TECHNISCHE UNIVERSITÄT WIEN

BACHELORARBEIT

Das Randverhalten von Poisson und Cauchy Integralen

ausgeführt am

Institut für
Analysis and Scientific Computing
TU Wien

unter der Anleitung von

Ao.Univ.Prof. Dipl.-Ing. Dr.techn. Harald Woracek

durch

Maria Hermine Heitzinger
Matrikelnummer: 11909409

Wien, Juli 2022

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung **1**

2 Vorbemerkungen **2**
2.1 Definitionen 2
2.2 Integrieren über der Einheitssphäre 4

3 Poisson Integral **6**
3.1 Maximalfunktionen 6
3.2 K-Limiten von Poisson Integralen 15

4 Cauchy Integral **21**

Anhang **29**
A.1 Maßtheorie 29
A.2 Hardy Raum 30

Literaturverzeichnis **32**

1 Einleitung

In dieser Arbeit soll das Randverhalten von Poisson und Cauchy Integralen untersucht werden. Die Notation und der Aufbau halten sich stark an das Buch "Function theory in the unit ball of $\mathbb{C}^n$ " von Walter Rudin [5], im besonderen sind Kaitel 5 und 6 von Wichtigkeit.

Zunächst werden im zweiten Kapitel der Arbeit einige Definitionen vorausgeschickt. In diesem Zusammenhang werden auch Poisson und Cauchy Kerne vorgestellt, mit welchen die dazugehörigen Integrale definiert werden. Zusätzlich wird auch gezeigt, in welcher Weise diese Kerne zusammenhängen.
Weiters werden Sätze bezüglich der Integration über der Einheitssphäre formuliert, welche dann spätere Umformungen möglich machen.

Das dritte und größte Kapitel dieser Arbeit ist den Poisson Integralen gewidmet. Zuerst werden eine Metrik und sogenannte Maximalfunktionen eingeführt, mit welchen vielerlei Abschätzungen bewiesen werden. Nach dieser Vorarbeit wendet sich die Arbeit dem Hauptthema zu. Für die Untersuchung des Randverhaltens des Poisson Integrals wird der Korányi-Limes oder K-Limes eingeführt.
Das wichtigste Ergebnis lässt sich nun wie folgt formulieren.

"Das Poisson Integral $P[\mu]$ eines komplexen Borelmaßes auf der Einheitssphäre hat für fast alle ξ einen endlichen $K-$Limes."

Der Beweis beruht vor allem auf der Abschätzung in Satz 3.10.

In ähnlicher Weise werden im letzten Kapitel die Cauchy Integrale behandelt. Da das Cauchy Integral nicht positiv ist, werden einige Abschätzungen komplizierter. Das Hauptresultat ist Satz 4.6, aus welchem sofort folgt, dass das Cauchy Integral fast überall einen endlichen $K-$Limes hat.

In den Anhängen A.1 und A.2 sind Ergänzungen und Sätze festgehalten, welche in dieser Arbeit benutzt, doch nicht bewiesen werden. Zuerst finden sich Anmerkungen über die Maßtheorie: Nicht nur Sätze, welche in manchen Beweisen verwendet werden, sondern auch notationelle Erklärungen. Im Anhang A.2 werden Hardy Räume und Funktionen der Nevanlinna Klasse eingeführt und zwei Sätze formuliert. Diese werden ausschließlich im vierten Kapitel über Cauchy Integrale benötigt.

2 Vorbemerkungen

In diesem Kapitel werden Notationen, die sich durch die ganze Arbeit ziehen, eingeführt. Diese halten sich an [5].

2.1 Definitionen

$\mathbb{C}^n$ wird durch das innere Produkt $\langle z, w\rangle = \sum_{i=1}^n z_i \bar{w}_i$ und der naheliegenden Norm $|z| = \langle z, z\rangle^{1/2}$ mit $z, w \in \mathbb{C}^n$ zu einem n-dimensionalen Hilbertraum. Mit $\mathbb{B}$ oder $\mathbb{B}_n$, falls die Dimension aus dem Kontext nicht ersichtlich ist, wird die offene Einheitskugel in $\mathbb{C}^n$ bezeichnet. Der Rand $\partial\mathbb{B}$ ist die Einheitssphäre.
Mit λ_n bezeichne man das normale Lebesgue Maß auf $\mathbb{R}^n$ und

$$\nu_n = \frac{n!}{\pi^n}\lambda_{2n} \tag{2.1}$$

sei das Lebesgue Maß auf $\mathbb{C}^n = \mathbb{R}^{2n}$ mit $\nu_n(\mathbb{B}) = 1$. Auch hier wird im Laufe der Arbeit der Index des Maßes weggelassen, falls die Dimension des Bezugsraumes klar ist.
Mit σ wird das rotationsinvariante positive Borelmaß auf $\partial\mathbb{B}$ bezeichnet, für das $\sigma(\partial\mathbb{B}) = 1$ gilt.

Bemerkung 2.1. Die Rotationsinvarianz des Maßes σ ist folgendermaßen gemeint: Für alle $\rho \in O(2n)$, der Gruppe der orthogonalen Matrizen, gilt:

$$\forall E \subseteq \partial\mathbb{B} \text{ Borel messbar}: \ \sigma(\rho E) = \sigma(E). \tag{2.2}$$

Für $f \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n, \nu)$ gilt die Polarkoordinatendarstellung:

$$\int\limits_{\mathbb{C}^n} f d\nu = 2n \int\limits_0^\infty r^{2n-1} dr \int\limits_{\partial\mathbb{B}} f(r\xi) d\sigma(\xi). \tag{2.3}$$

Beide Integrale, die in dieser Arbeit behandelt werden, werden durch Integralkerne definiert.

Definition 2.2. Der *Cauchy Kern* ist auf $\mathbb{B}$ folgendermaßen definiert:

$$C(z, \xi) := \frac{1}{(1 - \langle z, \xi\rangle)^n}, \quad (z, \xi) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n, \langle z, \xi\rangle \neq 1. \tag{2.4}$$

Naheliegend ist nun das Cauchy Integral für $f \in L^1(\sigma), z \in \mathbb{B}$:

$$C[f](z) := \int\limits_{\partial\mathbb{B}} C(z,\xi) f(\xi) d\sigma(\xi). \tag{2.5}$$

oder allgemeiner für komplexes Borelmaß $\mu, z \in \mathbb{B}$:

$$C[\mu](z) := \int\limits_{\partial\mathbb{B}} C(z,\xi) d\mu(\xi). \tag{2.6}$$

Auf analoge Weise wird auch das Poisson Integral definiert.

Definition 2.3. Der sogenannte invariante **Poisson Kern** ist definiert durch:

Für $z \in \mathbb{B}, \xi \in \partial\mathbb{B}$:

$$P(z,\xi) := \frac{(1-|z|^2)^n}{|1-\langle z,\xi\rangle|^{2n}}. \tag{2.7}$$

Das invariante Poisson Integral ist für $f \in L^1(\sigma), z \in \mathbb{B}$ und komplexes Borelmaß μ:

$$P[f](z) := \int\limits_{\partial\mathbb{B}} P(z,\xi) f(\xi) d\sigma(\xi) \tag{2.8}$$

$$P[\mu](z) := \int\limits_{\partial\mathbb{B}} P(z,\xi) d\mu(\xi). \tag{2.9}$$

Es ist leicht zu sehen inwiefern diese beiden Integralkerne zusammenhängen.

Proposition 2.4. *Es gilt die folgende Gleichung:*

$$P(z,\xi) = \frac{C(z,\xi)C(\xi,z)}{C(z,z)}. \tag{2.10}$$

Beweis.

$$\frac{C(z,\xi)C(\xi,z)}{C(z,z)} = \frac{(1-|z|^2)^n}{(1-\langle z,\xi\rangle)^n(1-\overline{\langle z,\xi\rangle})^n} = \frac{(1-|z|^2)^n}{|1-\langle z,\xi\rangle|^{2n}} = P(z,\xi) \tag{2.11}$$

□

Zur Vereinfachung wird in dieser Arbeit "invariant" beim Poisson Integral weggelassen. Trotzdem soll angemerkt werden, woher dieser Name kommt.

Bemerkung 2.5. Für $f \in L^1(\sigma)$ gilt : $P[f \circ \psi] = P[f] \circ \psi$ mit $\psi \in Aut(\mathbb{B})$. In diesem Sinne ist die Invarianz gemeint.

2.2 Integrieren über der Einheitssphäre

In dem folgenden Abschnitt werden einige hilfreiche Sätze bewiesen.

Lemma 2.6. *Seien $1 \leq k < n$, $f \in \mathcal{L}(\mathbb{B}_k, \nu_k)$ und P eine orthogonale Projektion von $\mathbb{C}^n$ auf $\mathbb{C}^k$. Es gilt:*

$$\int\limits_{\partial\mathbb{B}_n} (f \circ P) d\sigma = \binom{n-1}{k} \int\limits_{\mathbb{B}_k} (1 - |w|^2)^{n-k-1} f(w) d\nu_k(w). \tag{2.12}$$

Beweis. Der erste Schritt des Beweises zeigt die Aussage für alle $f \in C(\mathbb{B}_k)$ mit der Eigenschaft, dass $\text{supp}(f) \subseteq r_0\mathbb{B}_k = \{x \in \mathbb{B}_k : \ |x| < r_0\}$ kompakt mit $r_0 < 1$.
Betrachte nun die wohldefinierte Abbildung $I : r \longmapsto \int\limits_{r\mathbb{B}_n} (f \circ P)(z) d\nu_n(z)$. Dies gilt tatsächlich, da sich f trivial zu einer stetigen Funktion auf $\mathbb{C}^k$, mit der gleichen Beschränkung des Trägers, fortsetzen lässt. Man sieht, dass $f \circ P$ bezüglich des Maßes $\nu_n\big|_{r\mathbb{B}_n}$ als beschränkte und messbare Funktion integrierbar ist. Aus (2.3) folgt die Darstellung

$$I(r) := 2n \int\limits_0^r t^{2n-1} \int\limits_{\partial\mathbb{B}} (f \circ P)(r\xi) d\sigma(\xi) dt \tag{2.13}$$

und durch Anwendung des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung erhält man

$$\frac{dI}{dr}(1) = 2n \int\limits_{\partial\mathbb{B}} (f \circ P)(\xi) d\sigma(\xi). \tag{2.14}$$

Andererseits kann man mit dem Satz von Fubini und der Formel (2.1) $I(r)$ auch anders darstellen:

$$\begin{aligned} I(r) &= \frac{n!}{\pi^{n-k}} \int\limits_{r\mathbb{B}_n} (f \circ P)(z) d\lambda_{2n}(z) = \\ &= \frac{n \cdot (n-1) \cdot ... \cdot (k+1)}{\pi^{n-k}} \int\limits_{r\mathbb{B}_k} \int\limits_{\mathbb{B}_v} (f \circ P)(v, w) d\lambda_{2(n-k)}(w) d\nu_k(v). \end{aligned} \tag{2.15}$$

für $z = (z_1, ..., z_n), v = (z_1, ..., z_k), w = (z_{k+1}, ..., z_n)$ und $\mathbb{B}_v = \{w \in \mathbb{C}^{n-k} : \ |w| < \sqrt{r^2 - |v|^2}\}$. Aus der Voraussetzung, dass P eine orthogonale Projektion ist, sieht man, dass für alle $(v, w) \in \mathbb{C}^n$: $(f \circ P)(v, w) = f(v)$. Eine weitere Umformung mit dem Lebesguemaß der Kugel $\mathbb{B}_v \subseteq \mathbb{C}^{n-k}$ ergibt für $r > r_0$:

$$I(r) = \binom{n}{k} \int\limits_{\mathbb{B}_k} (r^2 - |v|^2)^{n-k} f(v) d\nu_k(v). \tag{2.16}$$

Es sei hier angemerkt, dass die Integration über $\mathbb{B}_k$ anstatt $r\mathbb{B}_k$ möglich ist, da *supp*$(f) \subseteq r_0\mathbb{B}_k$. Naheliegenderweise soll auch diese Darstellung des Integrals nun nach r differenziert werden und dafür sollen die Voraussetzungen von Satz A.1 nachgeprüft werden. Für die Funktion $g(t,w) := (t^2 - |w|^2)^{n-k} f(w)$ gilt, dass die partielle Ableitung nach t existiert und sie für jedes feste $w \in \mathbb{B}_k$ auch stetig ist. Die Abschätzung erfolgt für alle $t \in (t_0 - 1, t_0 + 1) \cap [0, \infty)$ folgendermaßen:

$$\Big|\frac{\partial g}{\partial t}(t,w)\Big| \leq 2(t_0+1)(n-k)(t_0^2 + 2t_0 + 2)^{n-k-1}|f(w)|. \tag{2.17}$$

Es folgt:

$$\frac{dI}{dr}(1) = 2\binom{n}{k}(n-k)\int\limits_{\mathbb{B}_k}(1-|w|^2)^{n-k-1} f(w) d\nu_k(w). \tag{2.18}$$

Vergleich von (2.14) und (2.18) liefert das Gewünschte.
Im zweiten Schritt soll die Aussage allgemein bewiesen werden. Dafür betrachte man σ^P, also das Bildmaß von σ unter P. Für eine ausführliche Einführung und Erklärung soll auf [3] verwiesen werden. Man betrachte nun ein $f \in C(\mathbb{B}_k)$ und man erhält mit dem bereits Bewiesenen und der Transformationsformel für Bildmaße:

$$\int\limits_{\mathbb{B}_k} f(z) d\sigma^P_{\big|\mathbb{B}_k}(z) = \int\limits_{\mathbb{B}_k} f(y) d(\binom{n-1}{k}(1-|y|^2)^{n-k-1}\nu_k)(y). \tag{2.19}$$

Nach dem Darstellungssatz von Riesz sind die Maße gleich und damit folgt für $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{B}_k, \nu_k)$, dass $(\binom{n-1}{k}(1-|y|^2)^{n-k-1} f) \in \mathcal{L}^1(\mathbb{B}_k, \nu_k)$.
Insgesamt also $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{B}_k, \binom{n-1}{k}(1-|y|^2)^{n-k-1}\nu_k) = \mathcal{L}^1(\mathbb{B}_k, \sigma^P_{\big|\mathbb{B}_k}) \cong \mathcal{L}^1(\overline{\mathbb{B}_k}, \sigma^P)$. Zusammenfassend ist $(f \circ P) \in \mathcal{L}(\partial\mathbb{B}_n, \sigma)$. Man erhält nun durch Auflösen des Integrals $\int\limits_{\partial\mathbb{B}_n} (f \circ P) d\sigma$ die gewünschte Aussage.
Dies schließt den Beweis. □

Eine direkte Folgerung ist nun dieses Korollar.

Korollar 2.7. *Für $k = 1$, f eine Funktion in einer komplexen Variable und $\eta \in \partial\mathbb{B}_n$ gilt:*

$$\int\limits_{\partial\mathbb{B}_n} f(\langle \xi, \eta\rangle) d\sigma(\xi) = \frac{n-1}{\pi}\int\limits_{\mathbb{B}_1}(1-r^2)^{n-2} f(re^{i\theta}) r\, dr d\theta. \tag{2.20}$$

Beweis. Man nehme $P = \langle\ .\ , e_1\rangle$ als orthogonale Projektion auf $\mathbb{C}$. Man kann das Koordinatensytem in $\mathbb{C}^n$ so wählen, dass $\eta = e_1$ ist. Mit Lemma 2.6 folgt dann sofort die Behauptung. Genauer wählt man eine unitäre Matrix $U \in \mathbb{C}^{n\times n}$, sodass $\eta = e_1$. Nun berufe man sich auf die Rotationsinvarianz von σ, welche in Bemerkung 2.1 erwähnt wurde. Tatsächlich ist $\{U \in \mathbb{C}^{n\times n} :\ U \text{unitär}\} \subseteq O(2n)$. □

3 Poisson Integral

In diesem Kapitel wird das Randverhalten von Poisson Integralen untersucht. Dafür beschäftigt man sich zuerst mit sogenannten Maximalfunktionen, die viele wichtige Abschätzungen liefern. Insbesondere ist hier Satz 3.10 hervorzuheben. Auch mit Hilfe der Einführung einer Metrik werden einige wichtige Sätze und Abschätzungen formuliert. Mit dieser extensiven Vorarbeit kann man sich dann den K-Limiten zuwenden, welche im zweiten Abschnitt eingeführt werden. Das Hauptresultat ist dann: Das Poisson Integral $P[\mu]$ eines komplexen Maßes μ auf $\partial\mathbb{B}$ hat für σ-fast alle ξ einen K-Limes. Damit ist das Randverhalten dieses Integrals für die spezielle Situation erfasst.

3.1 Maximalfunktionen

Zunächst führe man eine Metrik auf $\partial\mathbb{B}$ ein.

Definition 3.1. Definiere für $a, b \in \overline{\mathbb{B}}$

$$d : \overline{\mathbb{B}} \times \overline{\mathbb{B}} \longrightarrow [0, \infty),\ (a, b) \longmapsto (1 - \langle a, b\rangle)^{\frac{1}{2}} \tag{3.1}$$

und für $\delta > 0, \xi \in \partial\mathbb{B}$: $\mathcal{Q}(\xi, \delta) := \{\eta \in \partial\mathbb{B} : d(\xi, \eta) < \delta\}$.

Nun werden die wichtigsten Eigenschaften in einem Lemma zusammengefasst und bewiesen.

Lemma 3.2. *Sei $U \in \mathcal{U} \subseteq O(2n)$, die Menge der unitären Operatoren von $\mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n$ und $a, b, c \in \overline{\mathbb{B}}$. Dann gelten:*

1. *$\mathcal{U}$-Invarianz: $d(Ua, Ub) = d(a, b)$ und $U\mathcal{Q}(\xi, \delta) = \mathcal{Q}(U\xi, \delta)$*
2. *$0 \leq d(a, b) \leq \sqrt{2}$*
3. *$d(a, b) = d(b, a)$*
4. *Dreiecksungleichung: $d(a, c) \leq d(a, b) + d(b, c)$*
5. *$d_{|\partial\mathbb{B}\times\partial\mathbb{B}}$ ist eine Metrik und $\mathcal{Q}(\xi, \delta)$ sind die dazugehörigen Kugeln. Es sei angemerkt, dass $\mathcal{Q}(\xi, \delta) = \partial\mathbb{B}$ für $\delta > \sqrt{2}$. Zur Abkürzung wird oft $\mathcal{Q}_\delta$ anstelle $\mathcal{Q}(\xi, \delta)$ geschrieben.*

Beweis. Punkte 1. und 3. folgen direkt aus der Definition. Für $a, b \in \overline{\mathbb{B}}$ und der Cauchy-Schwarz Ungleichung folgt:

$$|1 - \langle a, b\rangle| \leq 1 + |u| \cdot |v| \leq 2. \tag{3.2}$$

Da man nun die $\mathcal{U}$-Inavrianz bereits weiß, reicht es ohne Beschränkung der Allgemeinheit für ein $r \in [0, 1]$ $b = r \cdot e_1$ für den Beweis von 4. anzunehmen. Man wähle nämlich einfach ein geeignetes $U \in \mathcal{U}$, welches b auf das Gewünschte abbildet. Hierbei ist e_1 die naheliegende Bezeichnung für den Vektor mit lauter Nullen, außer einem Einser an der Stelle des Index. Es bleibt also zu zeigen:

$$|1 - \langle a, c\rangle|^{\frac{1}{2}} \leq |1 - ra_1|^{\frac{1}{2}} + |1 - rc_1|^{\frac{1}{2}}. \tag{3.3}$$

Man definiere nun $a' := a - a_1e_1$ und analog $c' := c - c_1e_1$. Dann folgt sofort:

$$\begin{aligned} |1 - \langle a, c\rangle| &= |1 - \langle a' + a_1e_1, c' + c_1e_1\rangle| \\ &= |1 - a_1\overline{c_1} + \langle a', c'\rangle| \\ &\leq |1 - a_1\overline{c_1}| + |a'| \cdot |c'|. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Für den nächsten Schritt benötigt man folgende Ungleichung für $r \in [0, 1]$:

$$|r - \overline{c_1}| \leq |1 - r\overline{c_1}|. \tag{3.5}$$

Damit folgt nun:

$$\begin{aligned} |1 - a_1\overline{c_1}| &= |1 - ra_1 + a_1(r - \overline{c_1})| \\ &\leq |1 - ra_1| + |r - \overline{c_1}| \\ &\leq |1 - ra_1| + |1 - r\overline{c_1}| \\ &= |1 - ra_1| + |1 - rc_1|. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Weiters: $|a'|^2 \leq 1-|a_1|^2 \leq 1-|ra_1|^2 = (1-|ra_1|)(1+|ra_1|) \leq 2|1-ra_1|$. Eine analoge Überlegung für $|c'|^2$ und weiterführen der Gleichung (3.4) lieferen das Gewünschte. Es folgt nun direkt, dass $d|_{\partial\mathbb{B}\times\partial\mathbb{B}}$ eine Metrik ist, denn $d(\xi, \eta) = 0 \Leftrightarrow \xi = \eta$. Es sei hier angemerkt, dass d tatsächlich auf $\mathbb{B}$ keine Metrik mehr ist, da für $|a| < 1$ $d(a, a) = (1 - |a|^2)^{\frac{1}{2}} > 0$ gilt.

□

Das folgende Lemma wird bei der weiteren Untersuchung von Maximalfunktionen von Poisson Integralen sehr wichtig sein. Sei im folgenden für $\delta :\ \mathcal{Q}_\delta = \mathcal{Q}(e_1, \delta)$.

Lemma 3.3. *Es gelten die folgenden Gleichungen:*

$$n > 1,\ \sup_{\delta>0} \frac{\sigma_n(\mathcal{Q}_\delta)}{\delta^{2n}} = A_0 < \infty, \quad \inf_{\delta\in(0,\sqrt{2}]} \frac{\sigma_n(\mathcal{Q}_\delta)}{\delta^{2n}} = 2^{-n} \tag{3.7}$$

$$n = 1,\ \sup_{\delta>0} \frac{\sigma_1(\mathcal{Q}_\delta)}{\delta^2} = \frac{1}{2}, \quad \inf_{\delta\in(0,\sqrt{2}]} \frac{\sigma_1(\mathcal{Q}_\delta)}{\delta^2} = \frac{1}{\pi}. \tag{3.8}$$

Beweis. Zunächst soll der Fall $n = 1$ bewiesen werden. Zur Erinnerung $\mathcal{Q}_\delta = \mathcal{Q}(e_1, \delta)$. Für $n = 1$ ist $e_1 = 1$. Aus der Definition von σ folgt nun mit $\delta > \sqrt{2} : \sigma(\mathcal{Q}_\delta) = \sigma(\partial\mathbb{B}) = 1$. Also $\frac{\sigma(\mathcal{Q}_\delta)}{\delta^2} \leq \frac{1}{2}$. Da $\xi \in \mathcal{Q}_\delta$ wenn $|1 - \xi_1| < \delta^2$, ist also $\mathcal{Q}_\delta$ die Kugel mit Radius δ^2. Man kann also δ^2 und in Folge $\frac{\sigma(\mathcal{Q}_\delta)}{\delta^2}$ mit Hilfe des Satzes von Pythagoras durch einen Winkel $\theta \in (0, \pi)$ darstellen. Es folgt: $\frac{\sigma(\mathcal{Q}_\delta)}{\delta^2} = \frac{\theta}{2\pi \sin(\frac{\theta}{2})}$. Diese ist monoton wachsend und damit folgt:

$$\begin{aligned} \inf_{\delta \in (0, \sqrt{2})} \frac{\sigma_1(\mathcal{Q}_\delta)}{\delta^2} &= \lim_{\delta \to 0} \frac{\sigma_1(\mathcal{Q}_\delta)}{\delta^2} \\ &= \frac{1}{\pi}. \end{aligned} \tag{3.9}$$

Analoge Überlegungen für die obere Grenze liefern das Gewünschte.
Sei nun $n > 1$, $\epsilon > 0$ beliebig und $\xi = (\xi_1, ..., \xi_n) \in \partial\mathbb{B}$. Definiere

$$B_{\delta^2}(1) := \{\eta \in \mathbb{D} : \ |1 - \eta| < \delta^2\} \tag{3.10}$$

und betrachte $\mathcal{Q}(e_1, \delta) = \{\eta \in \partial\mathbb{B} : \ d(\eta, e_1) < \delta\}$ und weiters gilt:

$$d(\eta, e_1) < \delta \ \Leftrightarrow \ (1 - \langle \eta, e_1 \rangle)^{1/2} = (1 - \eta_1)^{1/2} < \delta \ \Leftrightarrow \ |1 - \eta_1| < \delta^2. \tag{3.11}$$

Man sieht also, dass $\mathbb{1}_{\mathcal{Q}(e_1,\delta)}(\xi) = \mathbb{1}_{B_{\delta^2}(1)}(\xi_1)$. Nun folgt mit Korollar 2.7 und $\xi_1 = \langle \xi, e_1 \rangle$:

$$\begin{aligned} \sigma(\mathcal{Q}(e_1, \delta)) &= \int\limits_{\partial\mathbb{B}} \mathbb{1}_{B_{\delta^2}(1)}(\langle \xi, e_1 \rangle) d\sigma(\xi) \\ &= \frac{n-1}{\pi} \int\limits_0^1 (1 - r^2)^{n-2} \mathbb{1}_{B_{\delta^2}(1)}(re^{i\theta}) r \ d\theta dr \\ &= \frac{n-1}{\pi} \int\limits_{E(\delta)} (1 - |z|^2)^{n-2} \ d\lambda_2(z). \end{aligned} \tag{3.12}$$

Mit $E(\delta) = \{z : |z| < 1 \text{ und } |1 - z| < \delta^2\}$. Nun führe man eine Transformation durch, genauer: $f : z \longmapsto \frac{\delta^2}{1-z}, z \in E(\delta)$ und schreibe $f(z) = w = x + iy, \ x, y \in \mathbb{R}$. Zunächst betrachte man $E(\delta)$ unter diesem Bild:

$$\begin{aligned} f(E(\delta)) = E'(\delta) &= \{w \in \mathbb{C} : |w - \delta^2| < |w|, |w| > 1\} \\ &= \{w \in \mathbb{C} : 2Re(w) > \delta^2, |w| > 1\} \\ &= \{x + iy : 2x > \delta^2, |x + iy| > 1\}. \end{aligned} \tag{3.13}$$

Und weiters:

$$\begin{aligned}\sigma(\mathcal{Q}(e_1,\delta)) &= \frac{n-1}{\pi}\int\limits_{E'(\delta)} (1-|1-\frac{\delta^2}{w}|^2)^{n-2}(\frac{\delta}{|w|})^4\ d\lambda_2(w)\\ &= \frac{n-1}{\pi}\int\limits_{E'(\delta)} (2x-\delta^2)^{n-2}(\frac{\delta}{|w|})^{2(n-2)}(\frac{\delta}{|w|})^4\ d\lambda_2(w).\end{aligned} \tag{3.14}$$

Insgesamt bekommt man das finale Ergebnis:

$$\frac{\sigma(\mathcal{Q}(e_1,\delta))}{\delta^{2n}} = \frac{n-1}{\pi}\int\limits_{E'(\delta)} (2x-\delta^2)^{n-2}|w|^{-2n}\ d\lambda_2(w). \tag{3.15}$$

Für ein fallendes δ steigen Integrand und $E'(\delta)$. Genauer gilt für Folgen δ_k, die gegen 0 konvergieren, dass $(2x-\delta_k^2)^{n-2}|w|^{-2n}\mathbb{1}_{E'(\delta)})(w)$ monoton wachsend ist. Mit dem Satz der monotonen Konvergenz, welcher zum Beispiel in [1] auf Seite 130 zu finden ist, und einigen Rechnungen folgt nun, dass $\lim\limits_{\delta\to 0}\frac{\sigma(\mathcal{Q}(e_1,\delta))}{\delta^{2n}}$ existiert. Er wird mit A_0 bezeichnet. Weitere Umformungen liefern das Ergebnis:

$$A_0 = \frac{(n-1)2^{n-2}}{\pi}\int\limits_1^\infty \frac{1}{r^{n+1}}\ dr \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} cos(\theta)^{n-1}d\theta < \infty. \tag{3.16}$$

Dies schließt den Beweis. □

Nun soll eine sogenannte Maximalfunktion zu einem Maß definiert werden, die für weitere Untersuchungen wichtig sein wird.

Definition 3.4. Sei μ ein komplexes Borelmaß auf $\partial\mathbb{B}$. Dann heißt $M_\mu : \partial\mathbb{B} \longrightarrow [0,1]$ **Maximalfunktion zum Maß** μ und ist definiert durch:

$$(M_\mu)(\xi) = \sup_{\delta>0}\frac{|\mu|(\mathcal{Q}(\xi,\delta))}{\sigma(\mathcal{Q}_\delta)}. \tag{3.17}$$

Man bemerke, dass $M_\mu = M_{|\mu|}$ gilt.

Satz 3.5. *Wenn E eine Vereinigung eines endlichen Systems Φ von Kugeln $\mathcal{Q}\subseteq\partial\mathbb{B}$ ist, dann folgt, dass Φ eine Teilmenge Γ aus paarweise disjunkten Elementen hat, sodass:*

$$E \subseteq \bigcup_\Gamma 2\mathcal{Q} \tag{3.18}$$

und

$$\sigma(E) \leq A\sum_\Gamma \sigma(\mathcal{Q})\ mit\ A = \sup_{\mathcal{Q}}\frac{\sigma(3\mathcal{Q})}{\sigma(\mathcal{Q})}. \tag{3.19}$$

Beweis. Zunächst ordne man diese Kugeln $\mathcal{Q}_i = \mathcal{Q}(\xi_i, \delta_i)$, sodass δ_i aufsteigend sortiert sind und $i_1 = 1$. Genauer soll also gelten, dass $E = \bigcup_{i=1}^{n} \mathcal{Q}_i$ und $\Phi = \{\mathcal{Q}_i | i = 1, ..., n\}$ mit aufsteigenden Radii. Nun setze man die Konstruktion induktiv fort: Sei $k \geq 1$ und i_k bereits wie gewünscht gewählt. Falls $\mathcal{Q}_{i_k}$ alle $\mathcal{Q}_i, i > i_k$ schneidet, dann höre man bei diesem Index bereits auf. Andernfalls setze man $i_{k+1} = \min\{j \in \{1, ..., n\} | j > i_k$ und $\mathcal{Q}_j \cap (\mathcal{Q}_{i_1} \cup, ..., \mathcal{Q}_{i_n} \neq \emptyset)\}$.

Da Φ aus der Voraussetzung endlich war, sieht man sofort, dass dieser Prozess bei einem gewissen Index m abbrechen muss. Nun definiere man $\Gamma = \{\mathcal{Q}_{i_1}, ..., \mathcal{Q}_{i_m}\}$, also gilt $\Gamma \subseteq \Phi$ und die Elemente sind paarweise disjunkt.
Nun folgt, dass es für alle $\mathcal{Q}_i \in \Phi$ ein $k \in \{1, ..., m\}$ gibt, sodass $i_k \leq i \leq i_{k+1}$ mit der Eigenschaft $\mathcal{Q}_i \cap \mathcal{Q}_{i_k} \neq \emptyset$. Das gilt nicht bei $i \geq k_m$, da es kein i_{m+1} gibt. Wäre dies nicht erfüllt, würde es, wie man schnell sieht, zu einem Widerspruch zur Konstruktion von Γ führen.

Man betrachte nun $\mathcal{Q}_i$ und das zugehörige $\mathcal{Q}_{i_k}$. Sei $\eta \in \mathcal{Q}_i \cap \mathcal{Q}_{i_k}$ und es gilt für alle $\xi \in \mathcal{Q}_i$ dass $d(\xi, \eta) < 2\delta_i \leq 2\delta_{i_k}$ und damit $d(\xi, \xi_{i_k}) < 3\delta_{i_k}$. Es folgt also insgesamt:

$$E \subseteq \bigcup_{\Gamma} 3 \cdot \mathcal{Q}. \tag{3.20}$$

und damit ist die erste Aussage gezeigt. Die zweite folgt nun recht schnell:

$$\begin{aligned} \sigma(E) &\leq \sum_{\Gamma} \sigma(3 \cdot \mathcal{Q}) \\ &\leq \sum_{\Gamma} \frac{\sigma(3\mathcal{Q})}{\sigma(\mathcal{Q})} \sigma(\mathcal{Q}) \\ &\leq A \cdot \sum_{\Gamma} \sigma(\mathcal{Q}). \end{aligned} \tag{3.21}$$

Damit wären alle Aussagen des Satzes bewiesen. □

Im nächsten Lemma werden weitere Abschätzungen durchgeführt und die Konstante A von Satz 3.5 wird wiederverwendet.

Lemma 3.6. *Sei μ ein komplexes Borelmaß auf $\partial\mathbb{B}$ und $t > 0$, dann folgt*

$$\sigma(\{\xi \in \partial\mathbb{B} : M_\mu(\xi) > t\}) \leq A \frac{\|\mu\|}{t}. \tag{3.22}$$

Beweis. Sei μ wie aus der Angabe und $t > 0$. M_μ ist nach unten halbstetig, daher ist die Menge $\{\xi \in \partial\mathbb{B} : M_\mu(\xi) > t\}$ offen. Man wähle nun ein $K \subseteq \{\xi \in \partial\mathbb{B} : M_\mu(\xi) > t\}$ kompakt. Es gilt, für alle $\xi \in K$ gibt es ein $\mathcal{Q}_\delta(\xi)$, sodass $|\mu|(\mathcal{Q}_\delta(\xi)) > t\sigma(\mathcal{Q}_\delta(\xi))$. Wobei die $\mathcal{Q}_\delta(\xi)$ die Kugeln mit Radius δ und Mittelpunkt ξ sind.

Nun ist K kompakt und daraus folgt, dass man endlich viele $\xi_1, ..., \xi_n$ findet, sodass $K \subseteq \bigcup \mathcal{Q}_\delta(\xi_i)$ gilt. Der Satz 3.5 liefert nun eine endliche Menge Γ an paarweise disjunkten Mengen, die K ebenfalls überdecken und es gilt:

$$\begin{aligned} \sigma(K) &\leq A \sum_\Gamma \sigma(\mathcal{Q}) \\ &\leq A \sum_\Gamma \frac{|\mu|(\mathcal{Q})}{t} \\ &= A \frac{|\mu|(\bigcup_\Gamma \mathcal{Q})}{t} \\ &\leq A \frac{\|\mu\|}{t}. \end{aligned} \tag{3.23}$$

Und damit ist das Gewünschte gezeigt. □

Man definiere nun für $\alpha > 1, \xi \in \partial\mathbb{B} : D_\alpha(\xi) := \{z \in \mathbb{C}^n : |1 - \langle z, \xi\rangle| < \frac{\alpha}{2}(1 - |z|^2)\}$. Es ist sofort ersichtlich, dass $D_\alpha(\xi) \subseteq \mathbb{B}$. Weiters ist für $\alpha \leq 1, D_\alpha(\xi) = \emptyset$. Dies folgt aus der Abschätzung: $|1 - \langle z, \xi\rangle| \geq 1 - |z| \geq \frac{1}{2}(1 - |z|^2)$. Für ein $U \in \mathcal{U}$ sieht man außerdem, dass $UD_\alpha(\xi) = D_\alpha(U\xi)$ ist.

Diese Menge D_α wird zur Definition einer weiteren Maximalfunktion verwendet, kommt aber auch im nächsten Abschnitt im Hauptresultat dieses Kapitels vor.
Bevor die Maximalfunktion bezüglich einer stetigen Funktion auf $\mathbb{B}$ eingeführt wird, sollen zuerst einige Resultate gezeigt werden.

Lemma 3.7. *Sei $\eta \in \partial\mathbb{B}, \xi \in \partial\mathbb{B}, |z| = r$ und $z \in D_\alpha(\xi)$ mit $\alpha > 1$. Dann folgt:*

$$|1 - \langle \xi, \eta\rangle| < 4\alpha|1 - \langle z, \eta\rangle| \tag{3.24}$$

und

$$P(z, \eta) < \frac{(32\alpha^2(1 - r))^n}{|1 - \langle \xi, \eta\rangle|^{2n}}. \tag{3.25}$$

Wobei mit P der Poissonkern, definiert in 2.3, gemeint ist.

Beweis. Seien also $\eta, \xi \in \partial\mathbb{B}$ und $z \in D_\alpha(\xi)$. Es gilt:

$$\begin{aligned} |1 - \langle z, \xi\rangle| &< \frac{\alpha}{2}(1 - |z|^2) \\ &\leq \alpha(1 - |z|) \\ &\leq \alpha|1 - \langle z, \eta\rangle|, \end{aligned} \tag{3.26}$$

oder anders formuliert, $d(z, \xi) < \sqrt{\alpha} d(z, \eta)$. Nun schätze man mit der Dreiecksungleichung aus Lemma 3.2 ab:

$$d(\xi, \eta) \leq d(\xi, z) + d(z, \eta) < (1 + \sqrt{\alpha})d(z, \eta). \tag{3.27}$$

Daraus folgt, da $\alpha > 1$: $|1 - \langle \xi, \eta \rangle| < 4\alpha |1 - \langle z, \eta \rangle|$.
Damit wäre der erste Teil des Lemmas bewiesen. Der zweite folgt nun leicht aus dem Gezeigten und der Definition des Poissonkerns:

$$\begin{aligned} P(z, \eta) &= \frac{(1 - |z|^2)^n}{|1 - \langle z, \eta \rangle|^{2n}} \\ &< \frac{(2(1 - r))^n}{(4\alpha)^{-2n} |1 - \langle \xi, \eta \rangle|^{2n}} \\ &= \frac{(32\alpha^2(1 - r))^n}{|1 - \langle \xi, \eta \rangle|^{2n}}. \end{aligned} \tag{3.28}$$

□

Definition 3.8. Für F: $\mathbb{B} \to \mathbb{C}$ stetig und $\alpha > 1$ ist *die Maximalfunktion* $M_\alpha F$: $\partial\mathbb{B} \to [0, \infty]$ definiert durch

$$(M_\alpha F)(\xi) := \sup\{|F(z) : z \in D_\alpha(\xi)|\} \tag{3.29}$$

Für diese Maximalfunktion gilt nun folgendes:

Proposition 3.9. *$M_\alpha F$ ist für $\alpha > 1$ unterhalbstetig.*

Beweis. Betrachte für ein $t \in \mathbb{R}$ die Menge $\{\xi \in \partial\mathbb{B} |\ M_\alpha F(\xi) > t\}$. Für ein solches ξ gibt es ein $z \in D_\alpha(\xi)$, sodass $|F(z)| > t$. Die Menge $\{\eta \in \partial\mathbb{B} |\ z \in D_\alpha(\eta)\}$ ist offen und es existiert ein $\mathcal{Q}(\xi, \delta) \subseteq \{\eta \in \partial\mathbb{B} |\ z \in D_\alpha(\eta)\}$. Also ist die ursprüngliche Menge offen und $M_\alpha F$ damit unterhalbstetig. □

Nun soll ein zentraler Satz präsentiert werden.

Satz 3.10. *Zu jedem $\alpha > 1$ gibt es eine zugehörige Konstante $A(\alpha) < \infty$, sodass gilt:*

$$M_\alpha P[\mu] \leq A(\alpha) M_\mu(\xi) \tag{3.30}$$

für alle $\xi \in \partial\mathbb{B}$ und komplexes Maß μ auf $\partial\mathbb{B}$.

Beweis. Man zeige die Aussage zuerst für ein positives μ. Es genügt den Beweis am Punkt e_1 zu führen, denn mit ähnlicher Argumentation wie in vielen anderen Beweisen dieser Arbeit, lässt sich für ein beliebiges ξ ein $U \in \mathcal{U}$ finden mit $Ue_1 = \xi$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
M_\alpha P[\mu](\xi) &= \sup_{z\in D_\alpha(\xi)} |P[\mu](z)| \\
&= \sup_{z\in D_\alpha(Ue_1)} |P[\mu](z)| \\
&= \sup_{z\in UD_\alpha(e_1)} |P[\mu](z)| \\
&= \sup_{z\in D_\alpha(e_1)} |P[\mu^{U^{-1}}](z)| \\
&= M_\alpha P[\mu^{U^{-1}}](e_1) \\
&\leq A(\alpha) M_{\mu^{U^{-1}}}(e_1) \\
&= A(\alpha) M_\mu(\xi).
\end{aligned} \tag{3.31}$$

Sei also μ ein positives Maß. Nach Lemma 3.3 gibt es nun ein $A_0 < \infty$, sodass für alle $\delta > 0$ $\sigma(\mathcal{Q}_\delta) \leq A_0\delta^{2n}$ gilt. Man zeige nun, dass

$$P[\mu](z) \leq 2A_0(16\alpha)^n \tag{3.32}$$

für alle $z \in D_\alpha(e_1)$ gilt.

Dafür fixiere man ein solches $z \in D_\alpha(e_1)$ und setze $r = |z|$ sowie $t = 8\alpha - (1-r)$ und definiere:

$$V_0 := \{\omega \in \partial\mathbb{B} : |1-\omega_1| < t\} \tag{3.33}$$

$$V_k := \{\omega \in \partial\mathbb{B} : 2^{k-1}t \leq |1-\omega_1| < 2^k t\} \tag{3.34}$$

für $k = 1, ..., k_0$ mit $k_0 \in \mathbb{N}$ so, dass $2^{k_0} > 2$.

Diese Mengen bilden offensichtlich eine disjunkte Überdeckung von $\partial\mathbb{B}$. Nun kann $P[\mu]$ mit Hilfe der gefundenen Überdeckung in eine Summe zerlegt werden und zwar in:

$$P[\mu](z) = \int_{V_0} P(z,\omega)\ d\mu(\omega) + \sum_{k=1}^{k_0} \int_{v_k} P(z,\omega)\ d\mu(\omega). \tag{3.35}$$

Diese Summe soll nun teilweise abgeschätzt werden. Zunächst gilt für $\omega \in \partial\mathbb{B}$:

$$\begin{aligned}
P(z,\omega) &\leq \frac{(1-r^2)^n}{(1-r)^{2n}} \\
&\leq 2^n(1-r)^{-n}.
\end{aligned} \tag{3.36}$$

Da μ ein postives Maß ist, folgt mit Lemma 3.3

$$\begin{aligned}\int\limits_{V_0} P(z,\omega)\ d\mu(\omega) &\leq 2^n(1-r)^{-n}\mu(V_0)\\ &\leq 2^n \frac{1}{(1-r)^n} A_0 t^n M_\mu(e_1)\\ &= A_0\left(\frac{2t}{1-r}\right) M_\mu(e_1)\\ &= A_0\left(\frac{2t}{1-r}\right)\end{aligned} \tag{3.37}$$

da $M_\mu(e_1) = 1$. Mit der Definition von t gilt nun:

$$\int\limits_{V_0} P(z,\omega)\ d\mu(\omega) \leq A_0(16\alpha)^n. \tag{3.38}$$

Weiters schätze man nun für $k \in [1, k_0]$ das Integral über V_k ab. Vorab wieder eine kleine Abschätzung für $P(z,\omega)$ mit Lemma 3.7:

$$\begin{aligned}P(z,\omega) &< \frac{(32\alpha(1-r))^n}{|1-\omega_1|^{2n}}\\ &= \frac{(4\alpha t)^n}{|1-\omega_1|^{2n}}\\ &\leq \frac{(4\alpha t)^n}{(2^{k-1}t)^{2n}}\\ &= \left(\frac{16\alpha t}{4^k t}\right)^n.\end{aligned} \tag{3.39}$$

Nun folgt mit $\mu(V_k) \leq A_0(2^k t)^n$

$$\begin{aligned}\int\limits_{V_k} P(z,\omega) d\mu(\omega) &\leq \left(\frac{16\alpha t}{4^k t}\right)^n \mu(V_k)\\ &\leq A_0\left(\frac{16\alpha t}{4^k t}\right)^n (2^k t)^n M_\mu(e_1)\\ &= A_0(16\alpha)^n 2^{-nk}.\end{aligned} \tag{3.40}$$

Nun füge man beide Abschätzungen zusammen und erhält:

$$\begin{aligned} P[\mu](z) &\leq A_0(16\alpha)^n + \sum_{k=1}^{k_0} A_0(16\alpha)^n 2^{-nk} \\ &= A_0(16\alpha)^n(1 + \sum_{k=1}^{k_0} 2^{-nk}) \\ &\leq 2A_0(16\alpha)^n. \end{aligned} \tag{3.41}$$

Damit folgt die Behauptung, denn mit $A(\alpha) := 2A_0(16\alpha)^n$ gilt $P[\mu](z) \leq A(\alpha)M_\mu(e_1)$.

Für ein beliebiges μ ist nicht mehr viel zu zeigen, denn aus den allgemeinen Beziehungen $M_\mu = M_{|\mu|}$ und $|P[\mu]| \leq P[|\mu|]$ folgt

$$\begin{aligned} M_\alpha P[\mu] &\leq M_\alpha P[|\mu|] \\ &\leq A(\alpha)M_{|\mu|} \\ &= A(\alpha)M_\mu. \end{aligned} \tag{3.42}$$

Damit ist alles gezeigt.

□

3.2 K-Limiten von Poisson Integralen

In diesem Abschnitt werden wieder die Mengen $D_\alpha(\xi)$ mit $\xi \in \partial\mathbb{B}$ und $\alpha > 1$ benötigt. Zunächst eine Definition.

Definition 3.11. Man sagt $F\colon \Omega \to \mathbb{C}$ hat den Korányi-Limes oder K-Limes $\lambda \in \mathbb{C}$ an dem Punkt ξ geschrieben

$$\text{K-}\lim_{z \to \xi} F(z) = \lambda, \tag{3.43}$$

wenn folgendes gilt: Für alle $\alpha > 1$ und für alle Folgen $(z_i)_{i\in\mathbb{N}}$ in $D_\alpha(\xi) \cap \Omega$ die gegen ξ konvergieren, gilt $F(z_i) \to \lambda$ mit $i \to \infty$.

Um das Hauptresultat dieses Kapitels über das Randverhalten von Poissonintegralen zu beweisen, braucht man zuerst einige Hilfsaussagen über Maße und deren Ableitungen.
Mit Lemma 3.6 lassen sich Aussagen über die Ableitungen von Maßen treffen. Es soll der singuläre und absolut stetige Fall separat behandelt werden.

Lemma 3.12. *Sei $f \in \mathcal{L}^1(\sigma)$ und man definiere*

$$T_f(\xi) := \lim_{\delta\to 0} \sup_{\delta \leq \epsilon} \frac{1}{\sigma(\mathcal{Q}_\delta)} \int\limits_{\mathcal{Q}(\xi,\delta)} |f(\eta) - f(\xi)| \, d\sigma(\eta) \tag{3.44}$$

für $\xi \in \partial\mathbb{B}$. Seien weiters $g \in C(\partial\mathbb{B})$ und $f, f_1, f_2 \in \mathcal{L}^1(\sigma)$ dann gilt:

1. $T_{f_1+f_2} \leq T_{f_1} + T_{f_2}$

2. $T_g(\xi) = 0$

3. $T_f \leq |f| + M_{\sigma_f}$.

Beweis. 1. Man kann den Integranden leicht wie folgt abschätzen mit $f := f_1 + f_2$: $|f(x) - f(y)| \leq |f_1(x) - f_1(y)| + |f_2(x) - f_2(y)|$.

2. Sei $\epsilon > 0$ und $\delta \leq \epsilon$. Es gilt:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sigma(\mathcal{Q}_\delta)} \int\limits_{\mathcal{Q}(\xi,\delta)} |f(\eta) - f(\xi)| \, d\sigma(\eta) &\leq \frac{1}{\sigma(\mathcal{Q}_\delta)} \int\limits_{\mathcal{Q}(\xi,\delta)} |f(\eta)| \, d\sigma(\eta) + |f(\xi)| \\ &= \frac{|\sigma_f|(\mathcal{Q}_\delta(\xi))}{\sigma(\mathcal{Q}_\delta(\xi))} \\ &\leq M_{\sigma_f}(\xi) + |f(\xi)|. \end{aligned} \tag{3.45}$$

Es ergibt sich das Gewünschte.

3. Sei also $g \in C(\partial\mathbb{B}), \xi \in \partial\mathbb{B}$ und $\epsilon > 0$. Wähle $\delta > 0$, sodass für alle $\eta \in \partial\mathbb{B}$ mit $d(\eta, \xi) < \delta$ gleich $|g(\eta) - g(\xi)| < \epsilon$ folgt. Man kann also den Integranden wie gewollt abschätzen.

□

Satz 3.13. *Sei $f \in \mathcal{L}^1(\sigma)$. Es gilt:*

$$\lim_{\delta \to 0} \frac{1}{\sigma(\mathcal{Q}_\delta)} \int\limits_{\mathcal{Q}(\xi,\delta)} |f(\eta) - f(\xi)| \, d\sigma(\eta) = 0, \tag{3.46}$$

für fast alle $\xi \in \partial\mathbb{B}$. Folglich gilt

$$f(\xi) = \lim_{\delta \to 0} \frac{1}{\sigma(\mathcal{Q}_\delta)} \int\limits_{\mathcal{Q}(\xi,\delta)} f(\eta) \, d\sigma(\eta). \tag{3.47}$$

Bemerkung 3.14. Die Punkte ξ, für die (3.46) gilt, heißen Lebesgue Punkte von f.

Beweis. Sei $t > 0, \epsilon > 0$ und $f \in \mathcal{L}^1(\sigma)$. Weiters sei T_f wie im vorherigen Lemma definiert. Man wähle nun ein $g \in C(\partial\mathbb{B})$, sodass $\|f - g\|_1 < \epsilon$ und man setze $h = f - g$. Nun folgt aus Lemma 3.12

$$T_f(\xi) \leq T_g(\xi) + T_h(\xi) \leq |h(\xi)| + M_{\sigma_h}(\xi) \tag{3.48}$$

für $\xi \in \partial\mathbb{B}$. Man betrachte die Mengen:

$$A(t) := \{\xi \in \partial\mathbb{B} | \ T_f(\xi) > t\} \tag{3.49}$$

und

$$E(t) := \{\xi \in \partial\mathbb{B} : |h| > \frac{t}{2}\} \ \cup \ \{\xi \in \partial\mathbb{B} : M_{\sigma_h}(\xi) > \frac{t}{2}\}. \tag{3.50}$$

Aus der eben gemachten Abschätzung sieht man $A(t) \subseteq E(t)$. Weiters folgt aus Lemma 3.6

$$\sigma(E(t)) \leq \frac{2}{t}\|g\|_1 + \frac{2}{t}A(t)\|\sigma_g\| \leq \frac{2}{t} + \frac{A(t)\epsilon}{t}. \tag{3.51}$$

Da ϵ beliebig gewählt wurde, folgt, dass $A(t)$ in messbaren Mengen mit beliebig kleinen Maßen enthalten ist. Der Durchschnitt dieser Mengen ist offensichtlich eine Nullmenge. Man sieht, dass für alle $t > 0$ $\sigma(\{\xi \in \partial\mathbb{B}|\ T_f(\xi) > t\}) = 0$ gilt und dies impliziert $T_f(\xi) = 0$.

Es folgt direkt, dass $|f(\xi) - \frac{1}{\sigma(\mathcal{Q}_\delta)} \int\limits_{\mathcal{Q}(\xi,\delta)} f(\eta)\ d\sigma(\eta)| \to 0$ mit $\delta \to 0$ geht.

□

Bemerkung 3.15. Aus dem letzten Satz folgt direkt für $f \in \mathcal{L}^1(\sigma)$

$$|f(\xi)| \leq (M_f)(\xi) \tag{3.52}$$

für ξ Lebesgue Punkt von f.

Für etwaige Notations- und Begriffserklärungen bezüglich des nächsten Lemmas wird auf den Anhang A.1 verwiesen, welcher Bemerkungen zur Maßtheorie gewidmet ist.

Lemma 3.16. *Sei μ ein komplexes Borelmaß auf $\partial\mathbb{B}$ und $\mu \perp \sigma$.*
Es folgt nun

$$\lim_{\delta\to 0} \frac{\mu}{\sigma}(\mathcal{Q}(\xi,\delta)) = 0, \quad \sigma - f.\ddot{u}. \tag{3.53}$$

Beweis. Man schreibe $\mathcal{D}\mu(\xi)$ für (3.53) und $\overline{\mathcal{D}}(\xi)$ für $\lim\limits_{\delta\to 0} \sup\limits_{\gamma<\delta} \frac{\mu}{\sigma}(\mathcal{Q}(\xi,\gamma))$.

Man betrachte nun ohne Beschränkung der Allgemeinheit $\mu \geq 0$, denn ansonsten gehe man zu $|\mu|$ über. Es gilt nämlich für $\delta > 0, \xi \in \partial\mathbb{B}$:

$$0 \leq \left|\frac{\mu}{\sigma}(\mathcal{Q}(\xi,\delta))\right| \leq \frac{|\mu|}{\sigma}(\mathcal{Q}(\xi,\delta)). \tag{3.54}$$

Da $\mu \perp \sigma$ ist, gibt es eine Menge M, sodass $\mu(M^c) = 0$ und $\sigma(M) = 0$. Weiters gibt es ein $K_\epsilon \in M$ kompakt, sodass

$$\mu(K_\epsilon) > \mu(M) - \epsilon. \tag{3.55}$$

Man nehme nun μ_1 und μ_2, zwei komplexe Borelmaße, welche definiert sein sollen durch $\mu_1(B) = \mu(B \cap K_\epsilon)$ und analog $\mu_1(B) = \mu(B \cap K_\epsilon^c)$.

Es gilt nun $\|\mu_2\| > \epsilon$, weil

$$\begin{aligned} \mu_2(\partial\mathbb{B}) &= \mu(\partial\mathbb{B} \cap K_\epsilon^c) \\ &= \mu(M \cap K_\epsilon^c) + \mu(M^c \cap K_\epsilon^c) \\ &= \mu(M) - \mu(K_\epsilon) \\ &< \epsilon. \end{aligned} \tag{3.56}$$

Man zeige nun, dass $\mathcal{D}\mu = 0$ $\sigma-$fast überall.
Dazu betrachte man $\partial\mathbb{B} \setminus K_\epsilon$. Auf dieser Menge gilt $\overline{\mathcal{D}}_\mu = \overline{\mathcal{D}}_\mu$. Um dies zu zeigen, wähle man ein $\delta_0 > 0$, sodass $K_{\delta_0}(\xi) \subseteq K_\epsilon^c$ und damit folgt

$$\begin{aligned} \sup_{\gamma<\delta} \frac{\mu}{\sigma}(\mathcal{Q}(\xi,\gamma)) &= \sup_{\gamma>\delta} \frac{\mu(\mathcal{Q}(\xi,\gamma) \cap K_\epsilon) + \mu(\mathcal{Q}(\xi,\gamma) \cap K_\epsilon^c)}{\sigma(\mathcal{Q}(\xi,\gamma))} \\ &= \sup_{\gamma>\delta} \frac{\mu_2}{\sigma}(\mathcal{Q}(\xi,\gamma)) \end{aligned} \tag{3.57}$$

mit $\delta > \delta_0$. Nun betrachte man die Menge $\{\xi \in \partial\mathbb{B} : \overline{\mathcal{D}}_\mu(\xi) > t\}$ für ein $t > 0$. Es folgt aus obiger Argumentation:

$$\begin{aligned} K_\epsilon \cup \{\xi \in \partial\mathbb{B} : \overline{\mathcal{D}}_\mu(\xi) > t\} &= K_\epsilon \cup \{\xi \in \partial\mathbb{B} : \overline{\mathcal{D}}_{\mu_2}(\xi) > t\} \\ &\subseteq K_\epsilon \cup \{\xi \in \partial\mathbb{B} : M_{\mu_2}(\xi) > t\}. \end{aligned} \tag{3.58}$$

In ähnlicher Art schätzt man nun das Maß der letzten Menge ab und bekommt:

$$\begin{aligned} \sigma(K_\epsilon \cup \{\xi \in \partial\mathbb{B} : M_{\mu_2}(\xi) > t\}) &\leq \sigma(K_\epsilon) + \sigma(\{\xi \in \partial\mathbb{B} : M_{\mu_2}(\xi) > t\}) \\ &\leq A\frac{\|\mu_2\|}{t} \\ &< A\frac{\epsilon}{t}. \end{aligned} \tag{3.59}$$

Letzteres folgt aus den Berechnungen in (3.56). Man sieht also, dass für alle $t > 0$ $\sigma(\{\xi \in \partial\mathbb{B} : \overline{\mathcal{D}}_\mu(\xi) > t\}) = 0$. Mit $t \to 0$ folgt, dass $\mathcal{D}_\mu = 0,\ \sigma-$f.ü.

□

Man kann nun die beiden letzten Theoreme verknüpfen. Dies soll als Korollar formuliert werden. Zunächst eine notationelle Anmerkung:

Bemerkung 3.17. Für komplexes Borelmaß μ nennt man

$$(\mathcal{D}_\mu)(\xi) = \lim_{\delta\to 0} \frac{\mu}{\sigma}(\mathcal{Q}(\xi,\delta)) \tag{3.60}$$

die Ableitung von μ and dem Punkt $\xi \in \partial\mathbb{B}$.

Korollar 3.18. *Sei μ ein komplexes Borelmaß mit der Lebesgue Zerlegung $\mu = \sigma_f + \mu_s$, dann folgt für ein $f \in \mathcal{L}(\sigma)$:*

$$\mathcal{D}_\mu(\xi) = f(\xi). \tag{3.61}$$

Beweis. Sei also μ so ein Maß. Laut Satz 3.13 gilt

$$f(\xi) = \lim_{\delta \to 0} \frac{1}{\sigma(\mathcal{Q}_\delta)} \int\limits_{\mathcal{Q}(\xi,\delta)} f(\eta)\ d\sigma(\eta),\ \sigma - \text{f.ü} \tag{3.62}$$

und nach vorherigem Satz gilt weiters $\mathcal{D}_{\mu_s}(\xi) = 0$. $\sigma-$f.ü. Damit folgt

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_\mu(\xi) &= \lim_{\delta \to 0} \frac{\mu_s}{\sigma}(\mathcal{Q}(\xi,\delta)) + \frac{\sigma_f}{\sigma}(\mathcal{Q}(\xi,\delta)) \\ &= \lim_{\delta \to 0} \frac{1}{\sigma(\mathcal{Q}_\delta)} \int\limits_{\mathcal{Q}(\xi,\delta)} f(\eta)\ d\sigma(\eta) \\ &= f(\xi),\ \sigma - \text{f.ü.} \end{aligned} \tag{3.63}$$

□

Nun sind alle Mittel für das Hauptresultat des Kapitels gegeben.

Satz 3.19. *Sei μ ein positives Borelmaß auf $\partial\mathbb{B}$. Sei weiters für ein gewisses $\xi \in \partial\mathbb{B}$ $\mathcal{D}_\mu(\xi) = 0$, dann folgt*

$$(K\text{-}\lim_{z \to \xi} P[\mu])(z) = 0. \tag{3.64}$$

Beweis. Sei $\epsilon > 0$. Nach Voraussetzung gibt es ein δ_0, sodass für $0 < \delta < \delta_0$

$$\mu(\mathcal{Q}(\xi,\delta)) < \epsilon \cdot \sigma(\mathcal{Q}(\xi,\delta)) \tag{3.65}$$

gilt. Man definiere $\mathcal{Q}_0$ als $\mathcal{Q}(\xi,\delta_{\prime})$ und weiters seien μ_0, μ_1 komplexe Borelmaße, sodass für ein messbares A

$$\mu_0(A) = \mu(A \cap \mathcal{Q}_0) \quad \text{und} \tag{3.66}$$

$$\mu_1(A) = \mu(A \cap \mathcal{Q}_0^c) \tag{3.67}$$

gilt. Man sieht also $\mu = \mu_0 + \mu_1$. Um den K-limes von ξ zu berechnen, benötigt man noch eine gegen ξ konvergente Folge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus $D_\alpha(\xi)$. Sei eine solche Folge beliebig gewählt. Es folgt nun

$$\begin{aligned} P[\mu_1](z_n) &= \int\limits_{\mathcal{Q}_0^c} P(z_n,\eta)\ d\mu_1(\eta) \\ &\leq \sup_{|\eta-\xi|\geq\delta_0^2} P(z_n,\eta)\mu(\mathcal{Q}_0) \to 0 \end{aligned} \tag{3.68}$$

mit $n \to \infty$. Mit Satz 3.10 bekommt man folgende Abschätzung.

$$\begin{aligned}
\limsup_{n\to\infty} P[\mu](z_n) &= \limsup_{n\to\infty} P[\mu_0](z_n) \\
&\leq M_\alpha P[\mu_0](\xi) \\
&\leq A(\alpha) M_{\mu_0}(\xi) \\
&= A(\alpha) \sup_{\delta>0} \frac{\mu_0}{\sigma}(\mathcal{Q}(\xi,\delta)) \\
&\leq A(\alpha) \sup_{\delta>0} \frac{\mu}{\sigma}(\mathcal{Q}(\xi,\delta) \cap \mathcal{Q}_0) \\
&= A(\alpha) \sup_{\delta\in(0,\delta_0]} \frac{\mu}{\sigma}(\mathcal{Q}(\xi,\delta)) \\
&\leq A(\alpha) \cdot \epsilon
\end{aligned} \tag{3.69}$$

Man sieht, dass

$$\lim_{n\to\infty} P[\mu](z_n) = 0 \tag{3.70}$$

und damit das Ziel des Kapitels erreicht wurde, denn es gilt

$$\text{K-}\lim_{z\to\xi} P[\mu](z) = 0. \tag{3.71}$$

□

4 Cauchy Integral

Der große Unterschied zwischen Poisson und Cauchy Kern ist, dass der Poisson Kern positiv ist. In Satz 3.10 ist ein wichtiger Schritt das Vertauschen von μ zu $|\mu|$. Das ist ohne große Probleme möglich und führt zum gewünschten Ergebnis. Dies ist nun nicht mehr möglich.
Wie im letzten Kapitel beginne man mit einer Abschätzung.

Lemma 4.1. *Seien $\xi, \eta, \omega \in \partial\mathbb{B}, d(\omega, \eta) > \delta$ und $d(\omega, \xi) > 2\delta$. Sei weiters $z \in D_\alpha(\xi)$. Dann gilt*

$$|C(z,\eta) - C(z,\omega)| < (16\alpha)^{n+1}\delta|1 - \langle \xi, \omega\rangle|^{-(n+\frac{1}{2})}. \tag{4.1}$$

Beweis. Der Beweis beruht auf der folgenden Identität

$$C(z,\eta) - C(z,\omega) = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{\langle z,\eta\rangle - \langle z,\omega\rangle}{(1-\langle z,\eta\rangle)^{j+1}(1-\langle z,\omega\rangle)^{n-j}}. \tag{4.2}$$

Aus Lemma 3.7 hat man bereits die Abschätzung

$$|1 - \langle z,\omega\rangle|^{-1} < 4\alpha|1 - \langle \xi,\omega\rangle|^{-1} \tag{4.3}$$

bekommen. Aus der Dreiecksungleichung der Metrik d und aus der Voraussetzung folgt

$$|1 - \langle z,\eta\rangle|^{-1} \leq 4\alpha|1 - \langle \xi,\eta\rangle|^{-1} < 16\alpha|1 - \langle \xi,\omega\rangle|^{-1}. \tag{4.4}$$

Letztere Ungleichung kann weiter umgeformt werden.

$$\begin{aligned} 4\alpha|1 - \langle \xi,\eta\rangle|^{-1} < 16\alpha|1 - \langle \xi,\omega\rangle|^{-1} &\Leftrightarrow \frac{1}{4}|1 - \langle \xi,\eta\rangle|^{-1} < |1 - \langle \xi,\omega\rangle|^{-1} \\ &\Leftrightarrow 4|1 - \langle \xi,\eta\rangle| > |1 - \langle \xi,\omega\rangle| \\ &\Leftrightarrow \sqrt{4|1 - \langle \xi,\eta\rangle|} > \sqrt{|1 - \langle \xi,\omega\rangle|} \\ &\Leftrightarrow 2d(\xi,\eta) > d(\xi,\omega). \end{aligned} \tag{4.5}$$

Die Behauptung ist nun, dass

$$|\langle z,\eta\rangle - \langle z,\omega\rangle| \leq 3\delta\alpha^{\frac{1}{2}}|1 - \langle z,\omega\rangle|^{\frac{1}{2}} \tag{4.6}$$

gilt. Wie in vielen Beweisen davor, kann man o.B.d.A $\omega = e_1$ annehmen. Dies ist wie gehabt durch die Invarianz bezüglich unitärer Abbildungen zu erklären. Weiters definiere man z', η' als die zu e_1 orthogonalen Komponenten von z und η. Man schätze damit ab

$$\begin{aligned} |\langle z,\eta\rangle - \langle z,e_1\rangle| &= |\langle z',\eta'\rangle + z_1(\overline{\eta}_1 - 1)| \\ &\leq |z'||\eta'| + |1-\eta_1| \\ &\leq 2|1-z_1|^{\frac{1}{2}}|1-\eta_1|^{\frac{1}{2}} + |1-\eta_1| \\ &= 2|1-z_1|^{\frac{1}{2}}|1-\langle\eta,e_1\rangle|^{\frac{1}{2}} + (|1-\langle\eta,e_1\rangle|^{\frac{1}{2}})^2 \\ &\leq \delta[2|1-z_1|^{\frac{1}{2}} + |1-\eta_1|^{\frac{1}{2}}]. \end{aligned} \tag{4.7}$$

In der letzten Ungleichung wurde die Voraussetzung $d(\eta, e_1) < \delta$ verwendet. Aus (4.3) folgt nun

$$|1-\eta_1| < \delta^2 < \frac{1}{4}|1-\xi_1| < \alpha|1-z_1|. \tag{4.8}$$

Damit bekommt man also

$$|\langle z,\eta\rangle - \langle z,\omega\rangle| \leq \delta(2+\alpha^{\frac{1}{2}})|1-z_1|^{\frac{1}{2}}. \tag{4.9}$$

Da $\alpha > 1$ gilt $\delta(2+\alpha^{\frac{1}{2}})$ kleiner als $3\delta\alpha^{\frac{1}{2}}$ und insgesamt das gewünschte Ergebnis. Es ist nun möglich mit Hilfe von (4.3), (4.4) und (4.6) nun (4.2) abschätzen. Man erhält, dass $|C(z,\eta) - C(z,\omega)|$ kleiner als

$$3\delta\alpha^{\frac{1}{2}}|1-\langle\xi,\omega\rangle|^{-(n+\frac{1}{2})}\sum_{j=0}^{n-1}(16\alpha)^{j+1}(4\alpha)^{n-j-\frac{1}{2}} \tag{4.10}$$

sein muss, woraus das Lemma folgt.

□

Definition 4.2. Seien $\xi, \omega \in \partial\mathbb{B}, \alpha > 0$ und $\delta > 0$. Man nennt

$$\Delta(\xi,\omega,\alpha,\delta) = \sup_{\eta\in\mathcal{Q}(\omega,\delta), z\in D_\alpha(\xi)} |C(z,\eta) - C(z,\omega)| \tag{4.11}$$

die maximale Differenz.

Aus dem letzten Lemma folgt unmittelbar, dass

$$\Delta(\xi,\omega,\alpha,\delta) < (16\alpha)^{n+1}\delta|1-\langle\xi,\omega\rangle|^{-(n+\frac{1}{2})} \tag{4.12}$$

gilt, falls $d(\xi,\omega) < 2\delta$. Diese Bedingung lässt sich auch anschreiben als ξ ist nicht in $\mathcal{Q}(\omega, 2\delta)$. Der nächste Satz ist wieder eine Abschätzung und ähnelt in seiner Beweisführung jener in Kapitel 3.

Satz 4.3. *Sei $\omega \in \partial\mathbb{B}, \alpha > 1, \delta > 0$, dann*

$$\int\limits_{R(\omega,\delta)} \Delta(\xi,\omega,\alpha,\delta)\ d\sigma(\xi) < A(\alpha) \tag{4.13}$$

wobei $R(\omega,\delta) = \partial\mathbb{B} \setminus \mathcal{Q}(\omega, 2\delta)$ und $A(\alpha)$ eine endliche Konstante ist.

Die wichtigste Erkenntnis ist die Existenz einer von δ unabhängigen Grenze.

Beweis. Da in (4.12) bereits die maximale Differenz abgeschätzt wurde, sieht man, dass

$$\int\limits_{R(\omega,\delta)} |1-\langle\xi,\omega\rangle|^{-(n+\frac{1}{2})}\, d\sigma(\xi) < \frac{A}{\delta} \tag{4.14}$$

zu zeigen ist. Mit Korollar 2.7 folgt

$$\int\limits_{R(\omega,\delta)} |1-\langle\xi,\omega\rangle|^{-(n+\frac{1}{2})}\, d\sigma(\xi) = \frac{n-1}{\pi}\int\limits_{E(\delta)} \frac{(1-|\zeta|^2)^{n-1}}{|1-\zeta|^{n+\frac{1}{2}}}\, d\lambda_2(\zeta) \tag{4.15}$$

mit $E(\delta)=\{\zeta : |\zeta|<1, |1-\zeta|>4\delta^2\}$. Man schätze nun weiter ab, indem man $1-|\zeta^2|$ mit $2|1-\zeta|$ vertauscht und $1-\zeta=re^{i\theta}$ setzt. Es folgt

$$\begin{aligned}\frac{n-1}{\pi}\int\limits_{E(\delta)} \frac{(1-|\zeta|^2)^{n-1}}{|1-\zeta|^{n+\frac{1}{2}}}\, d\lambda_2(\zeta) &\le 2^{n-1}(n-1)\int\limits_{4\delta^2}^{\infty} r^{-\frac{3}{2}}\, dr \\ &= \frac{2^{n-1}(n-1)}{\delta}.\end{aligned} \tag{4.16}$$

Damit erhält man die gewünschte Abschätzung der Form $\frac{A}{\delta}$.

□

In Satz 3.5 wurde in (3.19) $A=\sup\limits_{\mathcal{Q}}\frac{\sigma(3\mathcal{Q})}{\sigma(\mathcal{Q})}$ verwendet. Im folgenden soll ein ähnliches Lemma mit der Konstante $A'=\sup\limits_{\mathcal{Q}}\frac{\sigma(4\mathcal{Q})}{\sigma(\mathcal{Q})}$ formuliert werden. Wie gehabt ist A' mit Lemma 3.3 endlich.

Lemma 4.4. *Sei μ ein komplexes Borelmaß auf $\partial\mathbb{B}$. Falls $f>\|\mu\|$ gilt, dann gibt es Kugeln $\mathcal{Q}_i$ und paarweise disjunkte Borelmengen $V_i\subseteq\mathcal{Q}_i$ sodass:*

1. $\{\xi\in\partial\mathbb{B} : M_\mu(\xi)>t\}\subseteq\bigcup\limits_i\mathcal{Q}_i=\bigcup\limits_i V_i$
2. $\sigma(\mathcal{Q}_i)\le\frac{A'}{t}|\mu|(\mathcal{Q}_i)$
3. $\sum\limits_i\sigma(\mathcal{Q}_i)\le\frac{A'}{t}\|\mu\|$
4. $|\mu|(V_i)<A't\sigma(V_i)$.

Beweis. Man nehme ohne Beschränkung der Allgemeinheit an, dass $\mu\ge 0$, da auch hier die allgemeine Beziehung $M_\mu=M_{|\mu|}$ gilt. Für alle $\xi\in\{\xi\in\partial\mathbb{B} : M_\mu(\xi)>t\}$ gibt es ein größtmögliches δ_ξ, sodass

$$\mu(\mathcal{Q}(\xi,\delta_\xi))\ge t\sigma(\mathcal{Q}(\xi,\delta_\xi)). \tag{4.17}$$

Aus der Voraussetzung $t > \|\mu\|$ folgt, dass $\mathcal{Q}(\xi, \delta_\xi)$ nicht gleich $\partial\mathbb{B}$ ist und daher

$$\mu(4\mathcal{Q}(\xi, \delta_\xi)) < t\sigma(4\mathcal{Q}()\xi, \delta_\xi). \tag{4.18}$$

Die Kugeln mit diesen zwei Eigenschaften überdecken $\{\xi \in \partial\mathbb{B} : M_\mu(\xi) > t\}$. Man gehe nun in ähnlicher Weise wie in Satz 3.5 vor. Man will diese Menge an Kugeln disjunkt machen. Dies funktioniert folgendermaßen: Man nehme das Supremum über alle Radii und nenne es r_1. Nun wähle man weiters eine Kugel $\mathcal{Q}_1$ aus der Menge, welche einen Radius größer als $\frac{3r_1}{4}$ besitzt. Alle anderen Kugeln, welche $\mathcal{Q}_1$ schneiden, werden aus der Menge entfernt. In der neuen, kleineren Menge wendet man dieses Verfahren erneut an und bekommt die Kugel $\mathcal{Q}_2$. Man setze iterativ fort.
Man erhält also eine Menge von paarweise disjunkten Kugeln $\mathcal{Q}_i$. Für ein $\mathcal{Q}$ aus der ursprünglichen Menge kann man nun folgendes aussagen: Ist sie in Schritt i weggefallen, so schneidet sie $\mathcal{Q}_i$ und ihr Radius $r_\mathcal{Q}$ ist kleiner als $\frac{4r_{\mathcal{Q}_i}}{3}$.
Sei nun $\mathcal{Q}'_i$ definiert als $4\mathcal{Q}_i$ und V_i seien disjunkte Borelmengen, welche

$$\mathcal{Q}_i \subseteq V_i \subseteq \mathcal{Q}'_i \quad \text{und} \quad \bigcup_i V_i = \bigcup_i \mathcal{Q}'_i \tag{4.19}$$

erfüllen und durch die Konstruktion einfach zu finden sind.
Nun bleibt auch die Überdeckung von $\{\xi \in \partial\mathbb{B} : M_\mu(\xi) > t\}$ erhalten, denn für $\mathcal{Q}$ aus der urprünglichen Menge, welches an i-ter Stelle wegfällt, gilt: $\mathcal{Q} \subseteq 4\mathcal{Q}_i = \mathcal{Q}'$. Weiters war die ursprüngliche Menge eine Überdeckung. Damit wäre der erste Punkt gezeigt. Nun komme man zum Nächsten, welcher aus (4.17) folgt.

$$\begin{aligned} \sigma(\mathcal{Q}'_i) &\leq \sup \frac{\sigma(4\mathcal{Q}_i)}{\sigma(\mathcal{Q}_i)} \sigma(\mathcal{Q}_i) \\ &= A'\sigma(\mathcal{Q}_i) \\ &\leq \frac{A'}{t}\mu(\mathcal{Q}_i) \end{aligned} \tag{4.20}$$

Es ergibt sich der dritte Punkt. Die $\mathcal{Q}_i$ sind aus der Konstruktion paarweise disjunkt und daher kann man die Summe über (4.20) bilden. Man bekommt

$$\sum \sigma(\mathcal{Q}'_i) \leq \frac{A'}{t}\|\mu\|. \tag{4.21}$$

Weiters hat man $\mu(4\mathcal{Q}_i) < t\sigma(4\mathcal{Q}_i)$, also $\mu(\mathcal{Q}'_i) < t\sigma(\mathcal{Q}'_i)$. Da $V_i \subseteq \mathcal{Q}'_i$ gilt weiters

$$\begin{aligned} \mu(V_i) &\leq \mu(\mathcal{Q}'_i) \\ &\leq t\sigma(\mathcal{Q}'_i) \\ &\leq \sup \frac{\sigma(\mathcal{Q}'_i)}{\sigma(\mathcal{Q}_i)} \sigma(\mathcal{Q}_i) t \\ &= A't\sigma(\mathcal{Q}_i) \end{aligned} \tag{4.22}$$

und damit

$$|\mu|(V_i) < A't\sigma(V_i). \tag{4.23}$$

□

Nun ein Satz, der das Pendant zu Lemma 3.6 und Satz 3.10 darstellt.

Satz 4.5. *Für alle $\alpha > 1$ gibt es ein $A(\alpha) < \infty$, sodass*

$$\sigma(\{\xi \in \partial\mathbb{B} : M_\alpha C[\mu](\xi) > t\}) \leq \frac{A(\alpha)}{t}\|\mu\| \tag{4.24}$$

für ein komplexes Borelmaß μ auf $\partial\mathbb{B}$ für alle $t > 0$.

$M_\alpha F$ wurde in 3.8 definiert, also gilt explizit

$$M_\alpha C[\mu](\xi) = \sup\{|C[\mu](z) : z \in D_\alpha(\xi)|\}. \tag{4.25}$$

Beweis. Seien μ und t fest. Für $t \leq \|\mu\|$ gilt (4.24) für $A(\alpha) \geq 1$. Man nehme also $t > \|\mu\|$ an. Weiters definiere man E als die Menge $\{\xi \in \partial\mathbb{B} | M_\mu(\xi) > t\}$. Aus dem vorherigen Lemma wähle man die Kugeln $\{\mathcal{Q}_i' | i \in I\}$ und die Borelmengen V_i. In vergangenen Beweisen wurde auf die Lebesgue Zerlegung von μ in σ_f und μ_s zurückgegriffen. Im Zuge dieses Beweises soll eine andere Zerlegung von μ konstruiert werden. Es soll in einen "guten" Teil σ_g, welcher nicht allzu groß ist, und in einen großen Teil $\beta = \sum\limits_i \beta_i$ zerlegt werden. Dafür definiere man:

$$c_i = (\frac{\mu}{\sigma})(V_i), \tag{4.26}$$

$$g(\xi) = \begin{cases} c_i, & \xi \in V_i \\ f(\xi), & \xi \in \partial\mathbb{B} \setminus \bigcup V_i \end{cases} \qquad \text{und} \tag{4.27}$$

$$\beta_i(A) = (\mu - \sigma_{c_i})(V_i \cap A) \tag{4.28}$$

für $A \subseteq \partial\mathbb{B}$ Borelmenge. Nun gilt

$$\mu(A) = \int\limits_A \sigma_g + \beta(A). \tag{4.29}$$

Um dies einzusehen, betrachte man zuerst den Fall $A \subseteq V_i$. Man sieht sofort, dass das Gewünschte folgt. Der zweite Fall ist $A \cap \bigcup V_i = \emptyset$. Hier folgt auch das Ergebnis mit $\mu_s(A) = 0$. Dies gilt, da sich μ_s auf $\bigcup V_i$ bewegt. Man hat also die Zerlegung

$$\mu = \sigma_g + \beta \tag{4.30}$$

mit den gewünschten Eigenschaften. Man betrachte nun zuerst g genauer. Aus Bemerkung 3.15 folgt, da $M_f \leq M_\mu$, dass $|f(\xi) \leq t|$ fast überall mit ξ nicht in E gilt.
Also ist $|g|^2 \leq t|f|$ und man kann weiter abschätzen

$$\int\limits_{\partial\mathbb{B}\setminus E} |g|^2 \, d\sigma \leq \int\limits_{\partial\mathbb{B}} |f| \, d\sigma \leq t\|\mu\|. \tag{4.31}$$

Der letzte Unterpunkt des vorherigen Lemmas zeigt, dass

$$|c_i| \leq A't \tag{4.32}$$

und aus dem Dritten folgt

$$\begin{aligned}\sum_i \int\limits_{V_i} |g|^2 \, d\sigma &= \sum_i \int\limits_{V_i} |c_i|^2 \, d\sigma \\ &= \sum_i |c_i|^2 \sigma(V_i) \\ &\leq A'^2 t^2 \sum \sigma(\mathcal{Q}_i') \\ &\leq A'^3 t \|\mu\|.\end{aligned} \tag{4.33}$$

Insgesamt hat man also

$$\int\limits_{\partial\mathbb{B}} |g|^2 \, d\sigma \leq (1 + A'^3) t \|\mu\|. \tag{4.34}$$

Man setzte $G := M_\alpha C[g]$. Mit dem Hardy Littlewood Maximal Theorem A.8 aus Anhang A.2 bekommt man

$$\int\limits_{\partial\mathbb{B}} G^2 \, d\sigma \leq A(\alpha) \|\mu\| t. \tag{4.35}$$

Nun ist $\sigma(\{\xi \in \partial\mathbb{B} | G(\xi) > t\}) \leq \frac{1}{t^2} \int G^2 \, d\sigma$. Damit folgt

$$\sigma(\{\xi \in \partial\mathbb{B} | M_\alpha C[G](\xi) > \frac{t}{2}\} \leq \frac{A(\alpha)\|\mu\|}{t}. \tag{4.36}$$

Das Ziel ist es, eine ähnliche Abschätzung für β statt g zu bekommen. Dadurch wäre der Beweis vollständig, da

$$M_\alpha C[\mu] \leq M_\alpha C[g] + M_\alpha C[\beta] \tag{4.37}$$

und damit

$$\sigma(\{\xi \in \partial\mathbb{B} : M_\alpha C[\mu](\xi) > t\}) \leq \frac{A(\alpha)}{t} \|\mu\|. \tag{4.38}$$

Aus der Definition von c_i folgt $c_i \sigma(V_i) = \mu(V_i)$ und damit $\|\beta_i\| \leq 2|\mu|(V_i)$. Nun bilde man wieder die Summe. Das ist der Konstruktion der V_i nach möglich.

$$\sum \|\beta_i\| \leq 2\|\mu\|. \tag{4.39}$$

Man betrachte nun die Menge $\{\xi \in \partial\mathbb{B} | M_\alpha C[\beta] > \frac{t}{2}\}$ näher. Sie soll die Bezeichnung Ω bekommen. Weiters setze man $W := \bigcup\limits_i (2\mathcal{Q}_i')$. Es gilt $\Omega \subseteq W \cup (\Omega \setminus W) \subseteq W \cup \bigcup (\Omega \setminus 2\mathcal{Q}_i')$. Man bemerke außerdem, dass $\beta_i(\mathcal{Q}_i') = 0$ ist. Nun schätzt man wieder mit Hilfe des letzten Lemmas ab und erhält

$$\begin{aligned}\sigma(W) &= \sigma(\bigcup(2\mathcal{Q}_i')) \\ &\leq \sum_i \sigma(2\mathcal{Q}_i') \\ &\leq A' \sum \sigma(\mathcal{Q}_i') \\ &\leq \frac{A'^2}{t}\|\mu\|.\end{aligned} \tag{4.40}$$

Weiters gilt

$$C[\beta_i](z) = \int\limits_{\mathcal{Q}_i'} (C(z,\eta) - C(z,\omega_i))d\beta_i(\eta) \tag{4.41}$$

mit $\mathcal{Q}_i' = \mathcal{Q}(\omega_i, \delta_i)$. Es folgt für alle $z \in D_\alpha(\xi)$.

$$|C[\beta_i](z)| \leq \Delta(\xi, \omega_i, \alpha; \delta_i)\|\beta_i\|. \tag{4.42}$$

Man bemerke, dass auch

$$\sup |C[\beta_i](z)| \leq \Delta(\xi, \omega_i, \alpha; \delta_i)\|\beta_i\|. \tag{4.43}$$

gilt, da z durch ganz $D_\alpha(\xi)$ läuft. Nach Satz 4.3 bekommt man

$$\int\limits_{\partial\mathbb{B}\setminus 2\mathcal{Q}_i'} M_\alpha C[\beta_i]\ d\sigma \leq A(\alpha)\|\mu\| \tag{4.44}$$

und damit auch

$$\int\limits_{\Omega\setminus W} M_\alpha C[\beta]\ d\sigma \leq A(\alpha)\|\beta_i\| \leq 2\|\mu\|A(\alpha). \tag{4.45}$$

Die Menge $\{\xi \in \partial\mathbb{B}|M_\alpha C[\beta] > \frac{t}{2}\}$ hat die Bezeichnung Ω bekommen und daher ist der Integrand größer als $\frac{t}{2}$. Man kann also $\sigma(\Omega \setminus W)$ abschätzen.

$$\sigma(\Omega \setminus W) \leq \frac{4A(\alpha)\|\mu\|}{t}. \tag{4.46}$$

Insgesamt lässt sich nun alles kombinieren und man erhält

$$\begin{aligned}\sigma(\Omega) &\leq \sigma(\Omega \setminus W) + \sigma(W) \\ &\leq \frac{A(\alpha)\|\mu\|}{t}.\end{aligned} \tag{4.47}$$

Wie vorher bereits begründet, schließt dies den Beweis. □

Nun folgt die Hauptaussage des Kapitels.

Satz 4.6. *Für μ komplexes Borelmaß auf $\partial\mathbb{B}$ gilt, dass $C[\mu]$ in $H^p(\mathbb{B})$ für alle $0 < p < 1$ ist.*

Beweis. Sei $F := M_\alpha C[\mu]$ für ein festes α größer als 2. Im letzten Satz wurde bereits gezeigt, dass

$$\begin{aligned}\sigma(\{\xi \in \partial\mathbb{B} : M_\alpha C[\mu](\xi) > t\}) &= \sigma(\{\xi \in \partial\mathbb{B} : F(\xi) > t\}) \\ &\leq \frac{A(\alpha\|\mu\|)}{t}.\end{aligned} \tag{4.48}$$

Damit folgt für $0 < p < 1$

$$\begin{aligned}\int\limits_{\partial\mathbb{B}} F^p \, d\sigma &= p \int\limits_0^\infty \sigma(\{\xi \in \partial\mathbb{B} | F(\xi) > t\}) t^{p-1} \, dt \\ &\leq p \int\limits_0^{A(\alpha)\|\mu\|} t^{p-1} \, dt + pA(\alpha)\|\mu\| \int\limits_{A(\alpha)\|\mu\|}^\infty t^{p-2} \, dt \\ &= \frac{(A(\alpha)\|\mu\|)^p}{1-p}.\end{aligned} \tag{4.49}$$

Da nun $|C[\mu](r\xi)| \leq F(\xi)$ gilt, ist das Gewünschte gezeigt. □

Mit A.9 aus dem Anhang A.2 folgt sofort, dass damit $C[\mu]$ fast überall einen endlichen $K-$Limes $C[\mu]^*$ auf $\partial\mathbb{B}$ hat.

Anhang

Im folgenden sollen Sätze und Erläuterungen aufgelistet werden, die in dieser Arbeit verwendet, aber nicht explizit bewiesen werden. A.1 ist der Maßtheorie, A.2 den Hardy Räumen gewidmet. Die Theorie über diese Räume wird ausschließlich im vierten Kapitel bei der Behandlung des Randverhalten von Cauchy Integralen benötigt. Die Notation und Definitionen halten sich an [5].

A.1 Maßtheorie

Der folgende Satz ist [3] entnommen und ist auf Seite 162 zu finden. Er ist eine direkte Folgerung des bekannten Satzes über die majorisierte Konvergenz.

Satz A.1. *(Differentiation unter dem Integralzeichen) Es seien $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $t_0 \in I$, und $f : I \times X \longrightarrow \mathbb{K}$ habe folgende Eigenschaften:*

1. *Für alle $t \in I$ gilt $f(t,.) \in \mathcal{L}^1$.*
2. *Die partielle Ableitung $\frac{\partial f}{\partial x}(t_0, x)$ existiert für alle $x \in X$.*
3. *Es gibt eine Umgebung U von t_0 und eine nicht-negative, integrierbare Funktion g, sodass für all $t \in U \cap I, t \neq t_0$ gilt:*

$$\left| \frac{f(t,x) - f(t_0,x)}{t - t_0} \right| \leq g(x) \quad \mu - f.ü. \tag{A.1}$$

Dann ist die Funktion $F : I \longrightarrow \mathbb{K}$,

$$F(t) := \int_X f(t,x) d\mu(x) \quad (t \in I) \tag{A.2}$$

im Punkt t_0 differenzierbar, $\frac{\partial f}{\partial t}(t_0, .)$ ist integrierbar, und es gilt

$$F'(t_0) = \int_X \frac{\partial f}{\partial t}(t_0, x) d\mu(x). \tag{A.3}$$

Bemerkung A.2. Die Aussage des Satzes A.1 bleibt erhalten, falls Voraussetzungen $2), 3)$ ersetzt werden durch:

2*) Es gibt ein $\epsilon > 0$, sodass die partielle Ableitung $\frac{\partial f}{\partial x}$ für alle $t \in U := (t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon) \cap I$ existiert.

3*) Es gibt eine integrierbare Funktion g wie vorher, sodass für alle $t \in U, x \in X$ gilt: $\left|\frac{\partial f}{\partial t}(t,x)\right| \leq g(x)$.

Einige notationelle Bemerkungen bezüglich eines Maßes μ auf $\partial\mathbb{B}$:

1. $|\mu|$ ist die Totalvariation. Eine ausführlichere Definiton und Erklärung findet man beispielsweise in [3] auf S.297.

2. $\|\mu\| = |\mu|(\partial\mathbb{B})$, näheres in [1] S.176.

3. $\mu << \sigma$ bedeutet, dass μ absolut stetig bezüglich σ ist. Weitere Ausführungen finden sich in [3] S.301.

4. $\mu \perp \sigma$, wenn μ singulär bezüglich σ ist. Es soll wieder auf [3] S.300 verwiesen werden.

Der nächste Satz ist der Lebesgue Zerlegungssatz und ist mit Beweis in [2] auf S.130, Proposition 4.3.2 zu finden.

Satz A.3. ***(Lebesgue Zerlegungssatz)*** *Sei $(X, \mathcal{A})$ ein Messraum und μ darauf ein positives Maß sowie ν ein endlich signiertes, komplexes oder σ-endliches positives Maß. Dann existiert eine eindeutige Zerlegung in ν_a und ν_s. Das sind endlich signierte, komplexe oder σ-endliche positive Maße. Es gilt:*

1. *ν_a ist absolut stetig bezüglich μ*

2. *ν_s ist singulär bezüglich μ*

3. *$\nu = \nu_a + \nu_s$.*

Diese Zerlegung nennt man die Lebesgue Zerlegung. Weiterführende Theorie und andere Formulierungen findet man unter anderem in [4].

A.2 Hardy Raum

Zunächst eine Definition zur Vereinfachung der Notation.

Definition A.4. Für f mit Träger in $\mathbb{B}$ und $r \in (0,1)$ ist f_r definiert für $|z| < \frac{1}{r}$ durch $f_r(z) = f(rz)$.

Nun komme man zu den Hardy Räumen und der Nevanlinna Klasse.

Definition A.5. Eine holomorphe Funktion f auf $\mathbb{B}$ ist im Hardy Raum $H^p(\mathbb{B})$ für $0 < p < \infty$, wenn

$$\sup_{0<r<1} \int_{\partial\mathbb{B}} |f_r|^p \, d\sigma < \infty. \tag{A.4}$$

Definition A.6. Eine holomorphe Funktion ist in der Nevanlinna Klasse $N(\mathbb{B})$, wenn

$$\sup_{0<r<1} \int\limits_{\partial\mathbb{B}} \log^{+} |f_r| \, d\sigma < \infty. \tag{A.5}$$

Definition A.7. Für $f \in H^p(\mathbb{B})$ mit $0 < p < \infty$ ist

$$f^*(\xi) := (K - Limes f)(\xi). \tag{A.6}$$

Der nächste Satz wird das Hardy-Littlewood Maximal Theorem genannt.

Satz A.8. *Die Abbildung $f \to C[f]*$ ist die orthogonale Projektion von $\mathcal{L}^2(\sigma)$ nach $H^2(\partial\mathbb{B})$ und es gilt*

$$\int\limits_{\partial\mathbb{B}} |M_\alpha C[f]|^2 \, d\sigma \leq A(\alpha) \int\limits_{\partial\mathbb{B}} |f|^2 \, d\sigma \tag{A.7}$$

für alle $f \in \mathcal{L}^2(\sigma)$.

Ein weiterer Satz über die Existenz endlicher $K-$Limiten.

Satz A.9. *Für $f \in N(\mathbb{B})$ und f nicht die Nullfunktion gilt, dass f einen endlichen $K-$Limes fast überall auf $\partial\mathbb{B}$ hat.*

Literaturverzeichnis

[1] Vladimir Igorevich Bogachev and Maria Aparecida Soares Ruas. *Measure theory*, volume 1. Springer, 2007.

[2] Donald L Cohn. *Measure theory*, volume 1. Springer, 2013.

[3] Jürgen Elstrodt. *Maß-und Integrationstheorie*, volume 7. Springer, 1996.

[4] Vladimir Kadets. *A course in functional analysis and measure theory.* Springer, 2018.

[5] Walter Rudin. *Function theory in the unit ball of Cn.* Springer Science & Business Media, 2008.