompakten Menge $\widehat{B}$ unter q kompakt. Als stetige Bijektion zwischenden den kompakten Mengen $\widehat{B}/A^\perp$ und $\widehat{A}$ ist φ ein Homöomorphismus und somit ein Isomorphismus. $\square$

Satz 1.7.8 (von Baire)**.** *Ein lokalkompakter Raum ist von 2. Kategorie, d.h. er ist nicht als Vereinigung abzählbar vieler abgeschlossener Teilmengen mit leerem Inneren darstellbar.*

Beweis. Angenommen der lokalkompakte Raum Raum X ist abzählbare Vereinigung abgeschlossener Mengen A_n mit leerem Inneren. Dann gilt $\cap_{n\in\mathbb{N}} O_n = \emptyset$ für die offenen dichten Mengen $O_n := A_n^\complement$. Wir definieren induktiv nichtleere kompakte Mengen $K_1 \supseteq K_2 \supseteq K_3 \cdots$ wie folgt: K_1 sei eine beliebige kompakte Teilmenge von O_1 mit $K_1^\circ \neq \emptyset$ und $K_n \subseteq O_n \cap K_{n-1}$ mit $K_n^\circ \neq \emptyset$. Dies ist möglich, da $O_n \cap K_{n-1}^\circ$ offen nichtleer und X lokalkompakt ist. Da $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die endliche Durchschnittseigenschaft hat, folgt wegen $(\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n)^\complement = \cap_{n\in\mathbb{N}} O_n \supseteq \cap_{n\in\mathbb{N}} K_n \neq \emptyset$ die Behauptung. $\square$

Der folgende Satz gibt im Wesentlichen die Umkehrung der Aussage von Korollar 1.4.4:

Satz 1.7.9 (von der offenen Abbildung)**.** *Ist das Bild einer σ-kompakten lokalkompakten Abelschen Gruppe G unter einem Morphismus φ eine lokalkompakte Abelsche Gruppe H, so ist φ eine offene Abbildung.*

Beweis. Sei V eine relativ kompakte 0-Umgebung in G. Als σ-kompakte Menge ist G zunächst als Vereinigung abzählbar vieler kompakter Teilmengen darstellbar. Jede dieser kompakten Teilmengen ist als Teilmenge der Vereinigung von endlich vielen Mengen $x+V$ darstellbar. Es gibt also eine abzählbare Teilmenge S von G mit $G = \cup_{x\in S} x+V$. Damit ist H die abzählbare Vereinigung der kompakten und damit abgeschlossenen Mengen $\varphi(x)+\varphi(\bar{V})$. Das Innere $(\varphi(\bar{V}))^\circ$ dieser Mengen, aufgefasst als Teilmenge des lokalkompakten Raumes $\varphi(G)$ kann nach dem Satz von Baire nicht leer sein.

Für eine beliebige 0-Umgebung U in G gibt es eine 0-Umgebung V mit $\bar{V}-\bar{V}\subseteq U$. Sei $x\in\bar{V}$ mit $\varphi(x)\in\varphi(\bar{V})^\circ$. Dann ist 0 innerer Punkt von $\varphi(\bar{V})-\varphi(x)\subseteq\varphi(\bar{V}-\bar{V})\subseteq\varphi(U)$, womit φ eine Nullumgebung U auf eine Umgebung der 0 in $\varphi(G)$ abbildet. Damit ist φ eine offene Abbildung von G nach $\varphi(G)$. □

Proposition 1.7.10. *Ist für $H,G\in$ LCA der Morphismus $\varphi:\ H\to G$ offen als Abbildung $H\to\varphi(H)$ ($\varphi(H)$ versehen mit der Relativtopologie), so ist $\widehat{\varphi}$ offen als Abbildung $\widehat{G}\to\widehat{\varphi}(\widehat{G})$ ($\widehat{\varphi}(\widehat{G})$ versehen mit der Relativtopologie) und das Bild $\widehat{\varphi}(\widehat{G})$ ist abgeschlossen in $\widehat{H}$.*

Beweis. Mit Korollar 1.4.4 folgt dass $\widehat{\varphi}(\widehat{G})$ abgeschlossen in $\widehat{H}$ ist. Damit ist $\widehat{\varphi}(\widehat{G})$ nach Korollar 1.4.3 lokalkompakt.

Für eine kompakte Teilmenge K von H ist $\varphi(K)$ kompakt in G. Es gilt

$$\begin{aligned}\widehat{\varphi}(N(\varphi(K),\varepsilon)) &= \widehat{\varphi}(\{\tilde{\chi}\in\widehat{G}:\ |\tilde{\chi}(\varphi(x))-1|\le\varepsilon\forall x\in K\})\\ &= \{\widehat{\varphi}(\tilde{\chi}):\tilde{\chi}\in\widehat{G},\ |\widehat{\varphi}(\tilde{\chi})(x)-1|\le\varepsilon\forall x\in K\}\\ &= N(K,\varepsilon)\cap\widehat{\varphi}(G).\end{aligned}$$

Die von der von $N(\varphi(K),\varepsilon)$ erzeugte offenen Untergruppe A von $\widehat{G}$ wird unter $\widehat{\varphi}$ auf die von der in $\widehat{\varphi}(\widehat{G})$ offenen von der kompakte Menge $N(K,\varepsilon)\cap\widehat{\varphi}(\widehat{G})$ erzeugten Untergruppe B von $\widehat{\varphi}(\widehat{G})$ abgebildet. A ist als kompakt erzeugte Gruppe σ-kompakt und B ist als offene und damit abgeschlossene Untergruppe (vgl. Kor. 1.1.6) der lokalkompakten Gruppe $\widehat{\varphi}(\widehat{G})$ nach Korollar 1.4.3 lokalkompakt. Nach dem Satz von der offenen Abbildung ist $\widehat{\varphi}$ offen als Abbildung von A nach B. Eine in $\widehat{G}$ offene Menge O kann als $O=\cup_i(O\cap(a_i+A))$ dargestellt werden. Es folgt $\widehat{\varphi}(O)=\widehat{\varphi}(\cup_i(O\cap(a_i+A))=\cup_i\widehat{\varphi}(a_i)+\widehat{\varphi}((O-a_i)\cap A)$ ist als Vereinigung offener Mengen offen. □

Die folgende Begriffsbildung erlaubt in verschiedenen Gebieten der Mathematik häufig auftretende Eigenschaften gewisser Abbildungen pregnant darzustellen.

Definition 1.7.11. *Eine endliche Folge (Sequenz) von Abbildungen (lineare Abbildungen zwischen Vektorräumen, Gruppenhomomorphismen oder in unserem Fall stetigen Gruppenhomomorphismen)*

$$A_0 \xrightarrow{\varphi_0} A_1 \cdots \xrightarrow{\varphi_{n-2}} A_{n-1} \xrightarrow{\varphi_{n-1}} A_n \xrightarrow{\varphi_n} A_{n+1}$$

*heißt **exakt** an der Stelle k, wenn das Bild von φ_{k-1} gleich dem Kern von φ_k, $1 \le k \le n$ ist. Wenn keine Verwechslung möglich scheint sagen wir diese Sequenz ist exakt in A_k. Ist die Sequenz exakt für alle k mit $1 \le k \le n$, so sagen wir sie ist exakt.*

*Von besonderer Bedeutung sind **kurze exakte Sequenzen**, das sind Sequenzen der Form*

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{\varphi} B \xrightarrow{\psi} C \longrightarrow 0$$

also Abbildungen φ, ψ mit φ injektiv, ψ surjektiv und $\varphi(A) = \ker(\psi)$.

Proposition 1.7.12. *Für die kurze exakte Sequenz*

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{\varphi} B \xrightarrow{\psi} C \longrightarrow 0 \tag{1.10}$$

in LCA mit φ offen als Abbildung $A \to \varphi(A)$ ($\varphi(A)$ versehen mit der Relativtopologie), sowie ψ offen ist

$$\widehat{A} \xleftarrow{\widehat{\varphi}} \widehat{B} \xleftarrow{\widehat{\psi}} \widehat{C} \longleftarrow 0 \tag{1.11}$$

exakt mit $\widehat{\varphi}$ offen als Abbildung $\widehat{B} \to \varphi(\widehat{B})$ und $\widehat{\psi}$ offen als Abbildung $\widehat{C} \to \widehat{\psi}(\widehat{C})$.

Beweis. Dass $\widehat{\varphi}$ und $\widehat{\psi}$ offen sind folgt aus Proposition 1.7.10.

Für eine abgeschlossene Untergruppe A von B ist die Sequenz

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{\iota} B \xrightarrow{q} B/A \longrightarrow 0,$$

wenn ι die Inklusionsabbildung und q die Quotientenabbildung ist, exakt. Wir zeigen die Behauptung zunächst für diesen Spezialfall:

Nach Proposition 1.7.6 gilt $\widehat{q}(\widehat{B/A}) = A^\perp$. Der Kern von $\widehat{\iota}$ ist aber genau $A^\perp = \widehat{q}(B/A)$ womit die Sequenz

$$\widehat{A} \xleftarrow{\widehat{\iota}} \widehat{B} \xleftarrow{\widehat{q}} \widehat{B/A} \longleftarrow 0 \tag{1.12}$$

exakt in $\widehat{B}$ ist.

Für $\zeta \in \widehat{B/A}$ folgt wegen $\widehat{q}(\zeta)(b) = 0 \forall b \in B \Leftrightarrow \zeta(q(b)) = 0 \forall b \in B$ aus der Surjektivität von q die Injektivität von $\widehat{q}$. Also ist die Sequenz (1.12) auch exakt in $\widehat{B/A}$.

Ist φ eine beliebige Einbettung (d.h. eine homöomorphe Abbildung $A \to \varphi(A)$), so stellen wir $\varphi : A \to B$ als $\varphi = \iota \circ \widetilde{\varphi}$ mit dem Isomorphismus $\widetilde{\varphi} : A \to \varphi(A)$ und der

Inklusionsabbildung $\iota : \varphi(A) \hookrightarrow B$ dar. Da (1.10) exakt in B und in C ist, definiert ψ durch $\widetilde{\psi} \circ q = \psi$ eine Bijektion $\widetilde{\psi} : B/\varphi(A) \to C$, wenn q die natürliche Abbildung $B \to B/\varphi(A)$ bezeichnet ($\varphi(A)$ ist nach Korollar 1.4.4 abgeschlossen in B). $\widetilde{\psi}$ ist ein algebraischer Isomorphismus. Da ψ stetig ist und $B/\varphi(A)$ mit der Quotiententopologie versehen ist, ist $\widetilde{\psi}$ stetig. $\widetilde{\psi}$ ist auch offen, denn die offenen Mengen O in $B/\varphi(A)$ sind die Bilder offener Mengen O' in B unter q. Wegen $\widetilde{\psi}(O) = \widetilde{\psi}(q(O')) = \psi(O')$ ist also $\widetilde{\psi}$ offen, da ψ offen ist. $\widetilde{\psi}$ ist also ein Isomorphismus.

Die Sequenz

$$\widehat{\varphi}(\widehat{A}) \xleftarrow{\ \widehat{\iota}\ } \widehat{B} \xleftarrow{\ \widehat{q}\ } \widehat{B/\varphi(A)} \longleftarrow 0$$

ist aber wie oben gezeigt exakt. Da mit $\widetilde{\varphi}$ und $\widetilde{\psi}$ nach Lemma 1.7.1 auch $\widehat{\widetilde{\varphi}}$ und $\widehat{\widetilde{\psi}}$ Isomorphismen sind, folgt dass $\widehat{\psi} = \widehat{q} \circ \widehat{\widetilde{\psi}}$ als Zusammensetzung injektiver Abbildungen injektiv ist. Die Sequenz (1.11) ist also exakt in C.

$\widehat{i}$ ist wegen Lemma 1.7.1 injektiv und (1.12) exakt in $\widehat{B}$ ist mit Lemma 1.7.1

$$\ker(\widehat{\varphi}) = \ker(\widehat{i \circ \iota}) = \ker(\widehat{\iota}) = \widehat{q}(\widehat{B/A}) = \widehat{q}(\widehat{j}(\widehat{C})) = \widehat{\psi}(\widehat{C}),$$

d.h. (1.11) ist exakt in $\widehat{B}$. □

1.8 Haarmaß

Wir bezeichnen mit τ_x den Translationsoperator $\tau_x f(y) = f(x+y)$. Ein Maß μ auf einer lokalkompakten Abelschen Gruppe G heißt translationsinvariant, wenn $\int_G f\, d\mu = \int_G \tau_x f\, d\mu \ \ \forall f \in C(G), x \in G$ gilt. Lokalkompakte Gruppen haben ein bis auf Normierung eindeutiges links- bzw. rechtstranslationsinvariantes Maß das auf kompakten Mengen endich ist. Für Abelsche Gruppen ist klarerweise Linkstranslationsinvariannz äquivalent zur Rechtsstranslationsinvarianz. Für nichtkommutative Gruppen muß ein linkstranslationsinvariantes Maß aber nicht rechtstranslationsinvariant sein und umgekehrt. Für das Folgende reicht es die Existenz eines bis auf Normierung eindeutigen translationsinvarianten Maßes auf kompakten Abelschen Gruppen zu zeigen:

Satz 1.8.1. *Eine kompakte Abelsche Gruppe G hat ein eindeutiges translationsinvariantes Wahrscheinlichkeitsmaß (bezüglich der Borel* σ*-Algebra).*

Dieses Maß wird **Haarmaß** genannt.

Beweis. Ein Maß auf G ist genau dann translationsinvariant, wenn für F aus der linearen Hülle L der Funktionen $f_i - \tau_{x_i} f_i$, $f_i \in C_{\mathbb{R}}(G)$, $x_i \in G$ $\int_G F\, d\mu = 0$ gilt. Für ein Wahrscheinlichkeitsmaß muss gelten $\int_G 1\, d\mu = 1$ und μ ist positiv. Zuerst zeigen wir, dass $\|F-1\|_\infty \geq 1$ gilt, indem wir zeigen, dass für $F \in L$ immer $\inf\{F(x) : x \in G\} \leq 0$ folgt:

Sei $F = \sum_{i=1}^{n} f_i - \tau_{x_i} f_i$ mit $f_i \in C_{\mathbb{R}}(G)$, $x_i \in G$ und für $p \in \mathbb{N}$ $\Lambda_p := \{\sum_{i=1}^{n} n_i x_i : 0 \leq n_i < p\}$. Dann gilt $|\Lambda_p| = p^n$. In dem Mittel

$$\frac{1}{p^n} \sum_{\lambda \in \Lambda_p} F(\lambda)$$

kürzen sich alle Summanden $f_i(\lambda')$ mit $\tau_{x_i} f_i(\lambda)$ falls $\lambda' = \lambda + x_i$ gilt. Es bleiben nur Summanden mit $n_i = 0$ oder $n_i = p$. Von diesen gibt es für jedes i genau $2p^{n-1}$ also insgesamt (wegen Mehrfachzählungen) höchstens $2np^{n-1}$. Für $\|f_i\| \leq C$ folgt

$$\frac{1}{p^n} \sum_{\lambda \in \Lambda_p} F(\lambda) \leq 2nC/p \to 0 \text{ für } p \to \infty.$$

Da diese Mittel beliebig klein werden, muss $\inf\{F(x) : x \in G\} \leq 0$ und damit $\|F - 1\|_\infty \geq 1$ für $F \in L$ gelten. In dem von L und 1 aufgespannten Teilraum von $C_{\mathbb{R}}(G)$ kann jede Funktion G eindeutig als $G = F + c$ mit $F \in L$ dargestellt werden. Für das lineare Funktional $\phi_0(G) = c$ gilt wegen $\inf\{F(x) : x \in G\} \leq 0$ $\|\phi_0\| \leq 1$. Nach dem Satz von Hahn-Banach hat ϕ_0 eine Fortsetzung ϕ auf $C_{\mathbb{R}}(G)$, die ebenfalls $\|\phi\| \leq 1$ erfüllt.

Wegen $\phi(1) = 1$ und $\|\phi\| \leq 1$ folgt $|\phi\| = 1$ sowie für f mit $1 \geq f(x) \geq 0 \forall x \in G$:

$$\phi(f) = \phi(1) + \phi(f-1) \geq 1 - \|f-1\|_\infty \geq 0$$

also ist ϕ positiv. Nach dem Satz von Riesz gibt es ein Maß μ auf G mit $\phi(f) = \int_G f\, d\mu$.

Sind μ_1 und μ_2 translationsinvariante Wahrscheinlichkeitsmaße auf G, so folgt mit dem Satz von Fubini:

$$\int_G f(x)\, d\mu_1(x) = \int_G \int_G f(x)\, d\mu_1(x) d\mu_2(y) = \int_G \int_G f(x+y)\, d\mu_1(x) d\mu_2(y)$$
$$= \int_G \int_G f(x+y)\, d\mu_2(y) d\mu_1(x) = \int_G \int_G f(y)\, d\mu_2(y) d\mu_1(x) = \int_G f(y)\, d\mu_2(y),$$

also die Eindeutigkeit dieses Maßes. □

Wir benötigen für den Beweis des Dualitätssatzes nur die Existenz des Haarmaßes für kompakte Abelsche Gruppen, zeigen aber wie die Existenz für beliebige lokalkompakte Abelsche Gruppen aus Satz 1.8.3 hergeleitet werden kann, der auch beim Beweis des Dualitätssatzes eine entscheidende Rolle spielt:

Lemma 1.8.2 (Weil). *Das Bild eines Morphismus* $\varphi : \mathbb{Z} \to A$, *$A$ lokalkompakt, ist diskret oder relativ kompakt.*

Beweis. Wir dürfen o.B.d.A. annehmen, dass $\varphi(\mathbb{Z})$ dicht in A liegt.

Angenommen H ist nicht diskret in A. Sei $H := \varphi(\mathbb{Z}) \subseteq A$ und $H_\pm := \varphi(\pm\mathbb{N})$. Dann gibt es ein $h_0 \in H$ mit h_0 ist Häufungspunkt von H, d.h. $h_0 \in \overline{H \setminus \{h_0\}}$. Damit gilt für $h \in H$, da Translationen in $\bar{H}$ Homöomorphismen sind:

$$h \in \overline{H \setminus \{h_0\}} + h - h_0 = \overline{H \setminus \{h_0\} + h - h_0} = \overline{H \setminus \{h\}},$$

also ist jedes $h \in H$ Häufungspunkt von H. Für eine 0–Umgebung $V = -V$ gilt $\varphi(n) \in V \Leftrightarrow \varphi(-n) = -\varphi(n) \in V$, also ist 0 auch Häufungspunkt von H_+ und von H_-. Damit ist für $n \in \mathbb{N}$ $\varphi(n)$ Häufungspunkt von $\varphi(n) + H_\pm = \{\varphi(k) : \ k \gtrless n\}$.

Für eine kompakte 0–Umgebung K folgt, dass es für jedes $x \in K$ ein $n_x > 0$ gibt mit $x \in \varphi(-n_x) + K^\circ$. Da K kompakt ist folgt $K \subseteq \cup_{i=1}^m \varphi(-n_i) + K\circ$ mit $0 < n_1 < \ldots < n_m$. Für $y \in A$ gibt es $n_y > 0$ mit $y \in \varphi(n_y) + K^\circ$, woraus für $n_y > n_m$ folgt, dass es ein $0 \leq i \leq m$ gibt mit

$$y \in \varphi(n_y) + K^\circ \subseteq \varphi(n_y) + \varphi(-n_i) + K^\circ = \varphi(n_y - n_i) + K^\circ$$

mit $0 < n_y - n_i < n_y$. Induktiv erhält man eine endliche streng monoton fallende Folge $(l_k)_{k \leq L}$ natürlicher Zahlen mit $n_L \leq n_m$. Also gilt $y \in \varphi(n_l) + K^\circ$ mit $0 < n_l \leq n_m$, woraus folgt $A = \cup_{i=1}^m (\varphi(i) + K)$ und damit dass A als endliche Vereinigung kompakter Mengen kompakt ist. $\square$

Satz 1.8.3. *Ist die lokalkompakte Abelsche Gruppe G kompakt erzeugt, so gibt es eine diskrete Untergruppe D von G mit G/D kompakt. Für $0 \neq a \in G$ kann D so gewählt werden, dass $a \notin D$ gilt.*

Beweis. Sei $V = -V$ eine kompakte 0-Umgebung in G, die G erzeugt. Definieren wir induktiv $V_1 := V$ und $V_{n+1} := V_n + V$, so ist $\cup_{n \in \mathbb{N}} V_n$ die von V erzeugte Gruppe und damit gleich G. Da $V + V$ als stetiges Bild kompakter Mengen kompakt ist, gibt es eine endliche Teilmegne E von G mit $V + V \subseteq \cup_{x \in E} x + V^\circ$. Es folgt induktiv $V_n \subseteq \cup_{x \in E_n} x + V^\circ$ mit $E_2 = E$ und $E_{n+1} := E_n + E$. Sei $C := \langle E \rangle = \cup_{n \in \mathbb{N}} (E_n \cup -E_n)$ die von E erzeugte Untergruppe von G und E_0 eine maximale Teilmenge von E mit der Eigenschaft, dass die von E_0 erzeugte Untergruppe D_0 von C unendlich und diskret in G ist.

$(E \setminus E_0) + D_0$ ist dann ein Erzeugendensystem von C/D_0. Für $e \in E \setminus E_0$ kann die von $e + D_0$ erzeugte Gruppe $\langle e + D_0 \rangle$ nicht unendlich und diskret in C/D_0 sein, da sonst $E_0 \cup \{e\}$ eine unendliche diskrete Gruppe in G erzeugen würde im Widerspruch zu unserer Wahl von E_0. Nach dem Weil'schen Lemma 1.8.2 ist dann die von der Nebenklasse $e + D_0$ erzeugte Gruppe relativ kompakt in G/D_0. Für $E \setminus E_0 = \{e_1, \ldots, e_k\}$ gilt $\overline{C/D_0} = \overline{\langle e_1 + D_0 \rangle} + \cdots + \overline{\langle e_k + D_0 \rangle}$ mit $\overline{\langle e_i + D_0 \rangle}$ kompakt in G/D_0. Es folgt $\overline{C/D_0}$ ist als Summe der kompakten Teilmengen $\overline{\langle e_i + D_0 \rangle}$ kompakt in G/D_0 (stetiges Bild der kompakten Mengen unter Addition).

Für die endlich erzeugte Gruppe D_0 gibt es nach Satz 1.5.1 einen Isomorphismus $\varphi : \ \mathbb{Z}^n \oplus F \to D_0$. Für $a \notin D_0$ wählen wir $D = D_0$. Anderenfalls gibt es ein $m \in \mathbb{N}$ mit $a \notin \varphi(m\mathbb{Z}^n)$. Es gilt $\mathbb{Z}^n \oplus F = m\mathbb{Z}^n + F + I$ mit der Menge $I := \{1, 2, \ldots, m-1\}^n$ (die keine Gruppe ist!).

$G/D = (I+F+C)+D$ ist als Bild der kompakten Menge $I+F+C$ unter der Quotientenabbildung $G \to G/D$ kompakt mit $a \notin D$. □

Satz 1.8.4. *Auf einer lokalkompakten Abelschen Gruppe gibt es ein nichttriviales translationsinvariantes positives Maß, das auf kompakten Mengen endlich ist.*

Beweis. Wir zeigen die Aussage zuerst für kompakt erzeugte Abelsche Gruppen G.

Nach Satz 1.8.3 hat G eine diskrete Untergruppe D für die G/D kompakt ist. Für $f \in C_c(G)$ sei ρf durch $\rho f(x+D) = \sum_{d \in D} g(x+d)$ definiert. Da f kompakten Träger hat und D diskret ist, sind nur endlich viele Summanden ungleich 0, ρf ist also wohldefiniert. Ebenso folgt die Stetigkeit von ρf in x, da $(x+D) \cap \operatorname{supp} f$ endlich ist. Wir definieren ein lineares Funktional ϕ_0 auf $C_c(G)$ durch $\phi_0(f) := \int_{G/D} \rho(f)\, d\mu$, wobei μ das Haarmaß auf G/D bezeichne.

Es folgt für die Translationsoperatoren $\tilde{\tau}_{x+D}$ auf G/D bzw. die Translationsoperatoren τ_x auf G: $\tilde{\tau}_{x+D}\rho(f) = \rho(\tau_x f)$ und damit aus der Translationsinvarianz von μ

$$\phi_0(\tau_x f) = \int_{G/D} \rho(\tau_x f)\, d\mu = \int_{G/D} \tilde{\tau}_{x+D}\rho(f)\, d\mu = \int_{G/D} \rho(f)\, d\mu = \phi_0(f)$$

die Translationsinvarianz von ϕ_0. Da μ ein positives Maß ist, folgt, dass ϕ_0 ein positives Funktional ist. Nach dem Darstellungssatz von Riesz entspricht ihm ein reguläres Borelmaß ν mit $\phi_0(f) = \int_G f\, d\nu$. Dieses ist positiv und auf kompakten Mengen endlich, da es für kompakte Mengen A eine Funktion $f \in C_c(G)$ mit $f|_A = 1$ gibt.

Ist G lokalkompakt Abelsch, so erzeugt jede kompakte 0-Umgebung eine kompakt erzeugte offene Untergruppe U von G. Für $f \in C_c(G)$ hat der Träger von f nur mit endlich vielen Nebenklassen $x+U$ nichtleeren Schnitt und es gilt $f = \sum_{i=1}^n f_i$, wobei $f_i := f \mathbb{1}_{x_i+U}$ stetig sind. Definieren wir $\phi(f) = \sum_{i=1}^n \phi_0(\tau_{-x_i} f_i)$, so ist diese Definition wegen der Translationsinvarianz von ϕ_0 auf U von der Wahl der Repräsentanten x_i unabhängig und definiert ein translationsinvariantes positives Funktional auf $C_c(G)$, dem ein reguläres positives translationsinvarinates Borelmaß auf G entspricht. □

1.9 Satz von Peter-Weyl

Lemma 1.9.1. *Auf kompakten Abelschen Gruppen G sind stetige komplexwertige Funktionen f gleichmäßig stetig, d.h. für $\varepsilon > 0$ gibt es eine 0-Umgebung V sodass $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ für $x - y \in V$ gilt.*

Beweis. Für $x \in G$ gibt es wegen der Stetigkeit von f eine offene 0-Umgebung W_x mit $|f(x) - f(z)| < \varepsilon/2$ für $z \in x + W_x - W_x$. Sei $(x_i + W_{x_i})_{i \le N}$ eine endliche Teilüberdeckung von G und $W := \cap_{i \le N} W_{x_i}$. Für $x \in G$ gibt es ein $i \le N$ mit $x \in x_i + W_{x_i}$. Für $y \in G$ mit $x - y \in W$ folgt $y - x_i = y - x + x - x_i \in -W + W \subset W_{x_i} - W_{x_i}$. Es folgt $y \in x_i + W_{x_i} - W_{x_i}$ und

$$|f(x) - f(y)| \le |f(x) - f(x_i)| + |f(y) - f(x_i)| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

□

Auf kompakten Abelschen Gruppen G definieren wir die **Faltung** zweier integrierbarer Funktionen f und g durch

$$f * g(x) := \int_G f(x-y)g(y)\,dy.$$

Lemma 1.9.2. *Die Faltung ist kommutativ und assoziativ. Es gilt für den Translationsoperator $T_z:\ Tzf(x) = f(z+x)$: $(T_z f) * g = T_z(f * g)$ Ist f stetig, so ist $f * g$ für $g \in L^1(G)$ stetig.*

Beweis. Wegender Invarianz des Haarmßes unter Translation und Inversion folgt für $z = x - y$:

$$f * g(x) = \int_G f(x-y)g(y)\,dy = \int_G f(z)g(x-z)\,dz = g * f(x),$$

also die Kommutativität der Faltung.

Mit Fubini und der Invarianz des Haarmaßes folgt

$$\begin{aligned}(f * g) * h(x) &= \int_G \int_G f(x-y-z)g(z)\,dz h(y)\,dy \\ &= \int_G f(x-w) \int_G g(w-y)h(y)\,dy\,dw = f * (g * h)(x)\end{aligned}$$

also die Assoziativität der Faltung.

Für stetige f und $\varepsilon > 0$ gibt es nach Lemma 1.9.1 eine 0-Umgebung V mit $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ für $x - y \in V$. Es folgt

$$|f * g(x) - f * g(y)| \leq \int_G |(f(x-z) - f(y-z))g(z)|\,dz \leq \varepsilon \int_G |g(z)|\,dz$$

und damit die Stetigkeit von $f * g$.

$(T_z f) * g = T_z(f * g)$ folgt unmittelbar aus der Definition der Faltung. □

Proposition 1.9.3. *$L^2(G)$ zerfällt in die direkte orthogonale Summe endlichdimensionaler translationsinvarianter Teilräume L_i stetiger Funktionen:*

$$L^2(G) = \dot{\oplus}_i L_i.$$

Beweis. Für beschränkte messbare Funktionen σ bilden die Faltungsoperatoren

$$P_\sigma f(x) = \int_G \sigma(x-y)f(y)\,dy$$

nach Lemma 1.9.2 eine kommutierende Familie von Operatoren. Für reellwertiges symmetrisches (d.h. $\sigma(x) = \sigma(-x)$) σ ist P_σ selbstadjungiert:

$$\begin{aligned}(P_\sigma f, g) &= \int_G \int_G \sigma(x-y)f(y)\overline{g(x)}\,dy\,dx \\ &= \int_G \int_G f(y)\overline{\sigma(y-x)g(x)}\,dx\,dy = (f, P_\sigma g).\end{aligned}$$

Als Hilbert-Schmidt-Operatoren sind die Operatoren P_σ kompakt. Damit zerfällt für jedes symmetrische reellwertige σ $L^2(G)$ in die orthogonale Summe seiner endlichdimensionalen Eigenräume L_i zu nichtverschwindenden Eigenwerten und dem Kern:

$$L^2(G) = \ker(P_\sigma) \oplus \oplus_i L_{\sigma,i}.$$

Da die Operatoren P_σ kommutieren sind die Eigenräume $L_{\sigma,i}$ invariant unter allen Operatoren $P_{\tilde\sigma}$: $f \in L_{\sigma,i} \Rightarrow P_\sigma f = \lambda_{\sigma,i} f$ und $P_\sigma P_{\tilde\sigma} f = P_{\tilde\sigma} P_\sigma f = \lambda_{\sigma,i} P_{\tilde\sigma} f$, also folgt $P_{\tilde\sigma} f \in L_{\sigma,i}$. Damit zerfällt $L^2(G)$ in den gemeinsamen Kern der Operatoren P_σ und die orthogonale direkte Summe von gemeinsamen Eigenräumen L_i der Operatoren P_σ. Für stetiges σ ist das Bild von P_σ nach Lemma 1.9.2 ein Raum stetiger Funktionen. Für stetiges positives σ mit $\int_G \sigma(x)\,dx = 1$ folgt

$$\begin{aligned}
|(P_\sigma f - f)(x)| &= \left| \int_G \sigma(x-y) f(y) - f(x)\, dy \right| \\
&\leq \int_G \sigma(x-y) |f(x) - f(y)|\, dy \\
&\leq \sup\{|f(x) - f(y)| : x - y \in \operatorname{supp}(\sigma)\}
\end{aligned}$$

Zu jeder kompakten 0-Umgebung V gibt es nach dem Lemma von Urysohn ein stetiges $\tilde\sigma$ mit $\tilde\sigma(0) = 1$ und $\sigma(x) = 0$ für $x \notin V^\circ$. Für $\sigma := \frac{1}{\int_G \tilde\sigma(x)\,dx} \tilde\sigma$ folgt

$$\|(P_\sigma f - f)(x)\|_\infty \leq \sup\{|f(x) - f(y)| : x - y \in V\}.$$

Da stetige Funktionen auf G nach Lemma 1.9.1 gleichmäßig stetig sind, folgt dass $\dot\oplus L_i$ dicht in $C(G)$ bezüglich der Supremumsnorm ist. Stetige Funktionen auf G sind aber dicht in $L^2(G)$ und mit $\|f-g\|_\infty \leq \|f-g\|_2$ folgt $\oplus L_i = L^2(G)$.

Die Operatoren P_σ vertauschen nach Lemma 1.9.2 auch mit den Translationsoperatoren T_z. Damit sind die Eigenräume L_i translationsinvariant. □

Lemma 1.9.4 (Schur)**.** *Gibt es in einem endlichdimensionalen linearen Raum X über $\mathbb{C}$ keinen nichttrivialen Teilraum, der unter einer Familie $\mathcal{P}$ von linearen Operatore aus $L(X)$ invariant ist, so ist jeder Operator T aus $L(X)$, der mit allen Operatoren aus $\mathcal{P}$ vertauscht ein Vielfaches der Identität.*

Beweis. Sei λ ein Eigenwert von T mit Eigenraum E. Dann gilt für $e \in E$ und $P \in \mathcal{P}$: $TPe = PTe = \lambda Pe$, also ist E invariant unter $\mathcal{P}$. Nach Voraussetzung ist E trivial, d.h. $T = \lambda\mathrm{Id}$ auf X. □

Satz 1.9.5. *Die Charaktere einer kompakten Abelschen Gruppe A bilden eine Orthogonalbasis in $L^2(A)$. Im $L^2(A)$ sind die minimalen translationsinvarianten Teilräume eindimensional und werden von Charakteren aufgespannt.*

Beweis. Die minimalen translationsinvarianten Teilräume L_i des $L^2(A)$ sind nach Proposition 1.9.3 endlichdimensional. Da die Translationsoperatoren untereinander vertauschen folgt aus dem Lemma von Schur 1.9.4, dass Translationsoperatoren auf den minimalen translationsinvarianten Teilräumen Vielfache der Identität sind, d.h. für $x \in A$ gibt es $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $f(x+y) = T_x f(y) = \chi(x) f(y)$.für $f \in L_i$. Also spannen die Elemente von L_i tramslationsinvariante Teilräume auf. Wegen der Minimalität muss also $L_i = \mathrm{Span}(f), 0 \neq f \in L_i$ gelten, d.h. L_i ist eindimensional.

Wegen $T_x T_y = T_{x+y}$ folgt $\chi(x)\chi(y) = \chi(x+y)$. Da Translationen Isometrien im $L^2(A)$ sind, muss $|\chi(x)| = 1$ für alle $x \in A$ gelten. χ ist also ein Homomorphismus von A nach $\mathbb{T}$.

Mit Proposition 1.9.3 folgt, dass die Homomorphismen χ stetig sind. Die minimalen translationsinvarianten Teilräume werden also von Charakteren aufgespannt.

Für einen Charakter χ auf A gilt wegen der Translationsinvarianz des Haarmaßes

$$\int_A \chi(x)\, dx = \int_A \chi(x+y)\, dx = \chi(y) \int_A \chi(x)\, dx.$$

Es folgt dass für jeden nichttrivialen Charakter $\int_A \chi(x)\, dx = 0$ gilt. Für zwei Charaktere χ_1 und χ_2 ist $\chi_1 \bar{\chi}_2$ ein Charakter, der genau für $\chi_1 = \chi_2$ gleich dem trivialen Charakter ist. Es folgt, dass die Charktere ein Orthogonalsystem bilden. □

Satz 1.9.6. *Auf einer kompakten Abelschen Gruppe A sind Charaktere punktetrennend, d.h. für $a \neq b$ gibt es einen Charakter χ mit $\chi(a) \neq \chi(b)$.*

Beweis. Es genügt zu zeigen, dass es für $a \neq 0$ einen Charakter χ mit $\chi(a) \neq 1$ gibt. Angenommen alle Charaktere erfüllen $\chi(a) = 1$. Dann folgt $\chi(x) = \chi(x+a)$ für alle Charaktere, die Charaktere spannen dann einen unter der Translation T_a invarianten Raum auf. Als Isometrie ist T_a aber stetig im $L^2(A)$. Da die Charaktere eine Orthogonalbasis bilden folgt dann $T_a f = f$ für alle $f \in L^2(A)$. Für eine 0-Umgebung V mit $a \notin V - V$ ist aber $\|\mathbb{1}_V - T_a \mathbb{1}_V\|_2^2 = \|\mathbb{1}_V - \mathbb{1}_{-a+V}\|_2^2 = 2\mu(V) \neq 0$. □

Korollar 1.9.7. *Ist φ ein Morphismus von H nach K mit einer kompakten Abelschen Gruppe K, der abgeschlossenes Bild $\varphi(H)$ in K hat, so folgt aus der Injektivität von $\widehat{\varphi}$ die Surjektivität von φ.*

Beweis. Ist φ nicht surjektiv, so ist unter den gegebenen Voraussetzungen $K/\varphi(H)$ eine nichttriviale kompakte Gruppe, die nach Satz 1.9.6 einen nichttrivialen Charakter $\widetilde{\chi}$ hat. Für den nichttrivialen Charakter $\chi := \widetilde{\chi} \circ q$ (q ist die Quotientenabbildung $K \to K/\varphi(H)$) folgt $\chi(\varphi(h)) = 1\, \forall h \in H$ und damit $\widehat{\varphi}(\chi)(h) = 1\, \forall h \in H$. Somit ist $\widehat{\varphi}(\chi)$ der triviale Charakter auf H und $\widehat{\varphi}$ ist nicht injektiv. □

1.10 Dualitätssatz für diskrete und kompakte Abelsche Gruppen

Proposition 1.10.1. *Eine diskrete Abelsche Gruppe kann in kanonischer Weise als induktiver Limes ihrer endlich erzeugten Untergruppen betrachtet werden.*

Beweis. Für eine diskrete Abelsche Gruppe A bezeichne $\{A_i : i \in I\}$ die Menge aller endlich erzeugten Untergruppen von A. Durch Mengeniklusion sind diese Untergruppen teilgeordnet. Für $A_i \subseteq A_j \subseteq A_k$ erfüllen die Inklusionsabbildungen die Verträglichkeitsbedingungen $\iota_{j,k} \circ \iota_{i,j} = \iota_{i,k}$. A kann in kanonischer Weise als induktiver Limes $\varinjlim A_i$ betrachtet werden: Sind für alle endlich erzeugten Untergruppen A_i Homomorphismen e_i in eine Abelsche Gruppe B gegeben, die die Verträglichkeitsbedingung $e_j = \iota_{i,j} \circ e_i$ genügen, so wird, da jedes $a \in A$ in einer endlich erzeugten Untergruppe liegt ein Homomorphismus $e : A \to B$ definiert. Dieser ist wegen der Verträglichkeitsbedingungen wohldefiniert. Damit hat A die universelle Eigenschaft des induktiven Limes (1.9). □

Proposition 1.10.2. *Ist A eine diskrete Abelsche Gruppe, so kann ihre duale Gruppe $\widehat{A}$ versehen mit der k.o.-Topologie mit dem projektiven Limes $\varprojlim \widehat{A}_i$ der dualen Gruppen der endlich erzeugten Untergruppen A_i von A identifiziert werden.*

Beweis. Charaktere auf A sind durch ihre Einschränkungen auf die endlich erzeugten Untergruppen A_i bestimmt. Dabei sind die Restriktionen res_i Morphismen von $\widehat{A}$ nach $\widehat{A}_i$. Aufgrund der universellen Eigenschaft des projektiven Limes gibt es also einen Morphismus $\psi : \widehat{A} \to \varprojlim \widehat{A}_i$, der $\mathrm{res}_i = \mathrm{pr}_i \circ \psi$ erfüllt.

Umgekehrt definiert jedes Element x des Produktraumes $\prod_i \widehat{A}_i$, das den Verträglichkeitsbedingungen $\mathrm{pr}_i(x) = \widehat{\iota}_{j,i} \circ \mathrm{pr}_j(x)$ für $A_i \subseteq A_j \subseteq A$ genügt einen Charakter auf A. Als Gruppe kann also $\widehat{A}$ mit $\varprojlim \widehat{A}_i$ identifiziert werden.

$$\begin{tikzcd}
\cdots & \widehat{A}_i \arrow[l, dotted] & \widehat{A}_j \arrow[l, "\widehat{\iota}_{i,j}"] & \widehat{A}_k \arrow[l, "\widehat{\iota}_{j,k}"] \arrow[ll, bend right, "\widehat{\iota}_{i,k}"'] & \cdots \arrow[l, dotted] & \varprojlim \widehat{A}_i \arrow[ll, bend right, "\mathrm{pr}_k"'] \\
 & & & & & \widehat{A} \arrow[u, dashed, "\psi"] \arrow[ullll, "\mathrm{res}_i"] \arrow[ulll, "\mathrm{res}_j"] \arrow[ull, "\mathrm{res}_k"]
\end{tikzcd}$$

Der projektive Limes ist mit einer Topologie versehen unter der die Homomorphismen pr_i Morphismen, also stetige Homomorphismen sind. Die Stetigkeit dieserer Homomorphismen ist genau dann gegeben, wenn pr_i aufgefasst als Abbildung in den Produktraum stetig sind, was genau dann der Fall ist, wenn diese Topologie feiner als die Produkttopologie ist, da diese ja per definitionem die gröbste Topologie mit dieser Eigenschaft ist. Zugleich muss aber wegen der universellen Eigenschaft der projektive Limes versehen mit der Produkttopologie durch den projektiven Limes faktorisieren, d.h. es muss einen Morphismus von $\varprojlim \widehat{A}_i$ mit der Produkttopologie nach $\varprojlim \widehat{A}_i$ mit der Topologie als projektiver Limes geben. Da die projektive Limes-Topologie feiner als die Produkttopologie ist, gibt es einen solchen Morphismus nur wenn die projektive Limes-Topologie gleich der Produkttopologie ist.

Es bleibt also zu zeigen, dass die Produkttopologie mit der k.o.-Topologie übereinstimmt: Eine 0-Umgebungsbasis in $\widehat{A}$ bezüglich der k.o.-Topologie wird durch die Mengen

$$N(F,\varepsilon) := \{\chi \in \widehat{A} : |\chi(a) - 1| < \varepsilon \forall a \in F\}$$

für $\varepsilon > 0$ und eine endliche Teilmenge F von A gegeben. Für $F \subseteq A_i$ gilt

$$N(F,\varepsilon) := \mathrm{pr}_i^{-1}(\{\chi_i \in \widehat{A}_i : |\chi_i(a) - 1| < \varepsilon \forall a \in F\})$$

Die Mengen $\{\chi_i \in \widehat{A}_i : |\chi_i(a) - 1| < \varepsilon \forall a \in F\}$ bilden aber eine Umgebungsbasis der 0 in A_i, also ist $N_{\varepsilon,F}$ offen in der Produkttopologie, damit ist die Produkttopologie feiner als die k.o.-Topologie. Endliche Durchschnitte von Mengen dieser Art bilden aber eine 0-Umgebungsbasis in der Produkttopologie, also ist die Produkttopologie auch gröber als die k.o.-Topologie. □

Lemma 1.10.3. *Für eine diskrete Abelsche Gruppe A sei χ ein Charakter auf $\widehat{A}$ und für ein $i_0 \in I$ sei V_{i_0} eine 0-Umgebung in $\widehat{A}/A_{i_0}^{\perp}$ sowie U eine 0-Umgebung in $\mathbb{T}$, die als einzige Untergruppe von $\mathbb{T}$ die triviale enthält. Gilt dann $\chi(\mathrm{pr}_{i_0}^{-1}(V_{i_0})) \subseteq U$, so folgt $A_{i_0}^{\perp} \subseteq \ker(\chi)$ und der durch $\tilde{\chi}_{i_0}(\widehat{a} + A_{i_0}^{\perp}) := \chi(\widehat{a})$ wohldefinierte Homomorphismus von $\widehat{A}/A_{i_0}^{\perp}$ nach $\mathbb{T}$ ist stetig also ein Charakter von $\widehat{A}/A_{i_0}^{\perp}$.*

Beweis. Wegen $A_{i_0}^{\perp} = \mathrm{pr}_{i_0}^{-1}(0)$ folgt

$$\chi(A_{i_0}^{\perp}) = \chi(\mathrm{pr}_{i_0}^{-1}(0)) \subseteq \chi(\mathrm{pr}_{i_0}^{-1}(V_{i_0})) \subseteq U.$$

Da die Untergruppe $A_{i_0}^{\perp}$ von $\widehat{A}$ unter dem Homomorphismus χ auf eine Untergruppe von $\mathbb{T}$ abgebildet wird, folgt aus der Voraussetzung $\chi(A_{i_0}^{\perp}) = \{0\}$, bzw. $A_{i_0}^{\perp} \leq \ker(\chi)$. Damit ist durch $\tilde{\chi}_{i_0}(\widehat{a} + A_{i_0}^{\perp}) := \chi(\widehat{a})$ ein Homomorphismus $\tilde{\chi}_{i_0} : \widehat{A}/A_{i_0}^{\perp} \to \mathbb{T}$ wohldefiniert.

Da $\widehat{A}/A_{i_0}^{\perp}$ mit der durch die Quotientenabbildung q_{i_0} induzierten Finaltopologie versehen ist, folgt aus der Stetigkeit von $\chi = \tilde{\chi}_{i_0} \circ q_{i_0}$ die von $\tilde{\chi}_{i_0}$. □

Korollar 1.10.4. *Sei $A = \varinjlim A_i$ eine diskrete Abelsche Gruppe . Für einen Charakter χ auf $\widehat{A}$ gibt es ein $i_0 \in I$ sowie einen Charakter χ_{i_0} auf $\widehat{A}_{i_0}$, sodass $\chi = \chi_{i_0} \circ \widehat{\iota}_{i_0}$ gilt.*

Beweis. Sie U eine 0-Umgebung in $\mathbb{T}$, die keine nichttriviale Untergruppe enthält. Wegen der Stetigkeit von χ bezüglich der Produkttopologie auf $\varprojlim \widehat{A}_{i_j}$ gibt es Umgebungen $V_{i_1}, \ldots V_{i_n}$ der 0 in $\widehat{A}_{i_0}$ mit $\chi(\cap_{i=1}^n \mathrm{pr}_{i_j}^{-1}(V_{i_j})) \subseteq U$. Sei $A_{i_j} \leq A_{i_0}$ für $j = 1, \ldots n$. Dann gilt wegen der Verträglichkeitsbedingungen $\cap_{i=1}^n \mathrm{pr}_{i_j}^{-1}(V_{i_j}) = \mathrm{pr}_{i_0}^{-1}(V_{i_0})$ für $V_{i_0} = \cap_{i=1}^n \widehat{\iota}_{i_j,i_0}^{-1}(V_{i_j})$, also $\chi(\mathrm{pr}_{i_0}^{-1}(V_{i_0})) \subseteq U$.

Nach Proposition 1.7.7 definiert $\varphi_{i_0}(\widehat{a} + A_{i_0}^{\perp})(a_{i_0}) := \widehat{a}(\iota_{i_0}(a_{i_0}))$ einen topologischen Isomorphismus von $\widehat{A}/A_{i_0}^{\perp}$ auf $\widehat{A}_{i_0}$. Für $\chi_{i_0} := \tilde{\chi}_{i_0} \circ \varphi_{i_0}^{-1}$ mit dem Charakter $\tilde{\chi}_{i_0}$ von Lemma 1.10.3 folgt

$$\chi = \tilde{\chi}_{i_0} \circ q_{i_0} = \tilde{\chi}_{i_0} \circ \varphi_{i_0}^{-1} \circ \varphi_{i_0} \circ q_{i_0} = \chi_{i_0} \circ \widehat{\iota}_{i_0}.$$ □

Satz 1.10.5. *Für diskrete Abelsche Gruppen A ist ι_A ein Isomorphismus.*

Beweis. ι_A ist nach Satz 1.3.8 ein Morphismus. Charaktere sind nach Korollar 1.5.4 punktetrennend auf endlich erzeugten Abelschen Gruppen. Nach Lemma 1.7.3 könenn diese Charaktere zu Charakteren auf A fortgesetzt werden. Es folgt, dass ι_A injektiv ist.

Für einen Charakter χ auf $\widehat{A}$ und eine 0-Umgebung U in $\mathbb{T}$ gibt es wegen der Stetigkeit von χ aufgefasst als Funktion auf dem Produktraume $\prod_{i\in I}\widehat{A}_i$ eine endliche Teilmenge F von I mit 0-Umgebungen V_i in $\widehat{A}_i$, $i \in F$ sodass $\chi(\cap_{i\in F}\mathrm{pr}_i^{-1}(V_i)) \subseteq U$ gilt. Da die von einer endlichen Vereinigung endlich erzeugter Gruppen durch die Vereinigung ihrer Erzeuger endlich erzeugt ist, gibt es ein $i_0 \in I$ mit $A_i \leq A_{i_0}$ für $i \in F$. Für $V_0 := \cap_{i\in F}\iota_{i,i_0}(V_i)$ folgt dann $\chi(\mathrm{pr}_{i_0}^{-1}(V_{i_0})) \subseteq U$.

Für U eine 0-Umgebung in $\mathbb{T}$, die keine nichttriviale Untergruppe enthält, folgt mit Korollar 1.10.4, dass es einen Charakter $\chi_{i_0} \in \widehat{\widehat{A}}_{i_0}$ mit $\chi = \chi_{i_0} \circ \widehat{\iota}_{i_0}$ gibt. Nach Korollar 1.5.4 gilt aber der Dualitätssatz für endlich erzeugte Abelsche Gruppen, also gibt es ein $a \in A_{i_0}$ mit $\iota_{A_{i_0}}(a) = \chi_{i_0}$. Nach Lemma 1.7.1 vi) ist das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} A_{i_0} & \xrightarrow{\iota_{i_0}} & A \\ \big\downarrow{\scriptstyle \iota_{A_{i_0}}} & & \big\downarrow{\scriptstyle \iota_A} \\ \widehat{\widehat{A}}_{i_0} & \xrightarrow{\hat{\hat{\iota}}_{i_0}} & \widehat{\widehat{A}} \end{array}$$

kommutativ. Es folgt

$$\chi = \chi_{i_0} \circ \widehat{\iota}_{i_0} = \hat{\hat{\iota}}_{i_0}(\chi_{i_0}) = \hat{\hat{\iota}}_{i_0}(\iota_{A_{i_0}}(a)) = \iota_A(\iota_{i_0}(a)),$$

also die Surjektivität von ι_A. Da mit A nach Satz 1.3.2 und 1.3.7 auch $\widehat{\widehat{A}}$ diskret ist, ist ι_A trivialerweise ein Homöomorphismus. □

Satz 1.10.6. *Für kompakte Abelsche Gruppen K ist ι_K ein Isomorphismus.*

Beweis. Die duale Gruppe $D := \widehat{K}$ von K ist nach Satz 1.3.7 diskret. Für $\hat{\hat{d}} \in \widehat{\widehat{D}}$ gibt es somit nach Satz 1.10.5 ein $d \in D$ mit $\hat{\hat{d}} = \iota_D(d)$. Es folgt

$$\begin{aligned} \hat{\hat{d}} \in (\iota_K(K))^{\perp} &\Leftrightarrow \hat{\hat{d}}(\iota_K(k)) = 0\ \forall k \in K \Leftrightarrow \iota_D(d)(\iota_K(k)) = 0\ \forall k \in K \\ &\Leftrightarrow \iota_K(k)(d) = 0\ \forall k \in K \Leftrightarrow d(k) = 0\ \forall k \in K \Leftrightarrow d = 0 \\ &\Leftrightarrow \hat{\hat{d}} = 0, \end{aligned}$$

also $(\iota_K(K))^{\perp} = \{0\}$. $\iota_K(K)$ ist als stetiges Bild der kompakten Menge K abgeschlossen in $\widehat{\widehat{K}}$ Wegen Proposition 1.7.6 gilt $(\iota_K(K))^{\perp} \cong (\widehat{\widehat{K}}/\iota_K(K))^{\wedge}$ und mit Satz 1.9.6 $\widehat{\widehat{K}}/\iota_K(K) = \{0\}$ und damit $\iota_K(K) = \widehat{\widehat{K}}$, also die Surjektivität von ι_K. □

1.11 Dualitätssatz für lokalkompakte Abelsche Gruppen

Satz 1.11.1. *Auf einer lokalkompakten Abelschen Gruppe G operiert ihre Charaktergruppe punktetrennend.*

Beweis. Da Charaktere Homomorphismen sind genügt es zu zeigen, dass es für $0 \neq a \in G$ einen Charakter χ mit $\chi(a) \neq 1$ gibt.

Für eine kompakte 0-Umgebung V mit $a \in V$ sei H die von V erzeugte Untergruppe. Nach Satz 1.8.3 gibt es eine diskrete Untergruppe D von H mit $a \notin D$ und H/D kompakt. Wegen Satz 1.9.6 gibt es einen Charakter χ_0 auf H/D mit $\chi_0(a+D) \neq 1$. Für die natürliche Abbildung $q: \; H \to H/D$ ist $\chi := \chi_0 \circ q$ dann ein Charakter auf H mit $\chi(a) \neq 1$. Nach Lemma 1.7.3 kann dieser von der offenen Untergruppe H zu einem Charakter auf G fortgesetzt werden. □

Korollar 1.11.2. *Für eine lokalkompakte Abelsche Gruppe G ist die natürliche Einbettung ι_G von G in $\widehat{\widehat{G}}$ injektiv.*

Beweis. Für $x \neq y$ gibt es einen Charakter χ mit $\iota_G(x)(\chi) = \chi(x) \neq \chi(y) = \iota_G(y)(\chi)$. Es folgt, dass ι_G injektiv ist. □

Satz 1.11.3. *Für eine kompakt erzeugte Abelsche Gruppe G ist ι_G ein Isomorphismus.*

Beweis. Nach Satz 1.3.8 ist ι_G ein Morphismus und nach Korollar 1.11.2 injektiv.

Nach Satz 1.8.3 hat die kompakt erzeugte Gruppe G eine diskrete Untergruppe D mit G/D kompakt. Nach Korollar 1.4.4 ist $\widehat{\iota}(\widehat{G})$ abgeschlossen in $\widehat{D}$. $\widehat{D}$ ist nach Satz 1.3.2 kompakt und es folgt mit Korollar 1.9.7, dass $\widehat{\iota}$ surjektiv ist, falls $\hat{\hat{\iota}}$ injektiv ist.

Nach Lemma 1.7.1 vi) ist das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} D & \xrightarrow{\iota} & G \\ \downarrow{\scriptstyle \iota_D} & & \downarrow{\scriptstyle \iota_G} \\ \widehat{\widehat{D}} & \xrightarrow{\hat{\hat{\iota}}} & \widehat{\widehat{G}} \end{array}$$

kommutativ. $\iota_G \circ \iota$ ist als Zusammensetzung injektiver Morphismen injektiv vgl. Kor. 1.11.2. Daher ist $\hat{\hat{\iota}} \circ \iota_D$ injektiv. ι_D ist aber nach Satz 1.10.5 surjektiv, also folgt die Injektivität von $\hat{\hat{\iota}}$. Also ist $\widehat{\iota}$ surjektiv. Zusammen mit Proposition 1.7.12 folgt, dass die Sequenz

$$0 \longleftarrow \widehat{D} \xleftarrow{\widehat{\iota}} \widehat{G} \xleftarrow{\widehat{q}} \widehat{G/D} \longleftarrow 0$$

exakt ist mit $\widehat{\iota}$ offen und $\widehat{q}$ offen als Abbildung $\widehat{G/D} \to \widehat{q}(\widehat{G/D})$. Nochmaliges Anwenden von Proposition 1.7.12 zeigt dass

$$\widehat{\widehat{D}} \xrightarrow{\hat{\hat{\iota}}} \widehat{\widehat{G}} \xrightarrow{\hat{\hat{q}}} \widehat{\widehat{G/D}} \tag{1.13}$$

exakt in $\widehat{\widehat{G}}$ ist.

Die Morphismen ι_D und $\iota_{G/D}$ sind nach Satz 1.10.5 bzw. 1.10.6 Isomorphismen.

$$\begin{tikzcd}
D \arrow[r, "\iota"] \arrow[d, "\iota_D"] & G \arrow[r, "q"] \arrow[d, "\iota_G"] & G/D \arrow[d, "\iota_{G/D}"] \\
\widehat{\widehat{D}} \arrow[r, "\hat{\hat{\iota}}"] & \widehat{\widehat{G}} \arrow[r, "\hat{\hat{q}}"] & \widehat{\widehat{G/D}}
\end{tikzcd}$$

Damit ist $\iota_{G/D} \circ q$ als Zusammensetzung surjektiver Abbildungen surjektiv. Wegen $\iota_{G/D} \circ q = \hat{\hat{q}} \circ \iota_G$ folgt

$$\hat{\hat{q}}(\iota_G(G)) = \widehat{\widehat{G/D}},$$

und da das Diagramm (1.13) in $\widehat{\widehat{G}}$ exakt ist

$$\widehat{\widehat{G}} = \iota_G(G) + \ker(\hat{\hat{q}}) = \iota_G(G) + \hat{\hat{\iota}}(\widehat{\widehat{D}}) = \iota_G(G) + \iota_G(\iota(D)) = \iota_G(G),$$

also die Surjektivität von ι_G. Als kompakt erzeugte Gruppe ist G σ-kompakt und nach dem Satz von der offenen Abbildung 1.7.9 ι_G offen also ein Isomorphismus.

□

Wir können jetzt den Dualitätssatz beweisen:

Satz 1.11.4 (Pontryagin, Van Kampen)**.** *Für eine lokalkompakte Abelsche Gruppe A ist der kanonische Morphismus $\iota_A : A \to \widehat{\widehat{A}}$ ein Isomorphismus.*

Beweis. Nach Satz 1.3.8 und Korollar 1.11.2 ist $\iota_A : A \to \widehat{\widehat{A}}$ ein injektiver Morphismus. Wir haben also zu zeigen, dass ι_A surjektiv und offen ist.

Für eine kompakte 0-Umgebung V sei U die von V erzeugte Untergruppe. Wegen $U = \cup_n V_n$ mit $V_1 = V$ und $V_{n+1} = V + V_n$ ist U offen, damit auch abgeschlossen und kompakt erzeugt. Wir betrachten das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & U \arrow[r, "\iota"] \arrow[d, leftrightarrow, "\iota_U"] & A \arrow[r, "q"] \arrow[d, "\iota_A"] & A/U \arrow[r] \arrow[d, leftrightarrow, "\iota_{A/U}"] & 0 \\
& \widehat{\widehat{U}} \arrow[r, "\hat{\hat{\iota}}"] & \widehat{\widehat{A}} \arrow[r, "\hat{\hat{q}}"] & \widehat{\widehat{A/U}} &
\end{tikzcd} \tag{1.14}$$

Nach Satz 1.11.3 ist ι_U ein Isomorphismus, der nach Kor 1.11.2 injektiv ist. Da U offen ist und Quotientenabbildungen offen sind, ist $q(U)$ offen in A/U. $q(U)$ ist aber das Nullelement in A/U, womit A/U diskret ist. Mit Satz 1.10.5 ist also auch $\iota_{A/U}$ ein Isomorphismus.

Die Sequenz

$$0 \longrightarrow U \xrightarrow{\iota} A \xrightarrow{q} A/U \longrightarrow 0$$

ist offensichtlich exakt mit q offen und ι offen als Abbildung $U \mapsto \iota(U)$. Nach Proposition 1.7.12 ist zunächst

$$\widehat{U} \xleftarrow{\widehat{\iota}} \widehat{A} \xleftarrow{\widehat{q}} \widehat{A/U} \longleftarrow 0$$

exakt mit $\widehat{\iota}$ offen als Abbildung $\widehat{A} \to \widehat{\iota}(\widehat{A})$ und $\widehat{q}$ offen als Abbildung $\widehat{A/U} \to \widehat{q}(\widehat{A/U})$. Wegen Korollar 1.7.4 ist $\widehat{\iota}$ surjektiv.

d.h die Sequenz

$$0 \longleftarrow \widehat{U} \xleftarrow{\widehat{\iota}} \widehat{A} \xleftarrow{\widehat{q}} \widehat{A/U} \longleftarrow 0 \tag{1.15}$$

ist exakt mit $\widehat{\iota}$ offen und $\widehat{q}$ offen als Abbildung $\widehat{A/U} \to \widehat{q}(\widehat{A/U})$.

Mit Proposition 1.7.12 folgt, dass die Sequenz

$$\widehat{\widehat{U}} \xrightarrow{\widehat{\widehat{\iota}}} \widehat{\widehat{A}} \xrightarrow{\widehat{\widehat{q}}} \widehat{\widehat{A/U}}$$

ebenfalls exakt ist. Weiters ist nach Lemma 1.7.1 vi) das Diagramm (1.14) kommutativ. Da $\iota_{A/U} \circ q$ als Zusammensetzung surjektiver Abbildungen surjektiv ist muss $\widehat{\widehat{q}}(\iota_A(A)) = \widehat{\widehat{A/U}}$ gelten. Es folgt

$$\widehat{\widehat{A}} = \iota_A(A) + \ker(\widehat{\widehat{q}}) = \iota_A(A) + \widehat{\widehat{\iota}}(\widehat{\widehat{U}}) = \iota_A(A) + \iota_A(\iota(U)) = \iota_A(A),$$

also die Surjektivität von ι_A.

Es bleibt zu zeigen, dass ι_A offen ist: Es folgt aus Korollar 1.4.4 angewandt auf die Sequenz (1.15), dass $\widehat{\widehat{\iota}}(\widehat{\widehat{U}})$ abgeschlossen in $\widehat{\widehat{A}}$ ist. Da ι_U surjektiv ist, ist $\widehat{\widehat{\iota}} \circ \iota_U$ abgeschlossen und nach dem Satz von der offenen Abbildung 1.7.9 offen. Dann ist auch $\iota_A \circ \iota$ offen, d.h. ι_A eingeschränkt auf U ist offen und da Translationen Homöomorphismen sind (Satz 1.1.3), ist für $a \in A$ die Einschränkung von ι_A auf $a + U$ offen. Für eine beliebige offene Teilmenge O von A gilt dann $O = \cup_{x \in A} O \cap (x + U)$ mit offenen Mengen $O \cap (x+U)$ die unter ι_A auf offene Mengen in $\widehat{\widehat{A}}$ abgebildet werden. Es folgt $\iota_A(O)$ ist offen in $\widehat{\widehat{A}}$ und ι_A ist eine offene Abbildung. $\square$

Als Anwendung des Dualitätssatzes zeigen wir

Satz 1.11.5. *Ist H eine abgeschlossene Untergruppe einer lokalkompakten Abelschen Gruppe G, so ist $\widehat{H}$ kanonisch isomorph zu $\widehat{G}/H^{\perp}$ und jeder Charakter auf H kann zu einem Charakter auf G fortgesetzt werden.*

Beweis. Da das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} H & \xrightarrow{\iota} & G \\ \downarrow{\scriptstyle \iota_H} & & \downarrow{\scriptstyle \iota_G} \\ \widehat{\widehat{H}} & \xrightarrow{\hat{\hat{\iota}}} & \widehat{\widehat{G}} \end{array}$$

nach Lemma 1.7.1 vi) kommutiert, ι_H nach dem Dualitätssatz 1.11.4 bijektiv ist und $\iota_G \circ \iota$ als Zusammensetung injektiver Funktionen injektiv ist, folgt dass $\hat{\hat{\iota}}$ injektiv ist.

$\widehat{\iota}$ ist surjektiv auf $\widehat{H}$, denn $\widehat{\iota}$ hat nach Korollar 1.4.4 abgeschlossenes Bild in $\widehat{H}$. Wäre $\widehat{\iota}$ nicht surjektiv gäbe es nach Satz 1.11.1 einen nichttrivialen Charakter $\tilde{\chi}$ auf $\widehat{H}/\widehat{\iota}(\widehat{G})$. Dann wäre $\chi := \tilde{\chi} \circ q$ (q ist die natürliche Abbildung $\widehat{H} \to \widehat{H}/\widehat{\iota}(\widehat{G})$) ein Charakter der auf $\widehat{H}$ der auf $\widehat{\iota}(\widehat{G})$ trivail ist. Dann wäre aber wegen $\chi(\widehat{\iota}(\widehat{g})) = 1 \ \forall \widehat{g} \in \widehat{G}$ auch $\hat{\hat{\iota}}(\chi)$ trivial auf $\widehat{\widehat{G}}$ und $\hat{\hat{\iota}}$ wäre nicht injektiv.

Da $\widehat{\iota}$ die Restriktion eines Charakters aus $\widehat{G}$ auf H ist, folgt, dass jeder Charakter auf H zu einem auf G fortgesetzt werden kann (genau durch ein Urbild des Morphismus $\widehat{\iota}$).

Der Homomorphismus $\widehat{\iota}$ induziert nach dem Isomorphiesatz einen algebraischen Isomorphismus von $\widehat{G}/\ker(\widehat{\iota})$ auf $\widehat{H}$. $\ker(\iota)$ ist offensichtlich gleich $H^{\perp}$, also sind $\widehat{G}/H^{\perp}$ und $\widehat{H}$ algebraisch isomorph. $\widehat{\iota}$ ist stetig und nach Lemma 1.7.5 offen. Damit ist ι ein Isomorphismus lokalkompakter Gruppen. □

Für kompakte Abelsche Gruppen G folgt aus dem Satz von Stone-Weierstraß unmittelbar, dass eine punktetrennende abgeschlossene Untergruppe von $\widehat{G}$ gleich $\widehat{G}$ ist. Mit dem Dualitätssatz folgt diese Aussage auch für lokalkompakte Abelsche Gruppen:

Satz 1.11.6. *Ist Γ eine punktetrennende abgeschlossene Untergruppe von $\widehat{G}$, $G \in$* LCA*, so gilt $\Gamma = \widehat{G}$.*

Beweis. Nach dem Dualitätssatz 1.11.4 gilt

$$\Gamma^{\perp} = \{z \in \widehat{\widehat{G}} : z(\zeta) = 1 \forall \zeta \in \Gamma\} = \iota(\{x \in G : \zeta(x) = 1, \forall \zeta \in \Gamma\} = \iota(e_G) = e_{\widehat{\widehat{G}}}$$

Mit Satz 1.11.5 folgt $\widehat{\Gamma} \cong \widehat{\widehat{G}}$, also $\widehat{\Gamma} \cong \widehat{\widehat{G}}$ und mit dem Dalitätssatz $\iota_{\widehat{G}}(\Gamma) \cong \iota_{\widehat{G}}(\widehat{G})$, also $\Gamma = \widehat{G}$. □

Kapitel 2

Stone-Čech Kompaktifizierung

2.1 Trennungsaxiome

Ein topologischer Raum $(X, \mathcal{T})$ heißt

–T_0 wenn es für $x, y \in X$, $x \neq y$ eine Umgebung U von x mit $y \notin U$ oder eine Umgebung V von y mit $x \neq V$ gibt.

–T_1 wenn wenn es für $x, y \in X$, $x \neq y$ eine Umgebung U von x mit $y \notin U$ und eine Umgebung V von y mit $x \notin V$ gibt.

–T_2 (Hausdorff'sch oder separiert), wenn es für $x, y \in X$, $x \neq y$ eine Umgebung U von x und eine Umgebung V von y mit $U \cap V = \emptyset$ gibt.

–T_3 wenn es für A abgeschlossen in X und $x \in X \setminus A$ eine Umgebung U von x und eine offene Menge $O \supseteq A$ mit $U \cap O = \emptyset$ gibt.

–$T_{3,5}$ enn es für A abgeschlossen in X und $x \in X \setminus A$ eine stetige Funktion $f : X \to [0,1]$ mit $f(x) = 1,\ f(y) = 0,\ \forall y \in A$ gibt.

–T_4 wenn es zu disjunkten abgeschlossenen Teilmengen A, B von X disjunkte offene Telmengen U und V von X mit $A \subseteq U$, $B \subseteq V$ gibt.

–**regulär** wenn er T_3 und T_1 ist.

–**vollständig regulär** wenn er $T_{3,5}$ und T_1 ist.

–**normal** wenn er T_4 und T_1 ist.

Satz 2.1.1. *Äquivalent sind*

i) X ist T_1

ii) Punkte sind abgeschlossen in X.

iii) Jede Teilmenge von X ist der Durchschnitt ihrer offenen Obermengen.

Beweis. i)⇒ ii): Für jedes $y \neq x$ gibt es eine offene Umgebung U_y von y, die x nicht enthält. Die Vereinigung aller dieser offenen Mengen U_y mit $y \in X \setminus \{x\}$ ist dann $X \setminus \{x\}$.

ii)⇒ iii): $A = \cap_{x \notin A} \{x\}^{\complement}$.

iii)$\Rightarrow$ i): $\{x\}$ ist der Durchschnitt aller offenen Obermengen. Damit gibt es für $y \neq x$ eine offene Menge O mit $y \notin O, x \in O$. $\square$

Satz 2.1.2. *Äquivalent sind*

i) X ist T_2

ii) Konvergiert ein Filter in X gegen x und gegen y, so folgt $x = y$.

iii) Für $x \in X$ gilt $\{x\}$ ist der Durchschnitt aller abgeschlossenen Umgebungen von x.

iv) Die Diagonale $D := \{(x,x) : x \in X\} \subseteq X \times X$ ist abgeschlossen in $X \times X$.

Beweis. i)$\Rightarrow$ ii): Für $x \neq y$ und disjunkte Umgebungen U und V von x resp. y müssten U und V im Filter liegen. Da der Durchschnitt von U und V leer ist, müsste auch die leere Menge im Filter liegen, ein Widerspruch.

ii)$\Rightarrow$ iii): Für $x \in X$ und y im Durchschnitt aller abgeschlossenen Umgebungen von x folgt, dass y Berührungspunkt des Umgebungsfilters von x ist. D.h. jede Umgebung von x hat nichtleeren Schnitt mit jeder Umgebung von y. Die Mengen $U \cap V$, $U \in \mathcal{U}(x), V \in \mathcal{U}(y)$ sind also eine Filterbasis. Der von dieser Filterbasis erzeugte Filter konvergiert dann sowohl gegen x also auch gegen y. Nach Voraussetzung folgt $x = y$.

iii)$\Rightarrow$ i): Für $y \neq x$ gibt es eine abgeschlossene Umgebung A von x mit $y \notin A$. Damit sind A und $A^{\complement}$ disjunkte Umgebungen von x und y.

i)$\Rightarrow$ iv): Für $x \neq y$ und disjunkte Umgebungen U, V von x resp. y ist $U \times V$ eine Umgebung von $(x,y) \in X \times X$ mit $D \cap U \times V = \emptyset$. Also ist $D^{\complement}$ offen.

iv)$\Rightarrow$ i): Für $(x,y) \notin D$ gibt es eine Umgebung W von (x,y) mit $W \cap D = \emptyset$. Eine Umgebungsbasis im Produktraum $X \times X$ besteht aus den Mengen $U \times V$ mit U, V offen in X. Also gibt es offene Mengen U, V in X mit $(x,y) \in U \times V \subseteq W$. Es folgt $(U \times V) \cap D = \emptyset$ und damit $U \cap V = \emptyset$. $\square$

Satz 2.1.3. *Äquivalent sind*

i) X ist T_3

ii) Für $x \in X$ bilden die abgeschlossenen Umgebungen eine Umgebungsbasis.

Beweis. i)$\Rightarrow$ ii): Für eine offene Umgebung U von x ist $U^{\complement}$ abgeschlossen mit $x \notin U^{\complement}$. Damit gibt es eine Umgebung V von X und eine offene Obermenge O von $U^{\complement}$ mit $V \cap O = \emptyset$. Es folgt $\bar{V} \subseteq O^{\complement} \subset U$.

ii)$\Rightarrow$ i): Für $x \notin A = \bar{A}$ ist $A^{\complement}$ eine Umgebung von x. Sei B eine abgeschlossene Umgebung von x mit $B \subset A^{\complement}$. Dann sind B und $\bar{B}^{\complement}$ offen, disjunkt mit $x \in B^{\circ}$ und $\bar{B}^{\complement} \supseteq A$. $\square$

Satz 2.1.4. *Äquivalent sind*

i) X ist $T_{3,5}$

ii) X hat eine Basis bestehend aus Mengen $f^{-1}(U)$, f stetig $X \to \mathbb{R}$, U offen in $\mathbb{R}$.

iii) Abgeschlossene Mengen in X sind als Durchschnitt von Nullstellenmengen stetiger reellwertiger Funktionen darstellbar.

iv) Abgeschlossene Mengen in X sind als Durchschnitt von Nullstellenmengen stetiger beschränkter reellwertiger Funktionen darstellbar.

Beweis. i)$\Rightarrow$ ii): Für O offen in X mit $x \in O$ gibt es $f : X \to \mathbb{R}$, f stetig mit $f(x) = 1, f|_{O^{\complement}} = 0$. Dann folgt $x \in f^{-1}((1/2,\infty)) \subseteq O$. Also ist die durch stetige Funktionen induzierte Topologie feiner als $\mathcal{T}$. Diese ist aber wegen der Stetigkeit der Funktionen f auch gröber als $\mathcal{T}$.

ii)$\Rightarrow$ iii): Nach Voraussetzung ist jede offene Menge als $\cup_i f_i^{-1}(U_i)$ mit stetigen Funktionen $f_i : X \to \mathbb{R}$ und U_i offen in $\mathbb{R}$ darstellbar. Für eine abgeschlossene Teilmenge A von X folgt $A = (\cup_i f_i^{-1}(U_i))^{\complement} = \cap_i f_i^{-1}(U_i^{\complement})$. Für $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = \operatorname{dist}(x, U_i^{\complement})$ gilt g ist stetig mit $g(x) = 0 \Leftrightarrow x \in U_i^{\complement}$, also $U_i^{\complement} = g^{-1}(0)$. Es folgt $A = \cap_i (g \circ f_i)^{-1}(0)$.

iii)$\Rightarrow$ i): Für $x \notin A$ gibt es ein stetiges f mit $f(A) = \{0\}$, $f(x) \neq 0$. Dann ist $\tilde{f} := \min(1, \max(0, 1/f(x) f))$ stetig $X \to [0,1]$ mit $\tilde{f}(x) = 1$, $\tilde{f}(A) = \{0\}$.

iii)$\Rightarrow$ iv) ist klar wenn man die Funktionen f durch $\min(1, \max(0, f))$ ersetzt.

iv)$\Rightarrow$ iii) ist trivial. $\square$

Satz 2.1.5. *Ein topologischer Raum $(X, \mathcal{T})$ ist genau dann vollständig regulär, wenn er in einen Produktraum $[0,1]^J$ mit einer geeigneten Indexmenge J und der Produkttopologie eingebettet werden kann, d.h. wenn es eine Abbildung $\Phi : X \to [0,1]^J$ gibt, die ein Homöomorphismus von X auf $\Phi(X)$ versehen mit der Relativtopologie ist.*

Beweis. Sei X vollständig regulär. Wir wählen als Indexmenge $J := C(X, [0,1])$ (stetige Funktionen von X nach $[0,1]$) und definieren als Einbettung die Abbildung $\Phi : X \to [0,1]^J$ durch $(\Phi(x))_f = f(x) \forall f \in J$. Für $x \neq y$ ist $\{y\}$ abgeschlossen, damit gibt es, da X $T_{3,5}$ ist, eine stetige Funktion f_0 mit $f_0(x) = 1$ und $f_0(y) = 0$. Es folgt $1 = (\Phi(x))_{f_0} \neq (\Phi(y)_{f_0} = 0$, also ist Φ injektiv. Φ ist stetig, da $x \mapsto \operatorname{pr}_f \circ \Phi(x) = f(x)$ für alle $f \in J$ stetig ist. Damit ist die durch Φ auf X induzierte Topologie gröbe als $\mathcal{T}$. Für $x \in O \in \mathcal{T}$ gibt es aber eine stetige Funktion f_0 mit $f_0(x = 1$ und $f(O^C) = \{0\}$. Es folgt, dass $\Phi^{-1}(\operatorname{pr}_{f_0}^{-1}(1/2,\infty)))$ eine Teilmenge von O ist, die x enthält. Damit ist die durch Φ induzierte Topologie auf X auch feiner als $\mathcal{T}$.

$[0,1]$ ist, wie man elementar sieht vollständig regulär. Für $\zeta \notin A = \bar{A} \subset [0,1]^J$ gibt es $f_1, \ldots, f_n$ und offene Teilmengen U_i von $[0,1]$ mit $\zeta \in \cap_{i=1}^n \operatorname{pr}_{f_i}^{-1}(U_i) \subseteq A^{\complement}$. Für stetige Funktionen $g_i[0,1] \to [0,1]$, die $g_i \circ f_i(\zeta) = 1$ und $g_i \circ f_i(U_i^{\complement}) = \{0\}$ erfüllen ($[0,1]$ ist vollständig regulär!) folgt dass die Funktion $h : x \mapsto \prod_{i=1}^n g_i \circ f_i(x)$ ist dann stetig mit $h(\zeta) = 1$ und $f(A) = \{0\}$. $\square$

2.2 Kompaktifizierungen

Eine **Kompaktifizierung** (K, φ) eines topologischen Raumes X ist ein kompakter Raum K mit einer injektiven Abbildung $\varphi : X \to K$ für die $\varphi(X)$ dicht in K ist und φ als Abbildung $X \to \varphi(X)$ ein Homöomorphismus ist. Lokalkompakte Hausdorffräume besitzen etwa die Einpunktkompaktifizierung, die durch Hinzunahme des Punktes "∞" und der Mengen die ∞ enthalten und deren Komplement kompakt in X ist zur Topologie entsteht.

Nach Satz 2.1.5 ist ein topologischer Raum X genau dann vollständig regulär wenn er in den Produktraum $I^{C(X,I)}$ eingebettet werden kann, d.h. wenn die Abbildung $\varphi : X \to I^{C(X,I)}$ definiert durch $\mathrm{pr}_f(\varphi(x)) = f(x)$ ein Homöomorphismus von X auf $\varphi(X)$ versehen mit der Spurtopologie ist. Der Abschluss βX von $\varphi(X)$ in $I^{C(X,I)}$ ist als abgeschlossene Teilmenge des Kompaktums $I^{C(X,I)}$ kompakt. βX ist somit eine Kompaktifizierung von X. Sie wird als **Stone-Čech Kompaktifizierung** bezeichnet.

Ist K eine Kompaktifizierung von X, so ist für jede stetige surjektive Abbildung $\psi : K \to C$, C ein topologischer Raum, die eingeschränkt auf $\varphi(X) \subseteq K$ injektiv ist C durch die Abbildung $\psi \circ \varphi$ eine Kompaktifizierung von X. Die Stone-Čech Kompaktifizierung βX besitzt die universelle Eigenschaft, dass alle Kompaktifizierungen so aus βX hervorgehen:

Satz 2.2.1. *Ist X ein vollständig regulärer Raum mit Stone-Čech Kompaktifizierung βX, sowie f eine stetige Abbildung von X in einen kompakten Raum Y. Dann gibt es eine stetige Abbildung $F : \beta X \to Y$ mit $f = F \circ \varphi$ wobei φ die Einbettung von X in βX bezeichnet.*

Fasst man X als Teilmenge von βX auf, so sagt dieser Satz, dass jede auf X stetige Funktion mit Werten in einem Kompaktum Y zu einer stetigen Funktion von βX nach Y fortgesetzt werden kann.

Beweis. Für den kompakten Raum Y hat die Einbettungsabbildung $\tilde{\varphi} : Y \to \beta Y$ kompaktes und damit abgeschlossenes Bild. $\tilde{\varphi}$ ist damit eine stetige Bijektion von Y auf βY und somit ein Homöomorphismus. Für jedes $h \in C(Y, I)$ ist $\mathrm{pr}_h \circ \tilde{\varphi} \circ f$ aus $C(X, I)$ und faktorisiert damit durch βX, d.h es gibt $\tilde{h} \in C(\beta X, I)$ mit $\tilde{h} \circ \varphi = \mathrm{pr}_h \circ \tilde{\varphi} \circ f$ (nämlich $\tilde{h} = \mathrm{pr}_{\mathrm{pr}_h \circ \tilde{\varphi} \circ f}$). Damit kommutiert das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\varphi"] & Y \arrow[r, leftrightarrow, "\tilde{\varphi}"] & \beta Y \arrow[r, "\mathrm{pr}_h"] & I \\
\beta X . \arrow[urrr, "\tilde{h}"] & & &
\end{tikzcd}$$

Da $C(Y, I)$ die Koordinaten des Produktraumes $I^{C(Y,I)}$ durchläuft und ein Element x des Produktraumes durch seine Kpprdinaten pr_h bestimmt ist, wird eine Abbildung

$\tilde{f} : \beta X \to \beta Y$ durch $\mathrm{pr}_h \circ \tilde{f} = \tilde{h}$ für $h \in C(Y,I)$ definiert, die nach βY abbildet. Da $\tilde{h}$ für alle $h \in C(Y,I)$ stetig ist, ist $\mathrm{pr}_h \circ \tilde{f}$ und damit $\tilde{f}$ stetig. Wegen

$$\mathrm{pr}_h \circ \tilde{\varphi} \circ f = \tilde{h} \circ \varphi = \mathrm{pr}_h \circ \tilde{f} \circ \varphi$$

folgt $\tilde{\varphi} \circ f = \tilde{f} \circ \varphi$, d.h. das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\varphi"] & Y \arrow[r, hook, "\tilde{\varphi}"] & \beta Y \arrow[r, "\mathrm{pr}_h"] & I \\
\beta X \arrow[ur, "F"] \arrow[urr, "\tilde{f}"] \arrow[urrr, "\tilde{h}"'] & & &
\end{tikzcd}$$

kommutiert und induziert durch $F := \tilde{f} \circ \tilde{\varphi}^{-1}$ die gewünschte Abbildung F mit

$$f = \tilde{\varphi}^{-1} \circ \tilde{f} \circ \varphi = F \circ \varphi. \qquad \square$$

Korollar 2.2.2. *In einem vollständig regulären Raumes X ist die Stone-Čech Kompaktifizierung bis auf Homöomorphie eindeutig, d.h. haben zwei Kompaktifizierungen (Y_1,φ_1) und (Y_2,φ_2) von X die Eigenschaft, dass sich jede stetige Funktion von X in einen kompakte Raum Z zu stetigen Funktionen von Y_i nach Z fortsetzen lässt, so gibt es einen eindeutigen Homöomorphismus $\Phi : Y_1 \to Y_2$ mit $\Phi \circ \varphi_1 = \varphi_2$ auf X.*

Beweis. Nach Voraussetzung kann die stetige Abbildung $\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}$ von $\varphi_1(X)$ zu einer stetigen Abbildung $\Phi : Y_1 \to Y_2$ fortgesetzt werden. Als stetiges Bild der kompakten Menge Y_1 ist $\Phi(Y_1)$ kompakt und damit abgeschlossen. Wegen $\Phi(\varphi_1(X)) = \varphi_2(X)$ ist das Bild von Y_1 unter Φ auch dicht. Damit ist Φ surjektiv. Analog folgt dass die stetige Fortsetzung Θ von $\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1}$ auf Y_2 surjektiv als Abbildung $Y_2 \to Y_1$ ist. Auf $\varphi_1(X)$ stimmt aber $\Theta \circ \Phi$ mit der Identität überein, ebenso wie $\Phi \circ \Theta$ auf $\varphi_2(X)$. Da auf Hausdorffräumen stetige Funktionen durch ihre Werte auf einer dichten Teilmenge eindeutig bestimmt sind folgt, dass Θ die Inverse zu Φ ist. $\square$

2.3 Die Halbgruppe $(\beta\mathbb{N},+)$

Wir geben am Beispiel von $\mathbb{N}$ eine Realisierung der Stone-Čech Kompaktifizierung diskreter Räume durch Ultrafilter, die unter vielen Gesichtspunkten zweckmäßiger als die Darstellung als Teilraum des Produktraumes $I^{C(X,I)}$ ist:

Es sei $\mathcal{U}$ die Menge aller Ultrafilter auf $\mathbb{N}$. Wir versehen $\mathcal{U}$ mit der durch die Basis $\mathcal{B} = \{B_A : A \subseteq \mathbb{N}\}$ mit $B_A := \{U \in \mathcal{U} : A \in U\}$ induzierten Topologie auf $\mathcal{U}$. Dann gilt:

Proposition 2.3.1. *$\mathcal{U}$ ist mit der soeben definierten Topologie ein kompakter total unzusammenhängender Hausdorffraum.*

(Ein topologischer Raum heißt **total unzusammenhängend**, wenn alle Zusammenhangskomponenten einelementig sind.)

Beweis. Für $U_1 \neq U_2$ folgt dass es $A \subset \mathbb{N}$ mit $A \in U_1$ und $A \notin U_2$ gibt, da jeder Ultrafilter auf $\mathbb{N}$ für jede Teilmenge A von $\mathbb{N}$ entweder A oder $A^\complement$ enthält. Also gilt $U_1 \in B_A$ und $U_2 \in B_{A^\complement}$. Da B_A und $B_{A^\complement}$ offensichtlich disjunkt sind ist $\mathcal{U}$ mit der soeben definierten Topologie ein Hausdorffraum.

Wäre $\mathcal{U}$ nicht kompakt, so gäbe es eine Überdeckung $\cup_{i\in I} B_{A_i}$ von $\mathcal{U}$ durch Basismengen B_{A_i} aus $\mathcal{B}$ ohne endlicher Teilüberdeckung, d.h. für alle endlichen Teilmengen F von I wären die Mengen $\cap_{i\in F} B_{A_i}^\complement$ nichtleer. Wegen

$$\cap_{i\in F} B_{A_i}^\complement = \cap_{i\in F} B_{A_i^\complement} = B_{\cap_{i\in F} A_i^\complement}$$

folgt $\cap_{i\in F} A_i^\complement \neq \emptyset$ für endliche Teilmengen F von I. Diese Mengen bilden also die Basis eines Filters auf $\mathbb{N}$. Sei U ein Ultrafilter der den von dieser Filterbasis erzeugten Filter enthält. Dann folgt $A_i^\complement \in U$, also $A_i \notin U$ für alle $i \in I$ und damit $U \notin B_{A_i}$ für i $\in I$ im Widerspruch zu unserer Annahme, dass die Mengen B_{A_i} $\mathcal{U}$ überdecken.

Für $U_1 \neq U_2$ gibt es $A \subseteq \mathbb{N}$ mit $A \in U_1, A^\complement \in U_2$ also $U_1 \in B_A$ und $U_2 \in B_{A^\complement} = B_A^\complement$. Die Mengen B_A sind aber als Komplemente der offenen Mengen $B_{A^\complement}$ auch abgeschlossen. U_1 und U_2 liegen also in verschiedenen Zusammenhangskomponenten und $\mathcal{U}$ ist total unzusammenhängend. □

Fasst man $\mathbb{N}$ als Teilmenge seiner Stone-Čech Kompaktifizirung $\beta\mathbb{N}$ auf, so ist jeder Ultrafilter U auf $\mathbb{N}$ Filterbasis eines Ultrafilters auf $\beta\mathbb{N}$, der, da $\beta\mathbb{N}$ kompakt ist, gegen ein Element $p \in \beta\mathbb{N}$ konvergiert. Sei $\Phi : \mathcal{U} \to \beta\mathbb{N}, U \mapsto p$ die so definierte Abbildung.

Proposition 2.3.2. *Die Abbildung $\Phi : \mathcal{U} \to \beta\mathbb{N}$ ist ein Homöomorphismus.*

Beweis. Φ ist injektiv: Für zwei Ultrafilter $U_1 \neq U_2$ auf $\mathbb{N}$ gibt es eine Teilmenge A von $\mathbb{N}$ mit $A \in U_1$ und $A \notin U_2 \Rightarrow A^\complement \in U_2$. Es folgt $\Phi(U_1) \in \bar{A}$ und $\Phi(U_1) \in \bar{A^\complement} = \bar{A}^\complement$, also $\Phi(U_1) \neq \Phi(U_2)$.

Φ ist stetig: Das Bild eines Ultrafilters unter der Abbildung $f : \mathbb{N} \to I$ ist Filterbasis eines Ultrafilters auf I. Da I kompakt ist, konvergiert der so erzeugte Ultrafilter gegen ein Element aus I, das wir mit $U\text{-}\lim_{n\in\mathbb{N}} f(n)$ bezeichnen. Bezeichnet $\bar{f}$ die stetige Fortsetung von f auf $\beta\mathbb{N}$ und fassen wir U als Filterbasis des Ultrafilters $\Phi(U)$ in $\beta\mathbb{N}$ auf, so gilt $\bar{f}(\Phi(U)) = U\text{-}\lim_{n\in\mathbb{N}} f(n)$, da eine Abbildung $\bar{f}$ genau dann stetig ist, wenn für jeden gegen p konvergenten Filter U $\bar{f}(U)$ Filterbasis eines gegen $\bar{f}(p)$ konvergenten Filters ist.

Subbasis der Topologie auf dem Produktraum $I^{C(\mathbb{N},I)}$ sind die Urbilder $\mathrm{pr}_f^{-1}(O)$ für O offen in I und f eine Funktion auf $\mathbb{N}$ mit Werten in I. Es folgt

$$\begin{aligned}&\Phi^{-1}(\{p \in \beta\mathbb{N} : \bar{f}(p) \in O\}) = \{U \in \mathcal{U} : U - \lim f \in O\}\\ =&\{U \in \mathcal{U} : f^{-1}(O) \in U\} = B_{f^{-1}(O)} \in \mathcal{B}\end{aligned}$$

und damit die Stetigkeit von Φ.

Als stetiges Bild der kompakten Menge $\mathcal{U}$ ist $\Phi(\mathcal{U})$ kompakt und damit abgeschlossen in $\beta\mathbb{N}$. Die Hauptfilter $\{A \subseteq \mathbb{N} : n \in A\}$ bilden auf das Bild von n in $\beta\mathbb{N}$ ab. Das Bild von $\mathbb{N}$ unter der Einbettungsabbildung ist aber dicht in $\beta\mathbb{N}$ also hat Φ dichtes und abgeschlossenes Bild in $\beta\mathbb{N}$. Φ ist also surjektiv.

Als stetige Bijektion zwischen kompakten Mengen (Proposition 2.3.1) ist Φ ein Homöomorphismus. □

Aufgrund dieses Satzes können wir $\mathcal{U}$ als die Stone-Čech Kompaktifizierung $\beta\mathbb{N}$ von $\mathbb{N}$ auffassen. Wir identifizieren im Folgenden $\mathbb{N}$ mit den Hauptultrafiltern $\{A \subseteq \mathbb{N} : n \in A\}, n \in \mathbb{N}$. Für eine Teilmenge A von $\mathbb{N}$ bezeichnen wir mit $\bar{A}$ den Abschluss in $\beta\mathbb{N} = \mathcal{U}$ von A, aufgefasst als Teilmenge von $\beta\mathbb{N}$. Es gilt $\bar{A} = \{p \in \beta\mathbb{N} : p \in B_D \Rightarrow A \cap D \neq \emptyset\} = \{p \in \mathcal{U} : D \in p \Rightarrow A \cap D \neq \emptyset\}$. Da A oder $A^{\complement}$ in p sind gilt $D \in p \Rightarrow A \cap D \neq \emptyset$ genau wenn $A \in p$ gilt, also $\bar{A} = \{p : A \in p\} = B_A$. Die offen-abgeschlossene Menge $\bar{A}$ ist dann genau die Menge aller Ultrafilter auf $\mathbb{N}$ die die Menge $A \subseteq \mathbb{N}$ enthalten, d.h. mit dieser Notation gilt für $A \subseteq \mathbb{N}$, $p \in \beta\mathbb{N}$: $A \in p \Leftrightarrow p \in \bar{A}$.

Satz 2.3.3. *Eine Folge in* $\beta\mathbb{N}$ *ist nur dann konvergent wenn sie fast konstant ist, d.h. wenn alle Folgenglieder ab einem gewissen Index gleich sind.*

Beweis. Angenommen eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_n \neq x_0 \, \forall n \in \mathbb{N}$ konvergiert gegen x_0. Es gibt eine offen-abgeschlossene Umgebung $\bar{A}_1,\ A_1 \subset \mathbb{N}$ von x_1 und eine offene Umgebung V_1 von x_0 mit $\bar{A}_1 \cap V_1 = \emptyset$ Da $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen x_0 konvergiert sind alle Folgenglieder x_n für $n \geq n_1$ in V_1. Sei $y_1 := x_1$ und $y_2 := x_{n_1}$. y_2 hat eine Umgebung $\bar{A}_2 \subset V_1,\ A_2 \subset \mathbb{N}$ zu der es eine offene Umgebung $V_2 \subseteq V_1$ von x_0 mit $\bar{A}_2 \cap V_2 = \emptyset$ gibt. Induktiv können wir so eine Teilfolge $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definieren sowie eine Folge paarweise disjunkter offen-abgeschlossener Mengen $\bar{A}_i$ definieren für die $y_i \in \bar{A}_i$ gilt. Sei $A := \cup_{n\in\mathbb{N}} A_{2n}$ und $B := \cup_{n\in\mathbb{N}} A_{2n+1}$. Dann sind $\bar{A}$ und $\bar{B}$ disjunkt und abgeschlossen mit $y_{2n} \in \bar{A},\ y_{2n+1} \in \bar{B}$ für $n \in \mathbb{N}$. Da (x_n) gegen x_0 konvergiert, konvergieren y_{2n} und y_{2n+1} gegen x_0, woraus $x_0 \in \bar{A} \cap \bar{B}$ folgt, was wegen $\bar{A} \cap \bar{B} = \emptyset$ ein Widerspruch ist. □

Satz 2.3.4. *Jede unendliche abgeschlossene Teilmenge von* $\beta\mathbb{N}$ *enthält eine zu* $\beta\mathbb{N}$ *homöomorphe Teilmenge.*

Beweis. Sei M unendlich und abgeschlossen in $\beta\mathbb{N}$. Dann hat jedes $x \in M$ eine offen-abgeschlossene Umgebung $\bar{A}_1, A_1 \subseteq \mathbb{N}$ für die $M \setminus \bar{A}_1$ unendlich ist, anderenfalls wäre jede Folge in M bei der sich keine Folgenglieder wiederholen konvergent gegen x. Nach Satz 2.3.3 gibt es aber keine nichttrivialen konvergenten Folgen. Sei $x_1 \in M$ beliebig und $\bar{A}_1, A_1 \subset \mathbb{N}$ eine offen-abgeschlossene Umgebung von x_1 mit $M \setminus \bar{A}_1$ unendlich. Dann können wir mit derselben Argumentation für jedes $x_2 \in M \setminus \bar{A}_1$ eine offene Umgebung $\bar{A}_2, A_2 \subset \mathbb{N}$ finden, für die die abgeschlossene Menge $M \setminus (\bar{A}_1 \cup \bar{A}_2)$ unendlich ist. Da $\bar{A}_1^{\complement}$ offen in $\beta\mathbb{N}$ ist, können wir A_2 so wählen, dass $\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 = \emptyset$ gilt. Fahren wir induktiv so fort erhalten wir eine Folge paarweise disjunkter Teilmengen A_i von $\mathbb{N}$ mit $x_i \in M \cap \bar{A}_i$.

Für eine Funktion $f : \{x_i : i \in \mathbb{N}\} \to K$, K kompakt sei $\tilde{F} : \mathbb{N} \to K$, $\tilde{F}(m) = f(x_i)$ für $m \in A_i$ und $\tilde{F}(m)$ beliebig in K für $m \notin \cup A_i$ definiert. Für die stetige Fortsetzung F von $\tilde{F}$ auf $\beta\mathbb{N}$ gilt $F(x_i) = f(x_i)$, $i \in \mathbb{N}$. Die kompakte Menge $A := \overline{\{x_i : i \in \mathbb{N}\}}$ hat dann die universelle Eigenschaft, dass jede Funktion f auf der diskreten Menge $\{x_i : i \in \mathbb{N}\}$ mit Werten in einem Kompaktum K eindeutig zu einer stetigen Funktion auf A fortgesetzt werden kann. Damit ist A homöomorph zur Stone-Čech Kompaktifizierung der diskreten Menge $\{x_i : i \in \mathbb{N}\}$. □

Satz 2.3.5. *Auf* $\beta\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$ *gibt es eine Familie offen abgeschlossener paarweise disjunkter Teilmengen der Kardinalität* $\mathfrak{c}$.

Beweis. Es sei ρ eine Bijektion von $\mathbb{Q}$ auf $\mathbb{N}$. Für jede reelle Zahl x wählen wir eine Folge $(a_n^{(x)})_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{Q}$ mit $a_n^{(x)} \neq x$, die gegen x konvergiert. Für die unendlichen Teilmengen $A_x := \{\rho(a_n^{(x)}) : n \in \mathbb{N}\}$ von $\mathbb{N}$ folgt dass für $x \neq y$ $A_x \cap A_y$ endlich ist. Damit bilden $\bar{A}_x \setminus \mathbb{N}$ die gewünschte Familie von Teilmengen von $\beta\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$. □

Satz 2.3.6. *Es gilt* $|\beta\mathbb{N}| = 2^{\mathfrak{c}}$.

Beweis. Da jeder Ultrafilter als Element von $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N}))$ aufgefasst werden kann folgt $|\beta\mathbb{N}| \leq |\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N}))| = 2^{\mathfrak{c}}$. Andererseits enthält $\beta\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$ nach Satz 2.3.5 eine Familie von unendlichen abgeschlossenen paarweise disjunkten Mengen der Kardinalität $\mathfrak{c}$. Jede dieser Mengen enthält nach Satz 2.3.4 eine Kopie von $\beta\mathbb{N}$. Es folgt $|\beta\mathbb{N}| \geq |\beta\mathbb{N}|^{\mathfrak{c}} \geq 2^{\mathfrak{c}}$. □

Ein nützliches Kriterium dafür, dass ein Filter ein Ultrafilter ist, ist

Lemma 2.3.7. *Ein Filter* $\mathcal{F}$ *auf einer Menge* X *ist genau dann ein Ultrafilter, wenn für jede Partitionierung von* X *d.h. jede Zerlegung von* X *in* $k \in \mathbb{N}$ *paarweise disjunkte Mengen* C_i*, also* $X = \cup_{i=1}^k C_i$ *mit* $C_i \cap C_j = \emptyset$ *für* $i \neq j$*: Für genau ein* i *ist* C_i *in* $\mathcal{F}$.

Beweis. Wir zeigen die Behauptung zuerst für $k = 2$: Für einen Filter $\mathcal{F}$ auf X und $A \subseteq X$ kann wegen den Filteraxiomen nicht A und $A^{\complement}$ in $\mathcal{F}$ liegen. Liegt weder A noch $A^{\complement}$ in $\mathcal{F}$, so muß wieder wegen den Filteraxiomen mindestens eine der Mengen $A, A^{\complement}$ einen nichtleeren Schnitt mit allen Mengen $F \in \mathcal{F}$ haben. Sei o.B.d.A. $A \cap F \neq \emptyset$ für alle $F \in \mathcal{F}$. Dann ist $\{A \cap F : F \in \mathcal{F}\}$ eine Filerbasis. Der von diese Filterbasis erzeugte Filter ist feiner als $\mathcal{F}$ und enthält A. Ist $\mathcal{F}$ ein Ultrafilter, so ist dieser Filter gleich $\mathcal{F}$ und es folgt $A \in \mathcal{F}$.

Ist $\mathcal{F}$ kein Ultrafilter, so gibt es $A \subseteq X$ mit $A \notin \mathcal{F}$ aber $A \in \mathcal{F}'$ für einen Filter $\mathcal{F}'$, der feiner als $\mathcal{F}$ ist. Damit gilt $A^{\complement} \notin \mathcal{F}'$ und damit $A^{\complement} \notin \mathcal{F}$, also liegt weder A noch $A^{\complement}$ in $\mathcal{F}$.

Mit Induktin nach k folgt die Behauptung für $k \in \mathbb{N}$. □

Im Allgemeinen sind **Hauptfilter**, (d.h. Filter die genau aus allen Obermengen eines Elementes $x_0 \in X$ bestehen) die einzigen Ultrafilter, die man explizit beschreiben kann. Genau diese Hauptfilter sind aber im Folgenden ohne Bedeutung und folgendes Kriterium wird benötigt:

Lemma 2.3.8. *Ein Ultrafilter auf X ist genau dann ein Hauptfilter, wenn er eine endliche Menge enthält.*

Beweis. Der von $x_0 \in X$ erzeugte Hauptfilter enthält mit $\{x_0\}$ eine endliche Menge.

Enthält umgekehrt ein Ultrafilter eine endliche Menge, so folgt mit Lemma 2.3.7 dass dieser Filter der von einem Element dieser endlichen Menge erzeugte Hauptfilter ist. □

Eine **Halbgruppe** $(S,\circ)$ (das ist eine Menge S mit einer assoziativen Abbildung $\circ : S\times S \to S$), die zugleich ein topologischer Raum ist heißt **linkstopologische Halbgruppe**, wenn für jedes $p \in S$ die Abbildung $\lambda_p : S \to S, q \mapsto p\circ q$ stetig ist. [1]

Für eine diskrete Halbgruppe $(S,\circ)$ definieren wir eine Operation $\circ$ auf $\beta S \circ \beta S \to \beta S$ durch

$$A \in p\circ q \Leftrightarrow \{r \in S : A_r \in p\} \in q, \tag{2.1}$$

wobei für $r \in S$ die Teilmenge A_r von S durch

$$A_r := \{s \in S : s\circ r \in A\}$$

definiert ist und zeigen dann (Lemma 2.3.9), dass diese Abbildung eine Fortsetzung der Halbgruppenoperation auf $S\times S$ ist, sowie dass βS unter dieseer Operation zu einer linkstopologischen Halbgruppe wird (Lemma 2.3.12).

Man sieht unmittelbar, dass das Mengensystem $\{A \subseteq S : A \in p\circ q\}$ einen Filter auf S definiert. Es gilt mit Lemma 2.3.7:

$$A \notin p\circ q \Leftrightarrow \{r : A_r \in p\} \notin q \Leftrightarrow \{r : A_r \notin p\} \in q \Leftrightarrow A^{\complement} \in p\circ q.$$

Damit ist $p\circ q$ nach Lemma 2.3.7 ein Ultrafilter auf S und die durch (2.1) definierte Abbildung ist eine Abbildung nach βS.

Lemma 2.3.9. *Die durch (2.1) definierte Verknüpfung $\circ$ auf $\beta S\times\beta S$ stimmt auf $S\times S$ – aufgefasst als Teilmenge von $\beta S\times\beta S$ – mit der auf S gegebenen Halbgruppenoperation $\circ$ überein, d.h. die Einbettung $\iota.\ S \to \beta S$ ist eine Fortsetzung von $\circ$ auf $S\times S$ auf $\beta S\times\beta S$.*

Für $p \in \beta S$ ist die Linksmultiplikation $\lambda_p : \beta S \to \beta S, \lambda_p(q) \to p\circ q$ stetig.

Für $r \in S$ ist die Rechtsmultiplikation $\nu_r : \beta S \to \beta S : \nu_r(q) = q\circ r$ stetig.

[1] Analog definiert man rechtstopologische Halbgruppen als Halbgruppen in denen die Rechtsmultiplikation mit einem festen Element aus S im linken Faktor stetig ist. Allen Sätzen über linkstopologische Halbgruppen entspricht klarerweise ein dualer Satz über rechtstopologische Halbgruppen. Ist eine Halbgruppe sowohl links als auch rechtstopologisch, so heißt sie semitopologische Halbgruppe, was i.A. eine schwächere Eigenschaft als topologische Halbgruppe zu sein ist, da aus koordinatenweiser Stetigkeit des Halbgruppenproduktes nicht die Stetigkeit bez. der Produkttopologie folgt.

In der Literatur werden allerdings oft Halbgruppen, die nach unserer Bezeichnung linkstopologisch sind als rechtstopologisch bezeichnet und umgekehrt, d.h. dort ist eine Halbgruppe linkstopologisch, wenn das Halbgruppenprodukt im linken Faktor stetig ist und nicht wie bei uns, wenn die Linksmultiplikationen $\lambda_p,\ p \in S$ stetig sind.

Beweis. Seien $\bar{r}, \bar{s}, \overline{r \circ s}$ die von $\{r\}, \{s\}, \{r \circ s\}$ erzeugten Hauptfilter in βS, d.h. die Bilder von $r, s, r \circ s$ unter ι. Dann gilt mit (2.1)

$$\begin{aligned} A \in \bar{r} \circ \bar{s} &\Leftrightarrow \{t \in S : A_t \in \bar{r}\} \in \bar{s} \Leftrightarrow \{t \in S : r \in A_t\} \in \bar{s} \\ &\Leftrightarrow \{t \in S, r \circ t \in A\} \in \bar{s} \Leftrightarrow r \circ s \in A \Leftrightarrow A \in \overline{r \circ s} \end{aligned}$$

woraus $\bar{r} \circ \bar{s} = \overline{r \circ s}$ folgt.

Für die Stetigkeit der Abbilungen λ_p, ν_r zeigen wir, dass das Urbild einer Basismenge $\bar{A} \subseteq \beta S$ für $A \subseteq S$ unter diesen Abbildungen wieder eine Menge aus dieser Basis ist: Für $p, q \in \beta S$ gilt

$$\lambda_p(q) \in \bar{A} \Leftrightarrow A \in p \circ q \Leftrightarrow \{t \in S : A_t \in p\} \in q \Leftrightarrow q \in \overline{\{t \in S : A_t \in p\}},$$

also ist $\lambda_p^{-1}(\bar{A}) = \overline{\{t \in S : A_t \in p\}}$ offen.

Analog erhalten wir, wenn wir mit $\bar{x}$ den von $\{x\}$ erzeugten Hauptfilter auf S bezeichnen für $x \in S$:

$$\begin{aligned} \nu_r(q) \in \bar{A} &\Leftrightarrow A \in q \circ \bar{r} \Leftrightarrow \{y \in S : A_y \in q\} \in \bar{r} \Leftrightarrow r \in \{y \in S : A_y \in q\} \\ &\Leftrightarrow A_r \in q \Leftrightarrow q \in \overline{A_r} \end{aligned}$$

und $\nu_r^{-1}(\bar{A}) = \overline{A_r}$ ist offen. □

Lemma 2.3.10. *Sei X eine Menge, p ein Ultrafilter auf X, sowie f eine Abbildung $X \to K$, K kompakter Hausdorffraum. Die Mengen $\{f(U) : U \in p\}$ bilden eine Filtrbasis. Der von dieser Filterbasis erzeugte Filter ist ein Ultrafilter auf K, der gegen ein eindeutiges Element aus K, das wir mit $p\text{-}\lim_{x \in X} f(x)$ bezeichnen, konvergiert.*

Ist X ein topologischer Raum und f stetig in $x_0 \in X$, sowie der Ultrafilter p konvergent gegen x_0, so gilt

$$p\text{-}\lim_{x \in X} f(x) = f(x_0).$$

Beweis. Wie man unmittelbar verifiziert ist $\{f(U) : U \in p\}$ eine Filterbasis in K. Für $A \subseteq K$ ist nach Lemma 2.3.7 genau eine der Mengen $f^{-1}(A)$ bzw. $f^{-1}(A^{\complement})$ in $\mathcal{U}$. Sei o.B.d.A $f^{-1}(A) \in \mathcal{U}$, Dann liegt $f(f^{-1}(A))$ in der Filterrbasis $f(p)$. Wegen $f(f^{-1}(A)) = A \cap f(X) \subseteq A$ liegt damit A in dem von der Filterbasis $\{f(U) : U \in p\}$ erzeugten Filter. Nach Lemma 2.3.7 ist damit der von dieser Filterbasis erzeugte Filter p' ein Ultrafilter auf K. Da K ein kompakter Hausdorffraum ist konvergiert dieser gegen ein eindeutiges Element aus K.

Die zweite Aussage folgt aus der Charakterisierung der Stetigkeit über die Konvergenz von Filtern: Eine Funktion $X \to Y$ ist in x_0 genau dann stetig, wenn für jeden gegen x_0 konvergenten Filter $\mathcal{F}$ die Mengen $\{f(F) : F \in \mathcal{F}\}$ eine Filterbasis eines gegen $f(x_0)$ konvergenten Filters sind. □

Satz 2.3.11. *Für eine diskrete Halbgruppe $(S,\circ)$ und $p,q \in \beta S$ gilt*

$$p\circ q = q\text{-}\lim_{n\in S}(p\text{-}\lim_{m\in S}(m\circ n)).$$

Beweis. Mit Lemma 2.3.9 und 2.3.10 erhalten wir:

$$\begin{aligned} p\circ q &= \lambda_p(q) = q\text{-}\lim_{n\in S}\lambda_p(n) = q\text{-}\lim_{n\in S}\nu_n(p) = q\text{-}\lim_{n\in S}(p\text{-}\lim_{m\in S}(\nu_n(m))) \\ &= q\text{-}(\lim_{n\in S} p\text{-}\lim_{m\in S}(m\circ n)). \end{aligned}$$ □

Lemma 2.3.12. *Für eine diskrete Halbgruppe $(S,\circ)$ wird βS durch die mit (2.1) definierte Abbildung zu einer linkstopologischen Halbgruppe $(\beta S,\circ)$ in der $(S,\circ)$ dicht eingebettet ist. Diese Einbettung ist ein Halbgruppenhomomorphismus.*

Beweis. Wir zeigen, dass $\circ$ auf βS assoziativ ist: Es folgt aus der Stetigkeit von ν_v für $v\in S$ und λ_w für $w\in\beta S$ (Lemma 2.3.9), Lemma 2.3.10 und der Assoziativität von $\circ$ auf S

$$\begin{aligned} p\circ(q\circ r) &= \lambda_p(\lambda_q(r)) = \lambda_p(r\text{-}\lim_{z\in S}((\lambda_q(z))) = \lambda_p(r\text{-}\lim_{z\in S}(q\text{-}\lim_{y\in S}(y\circ z))) \\ =& r\text{-}\lim_{z\in S}(q\text{-}\lim_{y\in S}(\lambda_p(y\circ z))) = r\text{-}\lim_{z\in S}(q\text{-}\lim_{y\in S}(p\text{-}\lim_{x\in S}(x\circ(y\circ z))) \\ =& r\text{-}\lim_{z\in S}(q\text{-}\lim_{y\in S}(p\text{-}\lim_{x\in S}((x\circ y)\circ z))) = r\text{-}\lim_{z\in S}((q\text{-}\lim_{y\in S}(p\text{-}\lim_{x\in S}(\nu_z(\nu_y(x))))) \\ =& r\text{-}\lim_{z\in S} q\text{-}\lim_{y\in S}\nu_z(\nu_y(p))) = r\text{-}\lim_{z\in S}(q\text{-}\lim_{y\in S}(\nu_z(\lambda_p(y))) = r\text{-}\lim_{z\in S}(\nu_z(\lambda_p(q))) = \\ & r\text{-}\lim_{z\in S}\lambda_{\lambda_p(q)}(z) = \lambda_p(q)\circ r = (p\circ q)\circ r \end{aligned}$$

dass $(\beta S,\circ)$ eine Halbgruppe ist.

Wegen Lemma 2.3.9 ist $(\beta S,\circ)$ eine linkstopologische Halbgruppe und die Einbettung von S in βS ein Halbgruppenhomomorphismus. □

2.4 Sätze von Ramsey und Hindman

In der Ramsey-Theorie werden Aussagen untersucht, die im Wesentlichen die Existenz von Teilmengen mit besonderer Struktur sicherstellen, wenn die Menge in einem gewissen Sinn groß ist. Welche Struktur gesucht wird und was unter “genügend groß” zu verstehen ist hängt von der konkreten Fragestellung ab. Der klassische Party-Satz von Ramsey besagt folgendes:

Satz 2.4.1. *Sei eine unendliche Teilenge M von $\mathbb{N}$ gegeben, $D := \{(m,m) : m\in M\}$ und eine Abbildung Φ von $(M\times M)\setminus D \to \{0,1\}$ (Je 2 Partygäste kennen einander oder sie kennen sich nicht). Dann gibt es eine unendliche Teilmenge N von M die homogen ist, d.h. alle Gäste der Teilmenge N kennen einander oder keiner aus N kennt einen anderen Partygast der Menge N, d.h. $\Phi|_{(N\times N)\setminus D}$ ist konstant.*

Beweis. Man wähle einen Gast n_1, der unendlich viele ander Gäste kennt. Dieser schmeißt alle Gäste, die er nicht kennt aus der Party und wählt einen Gast n_2, der wieder unendlich viele der verbliebenen Gäste kennt. Gast n_2 eleminiert alle Gäste die er nicht kennt und wählt einen Gast n_3 mit dem gleichen Verfahren u.s.w. Bricht dieser Algorithmus nicht ab so gibt die Folge $(n_1, n_2, \ldots)$ eine unendlich große Menge von Gästen die alle einander kennen.

Bricht dieser Algorithmus ab, so gibt es unter den verbliebenen undendlich vielen Gästen niemanden der unendlich viele Gäste kennt. Man wählt dann einen Gast k_1, der alle Gäste die er kennt aus der verbleibenen Menge eleminiert. Es verbleiben unendlich viele Gäste aus denen man k_2 wählt, der wieder alle Gäste die er kennt eleminiert und fährt so fort. Die so entstandene Folge $(k_1, k_2, \ldots)$ besteht dann aus Gästen die einander nicht kennen. □

Dieser Satz hat eine höherdimensionale Verallgemeinerung, d.h. wir betrachten eine Abbildung aller Paare von unterschiedlichen Elementen einer unendlich großen Menge (Menge der Knoten) in eine Menge $\{c_1, \ldots, c_r\}$ (Menge der Farben) bzw. eine r-Färbung eines unendlich großen vollen Graphen, das ist ein Graph in dem je zwei Knoten durch eine Kante, der eine von r Farben zugeordnet ist, verbunden sind:

Satz 2.4.2. *Ein unendlicher voller gefärbter Graph mit Farben aus der Menge $\{c_1, \ldots, c_r\}$ hat einen unendlich großen monochromen Teilgraphen (d.h. einen Teilgraphen dessen Kanten alle die gleiche Farbe haben).*

Auch für diesen Satz gibt es rein kombinatorische Beweise ähnlich dem von Satz 2.4.1, die Diagonalisierungsargumente verwenden. Wesentlich einfacher ist folgender Zugang unter Verwendung von Ultrafiltern, die alle Diagonalisierungsargumente ersetzen:

Beweis. Sei U ein Ultrafilter auf der Menge der Knoten V des Graphen, der kein Hauptfilter ist, d.h. nicht aus allen Obermengen eines Knoten besteht und damit nach Lemma 2.3.8 keine endlichen Mengen enthält. Für jeden Knoten $x \in V$ existieren nach Lemma 2.3.10 $c(x) := U\text{-}\lim_{y \in \mathbb{V}} c(x,y)$ und $c_0 := U\text{-}\lim_{x \in \mathbb{V}} c(x)$. Es folgt $A_0 := c^{-1}(c_0) \in U$ und für x mit $c(x) = c_0 :\ c^{-1}(x) \in U$. Induktiv wählen wir Mengen A_i aus U und Elemente $x_i \in A_i$ wie folgt: Die Menge $A_i := \{y \in V \setminus \{x_{i-1}\} : c(x_{i-1}, y) = c_0\}$ ist wegen $U\text{-}\lim_{y \in \mathbb{V}} c(x_{i-1}, y) = c_0$ eine Menge in U. Damit ist $\cap_{j=0}^{i} A_j$ in U und so eine unendliche Teilmenge von V, weshalb wir $x_i \in \cap_{j=0}^{i} A_j$ wählen können womit $x_i \neq x_j$ für $i \neq j$ gilt.

Der Teilgraph mit Knoten $\{x_i : i \in \mathbb{N}_0\}$ hat dann Kanten die wegen $x_i \in A_j$ für $j < i$ Farbe c_0 haben. □

Der Satz von Ramsey hat auch eine endliche Version, die man ebenfalls mit topologische Mitteln am kürzesten beweisen kann:

Satz 2.4.3. *Für $r, L \in \mathbb{N}$ gibt es ein $Z \in \mathbb{N}$ sodass gilt: Für jeden r-gefärbten vollen Graphen K mit mindestens Z Knoten gibt es einen monochromen Teilgraphen mit L Knoten.*

Beweis. Wir nehmen an für jedes $i \in \mathbb{N}$ gibt es einen r-gefärbten Teilgraphen von K mit i Knoten ohne monochromen Teilgraphen mit L Knoten. Sei $\{v_i : i \in \mathbb{N}\}$ eine abzählbare Menge. Für $i \in \mathbb{N}$ sei $\mathcal{K}_i$ die Menge aller r-gefärbten vollen Graphen mit Knoten $\{v_1, \ldots, v_i\}$ und $\mathcal{L}_i$ die Teilmenge von $\prod_{l=1}^{\infty} \mathcal{K}_l$ für die für $1 \leq k < l \leq i$ $\mathcal{K}_k$ genau der von den Knoten $\{v_1, \ldots, v_k\}$ erzeugte Teilgraph von $\mathcal{K}_l$ ist. Da $\mathcal{K}_i$ genau $r^{\binom{v}{2}}$ Elemente hat, also endlich ist, ist die Spurtopologie der Produkttopologie von $\prod_{i=1}^{\infty} \mathcal{K}_i$ auf $\prod_{i=1}^{l} \mathcal{K}_i$ diskret und wegen der Stetigkeit der Projektion $\prod_{i=1}^{\infty} \mathcal{K}_i$ auf $\prod_{i=1}^{l} \mathcal{K}_i$ ist $\mathcal{L}_i$ für alle $i \in \mathbb{N}$ abgeschlossen in der Produkttopologie.

Aus der Definition von $\mathcal{L}_i$ sieht man unmittelbar dass für eine endliche Teilmenge E von $\mathbb{N}$ $\cap_{i \in E} \mathcal{L}_i = \mathcal{L}_{\max(i \in E)}$ gilt. Wenn es für jedes $i \in \mathbb{N}$ einen r-gefärbten Teilgraphen von K mit i Knoten ohne monochromen Teilgraphen mit L Knoten gibt, so hat also die Familie abgeschlossener Mengen $\mathcal{L}_i$ die enddliche Durchschnittseigenschaft womit, da der Produktraum nach Tichonow kompakt ist, $\cap_{i \in \mathbb{N}} \mathcal{L}_i \neq \emptyset$ gilt. Für $\prod_{i=1}^{\infty} K_i \in \cap_{i \in \mathbb{N}} \mathcal{L}_i \neq \emptyset$ betrachten wir den gefärbten vollen Graphen K mit Knoten v_i, $i \in \mathbb{N}$, dessen Kante die v_i und v_j, $i < j$ verbindet die gleiche Farbe wie die v_i und v_j verbindende Kante von von $\mathcal{L}_j$ hat. Nach Konstruktion stimmt der Teilgraph von K mit Knoten $v_1, \ldots, v_i$ mit dem entsprechenden Teilgraph von K_i überein und hat damit keinen monochromen Teilgraphen mit L Knoten im Widerspruch zu Satz 2.4.2. □

Im Folgenden betrachten wir Sätze über die Existenz spezieller Mengen nach Partitionierung der natürlichen Zahlen(Sätze 2.4.6, 2.5.3) oder allgemeiner einer diskreten Menge, die wir über die Stone-Čech kompaktifizierung beweisen.

Ein Element p einer Halbgruppe $(S, \circ)$ heißt **Idempotente**, wenn $p = p \circ p$ gilt.

Satz 2.4.4 (Ellis)**.** *Ist eine linkstopologische Halbgruppe $(S, \circ)$ kompakt und Hausdorff, so besitzt sie eine Idempotente.*

Beweis. Die Menge aller abgeschlossenen Unterhalbgruppen von S ist durch Mengeninklusion teilgeordnet. Da S kompakt ist ist der Durchschnitt einer totalgeordneten Teilmenge nichtleer. Aus dem Lemma von Zorn folgt damit die Existenz einer minimalen abgeschlossenen Unterhalbgruppe M von S. Für $m \in M$ ist $\lambda_m(M)$ als stetiges Bild der kompakten Menge M eine kompakte und da S Hausdorff ist, eine abgeschlossene Unterhalbgruppe von M. Wegen der Minimalität von M folgt $\lambda_m(M) = M$. Damit gibt es $p \in M$ mit $m \circ p = m$. Die nichtleere abgeschlossene Teilmenge $\lambda_m^{-1}(m) = \{s : m \circ s = m\}$ ist eine Unterhalbgruppe und somit ebenfalls gleich M. Es folgt $m \in \lambda_m^{-1}(m)$, also $m \circ m = m$. □

Eine Unterhalbgruppe R bzw L von S heißt **Rechtsideal (Linksideal)** wenn $RS \subseteq R$ bzw. $SL \subseteq L$ gilt. Ist eine Unterhalbgruppe sowohl Links als auch Rechtsideal, so heißt sie **zweiseitiges Ideal**.

Lemma 2.4.5. *In einer kompakten linkstopologischen Halbgruppe $(S, \circ)$ enthält jedes Rechtsideal ein minimales Rechtsideal R. Minimale Rechtsideale in kompakten linkstopologischen Halbgruppen sind abgeschlossen. Für $p, q \in R$ gibt es $t \in S$ mit $q = p \circ t$.*

Ist I ein zweiseitiges Ideal in S, so gilt $I \supseteq R$ für jedes minimale Rechtsideal R.

Beweis. Wie im Beweis zuvor sieht man mit dem Lemma von Zorn, dass ein Rechtsideal R ein minimales abgeschlossenes Rechtsideal enthält. (Die Menge der abgeschlossenen Rechtsideale in R ist nichtleer, da für $r \in R$ die Menge $r \circ S$ ein abgeschlossenes in R enthaltenes Rechtsideal ist) Für $r \in M'$, M minimales abgeschlossenes Rechtsideal und M' in M enthaltenes Rechtsideal ist für $r \in M'$ das Rechtsideal $r \circ M'$ ein in M' enthaltenes abgeschlossenes Rechtsideal. Wegen der Minimalität von M gilt also $M = M' = r \circ M'$ und minimale Rechtsideale sind abgeschlossen.

Für $p, q \in R$ ist $p \circ S$ ein Rechtsideal in S, das in R enthalten ist. Wegen der Minimalität von R gilt $R = p \circ S$, also gibt es $t \in S$ mit $q = p \circ t$.

Für ein zweiseitiges Ideal I ist RI wegen $RIS \subseteq RI$ ein Rechtsideal das in $RS = R$ enthalten ist. Wegen der Minimalität von R folgt $I \supseteq RI = R$. □

Eine Teilmenge M von $\mathbb{N}$ heißt **IP-Menge** [2], wenn sie eine unendliche Teilmenge D enthält, für die gilt: für jede endliche Teilmenge F von D gilt $\sum_{n \in F} m \in D$.

Satz 2.4.6 (Hindman). *In jeder Zerlegung $(C_i)_{i \leq r}$ von $\mathbb{N}$ ist mindestens eine der Mengen C_i eine IP-Menge.*

Beweis. Nach Satz 2.3.9 ist $(\beta\mathbb{N}, +)$ eine linkstopologische Halbgruppe. Aus dem Satz von Ellis 2.4.4 folgt die Existenz einer Idempotenten $p = p + p$ in $\beta\mathbb{N}$. Da p ein Ultrafilter ist, ist genau für ein $i_0 \leq r$ die Menge C_{i_0} in p. Wir setzen $B_0 := C_{i_0} \in p$ und definieren dann induktiv $B_{k+1} \in p$ durch B_k wie folgt: Wegen $B_k \in p = p + p$ folgt aus (2.1): $\{l : (B_k - l) \cap \mathbb{N} \in p\} \in p$. Da die Mengen B_k und $\{l : (B_k - l) \cap \mathbb{N} \in p\}$ in dem Filter p liegen haben sie nichtleeren Durchschnitt, es gibt also ein $n_k \in B_k$ mit $(B_k - n_k) \cap \mathbb{N} \in p$. Da jede Idempotente in $\beta\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$ liegt ist $\{l : (B_k - l) \cap \mathbb{N} \in p\}$ unendlich, wir können also $n_k > n_{k-1}$ für $n > 0$ wählen. Damit ist die Menge $B_{k+1} := B_k \cap (B_k - n_k)$ ebenfalls in p und wir erhalten eine monoton steigende Folge $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ in C_{i_0}. Durch vollständige Induktion sieht man, dass für jede Folge $(a_i)_{i \in \mathbb{N}}$ mit Werten in $\{0, 1\}$ und $k \in \mathbb{N}$

$$p \ni B_k \subseteq (B_{k-1} - a_{k-1} n_{k-1}) \cap \mathbb{N} \subseteq \cdots \subseteq \left(B_0 - \sum_{i=0}^{k-1} a_i n_i \right) \cap \mathbb{N} \tag{2.2}$$

gilt. Damit liegen alle Mengen $\left(B_0 - \sum_{i=0}^{k-1} a_i n_i \right) \cap \mathbb{N}$ in p und haben damit nichtleeren Schnitt. Das heißt aber für jedes k gibt es $l_k \in \mathbb{N}$ sodass $l_k + \sum_{i \in F} a_i n_i$, für alle endlichen Teilmengen F von $\{1, 2, \ldots, k-1\}$ und $a_i \in \{0, 1\}$ in $B_0 = C_{i_0}$ liegt. □

[2] IP steht für infinite dimensional Parallelepiped oder IdemPotent

2.5 Sätze von Van der Waerden und Hales-Jewett

Für eine linkstopologische Halbgruppe $(S,\circ)$ ist das **topologische Zentrum** von S die Menge aller $z \in S$ für die die Rechtsmultiplikationn $\nu_z : S \to S, s \mapsto s \circ z$ stetig ist.

Lemma 2.5.1. *Für eine linkstopologische Halbgruppe $(S,\circ)$ mit Unterhalbgruppe $(E_0,\circ)$ im topologischen Zentrum von S und einem zweiseitiges Ideal $(I_0,\circ)$ von E_0 ist der Abschluss E von E_0 eine abgeschlossene linkstopologische Unterhalbgruppe von $(S,\circ)$ und der Abschluss I von $(I_0,\circ)$ ist ein zweiseitiges Ideal von $(E,\circ)$.*

Beweis. Mit Lemma 2.3.9 und der Charakterisierung stetiger Abbildungen $f : X \to Y$ durch die Eigenschaft $f(\bar{A}) \subseteq \overline{f(A)} \quad \forall A \subseteq X$ sieht man zunächst wegen der Stetigkeit der Rechtsmultiplikation ν_{f_0} mit einem Element $f_0 \in E_0$

$$E \circ f_0 = \nu_{f_0}(\bar{E}_0) \subseteq \overline{\nu_{f_0}(E_0)} = \overline{E_0 \circ f_0} \subseteq \bar{E}_0 = E \text{ also } e \circ E_0 \subseteq E, \text{ für } e \in E$$

somit: $e \circ f_0 \in E$ und damit wegen der Stetigkeit der Linksmultiplikation: $e \circ \bar{E}_0 = \lambda_e(\bar{E}_0) \subseteq \overline{\lambda_e(E_0)} = \overline{e \circ E_0} \subseteq \bar{E} = E$.

$(E,\circ)$ ist also eine abgeschlossene Unterhalbgruppe von $(S,\circ)$.

Ähnlich sieht man, dass I ein zweiseitiges Ideal in E ist: Für $i_0 \in I_0$ gilt

$$E \circ i_0 = \nu_{i_0}(\bar{E}_0) \subseteq \overline{\nu_{i_0}(E_0)} = \overline{E_0 \circ i_0} \subseteq I \text{ also } e \circ I \subseteq \overline{e \circ I_0} \subseteq I \text{ d.h. } E \circ I \subseteq I$$

und für $e_0 \in E_0$:

$$I \circ e_0 = \nu_{e_0}(\bar{I}_0) \subseteq \overline{\nu_{e_0}(I_0)} = \overline{I_0 \circ e_0} \subseteq \bar{I}_0 = I$$

und

$$i \circ E = \lambda_i(\bar{E}_0) \subseteq \overline{\lambda_i(E_0)} = \overline{i \circ E_0} \subseteq \bar{I} = I \text{ also } I \circ E \subseteq I,$$

I ist also ein zweiseitiges Ideal in E. □

Lemma 2.5.2. *Es sei für festes $k \in \mathbb{N}$*

$$E_0 := \{(a, a+b, \ldots a+(k-1)b) : a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}_0\} \subset \mathbb{N}^k, \quad E := \bar{E}_0 \subset \beta\mathbb{N}^k$$

und

$$I_0 := \{(a, a+b, \ldots a+(k-1)b) : a, b \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{N}^k, \quad I := \bar{I}_0 \subset \beta\mathbb{N}^k.$$

Mit koordinatenweiser Addition auf $\mathbb{N}^k$ ist E_0 eine Unterhalbgruppe von $\mathbb{N}^k$ und I_0 ein Ideal in E_0. (Abschluss bez. der Produkttopologie). Mit diesen Bezeichnungen gilt: Für $p \in S$ gilt $\tilde{p} := (p, \ldots, p) \in E \subseteq \beta\mathbb{N}^k$.

Ist p eine Idempotente in einem minimalen Rechtsideal R der kompakten linkstopologischen Halbgruppe $(\beta\mathbb{N}, +)$, so gilt $\tilde{p} \in I$.

Beweis. Eine Umgebungsbasis von $\tilde{p} \in \beta\mathbb{N}^k$ bez, der Produkttopologie in $\beta\mathbb{N}^k$ ist durch die Mengen $\bar{A}_1 \times \ldots \times \bar{A}_k$ mit $A_i \in p$ gegeben. Mit $A_i \in p$ für $i \leq k$ ist auch $A := \cap_{i=1}^k A_i \in p$ und $\tilde{p} \in \prod_{i=1}^k \bar{A}$. Für $a \in A$ gilt $(a, \ldots, a) \in E_0$ und $\tilde{p} \in (\bar{A}, \ldots, \bar{A})$. Die Mengen $(\bar{A}, \ldots, \bar{A})$ bilden also eine Umgebungsbasis von $\tilde{p}$ womit $\tilde{p} \in \bar{E}_0 = E$ folgt.

Für eine Idempotente p des minimalen Rechtsideals R von S enthält nach Lemma 2.4.5 das Rechtsideal $\tilde{p} + E$ von E ein minimales Rechtsideal $\tilde{R}$ von E, das nach dem Satz von Ellis 2.4.4 eine Idempotente $\tilde{q} = (q_1, \ldots, q_k)$ enthält. Für die Idempotenten q_i von R gilt wegen der Minimalität von $p + S$ nach Lemma 2.4.5: $p = q_i + t_i$ für ein $t_i \in S$, woraus folgt $q_i + p = q_i + q_i + t_i = q_i + t_i = p$, also $\tilde{p} = \tilde{q} + \tilde{p}$. Damit liegt $\tilde{p}$ in dem Rechtsideal $\tilde{q} + \tilde{R}$. Da $\tilde{R}$ minimal in $\tilde{p} + E$ ist gilt $\tilde{q} + \tilde{R} = \tilde{R}$ und $\tilde{p} \in \tilde{R}$. In einer Halbgruppe E ist jedes minimale Rechtsideal R in jedem zweiseitigen Ideal I enthalten, denn wegen der Minimalität gilt für $r \in R$: $R = r + E \supseteq r + I$ und da $r + I$ ein Rechtsideal ist $R = r \circ I \subseteq I$. Somit gilt $\tilde{p} \in I$. □

Satz 2.5.3 (Van der Waerden)**.** *In jeder endlichen Partitionierung der natürlichen Zahlen* $\mathbb{N} = \cup_{i=1}^r C_i$ *gibt es eine Menge* C_i *mit arithmetischen Progressionen beliebiger Länge, d.h. es gibt* $i \leq r$*, sodass es für jedes* $k \in \mathbb{N}$ $a, b \in \mathbb{N}$ *gibt, sodass* $\{a, a+b, a+2b, \ldots, a+(k-1)b\} \subset C_i$ *gilt.*

Beweis. Nach Lemma 2.4.5 enthält $\beta\mathbb{N}$ ein minimales Rechtsideal R, das nach dem Satz von Ellis 2.4.4 eine Idempotente p enthält. Es gilt nach Lemma 2.5.1 $\tilde{p} := (p, \ldots, p) \in I$.

Nach Lemma 2.3.7 liegt für genau ein $i \leq r$ eine Menge C_i in dem Ultrafilter p. Damit ist $\bar{C}_i$ eine Umgebung von p und $\bar{C}_i \times \ldots \times \bar{C}_i$ eine Umgebung von $\tilde{p} \in I$, also gilt $C_i \times \ldots \times C_i \in \tilde{p} \in I$. Da I_0 dicht in I liegt gibt es $j \in I_0 \cap (\bar{C}_i \times \ldots \times \bar{C}_i)$. Da $\bar{G}_i$ offen und abgeschlossen ist liegt $m \in \mathbb{N}$ aber genau dann in $\bar{C}_i$ wenn $m \in C_i$ gilt. Es folgt, dass es $j \in I_0 \cap (C_i \times \ldots \times C_i)$ gibt. Da die arithmetischen Progressionen in $\mathbb{N}$ der Länge k genau die Elemente von I_0 sind folgt die Existenz einer arithmetischen Progressionen der Länge k in C_i. □

Für eine endliche Menge Σ betrachten wir die Menge $\mathbb{W}$ aller **Wörter** mit dem Alphabet Σ, das ist die Menge aller endlichen Folgen $(\sigma_i)_{i=1}^n$, $n \in \mathbb{N}$ mit Werten in Σ. Mit der Zussammensetzung von Wörtern

$$(\sigma_1, \ldots, \sigma_m) \circ (\sigma'_1, \ldots, \sigma'_n) = (\bar{\sigma}_1, \ldots, \bar{\sigma}_{m+n}),\ \bar{\sigma}_l = \begin{cases} \sigma_i & 1 \leq l \leq m \\ \sigma'_{l-m} & m+1 \leq l \leq m+n \end{cases}$$

ist $(\mathbb{W}, \circ)$ eine für $|\Sigma| > 1$ nichtkommutative Halbgruppe, die **freie Halbgruppe über dem Alphabet** Σ. Für ein gegebenes Alphabet Σ betrachten wir die freie Halbgruppe $\mathbb{V}$ über dem um ein Element $v \notin \Sigma$ erweiterten Alphabet $\Sigma \cup \{v\}$. Die Elemente von $(\mathbb{V}, \circ)$ heißen **variable Wörter** über dem Alphabet Σ. Wir fassen $\mathbb{W}$ in kanonischer Weise als Unterhalbgruppe von $\mathbb{V}$ auf.

Für $a \in \Sigma$ ist der Substitutionshomomorphismus $S_a : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ durch

$$(S_a(V))_i = \begin{cases} \sigma_i & \sigma_i \in \Sigma \\ a & \sigma_i = v \end{cases}$$

für ein variables Wort $V = (\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$, $\sigma_i \in \Sigma \cup \{v\}$ definiert. Es ist unmittelbar klar, dass S_a ein Homomorphismus ist und für $W \in \mathbb{W} : S_a(W) = W$ gilt. Für $V \in \mathbb{V} \setminus \mathbb{W}$ heißt die Menge $\{S_a(V) : a \in \Sigma\}$ von $|\Sigma|$ Wörtern eine **kombinatorische Diagonale**. Eine kombinatorische Diagonale besteht also aus $|\Sigma|$ Wörtern gleicher Länge $n \in \mathbb{N}$, deren i-te Folgeglieder entweder alle gleich sind, oder in gleicher Reihenfolge die Elemente des Alphabets Σ durchlaufen, was für mindestens ein i der Fall sein muss. Sie ist also die Diagonale eines diskreten k-dimensionalen Unterwürfels des aus allen Wörtern der Länge n, wobei k die Zahl der Vorkommnisse von v in dem variablen Wort ist.

Zum Beispiel ist die Folge $((a,c,a,b,a),(b,c,b,b,a),(c,c,c,b,a))$ für das Alphabet $\{a,b,c\}$ eine kombinatorische Diagonale, die aus dem variablen Wort $\zeta = (v,c,v,b,a)$ aus dem Substitutionshomomorphismus S_a hervorgeht und kombinatorische Diagonale jenes 2-dimensionalen diskreten Unterwürfels des 5-dimensionalen diskreten Würfels, der durch Projektion auf die erste und dritte Koordinate in $\prod_{i=1}^{5} \Sigma$, für $\Sigma = \{a,b,c\}$ aus ζ entsteht.

Versehen mit der diskreten Topologie sind $\mathbb{W}$ und $\mathbb{V}$ topologische Halbgruppen. Als topologische Räume sind $\mathbb{W}$ und $\mathbb{V}$ homöomorph zu $\mathbb{N}$ und haben Stone-Čech Kompaktifizierungen $\beta\mathbb{W}$ bzw. $\beta\mathbb{V}$ homöomorph zu $\beta\mathbb{N}$. Wie für $\beta\mathbb{N}$ fassen wir $\beta\mathbb{W}$ und $\beta\mathbb{V}$ als Menge der Ultrafilter auf $\mathbb{W}$ bzw. $\mathbb{V}$ auf und erhalten als Basis der Topologie auf $\mathbb{W}$ bzw. $\mathbb{V}$ die Mengen aller Ultrafilter, die eine Menge $A \subseteq \mathbb{W}$ ($A \subseteq \mathbb{V}$) von (variablen) Wörtern enthalten.

Ähnlich wie die Addition von $\mathbb{N}$ auf $\beta\mathbb{N}$ fortgesetzt wurde setzen wir die Zusammensetzung von Wörtern von $\mathbb{W}$ resp. $\mathbb{V}$ auf $\beta\mathbb{W}$ resp. $\beta\mathbb{V}$ fort:

Lemma 2.5.4. *Die Substitutionshomomorphismen S_a, $a \in \Sigma$ haben eindeutige stetige Fortsetzungen $\beta S_a : \beta\mathbb{V} \to \beta\mathbb{W}$. Für $a \in \Sigma$ ist βS_a ein Halbgruppenhomomorphismus $(\beta\mathbb{V}, \circ) \to (\beta\mathbb{W}, \circ)$.*

Für $w \in \beta\mathbb{W}$ gilt $\beta S_a(w) = w$.

Beweis. Nach Satz 2.2.1 hat für $a \in \Sigma$ der Substitutionshomomorphismus S_a eine eindeutige stetige Fortsetzung βS_a $S_a : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ auf $\beta\mathbb{V} \to \beta\mathbb{W}$. Eine Abbildung f zwischen topologischen Räumen X und Y ist genau dann stetig, wenn für jeden gegen $x \in X$ konvergenten Filter $\mathcal{F}$ das Bild $\{f(A) : A \in \mathcal{F}\}$ Filterbasis eines gegen $f(x)$ konvergenten Filters in Y ist. Wegen der Stetigkeit von βS_a und der Konvergenz des Ultrafilters $\{A \subseteq \mathbb{N} : A \in x\}$ gegen $x \in \beta\mathbb{V}$ sowie der Stetigkeit von λ_t für $t \in \beta\mathbb{V}$ und der Stetigkeit von ν_r für $r \in \mathbb{V}$ folgt mit Lemma 2.3.10 für $x, y \in \beta\mathbb{V}$:

$$\begin{aligned}\beta S_a(x\circ y) &= \beta S_a(\lambda_x(y)) = y\text{-}\lim_{s\in\mathbb{V}} \beta S_a(\lambda_x(s)) = y\text{-}\lim_{s\in\mathbb{V}}(\beta S_a(\nu_s(x)))\\ &= y\text{-}\lim_{s\in\mathbb{V}}(x\text{-}\lim_{r\in\mathbb{V}} S_a(r\circ s)) = y\text{-}\lim_{s\in\mathbb{V}}(x\text{-}\lim_{r\in\mathbb{V}}(S_a(r)\circ S_a(s)))\\ &= y\text{-}\lim_{s\in\mathbb{V}}(x\text{-}\lim_{r\in\mathbb{V}}(\nu_{S_a(s)} S_a(r))) = y\text{-}\lim_{s\in\mathbb{V}}(\nu_{S_a(s)}(\beta S_a(x)))\\ &= y\text{-}\lim_{s\in\mathbb{V}}(\nu_{S_a(s)}(\beta S_a(x))) = y\text{-}\lim_{s\in\mathbb{V}}(\lambda_{\beta S_a(x)}(S_a(s)))\\ &= \beta S_a(x)\circ\beta S_a(y).\end{aligned}$$

βS_a ist also ein Homomorphismus $(\beta\mathbb{V},\circ)\to(\beta\mathbb{W},\circ)$.

Eine stetig Fortsetzung einer Funktion von einer dichten Teilmenge auf den ganzen Raum ist, sofern sie existiert, eindeutig. Wegen $S_a = \mathrm{Id}$ auf $\mathbb{W}$ folgt $\beta S_a = \mathrm{Id}$ auf $\beta\mathbb{W}$. □

Lemma 2.5.5. *Für eine Idempotente p eines minimalen Rechtsideal $\hat{R}$ von $(\beta\mathbb{W},\circ)$ enthält das Rechtsideal $p\circ\beta\mathbb{V}$ in $\beta\mathbb{V}$ ein minimales Rechtsideal R von $\beta\mathbb{V}$ mit Idempotenter q für die $p\circ q = q\circ p = q$ gilt.*

Beweis. $p\circ\beta\mathbb{V}$ ist klarerweise ein kompaktes Rechtsideal von $\beta\mathbb{V}$ und enthält nach Lemma 2.4.5 ein minimales Rechtsideal R mit Idempotenter r (Satz 2.4.4). $r\in p\circ\beta\mathbb{V}$, d.h. es gibt $s\in\beta\mathbb{V}$ mit $r = p\circ s$, womit $p\circ r = p\circ p\circ s = p\circ s = r$ gilt. Damit ist $q := r\circ p$ wegen $q\circ q = r\circ p\circ r\circ p = r\circ r\circ p = r\circ p = q$ idempotent. Weiters folgt $q\circ p = r\circ p\circ p = r\circ p = q$ und $p\circ q = p\circ r\circ p = r\circ p = q$, also gilt $p\circ q = q\circ p = q$. □

Lemma 2.5.6. *Mit den Bezeichnungen von Lemma 2.5.5 gilt für $a\in\Sigma$:*

$$\beta S_a(q) = p.$$

Beweis. Aus Lemma 2.5.5 folgt $\beta S_a(q)\circ\beta\mathbb{W}\subseteq p\circ\beta\mathbb{W}$ und wegen der Minimalität von $p\circ\beta\mathbb{W}$: $\beta S_a(q)\circ\beta\mathbb{W} = p\circ\beta\mathbb{W}$. Wegen $p = p\circ p\in p\circ\beta\mathbb{W}$ gilt $p = \beta S_a(q)\circ s$ für ein $s\in\beta\mathbb{W}$. Es folgt mit Lemma 2.5.4 und 2.5.5:

$$\begin{aligned}\beta S_a(q) &= \beta S_a(q\circ p) = \beta S_a(q)\circ\beta S_a(p) = \beta S_a(q)\circ p\\ &= \beta S_a(q)\circ\beta S_a(q)\circ s = \beta S_a(q\circ q)\circ s = \beta S_a(q)\circ s = p.\end{aligned}$$ □

Satz 2.5.7 (Hales-Jewett)**.** *Für eine Partitionierung (Färbung) C_i, $i\le k$ der Menge $\mathbb{W}$ aller Wörter über dem endlichen Alphabet Σ gibt es ein $i\le k$ für das C_i eine kombinatorische Diagonale enthält.*

Beweis. Nach Lemma 2.4.5 liegt in einer kompakten linkstopologischen Halbgruppe jedes minimale Rechtsideal in jedem zweiseitigen Ideal. Mit den Bezeichnungen von Lemma 2.5.5 liegt R in dem zweiseitigen Ideal $\beta\mathbb{V}\setminus\beta\mathbb{W}$, insbesonders gilt

$$q\in\beta\mathbb{V}\setminus\beta\mathbb{W}. \tag{2.3}$$

Sei $C_i \in p$ dann gilt nach Lemma 2.5.6: $q \in \cap_{a\in\Sigma}\beta S_a^{-1}(p)$ und wegen (2.3) $q \in (\beta\mathbb{V} \setminus \beta\mathbb{W}) \bigcap \cap_{a\in\Sigma}\beta S_a^{-1}(\bar{C}_i)$. Wegen der Stetigkeit von βS_a nach Lemma 2.5.4 ist $(\beta\mathbb{V} \setminus \beta\mathbb{W}) \bigcap \cap_{a\in\Sigma}\beta S_a^{-1}(\bar{C}_i)$ offen-abgeschlossen und enthält damit ein $w \in (\mathbb{V} \setminus \mathbb{W}) \bigcap \cap_{a\in\Sigma} S_a^{-1}(C_i)$, d.h. C_i enthält ein variables Wort w. Die Menge $\cup_{a\in\Sigma} S_a(w)$ ist also eine kombinatorische Diagonale in C_i. $\square$

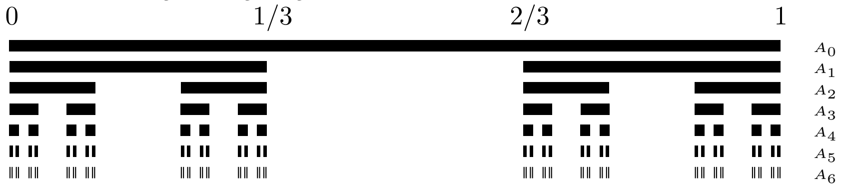
Kapitel 3

Cantormenge

Auf dem Einheitsintervall $I = [0,1]$ seien die Abbildungen T_0 und T_1 in sich durch $T_0(x) = x/3$, $T_1(x) = 2/3 + x/3$ erklärt. Wir definieren eine Folge von Mengen $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ induktiv durch $A_0 := I$ und $A_{n+1} := T_0(A_n) \cup T_1(A_n)$. Man verifiziert unmittelbar durch Induktion dass A_n die disjunkte Vereinigung von 2^n abgeschlossenen Intervallen der Länge 3^{-n} ist und $A_{n+1} \subset A_n$ gilt. Da I kompakt ist und die Mengen $A_n \cap_{i=1}^n A_{n_i} = A_{\max n_i}$ die endliche Durchschnittseigenschaft haben, ist die

Cantormenge $C := \cap_n A_n$ eine nichtleere kompakte Teilmenge von I.

Wegen $\cap_{n=1}^N A_{n+1} = A_{N+1} = \frac{1}{3}A_N \cup (\frac{2}{3} + \frac{1}{3}A_N)$ folgt die Selbstähnlichkeit der Cantormenge $C = \frac{1}{3}C \cup (\frac{2}{3} + \frac{1}{3}C)$.



Satz 3.0.1. *Die Cantormenge C mit der Relativtopologie von I ist homöomorph zum Produktraum $\prod_{n\in\mathbb{N}}\{0,1\} = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ mit der Produkttopologie.*

Beweis. Für $x \in \prod_{n\in\mathbb{N}}\{0,1\}$ definieren wir eine Folge von Intervallen $I_n = I_n(x)$ durch $I_n(x) = 2\sum_{i=1}^n x_i 3^{-i} + 3^{-n}I$, wobei $x_i = \pi_i(x)$ die i-te Koordinate von x bezeichnet. Man überlegt sich wiederum durch Induktion, dass $I_n \supset I_{n+1}$ und $I_n \subset A_n$ gilt (d.h. I_n ist eines der 2^n Intervalle aus denen sich A_n zusammensetzt). Es folgt wie für die Mengen A_n, dass $\cap_{n\in\mathbb{N}} I_n(x)$ nichtleer ist. Da $I_n(x)$ ein Intervall der Länge 3^{-n} ist folgt dass dieser Durchschnitt aus einem Element besteht. Wir setzen $\cap_{n\in\mathbb{N}} I_n(x) =: \phi(x) \in C$.

Gilt $x \neq y \in \prod_{n\in\mathbb{N}}\{0,1\}$, so folgt $I_i(x) \cap I_i(y) = \emptyset$ für $i = \min\{k : \; x_k \neq y_k\}$. Aus $I_{n+1} \subset I_n$ folgt $\phi(x) \neq \phi(y)$, also ist ϕ injektiv.

Durch Induktion überzeugt man sich, dass für $n \in \mathbb{N}$ $A_n = \cup_x I_n(x)$ gilt und $I_n(x)$ und $I_n(y)$ sind disjunkt oder x und y stimmen auf den ersten n Koordinaten überein. Die nichtleeren Mengen $I_n^{-1}(\zeta) = \{x \in \{0,1\}^{\mathbb{N}} : \; \zeta \in I_n(x)\}$ bestehen also aus allen Elementen von $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ mit vorgegebenen ersten n Koordinaten und sind damit abgeschlossen. Es folgt wieder mit der endlichen Durchschnittseigenschaft $\cap_{n\in\mathbb{N}} I_n^{-1}(\zeta) \neq \emptyset$, also ist ϕ surjektiv.

Für $x,y \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ gilt $|\phi(x)-\phi(y)| \leq 3^{-n}$, wenn x und y auf den ersten n Koordinaten übereinstimmen. Diese Menge ist offen in der Produkttopologie, also ist ϕ stetig. Als stetige Bijektion zwischen kompakten Räumen ist sie ein Homöomorphismus. □

Eine Teilmenge A eines topologischen Raumes X heißt **Retrakt**, wenn es eine stetige Abbildung $f: X \to A$ mit $f|_A = \mathrm{Id}$ gibt.

Satz 3.0.2. *Jede abgeschlossene Teilmenge von C ist ein Retrakt.*

Beweis. Wir definieren auf $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ eine Metrik durch $d(x,y) := \sum_{i=1}^{\infty} |x_i - y_i| 3^{-i}$. Man sieht, dass die von dieser Metrik induzierte Topologie die Produkttopologie ist und für $x,y,z \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ aus $d(x,y) = d(x,z)$ folgt $y = z$. Da A kompakt ist wird für $x \in C$ das Minimum der Menge $\{d(x,y): y \in A\}$ in genau einem Punkt $\rho_A(x) \in A$ angenommen.

Um zu sehen, dass ρ_A die gesuchte Retraktion ist, ist nur noch die Stetigkeit zu zeigen. Dies folgt unmittelbar, wenn wir zeigen, dass wenn x und y in den ersten n Koordinaten übereinstimmen, auch $\rho_A(x)$ und $\rho_A(y)$ in den ersten n Koordinaten übereinstimmen: Angenommen $x_i = y_i$ für $i \leq n$, $(\rho_A(x))_i = (\rho_A(y))_i$ für $i < i_0 \leq n$ und $(\rho_A(x))_{i_0} = x_{i_0} \neq (\rho_A(y))_{i_0}$. Dann folgt

$$d(y, \rho_A(x)) \leq \sum_{i=1}^{i_0-1} |x_i - (\rho_A(x))_i| + \sum_{i=i_0+1}^{\infty} 3^{-i} = \sum_{i=1}^{i_0-1} |x_i - (\rho_A(x))_i| + \frac{3^{-i_0}}{2}$$

und

$$d(y, \rho_A(y)) \geq \sum_{i=1}^{i_0-1} |x_i - (\rho_A(x))_i| + 3^{-i_0},$$

also $d(y,\rho_A(x)) < d(y,\rho_A(y))$, ein Widerspruch. □

Satz 3.0.3. *Jeder kompakte Hausdorffraum X mit abzählbarer Basis ist stetiges Bild einer abgeschlossenen Teilmenge von $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$.*

Beweis. Sei $\{B_i: i \in \mathbb{N}\}$ die abzählbare Basis von X. Wir definieren eine Abbildung $X \to \{0,1\}^{\mathbb{N}}$, $x \mapsto f_x$ mit $(f_x)_i = 0$ für $x \notin B_i$, $(f_x)_i = 1$ für $x \in B_i$. Diese Abbildung ist aber im Allgemeinen nicht stetig und ihr Bild nicht abgeschlossen.

Sei $A := \overline{\{f_x: x \in X\}}$ und $f \in A$. Eine Umgebungsbasis von f besteht aus den Mengen $\{g \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}: g_i = f_i \; \forall i \in E\}$, wobei E die endlichen Teilmengen von $\mathbb{N}$ durchläuft. Dass f in A liegt besagt, dass es für jede endliche Teilmenge $E \subseteq \mathbb{N}$ ein $x \in X$ mit $f_i = (f_x)_i \; \forall i \in E$ gibt. Sei $C_i := B_i$ für $f_i = 1$ und $C_i := B_i^{\complement}$ für $f_i = 0$. Obige Bedingung besagt also, dass für jede endliche Menge $E \subseteq \mathbb{N}$ die Menge $\cap_{i\in E} C_i$ nichtleer ist. Diese Mengen bilden also eine Filterbasis eines Filters $\mathcal{F}_f$ in X. Da X kompakt ist, hat $\mathcal{F}_f$ einen Berührungspunkt $z_f \in X$. Wir behaupten $\mathcal{F}_f$ konvergiert gegen z_f: Gilt $z_f \in B_i$ für eine Basismenge B_i so hat B_i, da z_f Berührungspunkt ist, nichtleeren Schnitt mit allen Elementen des Filters, also auch mit C_i, woraus wegen $C_i = B_i$ oder $C_i = B_i$ folgt, dass $C_i = B_i$ gilt und damit $\mathcal{F}_f$ feiner als der Umgebungsfilter von z_f ist. In Hausdorffräumen konvergieren Filter aber höchstens gegen einen Punkt, also ist die Abbildung $\phi: \ A \to X, \ f \mapsto z_f$ wohldefiniert. Für eine Basismenge B_i gilt: $\phi^{-1}(B_i) = \{x \in \{0,1\}^{\mathbb{N}} : \ x_i = 1\}$, woraus die Stetigkeit von ϕ folgt. Für $x \in X$ sieht man unmittelbar, dass $\mathcal{F}_{f_x}$ gegen x konvergiert. Also ist diese Abbildung surjektiv von A auf X. □

Satz 3.0.4. *Jeder kompakte Hausdorffraum mit abzählbarer Basis ist ein stetiges Bild der Cantormenge.*

Beweis. Nach Satz 3.0.3 ist der Raum stetiges Bild einer abgeschlossenen Teilmenge von $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$. Diese ist nach Satz 3.0.2 stetiges Bild von $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$. Also ist der Raum stetiges Bild von $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$. Wegen Satz 3.0.1 gilt der Satz auch für die Cantormenge. □

Satz 3.0.5. *Jeder kompakte metrische Raum ist ein stetiges Bild der Cantormenge.*

Beweis. Es bleibt wegen Satz 3.0.4 nur zu zeigen, dass kompakte metrische Räume eine abzählbare Basis haben.

Für $\varepsilon > 0$ gibt es eine endliche Überdeckung des Raumes X durch offene ε-Kugeln. Wählt man für eine Nullfolge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine endliche Überdeckung durch offene a_n-Kugeln, so ist die Vereinigung eine abzählbare Basis der Topologie. □

Literaturverzeichnis

[BE] Bergelson, Vitaly *Minimal idempotents and ergodic Ramsey theory,* in Topics in Dynamics and Ergodic Theory 8-39, London Math. Soc. Lecture Note Series 310, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2003

[HR] Hewitt, Edwin und Ross Kenneth *Abstract Harmocnic Analysis I* 2^{nd} ed. Springer Grundl. d. math, Wiss, 115, 1979

[HS] Hindman, Neil und Strauss, Donna *Algebra in the Stone-Čech Compactification: Theory and Applications* 2^{nd} ed. De Gruyter, 2012

[ST] Stroppel, Markus *Locally Compact Groups,* EMS Textbooks in Mathematics, 2006

[WA] Walker, Russell C. *The Stone-Čech Compactification,* Springer Erg. d. Math. u. Grenzgeb. 83, 1974

Index