



TECHNISCHE  
UNIVERSITÄT  
WIEN

BACHELORARBEIT  
**Der Satz von Borsuk-Ulam**

ausgeführt am

Institut für  
Analysis und Scientific Computing  
TU Wien

unter der Anleitung von

**Ao. Univ. Prof. Dr. Harald Woracek**

durch

**Paul Winkler**

Matrikelnummer: 11818749

# Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
2	Affine Unabhängigkeit	2
3	Geometrische und abstrakte Simplizialkomplexe	7
4	Baryzentrische Unterteilung	11
5	Äquivalenzen zum Satz von Borsuk-Ulam	15
6	Das Lemma von Tucker	19
7	Brouwerscher Fixpunktsatz	25
8	Einige Anwendungen	27
	Symbolverzeichnis	33
	Literatur	34

# 1 Einleitung

In der vorliegenden Arbeit wollen wir uns mit einem Satz beschäftigen, der 1933 durch den polnischen Mathematiker Karol Borsuk bewiesen wurde. Der Satz ist insofern bemerkenswert, als er zu einer Vielzahl von Sätzen äquivalent ist und etliche interessante Verallgemeinerungen und Korollare besitzt. Die bekannteste, topologische Formulierung lautet wie folgt:

**Satz (Borsuk-Ulam).** *Sei  $f: \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine stetige Abbildung, wobei  $\mathbb{S}^n \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$  die Einheitssphäre ist. Dann gibt es ein  $x \in \mathbb{S}^n$  mit  $f(x) = f(-x)$ .*

Die klassische Veranschaulichung dieses Satzes ist die folgende: Wir können die Erdoberfläche mit  $\mathbb{S}^2$  identifizieren und jedem Ort eine Temperatur und einen Luftdruck zuordnen:

$$f: \begin{cases} \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ x \mapsto (\text{Temperatur}(x), \text{Luftdruck}(x)). \end{cases}$$

Wenn wir davon ausgehen, dass  $f$  eine stetige Abbildung ist, gibt es nach dem Satz von Borsuk-Ulam einen Punkt  $x$  mit  $f(x) = f(-x)$ , das heißt zwei antipodale Orte mit derselben Temperatur und demselben Luftdruck.

Wir werden den Satz von Borsuk-Ulam nicht direkt beweisen, sondern etwas ausholen und uns zuerst mit dem Konzept der affinen Unabhängigkeit sowie mit Simplexen, Simplizialkomplexen und Triangulierungen beschäftigen. Dabei werden wir einige elementare Sätze detailliert beweisen, die in der Literatur meist als bekannt vorausgesetzt oder dem Leser überlassen werden. Nachdem wir gezeigt haben, dass der Satz von Borsuk-Ulam zu zahlreichen höchst unterschiedlichen Sätzen äquivalent ist, werden wir einen davon beweisen: das kombinatorische Lemma von Tucker.

Anschließend werden wir uns noch einigen Folgerungen zuwenden, darunter der berühmte Brouwersche Fixpunktsatz und einige recht anschauliche Anwendungen wie das Ham-Sandwich-Theorem.

Der Großteil der Arbeit basiert auf [1, Kap. 1-3]. Ein paar Beweise habe ich selbst geführt oder aus anderen Büchern übernommen, die im Literaturverzeichnis angegeben sind. Um nicht komplett in Definitionen unterzugehen, werde ich viele Symbole und Notationen nicht extra einführen; ihre Bedeutung, falls sie nicht selbsterklärend ist, findet sich im Symbolverzeichnis.

## 2 Affine Unabhängigkeit

In diesem Kapitel werden wir einige grundlegende Begriffe wie den der affinen Unabhängigkeit und des Simplex einführen sowie einige Hilfsresultate beweisen, die wir im Folgenden benötigen werden.

**2.1 Definition.** Seien  $x_0, \dots, x_k \in \mathbb{R}^n$ . Wir nennen diese Punkte (bzw. die Menge dieser Punkte) *affin abhängig*, wenn es Zahlen  $\alpha_0, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R}$  und ein  $j \in [k]_0$  mit  $\alpha_j \neq 0$  gibt, sodass  $\sum_{i=0}^k \alpha_i x_i = 0$  und  $\sum_{i=0}^k \alpha_i = 0$ . Andernfalls nennen wir sie *affin unabhängig*.

**2.2 Lemma.** Seien  $x_0, \dots, x_k \in \mathbb{R}^n$ . Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

- (i)  $x_0, \dots, x_k$  sind affin unabhängig.
- (ii) Die Vektoren  $x_1 - x_0, \dots, x_k - x_0$  sind linear unabhängig.
- (iii) Die Vektoren  $(1, x_0), \dots, (1, x_k) \in \mathbb{R}^{n+1}$  sind linear unabhängig.

*Beweis.*

(i)  $\Rightarrow$  (ii): Mit Kontraposition: Seien  $x_1 - x_0, \dots, x_k - x_0$  linear abhängig, dann ist o. B. d. A.

$x_k - x_0 = \sum_{i=1}^{k-1} \alpha_i (x_i - x_0)$  für reelle Zahlen  $\alpha_i$ . Nun gilt

$$\begin{aligned} x_0 \left( \sum_{i=1}^{k-1} \alpha_i \right) - x_0 &= \sum_{i=1}^{k-1} \alpha_i x_i - x_k & \alpha_k &:= -1 \\ x_0 \sum_{i=1}^k \alpha_i &= \sum_{i=1}^k \alpha_i x_i & \alpha_0 &:= - \sum_{i=1}^k \alpha_i \\ 0 &= \sum_{i=0}^k \alpha_i x_i \end{aligned}$$

mit  $\sum_{i=0}^k \alpha_k = 0$  und  $\alpha_k = -1 \neq 0$ , womit  $x_0, \dots, x_k$  affin abhängig sind.

(ii)  $\Rightarrow$  (i): Mit Kontraposition: Seien  $x_0, \dots, x_k$  affin abhängig, dann gibt es Zahlen  $\alpha_i, i \in [k]_0$ , und ein  $j \in [k]_0$  mit  $\alpha_j \neq 0$ , sodass  $\sum_{i=0}^k \alpha_i x_i = 0$  und  $\sum_{i=0}^k \alpha_i = 0$ . Damit ist

$$\sum_{i=1}^k \alpha_i (x_i - x_0) = \sum_{i=1}^k \alpha_i x_i - \left( \sum_{i=1}^k \alpha_i \right) x_0 = \sum_{i=0}^k \alpha_i x_i = 0$$

eine nichttriviale Linearkombination der Null, also sind  $x_1 - x_0, \dots, x_k - x_0$  linear abhängig.

(i)  $\Leftrightarrow$  (iii): Offenbar gilt die Äquivalenz

$$0 = \sum_{i=0}^k \alpha_i \begin{pmatrix} 1 \\ x_i \end{pmatrix} \iff \sum_{i=0}^k \alpha_i = 0 \quad \text{und} \quad \sum_{i=0}^k \alpha_i x_i = 0.$$

Sowohl aus der affinen Unabhängigkeit von  $x_0, \dots, x_k$ , als auch aus der linearen Unabhängigkeit von  $(1, x_0), \dots, (1, x_k)$  folgt  $\alpha_i = 0$  für alle  $i \in [k]_0$ , was jeweils die andere Aussage impliziert.  $\square$

**2.3 Definition.** Sei  $V$  ein Vektorraum über  $\mathbb{R}$  oder  $\mathbb{C}$  und  $X \subseteq V$ . Dann heißt

$$\text{conv}(X) = \left\{ \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i \mid x_i \in X, \sum_{i=1}^n \alpha_i = 1, \alpha_i \geq 0, n \in \mathbb{N} \right\}$$

die *konvexe Hülle* von  $X$ .

Die konvexe Hülle von  $X$  ist, wie man sich leicht überlegt, tatsächlich die kleinste konvexe Menge, die  $X$  enthält.

**2.4 Lemma.** Seien  $V \subseteq \mathbb{R}^n$  affin unabhängig und seien  $V_1, V_2 \subseteq V$ . Dann gilt

$$\text{conv}(V_1) \cap \text{conv}(V_2) = \text{conv}(V_1 \cap V_2). \quad (1)$$

*Beweis.* Die Inklusion  $\text{conv}(V_1) \cap \text{conv}(V_2) \supseteq \text{conv}(V_1 \cap V_2)$  gilt, weil das Bilden der konvexen Hülle verträglich mit der Mengeneinklusion ist. Für die andere Richtung sei  $x \in \text{conv}(V_1) \cap \text{conv}(V_2)$  beliebig, dann lässt sich  $x$  schreiben als

$$x = \sum_{u \in V_1} \alpha_u u = \sum_{v \in V_2} \beta_v v, \quad (2)$$

wobei  $\sum_{u \in V_1} \alpha_u = 1 = \sum_{v \in V_2} \beta_v$  und  $\alpha_u, \beta_v \geq 0$ . Daraus erhalten wir

$$\sum_{u \in V_1 \setminus V_2} \alpha_u u - \sum_{v \in V_2 \setminus V_1} \beta_v v + \sum_{w \in V_1 \cap V_2} (\alpha_w - \beta_w) w = 0 \quad (3)$$

und außerdem  $\sum_{u \in V_1} \alpha_u - \sum_{v \in V_2} \beta_v = 1 - 1 = 0$ . Weil  $V_1 \cup V_2 \subseteq V$  affin unabhängig ist, ist das nur möglich, wenn alle Koeffizienten in (3) Null sind; insbesondere können  $\alpha_w$  und  $\beta_w$  nur für  $w \in V_1 \cap V_2$  ungleich Null sein. Damit haben wir mit (2) zwei Konvexkombinationen von  $x$  aus Elementen aus  $V_1 \cap V_2$  gefunden, woraus  $x \in \text{conv}(V_1 \cap V_2)$  folgt.  $\square$

**2.5 Definition.** Sei  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  eine Menge affin unabhängiger Punkte. Dann nennen wir  $\sigma = \text{conv}(A)$  ein *Simplex*. Die *Dimension* des Simplex ist  $\dim(\sigma) := |A| - 1$ . Ist  $\dim(\sigma) = k$ , so nennen wir  $\sigma$  auch ein *k-Simplex*.

*2.6 Beispiel.* Sei  $A = \{(0, 0, 0), (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\} \subseteq \mathbb{R}^3$ . Mit  $x_0 := (0, 0, 0)$  und der linearen Unabhängigkeit der anderen drei Vektoren folgt aus Lemma 2.2 (ii), dass  $A$  affin unabhängig ist. Der Tetraeder  $\sigma = \text{conv}(A)$  ist also ein 3-Simplex.

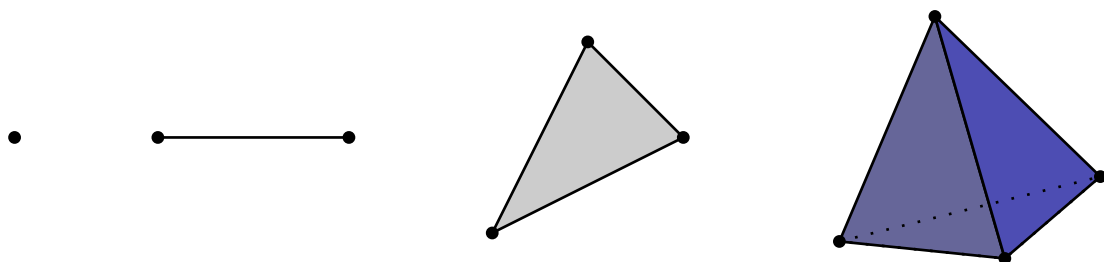


Abb. 1: Vier Simplexe der Dimensionen 0, 1, 2 und 3.

**2.7 Definition.** Sei  $\sigma = \text{conv}(A) \subseteq \mathbb{R}^n$  ein  $k$ -Simplex. Für eine Teilmenge  $B$  von  $A$  heißt das Simplex  $\text{conv}(B)$  eine *Seite* von  $\sigma$ . Insbesondere sind  $\emptyset$  und  $\sigma$  Seiten. Die nulldimensionalen Seiten nennen wir die *Ecken*, die eindimensionalen die *Kanten* und die  $(n - 1)$ -dimensionalen die *Seitenflächen* von  $\sigma$ . Die Menge aller Seiten eines  $n$ -Simplex bezeichnen wir mit  $\sigma^n$ .

**2.8 Definition.** Sei  $\sigma = \text{conv}(A) \subseteq \mathbb{R}^n$  ein  $k$ -Simplex. Dann heißt

$$\text{relint}(\sigma) = \sigma \setminus \{\tau \in \sigma^n \mid \dim(\tau) < \dim(\sigma)\}$$

das *relative Innere* von  $\sigma$ .

Nach Definition bestehen die Seiten eines  $k$ -Simplex  $\sigma = \text{conv}(\{x_1, \dots, x_{k+1}\})$  genau aus jenen Punkten  $x$ , die sich als Konvexkombination  $\sum_{i=1}^{k+1} \alpha_i x_i$  darstellen lassen, wobei für mindestens ein  $j \in [k+1]$  gilt, dass  $\alpha_j = 0$ . Das relative Innere von  $\sigma$  ist also gegeben durch

$$\text{relint}(\sigma) = \left\{ \sum_{i=1}^{k+1} \alpha_i x_i \mid \sum_{i=1}^{k+1} \alpha_i = 1 \text{ und } \alpha_i > 0 \text{ für alle } i \in [k+1] \right\}. \quad (4)$$

**2.9 Lemma.** Sei  $\sigma \subseteq \mathbb{R}^n$  ein  $k$ -Simplex. Dann ist  $\text{relint}(\sigma)$  genau das Innere von  $\sigma$  bezüglich der Spurtopologie des  $\mathbb{R}^k$ .

*Beweis.* Sei  $\sigma = \text{conv}(\{x_1, \dots, x_{k+1}\})$ . Weil Translationen und Basiswechsel Homöomorphismen sind, können wir annehmen, dass  $x_{k+1} = 0$  und  $x_i = e_i$  für  $i \in [k]$  ist. Sei  $x = \sum_{i=1}^{k+1} \alpha_i x_i = \sum_{i=1}^k \alpha_i e_i \in \text{relint}(\sigma)$  beliebig und  $y \in \text{span}\{e_1, \dots, e_k\}$  mit

$$\|x - y\|_1 < \frac{\min\{\alpha_i \mid i \in [k+1]\}}{k}.$$

Für die eindeutige Linearkombination  $y - x = \sum_{i=1}^k \beta_i e_i$  gilt also  $\sum_{i=1}^k |\beta_i| < \alpha_{k+1}$ . Nun ist

$$y = x + (y - x) = \sum_{i=1}^k (\alpha_i + \beta_i) x_i,$$

wobei  $\sum_{i=1}^k \alpha_i + \beta_i \leq \left(\sum_{i=1}^k \alpha_i\right) + \alpha_{k+1} = 1$ . Für  $i \in [k]$  definieren wir nun  $\gamma_i := \alpha_i + \beta_i > 0$  sowie  $\gamma_{k+1} := 1 - \sum_{i=1}^k (\alpha_i + \beta_i) = \alpha_{k+1} + \sum_{i=1}^k \beta_i > 0$ . Damit sehen wir, dass  $y = \sum_{i=1}^{k+1} \gamma_i x_i \in \text{relint}(\sigma)$ ; also ist  $\text{relint}(\sigma)$  eine offene Menge.

Sei nun  $x = \sum_{i=1}^{k+1} \alpha_i x_i = \sum_{i=1}^k \alpha_i e_i \in \sigma \setminus \text{relint}(\sigma)$  beliebig, dann gibt es ein  $j \in [k+1]$  mit  $\alpha_j = 0$ . Wir machen eine Fallunterscheidung:

- Fall 1:  $j = k+1$ . Sei  $\varepsilon > 0$  beliebig, dann betrachten wir den Punkt  $y = \sum_{i=1}^k (\alpha_i + \frac{\varepsilon}{2n}) e_i$ .

Offenbar liegt  $y$  in der  $\varepsilon$ -Kugel um  $x$ , wegen  $\sum_{i=1}^k (\alpha_i + \frac{\varepsilon}{2n}) > 1$  aber nicht in  $\sigma$ .

- Fall 2:  $j \neq k+1$ . Sei wieder  $\varepsilon > 0$  beliebig, dann betrachte  $y = x - \frac{\varepsilon}{2} e_j$ . Auch hier liegt  $y$  in der  $\varepsilon$ -Kugel um  $x$ , aber nicht in  $\sigma$ , weil die  $j$ -Koordinate von  $y$  negativ ist.

Damit haben wir gezeigt, dass alle Punkte von  $\sigma$ , die nicht in seinem relativen Inneren liegen, Element des Randes von  $\sigma$  bezüglich der Spurtopologie des  $\mathbb{R}^k$  sind.  $\square$

**2.10 Definition.** Sei  $\sigma = \text{conv}(\{v_0, \dots, v_k\})$  ein Simplex und  $x \in \sigma$ . Wenn  $x = \sum_{i=0}^k \alpha_i v_i$  eine Konvexkombination von  $x$  ist, dann heißen

$$\alpha_i^\sigma(x) := \alpha_i, \quad i \in [k]_0$$

die *baryzentrischen Koordinaten* von  $x$  bezüglich  $\sigma$ .

Diese Definition ist sinnvoll, denn wären  $x = \sum_{i=0}^k \alpha_i v_i = \sum_{i=0}^k \beta_i v_i$  zwei verschiedene Darstellungen von  $x$ , so wäre die Menge  $\{v_0, \dots, v_k\}$  wegen  $\sum_{i=0}^k (\alpha_i - \beta_i) v_i = 0$  affin abhängig.

**2.11 Lemma.** Sei  $\sigma = \text{conv}(\{v_0, \dots, v_k\})$  ein Simplex. Dann ist für  $i \in [k]_0$  die Abbildung  $x \mapsto \alpha_i^\sigma(x)$  stetig.

*Beweis.* Seien  $x, y$  in  $\sigma$  beliebig, dann gilt wegen  $\sum_{i=0}^k \alpha_i^\sigma(x) = 1 = \sum_{i=0}^k \alpha_i^\sigma(y)$

$$\begin{aligned} x - y &= \left( v_0 + \sum_{i=1}^k \alpha_i^\sigma(x) (v_i - v_0) \right) - \left( v_0 + \sum_{i=1}^k \alpha_i^\sigma(y) (v_i - v_0) \right) \\ &= \sum_{i=1}^k (\alpha_i^\sigma(x) - \alpha_i^\sigma(y)) (v_i - v_0). \end{aligned}$$

Nach Lemma 2.2 sind für  $i \in [k]$  die Vektoren  $v_i - v_0$  linear unabhängig; damit folgt  $\alpha_i^\sigma(x) \rightarrow \alpha_i^\sigma(y)$  für  $x \rightarrow y$ . Wegen  $\alpha_0^\sigma(x) - \alpha_0^\sigma(y) = \sum_{i=1}^k \alpha_i^\sigma(x) - \alpha_i^\sigma(y)$  gilt zudem  $\alpha_0^\sigma(x) \rightarrow \alpha_0^\sigma(y)$  für  $x \rightarrow y$ .  $\square$

**2.12 Definition.** Bezeichne  $(e_i)_{i=1}^n$  die Standardbasis des  $\mathbb{R}^n$ , dann nennen wir die Menge

$$\hat{\mathbb{B}}^n = \text{conv}(\{e_1, -e_1, \dots, e_n, -e_n\}) = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i| \leq 1 \right\}$$

das  $n$ -dimensionale *Kreuzpolytop*.

Allgemeiner nennt man die konvexe Hülle endlich vieler Punkte ein *Polytop*. Eine *echte Seite* eines Polytops  $P$  ist der Schnitt  $P \cap h$ , wobei  $h$  eine Hyperebene ist, die  $P$  nicht schneidet (d. h. einer der beiden durch  $h$  definierten offenen Halbräume hat mit  $P$  leeren Schnitt). Eine *Seite* ist entweder  $P$  selbst oder eine echte Seite.

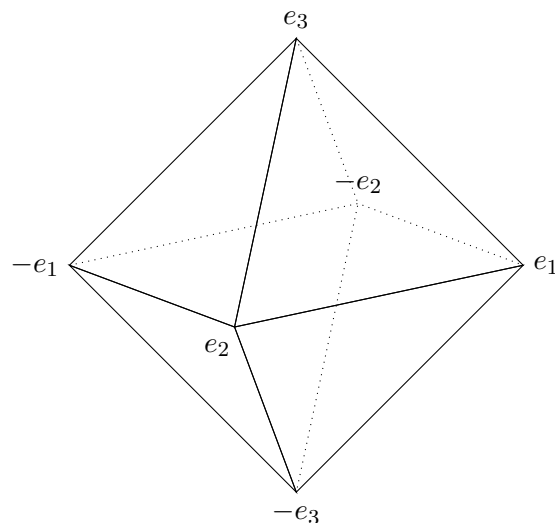


Abb. 2: Das dreidimensionale Kreuzpolytop ist der Oktaeder, einer der fünf platonischen Körper.

**2.13 Lemma.** *Die echten Seiten des Kreuzpolytops  $\hat{\mathbb{B}}^n$  sind genau die Simplexe, die von jenen Mengen  $F \subseteq \{e_1, -e_1, \dots, e_n, -e_n\}$  aufgespannt werden, für die es kein  $i \in [n]$  gibt mit  $e_i \in F$  und  $-e_i \in F$ .*

*Beweis.* Die Fälle, dass  $F$  oder die Seite die leere Menge sind, sind jeweils trivial. Für ein nichtleeres  $F$  wie oben definieren wir  $a_F := \sum_{v \in F} v$  und betrachten die Hyperebene  $h = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle a_F, x \rangle = 1\}$ . Für ein  $x \in \mathbb{R}^n$  gilt mit der Dreiecksungleichung  $\|x\|_1 \geq \langle a_F, x \rangle$ , also hat der Halbraum  $h^+ = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle a_F, x \rangle > 1\}$  mit  $\hat{\mathbb{B}}^n$  leeren Schnitt. Die Menge  $F$  ist klarerweise affin unabhängig und spannt genau das Simplex  $h \cap \hat{\mathbb{B}}^n$  auf.

Sei umgekehrt  $h = \{x \in \mathbb{R}^n : a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b\}$  mit  $(a_1, \dots, a_n) \neq 0$  eine Hyperebene. Wenn es nun ein  $i \in [n]$  mit  $e_i \in \hat{\mathbb{B}}^n \cap h$  und  $-e_i \in \hat{\mathbb{B}}^n \cap h$  gibt, dann gilt  $a_i = b = -a_i$ , also  $b = 0$  und daher  $0 \in h$ . Das Kreuzpolytop enthält aber offensichtlich eine Nullumgebung, kann also nicht mit einem der beiden durch  $h$  definierten offenen Halbräume leeren Schnitt haben.  $\square$



### 3 Geometrische und abstrakte Simplicialkomplexe

Simplicialkomplexe sind wichtige Objekte in der algebraischen Topologie. Wir unterscheiden zwei Arten von Simplicialkomplexen: geometrische und abstrakte. Erstere sind Mengen von Simplexen mit bestimmten Eigenschaften; zweitere sind rein kombinatorische Objekte. Eine wichtige Erkenntnis ist, dass es sich beide Male im Wesentlichen um dasselbe Konzept handelt; das wird die Arbeit mit diesen Objekten stark vereinfachen.

**3.1 Definition.** Sei  $\Delta \neq \emptyset$  eine endliche Menge von Simplexen im  $\mathbb{R}^n$ . Dann heißt  $\Delta$  ein *geometrischer Simplicialkomplex*, wenn die folgenden zwei Bedingungen erfüllt sind:

(S1) Für jedes  $\sigma \in \Delta$  sind auch alle Seitenflächen von  $\sigma$  in  $\Delta$ .

(S2) Für  $\sigma_1, \sigma_2 \in \Delta$  ist  $\sigma_1 \cap \sigma_2$  eine Seite von  $\sigma_1$  und von  $\sigma_2$ .

Weiters definieren wir:

- Die Vereinigung  $\bigcup \Delta$  nennen wir das *Polyeder* von  $\Delta$  und bezeichnen es mit  $\|\Delta\|$ .
- Die *Dimension* von  $\Delta$  ist definiert als  $\dim(\Delta) := \max_{\sigma \in \Delta} \dim(\sigma)$ .
- Mit  $V(\Delta)$  bezeichnen wir die Vereinigung aller Ecken von Simplexen in  $\Delta$ .

*3.2 Beispiel.* Sei  $\sigma$  ein Simplex, dann ist  $\sigma^n$  ein Simplicialkomplex. Dafür ist nur zu zeigen, dass für zwei Seiten  $\sigma_1$  und  $\sigma_2$  von  $\sigma$  auch  $\sigma_1 \cap \sigma_2$  eine Seite von  $\sigma_1$  und von  $\sigma_2$  ist; das folgt aber direkt aus Lemma 2.4.

**3.3 Definition.** Sei  $\Delta$  ein geometrischer Simplicialkomplex. Für jedes  $x \in \|\Delta\|$  gibt es genau ein Simplex  $\sigma \in \Delta$  mit  $x \in \text{relint}(\sigma)$ . Das Simplex  $\sigma$  nennen wir den *Träger* von  $x$  und schreiben  $\sigma = \text{supp}(x)$ .

**3.4 Definition.** Ein *abstrakter Simplicialkomplex* ist ein Tupel  $(V, \mathcal{K})$ , wobei  $V$  eine endliche Menge und  $\mathcal{K} \subseteq 2^V$  mit der Eigenschaft  $G \subseteq F \in \mathcal{K} \implies G \in \mathcal{K}$  ist. Die Elemente von  $\mathcal{K}$  heißen *abstrakte Simplexe*. Wir werden verkürzt nur  $\mathcal{K}$  für den Simplicialkomplex sowie  $V(\mathcal{K})$  für  $V$  schreiben, falls  $V = \bigcup \mathcal{K}$ . Die *Dimension* von des Simplicialkomplexes ist definiert als  $\dim(\mathcal{K}) = \max\{|F| - 1 : F \in \mathcal{K}\}$ .

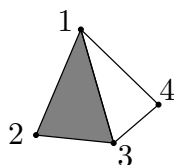
**3.5 Definition.** Sei  $\Delta$  ein geometrischer Simplicialkomplex. Bezeichne  $V := V(\Delta)$  und

$$\mathcal{K} := \{A \subseteq V \mid \text{conv}(A) \in \Delta\},$$

dann heißt  $\Delta$  eine *geometrische Realisierung* des abstrakten Simplicialkomplexes  $(V, \mathcal{K})$  und  $\|\Delta\|$  das *Polyeder* von  $(V, \mathcal{K})$ .

Wir werden später sehen, dass das Polyeder eines abstrakten Simplicialkomplexes bis auf Homöomorphie eindeutig bestimmt ist, es also legitim ist, von *dem* Polyeder zu sprechen.

*3.6 Beispiel.* Betrachte den folgenden geometrischen Simplicialkomplex:



Er ist eine geometrische Realisierung des abstrakten Simplizialkomplexes  $(V, \mathcal{K})$ , wobei  $V = \{1, 2, 3, 4\}$  und  $\mathcal{K} = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}, \{1, 2, 3\}\}$ .

Definition 3.5 legt schon nahe, wie man zu einem geometrischen Simplizialkomplex einen abstrakten Simplizialkomplex finden kann, dessen geometrische Realisierung er ist. In Beispiel 3.6 haben wir diese einfache Transformation exemplarisch durchgeführt. Die umgekehrte und interessantere Fragestellung ist, ob wir zu einem gegebenen abstrakten Simplizialkomplex eine geometrische Realisierung finden können; im Folgenden zeigen wir, dass das stets möglich ist.

**3.7 Lemma.** Sei  $(V, \mathcal{K})$  ein abstrakter Simplizialkomplex und  $f: V \rightarrow \mathbb{R}^d$  injektiv, sodass für alle  $F, G \in \mathcal{K}$  die Menge  $f[F \cup G]$  affin unabhängig ist. Dann ist eine geometrische Realisierung von  $(V, \mathcal{K})$  gegeben durch

$$\Delta = \{\sigma_F := \text{conv}(f[F]) \mid F \in \mathcal{K}\}.$$

*Beweis.* Wir müssen also zeigen, dass  $\Delta$  ein geometrischer Simplizialkomplex ist. Klarerweise handelt es sich um eine Menge von Simplexen, weil  $\emptyset \in \mathcal{K}$  und  $f[F \cup \emptyset] = f[F]$  für alle  $F \in \mathcal{K}$  nach Voraussetzung affin unabhängig ist. Die Bedingung (S1) ist erfüllt, weil  $\mathcal{K}$  nach unten bezüglich der Mengeninklusion abgeschlossen ist. Für den Nachweis von (S2) seien  $F, G \in \mathcal{K}$  beliebig. Weil  $f[F \cup G]$  affin unabhängig ist, sind  $\sigma_F$  und  $\sigma_G$  zwei Seiten des von  $f[F \cup G]$  erzeugten Simplex. Nach Lemma 2.4 gilt  $\sigma_F \cap \sigma_G = \sigma_{F \cap G}$ .  $\square$

**3.8 Definition.** Die *Momentenkurve* im  $\mathbb{R}^d$  ist die Kurve  $\{\gamma(t) : t \in \mathbb{R}\}$ , wobei

$$\gamma(t) = (t, t^2, \dots, t^d).$$

**3.9 Lemma.** Sei  $h$  eine Hyperebene im  $\mathbb{R}^d$ . Dann schneiden sich  $h$  und die Momentenkurve in höchstens  $d$  Punkten. Insbesondere ist jede Menge von  $d + 1$  verschiedenen Punkten auf der Momentenkurve affin unabhängig.

*Beweis.* Sei  $h$  eine Hyperebene, dann lässt sich  $h$  darstellen durch eine Gleichung der Form  $a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_dx_d = b$  mit  $(a_1, \dots, a_d) \neq 0$ . Gilt für ein  $t \in \mathbb{R}$  nun  $\gamma(t) \in h$ , dann erfüllt  $t$  die Gleichung  $a_1t + a_2t^2 + \dots + a_dt^d = b$ . Damit ist  $t$  eine Nullstelle des Polynoms  $p(t) = \left(\sum_{i=1}^d a_it^i\right) - b$ , das höchstens Grad  $d$  und damit höchstens  $d$  Nullstellen hat.  $\square$

**3.10 Satz.** Sei  $(V, \mathcal{K})$  ein abstrakter Simplizialkomplex mit  $\dim(\mathcal{K}) = d$ . Dann hat  $(V, \mathcal{K})$  eine geometrische Realisierung in  $\mathbb{R}^{2d+1}$ .

*Beweis.* Wir wählen eine Funktion  $f: V \rightarrow \mathbb{R}^{2d+1}$ , die verschiedene Knoten auf verschiedene Punkte auf der Momentenkurve abbildet. Für beliebige  $F, G \in \mathcal{K}$  gilt  $|F \cup G| \leq (d+1) + (d+1) = 2d + 2$ . Die Menge  $f[F \cup G]$  besteht also aus höchstens  $2d + 2$  verschiedenen Punkten auf der Momentenkurve und ist daher nach Lemma 3.9 affin unabhängig.  $\square$

Als nächstes wollen wir uns mit Abbildungen zwischen Simplizialkomplexen beschäftigen. Die natürlichen Abbildungen zwischen zwei geometrischen Simplizialkomplexen sind die stetigen Funktionen (bezüglich der Spurtopologien der zugehörigen Polyeder). Eine analoge Rolle bei den abstrakten Simplizialkomplexen spielen die sogenannten simplizialen Abbildungen:

**3.11 Definition.** Seien  $\mathcal{K}, \mathcal{L}$  zwei abstrakte Simplizialkomplexe. Eine *simpliziale Abbildung* ist eine Funktion  $f: V(\mathcal{K}) \rightarrow V(\mathcal{L})$  mit  $F \in \mathcal{K} \implies f[F] \in \mathcal{L}$ . Ist  $f$  bijektiv und  $f^{-1}$  ebenfalls eine simpliziale Abbildung, dann heißt  $f$  ein *simplizialer Isomorphismus*.

Bei zwei isomorphen abstrakten Simplizialkomplexen handelt es sich also quasi um dieselben Mengensysteme; sie unterscheiden sich nur in der Benennung der Knoten.

**3.12 Definition.** Seien  $\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2$  abstrakte Simplizialkomplexe,  $\Delta_1, \Delta_2$  zugehörige geometrische Realisierungen und sei  $f: V(\mathcal{K}_1) \rightarrow V(\mathcal{K}_2)$  eine simpliziale Abbildung. Wir definieren die *affine Erweiterung* von  $f$  durch

$$\|f\|: \begin{cases} \|\Delta_1\| \rightarrow \|\Delta_2\| \\ x \mapsto \sum_{i=0}^k \alpha_i^\sigma(x) f(v_i), \end{cases}$$

wobei  $\sigma = \text{conv}(\{v_0, \dots, v_k\}) = \text{supp}(x)$  ist.

Weil  $f$  eine simpliziale Abbildung ist, spannt  $f[\{v_0, \dots, v_k\}]$  ein Simplex in  $\Delta_2$  auf; also ist diese Definition tatsächlich sinnvoll.

**3.13 Proposition.** Seien  $\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2$  abstrakte Simplizialkomplexe,  $\Delta_1, \Delta_2$  zugehörige geometrische Realisierungen und seien  $g: V(\mathcal{K}_1) \rightarrow V(\mathcal{K}_2)$  und  $f: V(\mathcal{K}_2) \rightarrow V(\mathcal{K}_1)$  simpliziale Abbildungen. Dann gilt

$$\|\text{id}_{V(\mathcal{K}_1)}\| = \text{id}_{\Delta_1} \quad \text{und} \quad \|f\| \circ \|g\| = \|f \circ g\|. \quad (5)$$

*Beweis.* Der erste Teil ist klar. Für den zweiten sei  $x \in \|\Delta_1\|$  beliebig und sei  $\sigma = \text{conv}(\{v_0, \dots, v_k\}) = \text{supp}(x)$ . Dann gilt  $\|g\|(x) = \sum_{i=0}^k \alpha_i^\sigma(x) g(v_i) \in \text{conv}(\{g(v_0), \dots, g(v_k)\}) =: \sigma'$  und daher

$$\alpha_i^{\sigma'}(\|g\|(x)) = \alpha_i^\sigma(x) \quad \text{für alle } i \in [k]_0.$$

Damit erhalten wir

$$\|f\|(\|g\|(x)) = \sum_{i=0}^k \alpha_i^{\sigma'}(\|g\|(x)) f(g(v_i)) = \sum_{i=0}^k \alpha_i^\sigma(x) f(g(v_i)) = \|f \circ g\|(x). \quad \square$$

**3.14 Proposition.** Seien  $\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2$  abstrakte Simplizialkomplexe,  $\Delta_1, \Delta_2$  zugehörige geometrische Realisierungen und sei  $f: V(\mathcal{K}_1) \rightarrow V(\mathcal{K}_2)$  eine simpliziale Abbildung. Dann gelten folgende Aussagen:

- (i)  $\|f\|$  ist stetig.
- (ii) Ist  $f$  injektiv, dann ist auch  $\|f\|$  injektiv.
- (iii) Ist  $f$  ein simplizialer Isomorphismus, dann ist  $\|f\|$  ein Homöomorphismus.

*Beweis.*

- (i) Sei  $x \in \|\Delta_1\|$  beliebig und sei  $\sigma = \text{conv}(\{v_0, \dots, v_k\}) = \text{supp}(x)$ . Dann ist  $x$  Element von endlich vielen Simplexen  $\sigma_1, \dots, \sigma_l$ , wobei  $V(\sigma) \subseteq V(\sigma_l)$  für alle  $i \in [l]$ . Alle hinreichend kleinen Umgebungen von  $x$  haben mit allen übrigen Simplexen aus  $\Delta_1$  leeren Schnitt, weil diese als konvexe Hüllen endlicher Mengen abgeschlossen sind. Für  $j \in [l]$  sei  $V(\sigma_j) = V(\sigma_l) \cup \{v_{l+1}, \dots, v_{k+m}\}$ . Für ein beliebiges  $y = \sum_{i=0}^{k+m} \alpha_i^{\sigma_j}(y) v_i \in \sigma_j$  gilt nun

$$\|f\|(x) - \|f\|(y) = \sum_{i=0}^{k+m} (\alpha_i^{\sigma_j}(x) - \alpha_i^{\sigma_j}(y)) f(v_i).$$

Weil die Abbildungen  $z \mapsto \alpha_i^{\sigma_j}(z)$  nach Lemma 2.11 stetig sind, ist damit auch  $\|f\|$  stetig.

- (ii) Das gilt ganz einfach, weil  $f$  simplizial und injektiv ist und daher  $\|f\|$  eindeutige Konvexkombinationen wieder auf eindeutige Konvexkombinationen abbildet.
- (iii) Nach (i) ist  $\|f\|$  stetig. Nach Voraussetzung ist  $f$  ein simplizialer Isomorphismus, daher ist nach Definition auch  $f^{-1}$  ein simplizialer Isomorphismus und  $\|f^{-1}\|$  daher ebenfalls mit (i) stetig. Mit Proposition 3.13 gilt nun

$$\begin{aligned} \|f^{-1}\| \circ \|f\| &= \|f^{-1} \circ f\| = \|\text{id}_{V(\mathcal{K}_1)}\| = \text{id}_{\Delta_1} \quad \text{sowie} \\ \|f\| \circ \|f^{-1}\| &= \|f \circ f^{-1}\| = \|\text{id}_{V(\mathcal{K}_2)}\| = \text{id}_{\Delta_2}, \end{aligned}$$

also ist  $\|f^{-1}\| = \|f\|^{-1}$ . □

Die Propositionen 3.13 und 3.14 zeigen uns also, dass wir es mit zwei zueinander homomorphen Strukturen zu tun haben: Auf der einen Seite die geometrischen Simplizialkomplexe mit den stetigen Abbildungen, auf der anderen Seite die abstrakten Simplizialkomplexe mit den simplizialen Abbildungen. Insbesondere sehen wir, dass das Polyeder eines abstrakten Simplizialkomplexes bis auf Homöomorphie eindeutig bestimmt ist.

## 4 Baryzentrische Unterteilung

Eine wichtige Konstruktion auf Simplizialkomplexen ist die sogenannte baryzentrische Unterteilung. Hierbei werden die im Simplizialkomplex enthaltenen Simplexe in kleinere Simplexe unterteilt – man erhält dadurch einen neuen Simplizialkomplex, der denselben topologischen Raum trianguliert, aber echt feiner ist. Besonders in den Anfangsjahren der algebraischen Topologie wurde diese Methode benutzt, um beliebig feine Triangulierungen von bestimmten Objekten zu generieren und damit topologische Aussagen in algebraische oder kombinatorische zu übersetzen.

**4.1 Definition.** Sei  $\sigma = \text{conv}(\{v_0, \dots, v_k\})$  ein  $k$ -Simplex. Dann nennen wir den Punkt

$$b_\sigma = \frac{1}{k+1} \sum_{i=0}^k v_i$$

das *Baryzentrum* von  $\sigma$ .

**4.2 Lemma.** Sei  $\sigma = \text{conv}(\{v_0, \dots, v_k\}) \subseteq \mathbb{R}^n$  ein  $k$ -Simplex und sei  $\sigma_0 \subset \sigma_1 \subset \dots \subset \sigma_l$  eine strikt wachsende Folge in  $\sigma$ . Dann bilden die Punkte  $b_{\sigma_0}, b_{\sigma_1}, \dots, b_{\sigma_l}$  die Ecken eines  $l$ -Simplex.

*Beweis.* Wir müssen zeigen, dass die Punkte  $b_{\sigma_0}, b_{\sigma_1}, \dots, b_{\sigma_l}$  affin unabhängig sind. Seien  $\alpha_0, \dots, \alpha_l \geq 0$ , sodass  $\sum_{i=0}^l \alpha_i b_{\sigma_i} = 0$  und  $\sum_{i=0}^l \alpha_i = 0$ . Zu zeigen ist  $\alpha_i = 0$  für alle  $i \in [l]_0$ . Für jedes  $i \in [l]_0$  gibt es eine affin unabhängige Menge  $V_i \subseteq \{v_0, \dots, v_k\}$ , sodass

$$b_{\sigma_i} = \frac{1}{\dim(\sigma_i) + 1} \sum_{v \in V_i} v.$$

Wenn wir in der Summe  $\sum_{i=0}^l \alpha_i b_{\sigma_i}$  jedes  $b_{\sigma_i}$  durch diese Darstellung ersetzen, erhalten wir

$$0 = \sum_{i=0}^l \alpha_i b_{\sigma_i} = \sum_{i=0}^l \left( \frac{\alpha_i}{\dim(\sigma_i) + 1} \sum_{v \in V_i} v \right)$$

und daher Zahlen  $\beta_0, \dots, \beta_k \geq 0$  mit  $\sum_{i=0}^k \beta_i v_i = 0$  und  $\sum_{i=0}^k \beta_i = 0$ . Weil die Menge  $\{v_0, \dots, v_k\}$  affin unabhängig ist, muss

$$\beta_i = 0 \quad \text{für alle } i \in [k]_0$$

gelten.

O. B. d. A. sei  $l > 0$ . Dann gibt es nach Voraussetzung ein  $m \in [l]$  mit  $v_m \in V_l \setminus \bigcup_{i=0}^{l-1} V_i$ , womit

$$\beta_m = \frac{\alpha_l}{\dim(\sigma_l) + 1}$$

gilt. Wegen  $\dim(\sigma_l) + 1 \neq 0$  und  $\beta_m = 0$  sehen wir, dass  $\alpha_l = 0$  ist. Mit exakt demselben Argument können wir induktiv zeigen, dass

$$\alpha_i = 0 \quad \text{für alle } i \in [l]_0$$

gilt, was zu zeigen war. □

**4.3 Definition.** Sei  $\sigma = \text{conv}(\{v_0, \dots, v_k\}) \subseteq \mathbb{R}^n$  ein  $k$ -Simplex, dann nennen wir die Menge

$$\mathcal{B}(\sigma) = \left\{ \text{conv}(\{b_{\sigma_0}, b_{\sigma_1}, \dots, b_{\sigma_l}\}) \mid \sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_l \in \sigma^n, \sigma_0 \subset \sigma_1 \subset \dots \subset \sigma_l \right\}$$

die *baryzentrische Unterteilung* von  $\sigma$ . Ist  $\Delta$  ein geometrischer Simplizialkomplex, so heißt

$$\mathcal{B}(\Delta) = \bigcup_{\sigma \in \Delta} \mathcal{B}(\sigma)$$

die *baryzentrische Unterteilung* von  $\Delta$ .

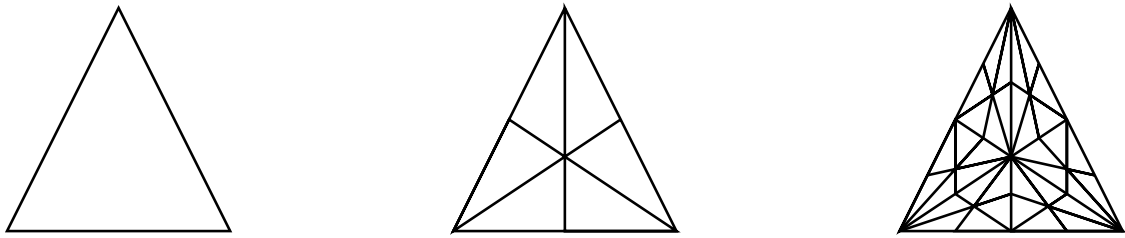


Abb. 3: Links ein 2-Simplex  $\sigma$ , in der Mitte  $\mathcal{B}(\sigma)$ , rechts  $\mathcal{B}(\mathcal{B}(\sigma))$ .

**4.4 Lemma.** Sei  $\sigma = \text{conv}(\{v_0, \dots, v_k\})$  ein  $k$ -Simplex, dann ist

$$\text{diam}(\sigma) = \max_{0 \leq i < j \leq k} \|v_i - v_j\| \quad (6)$$

und für jedes  $x \in \sigma$  gilt

$$\|x - b_\sigma\| \leq \left( \frac{k}{k+1} \right) \text{diam}(\sigma). \quad (7)$$

*Beweis.* Bezeichne  $d := \max_{0 \leq i < j \leq k} \|v_i - v_j\|$ . Trivialerweise gilt  $\text{diam}(\sigma) \geq d$ . Für die andere Ungleichung stellen wir fest, dass die abgeschlossenen  $d$ -Kugeln um die Punkte  $v_0, \dots, v_k$  jeweils alle anderen Eckpunkte enthalten und konvex sind und daher ganz  $\sigma$  enthalten; es gilt also  $\|x - v_i\| \leq d$  für alle  $x \in \sigma$  und alle  $i \in [k]_0$ . Insbesondere enthält die abgeschlossene  $d$ -Kugel um  $x$  alle Eckpunkte und weil sie konvex ist ganz  $\sigma$ . Weil  $x$  beliebig war, zeigt das (6).

Um (7) zu zeigen, berechnen wir

$$\begin{aligned} \|v_0 - b_\sigma\| &= \left\| v_0 - \sum_{i=0}^k \left( \frac{1}{k+1} \right) v_i \right\| = \left\| \left( \frac{k}{k+1} \right) v_0 - \sum_{i=1}^k \left( \frac{1}{k+1} \right) v_i \right\| \\ &\leq \sum_{i=1}^k \left\| \left( \frac{1}{k+1} \right) (v_0 - v_i) \right\| \leq \left( \frac{k}{k+1} \right) \max_{0 \leq i < j \leq k} \|v_i - v_j\| \stackrel{(6)}{\leq} \left( \frac{k}{k+1} \right) \text{diam}(\sigma). \end{aligned}$$

Dieselbe Rechnung zeigt  $\|v_i - b_\sigma\| \leq \left( \frac{k}{k+1} \right) \text{diam}(\sigma)$  für alle  $i \in [k]$ . Die abgeschlossene Kugel um  $b_\sigma$  mit Radius  $\left( \frac{k}{k+1} \right) \text{diam}(\sigma)$  ist also eine konvexe Menge, die alle Eckpunkte enthält und damit auch ganz  $\sigma$ .  $\square$

Das wesentliche Resultat, das wir später im Beweis der Äquivalenz des Satzes von Borsuk-Ulam mit dem Lemma von Tucker verwenden werden, ist das folgende:

**4.5 Proposition.** *Sei  $\Delta$  ein geometrischer Simplicialkomplex mit  $\dim(\Delta) = n$ . Dann ist gelten folgende Aussagen:*

- (i)  $\mathcal{B}(\Delta)$  ein geometrischer Simplicialkomplex.
- (ii)  $\|\Delta\| = \|\mathcal{B}(\Delta)\|$ .
- (iii)  $\max_{\tau \in \mathcal{B}(\Delta)} \text{diam}(\tau) \leq \left(\frac{n}{n+1}\right) \max_{\sigma \in \Delta} \text{diam}(\sigma)$ .

*Beweis.*

- (i) Nach Lemma 4.2 ist  $\mathcal{B}(\Delta)$  tatsächlich eine Menge von Simplexen. Dass (S1) gilt, ist unmittelbar klar. Für den Nachweis von (S2) gehen wir induktiv nach der Anzahl  $m$  der Simplexe in  $\mathcal{B}(\Delta)$  vor. Der Fall  $m = 1$  ist trivial; sei also  $m > 1$ . Wir wählen ein Simplex  $\sigma \in \mathcal{B}(\Delta)$  mit  $\dim(\sigma) = \dim(\Delta)$  und setzen  $\Delta' := \Delta \setminus \{\sigma\}$ . Nun ist  $\Delta'$  ein geometrischer Simplicialkomplex mit  $m - 1$  Simplexen. Nach Induktionsvoraussetzung ist  $\mathcal{B}(\Delta')$  daher ein geometrischer Simplicialkomplex.

Nach Definition enthält  $\mathcal{B}(\Delta)$  nun zwei Arten von Simplexen: Erstens die Simplexe aus  $\mathcal{B}(\Delta')$  und zweitens Simplexe der Gestalt  $\tau = \text{conv}(\tau' \cup \{b_\sigma\})$ , wobei  $\tau'$  ein Simplex ist, dessen Ecken Baryzentren von echten Seiten von  $\sigma$  sind (inklusive dem Trivialfall  $\tau' = \emptyset$ , d. h.  $\tau = \{b_\sigma\}$ ).

Seien  $\tau'_1, \tau'_2 \in \mathcal{B}(\Delta')$  Simplexe, deren Ecken Baryzentren von echten Seiten von  $\sigma$  sind und seien  $\tau_1 = \text{conv}(\tau'_1 \cup \{b_\sigma\})$  und  $\tau_2 = \text{conv}(\tau'_2 \cup \{b_\sigma\})$ . Weil  $\mathcal{B}(\Delta')$  ein Simplicialkomplex ist, ist  $\tau'_1 \cap \tau'_2$  eine Seite von  $\tau'_1$  und von  $\tau'_2$ . Deshalb ist

$$\tau_1 \cap \tau_2 = \text{conv}(\tau'_1 \cup \{b_\sigma\}) \cap \text{conv}(\tau'_2 \cup \{b_\sigma\}) = \text{conv}((\tau'_1 \cap \tau'_2) \cup \{b_\sigma\})$$

eine Seite von  $\tau_1$  und von  $\tau_2$ . Des Weiteren enthält ein beliebiges Simplex  $\rho \in \mathcal{B}(\Delta')$  den Punkt  $b_\sigma$  nicht; es gilt also

$$\rho \cap \tau_1 = \rho \cap \text{conv}(\tau'_1 \cup \{b_\sigma\}) = \rho \cap \tau'_1,$$

was eine Seitenfläche von  $\rho$  und  $\tau'_1$  und damit auch von  $\tau_1$  ist.

- (ii) Offenbar ist der Nachweis von  $\|\mathcal{B}(\sigma)\| = \sigma$  für ein  $k$ -Simplex  $\sigma = \text{conv}(\{v_0, \dots, v_k\})$  hinreichend. Die Inklusion  $\|\mathcal{B}(\sigma)\| \subseteq \sigma$  ist offensichtlich. Sei umgekehrt  $x \in \sigma$  beliebig, dann gelte o. B. d. A.

$$i \leq j \implies \alpha_i^\sigma(x) \geq \alpha_j^\sigma(x). \quad (8)$$

Für  $i \in [k]_0$  sei nun  $\sigma_i := \text{conv}(\{v_j \mid 0 \leq j \leq i\})$  das von den Eckpunkten mit den  $i + 1$  kleinsten Indizes erzeugte Simplex, dann gilt nach Definition  $\sigma_0 \subset \sigma_1 \subset \dots \subset \sigma_k$ . Daher ist

$$\hat{\sigma} := \text{conv}(\{b_{\sigma_0}, \dots, b_{\sigma_k}\}) \in \mathcal{B}(\sigma);$$

wir zeigen nun  $x \in \hat{\sigma}$ . Dazu müssen wir für  $i \in [k]_0$  Koeffizienten  $c_i \geq 0$  finden, sodass

$$x = \sum_{i=0}^k c_i b_{\sigma_i} = \sum_{i=0}^k c_i \left( \frac{1}{i+1} \sum_{j=0}^i v_j \right) = \sum_{j=0}^k v_j \underbrace{\left( \sum_{i=j}^k \frac{c_i}{i+1} \right)}_{= \alpha_j^\sigma(x)} \quad (9)$$

und  $\sum_{i=0}^k c_i = 1$ . Wegen (9) erfüllen solche Koeffizienten die Gleichung

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{k} & \frac{1}{k+1} \\ & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{k} & \frac{1}{k+1} \\ & & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{k} & \frac{1}{k+1} \\ & & & \ddots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{0} & & & & \frac{1}{k} & \frac{1}{k+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_{k-1} \\ c_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_0^\sigma(x) \\ \alpha_1^\sigma(x) \\ \alpha_2^\sigma(x) \\ \vdots \\ \alpha_{k-1}^\sigma(x) \\ \alpha_k^\sigma(x) \end{pmatrix}.$$

Das Gleichungssystem ist lösbar, da die linke Matrix als Dreiecksmatrix mit strikt positiver Diagonale regulär ist. Dass  $c_i \geq 0$  für alle  $i \in [k]_0$  gilt, sieht man sofort mit Induktion nach  $i = k, \dots, 0$ ; hier geht (8) ein. Des Weiteren gilt

$$1 = \sum_{j=0}^k \alpha_j^\sigma(x) = \sum_{j=0}^k \sum_{i=j}^k \frac{c_i}{i+1} = \sum_{i=0}^k c_i \underbrace{\left( \sum_{j=0}^i \frac{1}{i+1} \right)}_{=1} = \sum_{i=0}^k c_i.$$

(iii) Es genügt, für ein  $k$ -Simplex  $\sigma$  zu zeigen, dass

$$\max_{\tau \in \mathcal{B}(\sigma)} \text{diam}(\tau) \leq \binom{k}{k+1} \text{diam}(\sigma).$$

Wir beweisen die Aussage mit Induktion nach  $k = \dim(\sigma)$ . Der Fall  $k = 0$  ist trivial. Sei also  $\dim(\sigma) = k + 1$  und  $\tau \in \mathcal{B}(\sigma)$  beliebig. Nach Lemma 4.4 und der Definition von  $\mathcal{B}(\sigma)$  genügt es, zu zeigen, dass für  $\sigma_1, \sigma_2 \in \sigma^n$  mit  $\sigma_1 \subset \sigma_2$

$$\|b_{\sigma_1} - b_{\sigma_2}\| \leq \binom{k}{k+1} \text{diam}(\sigma)$$

gilt. Falls  $\sigma_2 = \sigma$  ist, folgt die Aussage direkt aus Lemma 4.4. Falls hingegen  $\dim(\sigma_2) = l \leq k$  ist, dann gilt

$$\|b_{\sigma_1} - b_{\sigma_2}\| \leq \binom{l}{l+1} \text{diam}(\sigma_2) \leq \binom{k}{k+1} \text{diam}(\sigma).$$

Die erste Ungleichung gilt hierbei nach Induktionsvoraussetzung und die zweite, weil  $x \mapsto \frac{x}{x+1}$  für  $x > 0$  monoton wachsend ist.  $\square$



## 5 Äquivalenzen zum Satz von Borsuk-Ulam

Eine Stärke des Satzes von Borsuk-Ulam ist, dass er zu vielen verschiedenen Sätzen äquivalent ist. In diesem Kapitel werden wir einige davon kennenlernen, die topologischer Natur sind. Der Beweis der Äquivalenz dieser Sätze ist nicht schwer, ein Beweis, dass einer von ihnen tatsächlich gilt, hingegen schon. Wir müssen uns für diese Einsicht noch bis zum nächsten Kapitel gedulden, wo wir eine weitere Äquivalenz zu einem Satz aus der Kombinatorik zeigen und diesen anschließend beweisen werden.

**5.1 Definition.** Zwei Punkte  $x, y \in \mathbb{R}^n$  heißen *antipodal*, falls  $y = -x$ . Eine Abbildung  $f$  heißt *antipodal*, wenn sie ungerade ist.

**5.2 Lemma.** *Es gibt eine Überdeckung von  $\mathbb{S}^{n-1}$  durch abgeschlossene Mengen  $A_1, \dots, A_{n+1}$ , sodass keine dieser Mengen zwei antipodale Punkte enthält (d. h. sodass  $A_i \cap (-A_i) = \emptyset$  für alle  $i \in [n+1]$  gilt).*

*Beweis.* Sei  $\sigma \subseteq \mathbb{B}^n$  ein  $n$ -Simplex mit  $0 \in \text{relint}(\sigma)$ . Das Simplex hat  $n+1$  Seitenflächen  $\tau_1, \dots, \tau_{n+1}$ , d. h. Seiten der Dimension  $n-1$ .

Betrachten wir nun die Projektion  $\pi$ , die jeden Punkt auf einer Seitenfläche von  $\sigma$  entlang des Ursprungs auf  $\mathbb{S}^{n-1}$  projiziert.  $\pi$  ist surjektiv, denn für jedes  $x \in \mathbb{S}^{n-1}$  existiert die Zahl  $\lambda_x = \max\{\lambda > 0 : \lambda x \in \sigma\}$ , weil  $\sigma$  kompakt ist. Nun liegt  $\lambda_x x$  nach Konstruktion am Rand von  $\sigma$ , also nach Lemma 2.9 auf einer Seitenfläche, d. h.  $\pi(\lambda_x x) = x$ .

Weil die Seitenflächen als konvexe Hüllen endlicher Mengen kompakt sind, sind auch ihre Bilder unter der stetigen Abbildung  $\pi$  abgeschlossen; die Mengen  $A_i := \pi(\tau_i)$ ,  $i \in [n+1]$ , bilden also eine abgeschlossene Überdeckung von  $\mathbb{S}^{n-1}$ .

Gilt nun  $\pi(x) = -\pi(y)$ , dann verläuft die Verbindungsstrecke zwischen  $x$  und  $y$  durch den Ursprung. Für  $x, y \in \tau_i$  wäre dann, weil  $\tau_i$  konvex ist, auch  $0 \in \tau_i$ , was wir aber ausgeschlossen haben. Also enthalten unsere Mengen jeweils kein Antipodenpaar.  $\square$

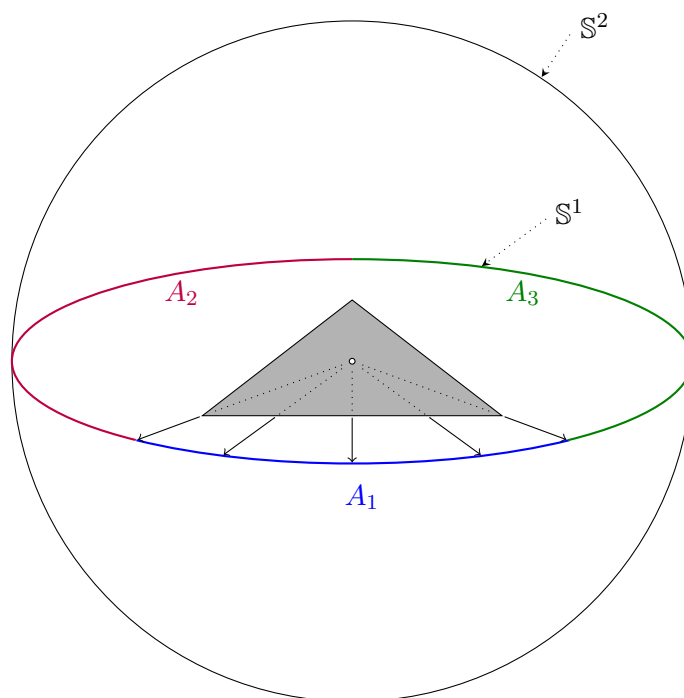


Abb. 4: Illustration von Lemma 5.2 im Fall  $n = 2$ .

**5.3 Lemma.** Seien  $(X_1, \mathcal{T}_1), (X_2, \mathcal{T}_2)$  topologische Räume und sei  $A_1, \dots, A_n$  eine endliche Überdeckung von  $X_1$  aus abgeschlossenen Mengen. Dann ist eine Funktion  $f: X_1 \rightarrow X_2$  genau dann stetig, wenn für alle  $i \in [n]$  die Einschränkung von  $f$  auf  $A_i$  (versehen mit der Spurtopologie) stetig ist.

*Beweis.* Dass Einschränkungen stetiger Funktionen stetig sind ist klar. Für die andere Richtung erinnern wir uns, dass eine Funktion genau dann stetig ist, wenn das Urbild abgeschlossener Mengen abgeschlossen ist. Sei  $A \subseteq Y$  eine  $\mathcal{T}_2$ -abgeschlossene Menge, dann gilt

$$f^{-1}[A] = \bigcup_{i=1}^n \left( f^{-1}[A] \cap A_i \right) = \bigcup_{i=1}^n (f|_{A_i})^{-1}[A]. \quad (10)$$

Für jedes  $i \in [n]$  gibt es, weil  $f$  bezüglich der Spurtopologie stetig ist, eine  $\mathcal{T}_1$ -offene Menge  $O_i$  mit  $(f|_{A_i})^{-1}[A] = A_i \setminus (A_i \cap O_i) = A_i \cap (X \setminus O_i)$ . Als Schnitt zweier  $\mathcal{T}_1$ -abgeschlossener Mengen ist  $(f|_{A_i})^{-1}[A]$  also  $\mathcal{T}_1$ -abgeschlossen und damit wegen (10) auch  $f^{-1}[A]$ .  $\square$

**5.4 Satz.** Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

- (I) (Satz von Borsuk-Ulam) Sei  $f: \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine stetige Abbildung. Dann gibt es einen Punkt  $x \in \mathbb{S}^n$  mit  $f(x) = f(-x)$ .
- (II) Sei  $f: \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  stetig und antipodal. Dann gibt es einen Punkt  $x \in \mathbb{S}^n$  mit  $f(x) = 0$ .
- (III) Es gibt keine stetige, antipodale Abbildung  $f: \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^{n-1}$ .
- (IV) (Retraktionssatz) Es gibt keine stetige Funktion  $f: \mathbb{B}^n \rightarrow \mathbb{S}^{n-1}$  mit  $f(-x) = -f(x)$  für alle  $x \in \mathbb{S}^{n-1} = \partial \mathbb{B}^n$ .
- (V) Für jede Überdeckung von  $\mathbb{S}^n$  durch  $n+1$  abgeschlossene Mengen  $A_1, \dots, A_{n+1}$  enthält eine dieser Mengen ein Paar von antipodalen Punkten (d. h. es gibt ein  $i \in [n+1]$  mit  $A_i \cap (-A_i) \neq \emptyset$ ).
- (VI) (Satz von Lusternik-Schnirelmann) Für jede Überdeckung von  $\mathbb{S}^n$  durch  $n+1$  offene Mengen  $O_1, \dots, O_{n+1}$  enthält eine dieser Mengen ein Paar von antipodalen Punkten.

*Beweis.*

- (I)  $\Rightarrow$  (II): Weil  $f$  stetig ist, gibt es einen Punkt  $x$  mit  $f(x) = f(-x) = -f(x)$ , also  $f(x) = 0$ .
- (II)  $\Rightarrow$  (I): Wir betrachten die Abbildung  $g(x) := f(x) - f(-x)$ , die klarerweise stetig und antipodal ist. Nun gibt es also ein  $x$  mit  $g(x) = 0$ , d. h.  $f(x) = f(-x)$ .
- (II)  $\Rightarrow$  (III): Angenommen, es gäbe es ein stetiges, antipodales  $f: \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^{n-1}$ . Dann würde es nach (II) einen Punkt  $x$  geben mit  $f(x) = 0$ , im Widerspruch zu  $f(x) \in \mathbb{S}^{n-1}$ .
- (III)  $\Rightarrow$  (II): Angenommen,  $f: \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  wäre stetig, antipodal und nirgends Null. Dann definieren wir die Abbildung  $g: \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^{n-1}, x \mapsto \frac{f(x)}{\|f(x)\|}$ . Klarerweise ist  $g$  antipodal und stetig, im Widerspruch zu (III).
- (IV)  $\Rightarrow$  (III): Wir betrachten die Projektion

$$\pi: \begin{cases} \mathbb{S}_+^n \rightarrow \mathbb{B}^n \\ (x_1, \dots, x_{n+1}) \mapsto (x_1, \dots, x_n). \end{cases}$$

Angenommen,  $f: \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^{n-1}$  wäre nun antipodal und stetig. Dann definieren wir

$$g: \begin{cases} \mathbb{B}^n \rightarrow \mathbb{S}^{n-1} \\ x \mapsto f(\pi^{-1}(x)). \end{cases}$$

$g$  ist stetig, weil  $\pi$  ein Homöomorphismus ist. Sei nun  $x \in \mathbb{S}^{n-1} = \partial\mathbb{B}^n$  beliebig, dann gilt

$$g(x) = f(\pi^{-1}(x)) = f(x, 0) = -f(-x, 0) = -f(\pi^{-1}(-x)) = -g(-x).$$

Also ist  $g$  auch antipodal, im Widerspruch zu (IV).

(III)  $\Rightarrow$  (IV): Angenommen, es gäbe ein stetiges  $f: \mathbb{B}^n \rightarrow \mathbb{S}^{n-1}$  mit  $f(x) = -f(-x)$  für alle  $x \in \mathbb{S}^{n-1} = \partial\mathbb{B}^n$ . Dann definieren wir eine neue Funktion

$$g: \begin{cases} \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^{n-1} \\ x \mapsto \begin{cases} f(\pi(x)), & x \in \mathbb{S}_+^n \\ -f(\pi(-x)), & x \in \mathbb{S}_-^n \end{cases} \end{cases}.$$

Für ein  $x = (x_1, \dots, x_n, 0) \in \mathbb{S}_+^n \cap \mathbb{S}_-^n$  gilt

$$f(\pi(x)) = f(x_1, \dots, x_n) = -f(-x_1, \dots, -x_n) = -f(\pi(-x)),$$

also ist  $g$  wohldefiniert. Nach Konstruktion ist  $g$  antipodal, und weil die Einschränkungen von  $g$  auf die abgeschlossenen Mengen  $\mathbb{S}_+^n$  und  $\mathbb{S}_-^n$  stetig sind, nach Lemma 5.3 auch stetig – Widerspruch.

(I)  $\Rightarrow$  (V): Sei  $A_1, \dots, A_{n+1}$  eine Überdeckung von  $\mathbb{S}^n$  aus abgeschlossenen Mengen. Wir definieren die Funktion

$$f: \begin{cases} \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \\ x \mapsto (\text{dist}(x, A_1), \dots, \text{dist}(x, A_n)), \end{cases}$$

die komponentenweise stetig und daher stetig ist. Nach Voraussetzung gibt es ein  $x \in \mathbb{S}^n$  und ein  $y \in \mathbb{R}^n$  mit  $f(x) = f(-x) = y$ . Nun unterscheiden wir zwei Fälle: Wenn es ein  $i \in [n]$  gibt, sodass die  $i$ -te Koordinate von  $y$  Null ist, dann liegen  $x$  und  $-x$  in  $A_i$ ; sind hingegen alle Koordinaten von  $y$  ungleich Null, dann liegen sie beide in  $A_{n+1}$ .

(V)  $\Rightarrow$  (III): Nach Lemma 5.2 gibt es eine abgeschlossene Überdeckung von  $\mathbb{S}^{n-1}$  durch Mengen  $A_1, \dots, A_{n+1}$ , die jeweils kein Antipodenpaar enthalten. Für ein stetiges  $f: \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^{n-1}$  bilden die Mengen  $f^{-1}[A_1], \dots, f^{-1}[A_{n+1}]$  eine abgeschlossene Überdeckung von  $\mathbb{S}^n$ . Nach (V) gibt es daher ein  $i \in [n+1]$  und ein  $x \in \mathbb{S}^n$  mit  $x, -x \in f^{-1}[A_i]$ . Wäre  $f$  nun zusätzlich antipodal, wären daher  $f(x)$  und  $-f(x) = f(-x)$  in  $A_i$ , Widerspruch.

(V)  $\Rightarrow$  (VI): Sei  $O_1, \dots, O_{n+1}$  eine offene Überdeckung von  $\mathbb{S}^n$ . Wir konstruieren eine abgeschlossene Überdeckung  $A_1, \dots, A_{n+1}$ , die  $A_i \subseteq O_i$  für alle  $i \in [n+1]$  erfüllt: Für jedes  $x \in \mathbb{S}^n$  wählen wir eine offene Umgebung  $V_x$  von  $x$  und ein  $i \in [n+1]$  mit  $\overline{V_x} \subseteq O_i$ . Weil  $\mathbb{S}^n$  kompakt ist, existiert eine endliche Teilüberdeckung  $V_{x_1}, \dots, V_{x_m}$ . Nun definieren wir für alle  $i \in [n+1]$

$$A_i := \bigcup_{\substack{0 \leq j \leq m \\ x_j \in U_i}} \overline{V_j} \subseteq O_i,$$

was als endliche Vereinigung abgeschlossener Mengen abgeschlossen ist.

(VI)  $\Rightarrow$  (V): Mit Kontraposition: Sei  $A_1, \dots, A_{n+1}$  eine abgeschlossene Überdeckung von  $\mathbb{S}^n$ , sodass keine dieser Mengen ein Antipodenpaar enthält. Natürlich bilden dann auch die Mengen  $B_i := A_i \cap \mathbb{S}^n$  eine abgeschlossene Überdeckung von  $\mathbb{S}^n$ . Für jedes  $i \in [n+1]$  ist  $B_i$  kompakt und enthält kein Antipodenpaar; daher gibt es ein  $\varepsilon_i > 0$  mit  $\text{diam}(B_i) = 2 - \varepsilon_i$ . Wir wählen  $\varepsilon := \min_{i \in [n+1]} \varepsilon_i$  und setzen für  $i \in [n+1]$

$$O_i := \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \text{dist}(x, B_i) < \frac{\varepsilon}{2} \right\}. \quad (11)$$

Diese Mengen bilden eine offene Überdeckung von  $\mathbb{S}^n$ . Seien  $x, y \in O_i$  beliebig, dann gibt es wegen (11)  $\tilde{x}, \tilde{y} \in B_i$  mit  $d(x, \tilde{x}), d(y, \tilde{y}) < \frac{\varepsilon}{2}$ . Damit ist

$$d(x, y) \leq d(x, \tilde{x}) + d(\tilde{x}, \tilde{y}) + d(\tilde{y}, y) < \frac{\varepsilon}{2} + (2 - \varepsilon) + \frac{\varepsilon}{2} = 2,$$

also enthält kein  $O_i$  ein Antipodenpaar und (VI) gilt nicht.  $\square$

Eine weitere sehr einfache Folgerung aus dem Satz von Borsuk-Ulam in der Version (I) ist die folgende: Es gibt keine Teilmenge des  $\mathbb{R}^n$ , die homöomorph zu  $\mathbb{S}^n$  ist. Das gilt ganz einfach, weil es für jede stetige Abbildung  $f: \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  einen Punkt  $x$  mit  $f(x) = f(-x)$  gibt,  $f$  also nicht injektiv ist.

## 6 Das Lemma von Tucker

Dieser Abschnitt dreht sich um ein weiteres zum Satz von Borsuk-Ulam äquivalentes Resultat: das Lemma von Tucker. Das ist insofern überraschend, als es sich dabei um eine rein kombinatorische Aussage handelt. Für den Beweis werden wir spezielle Simplicialkomplexe und eine Spur Graphentheorie verwenden.

**6.1 Definition.** Ein *ungerichteter Graph* ist ein Tupel  $G = (V, E)$ , wobei  $V$  eine Menge ist und  $E \subseteq \{\{x, y\} \mid x, y \in V \wedge x \neq y\}$ . Die Mengen  $V$  und  $E$  nennen wir die *Knoten* respektive *Kanten* von  $G$ . Zwei Knoten  $x$  und  $y$  heißen *adjacent*, falls  $\{x, y\} \in E$ . Der *Grad* von  $x$  ist definiert durch  $\deg(x) := |\{y : \{x, y\} \in E\}|$ .

**6.2 Lemma** (Handschlaglemma). *Sei  $G = (V, E)$  ein ungerichteter Graph. Dann gilt*

$$\sum_{v \in V} \deg(v) = 2|E|. \quad (12)$$

*Inbesondere ist die Anzahl der Knoten mit ungeradem Grad gerade.*

*Beweis.* Wir verwenden das in der Kombinatorik wichtige Beweisprinzip des *doppelten Abzählens*: Sei  $e \in E$  eine beliebige Kante, dann wird  $e$  auf der rechten Seite von (12) genau zweimal gezählt. Andererseits wird  $e$ , da es ja genau zwei Knoten verbindet, auch links genau zweimal gezählt; also müssen beide Seiten übereinstimmen.  $\square$

**6.3 Definition.** Sei  $(X, \mathcal{T})$  ein topologischer Raum. Ein Simplicialkomplex  $\Delta$  mit  $X \cong \|\Delta\|$  heißt *Triangulierung* von  $X$ .

**6.4 Definition.** Sei  $\Delta$  eine Triangulierung von  $\mathbb{B}^n$ , sei  $g: \|\Delta\| \rightarrow \mathbb{B}^n$  der zugehörige Homöomorphismus und sei  $T = \{\sigma \in \Delta \mid g[\sigma] \subseteq \partial\mathbb{B}^n\}$ . Wir nennen  $\Delta$  *antipodal am Rand*, wenn es für jedes  $\sigma \in T$  ein  $\sigma' \in T$  gibt mit  $g[\sigma] = -g[\sigma']$  und wenn  $T$  eine Triangulierung von  $\partial\mathbb{B}^n$  bildet. Außerdem nennen wir in dieser Situation  $T$  den *Rand* von  $\Delta$ .

**6.5 Satz** (Lemma von Tucker, Version 1). *Sei  $\Delta$  eine am Rand antipodale Triangulierung von  $\mathbb{B}^n$  und sei*

$$\lambda: V(\Delta) \rightarrow [n] \cup -[n]$$

*eine Nummerierung der Ecken von  $\Delta$  mit  $\lambda(-x) = -\lambda(x)$  für alle Ecken  $x$  am Rand der Triangulierung. Dann gibt es eine komplementäre Kante in  $\Delta$ , d. h. ein 1-Simplex, dessen Ecken mit  $i$  und  $-i$  nummeriert sind.*

Bezeichne  $\diamond^{n-1}$  den (abstrakten) Simplicialkomplex mit  $V(\diamond^{n-1}) = [n] \cup -[n]$ , wobei  $F \subseteq V(\diamond^{n-1})$  ein Simplex sei, wenn  $F$  für alle  $i \in [n]$  nicht sowohl  $i$  als auch  $-i$  enthält. Nach Lemma 2.13 ist eine geometrische Realisierung von  $\diamond^{n-1}$  gegeben durch den Simplicialkomplex der Seiten des Kreuzpolytops  $\hat{\mathbb{B}}^n$ ; insbesondere gilt also  $\|\diamond^{n-1}\| \cong \mathbb{S}^{n-1}$ .

Folgende Umformulierung des Tucker-Lemmas wird sich als nützlich erweisen:

**6.6 Satz** (Lemma von Tucker, Version 2). *Sei  $\Delta$  eine am Rand antipodale Triangulierung von  $\mathbb{B}^n$ . Dann gibt es keine simpliciale Abbildung  $\lambda: V(\Delta) \rightarrow V(\diamond^{n-1})$  mit  $\lambda(-x) = -\lambda(x)$  für alle  $x$  am Rand von  $\Delta$ .*

Die erste Version folgt aus der zweiten, denn dass  $\lambda: V(\Delta) \rightarrow V(\diamond^{n-1})$  keine simpliziale Abbildung ist, heißt ja genau, dass es ein Simplex  $\sigma \in \Delta$  gibt, dessen Bild unter  $\lambda$  kein Simplex in  $\diamond^{n-1}$  ist, also für zumindest ein  $i \in [n]$  sowohl  $i$  als auch  $-i$  enthält. Die Kante, die die beiden Knoten, die auf  $i$  respektive  $-i$  abgebildet werden, verbindet, liegt als Seite von  $\sigma$  ebenfalls in  $\Delta$ .

Für die umgekehrte Implikation sei  $\lambda: V(\Delta) \rightarrow V(\diamond^{n-1})$  eine Abbildung mit  $\lambda(-x) = -\lambda(x)$  am Rand. Nach Version 1 gibt es ein 1-Simplex  $\sigma$  und ein  $i \in [n]$  mit  $\lambda(\sigma) = \{-i, i\}$ . Nun gilt  $\{-i, i\} \notin \diamond^{n-1}$ , also ist  $\lambda$  nicht simplizial.

**6.7 Satz.** *Der Satz von Borsuk-Ulam und das Lemma von Tucker sind äquivalent.*

*Beweis.* Wir zeigen die Äquivalenz des Tucker-Lemmas mit Version (IV) aus Satz 5.4, die besagt, dass es keine stetige Funktion  $f: \mathbb{B}^n \rightarrow \mathbb{S}^{n-1}$  mit  $f(-x) = -f(x)$  für alle  $x \in \mathbb{S}^{n-1} = \partial\mathbb{B}^n$  gibt.

$\mathbb{B}^n$  ist homöomorph zu  $\hat{\mathbb{B}}^n$  vermöge des Homöomorphismus  $\pi: \mathbb{B}^n \rightarrow \hat{\mathbb{B}}^n, x \mapsto x \frac{\|x\|}{\|x\|_1}$  (wobei  $\pi(0) = 0$ ). Die Abbildung  $\pi$  ist offenbar antipodal, daher ist die Existenz einer stetigen Funktion  $f: \mathbb{B}^n \rightarrow \partial\mathbb{B}^n$  mit  $f(-x) = -f(x)$  für alle  $x \in \partial\mathbb{B}^n$  äquivalent zur Existenz einer stetigen Funktion  $g: \hat{\mathbb{B}}^n \rightarrow \partial\hat{\mathbb{B}}^n$  mit  $g(-x) = -g(x)$  für alle  $x \in \partial\hat{\mathbb{B}}^n$ . Außerdem können wir in Definition 6.4 und anschließend im Lemma von Tucker  $\mathbb{B}^n$  durch  $\hat{\mathbb{B}}^n$  ersetzen und erhalten eine äquivalente Aussage. Um den Beweis technisch zu vereinfachen, werden wir im Folgenden auf  $\hat{\mathbb{B}}^n$  arbeiten.

Das Lemma von Tucker in der Version 2 erhält man leicht aus dem Satz von Borsuk-Ulam: Sei  $\Delta$  eine am Rand antipodale Triangulierung von  $\hat{\mathbb{B}}^n$ . Wir gehen indirekt vor: Angenommen,  $\lambda: V(\Delta) \rightarrow V(\diamond^{n-1})$  wäre eine simpliziale Abbildung mit  $\lambda(-x) = -\lambda(x)$  am Rand. Nach Proposition 3.14 ist dann die affine Erweiterung  $\|\lambda\|: \hat{\mathbb{B}}^n \rightarrow \partial\hat{\mathbb{B}}^n$  stetig und außerdem antipodal am Rand, Widerspruch.

Für die andere Richtung sei  $g: \hat{\mathbb{B}}^n \rightarrow \partial\hat{\mathbb{B}}^n$  eine stetige Abbildung mit  $g(-x) = -g(x)$  für alle  $x \in \partial\hat{\mathbb{B}}^n$ . Wir werden nun eine Triangulierung  $\Delta$  und eine Abbildung  $\lambda$  konstruieren, die Version 1 des Tucker-Lemmas widersprechen.

Sei dazu  $\varepsilon := \frac{1}{n}$ . Für alle  $y \in \partial\hat{\mathbb{B}}^n$  gilt  $\sum_{i=1}^n |y_i| = 1$  und folglich  $\|y\|_\infty \geq \varepsilon$ . Als stetige Funktion ist  $g$  auf dem Kompaktum  $\hat{\mathbb{B}}^n$  gleichmäßig stetig, daher gibt es ein  $\delta > 0$ , sodass für alle  $x, x' \in \hat{\mathbb{B}}^n$

$$\|x - x'\| \leq \delta \implies \|g(x) - g(x')\|_\infty < 2\varepsilon$$

gilt. Sei nun  $\Delta$  eine am Rand antipodale Triangulierung von  $\hat{\mathbb{B}}^n$  mit  $\text{diam}(\sigma) \leq \delta$  für alle Simplexe  $\sigma \in \Delta$ . Proposition 4.5 garantiert uns, dass so eine Triangulierung existiert; wir können beispielsweise bei der kanonischen Triangulierung (siehe weiter unten) starten und hinreichend oft die baryzentrische Unterteilung durchführen. Dann gilt sogar  $\|\Delta\| = \hat{\mathbb{B}}^n$  und ein zugehöriger Homöomorphismus ist gegeben durch die Identität. Für  $v \in V(\Delta)$  definieren wir

$$k(v) := \min\{i \in [n]: |g(v)_i| \geq \varepsilon\}$$

und

$$\lambda(v) := \begin{cases} +k(v) & \text{falls } g(v)_{k(v)} > 0 \\ -k(v) & \text{falls } g(v)_{k(v)} < 0. \end{cases}$$

Sei  $v \in V(\Delta) \cap \partial\hat{\mathbb{B}}^n$  ein Knoten am Rand der Triangulierung, dann ist  $g(-v) = -g(v)$  sowie  $k(v) = k(-v)$ , also gilt  $\lambda(-v) = -\lambda(v)$ . Nun können wir das Lemma von Tucker anwenden und erhalten eine komplementäre Kante  $vv'$ , d. h. es gibt ein  $i \in [n]$  mit  $i = \lambda(v) = -\lambda(v')$ . Weil die Simplexe in  $\Delta$  Durchmesser kleiner gleich  $\delta$  haben, gilt  $\|v - v'\| \leq \delta$ . Nun ist aber  $g(v)_i \geq \varepsilon$  und  $g(v')_i \leq -\varepsilon$ , also  $\|g(v) - g(v')\|_\infty \geq 2\varepsilon$ ; Widerspruch.  $\square$

Auf dem  $n$ -dimensionalen Kreuzpolytop  $\hat{\mathbb{B}}^n$  haben wir eine kanonische Triangulierung  $\diamond^n$  gegeben: Ein Simplex  $\sigma$  liegt in  $\diamond^n$ , falls es entweder in  $\diamond^{n-1}$  liegt, oder es ein  $\tau \in \diamond^{n-1}$  gibt mit  $\sigma = \tau \cup \{0\}$ .

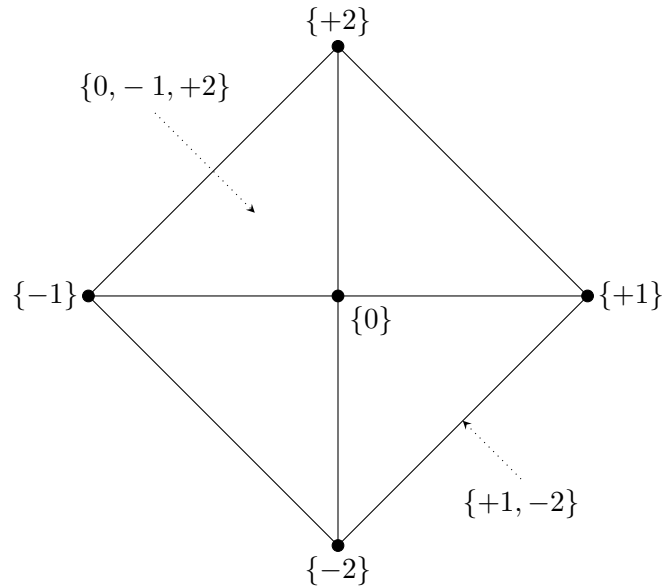


Abb. 5: Illustration von  $\diamond^2$ , der kanonischen Triangulierung von  $\hat{\mathbb{B}}^2$ .

Wir betrachten nun Triangulierungen  $\Delta$  von  $\hat{\mathbb{B}}^n$ , die antipodal am Rand sind und für die es für jedes  $\sigma \in \Delta$  ein  $\tau \in \diamond^n$  gibt mit  $\sigma \subseteq \tau$  (anders gesagt:  $\Delta$  ist feiner als  $\diamond^n$ ). Weiters sei  $\lambda: V(\Delta) \rightarrow [n] \cup -[n]$  eine Nummerierung der Ecken von  $\Delta$ , die am Rand antipodal ist. So ein  $\Delta$  nennen wir eine *spezielle Triangulierung*.

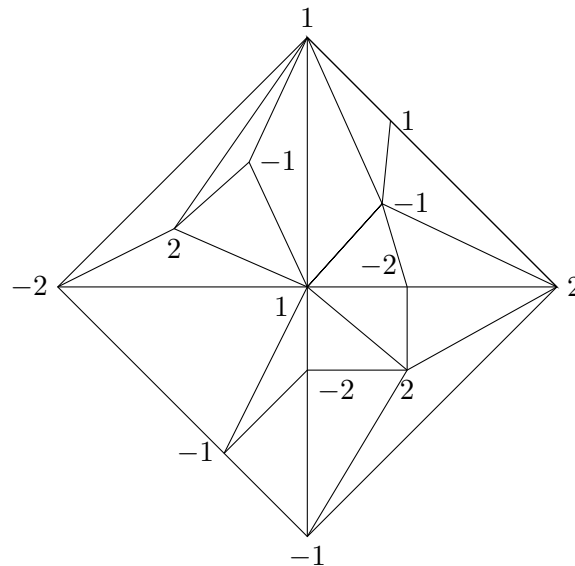


Abb. 6: Beispiel einer speziellen Triangulierung von  $\hat{\mathbb{B}}^2$  samt Nummerierung; die einzelnen Simplexe müssen vollständig in einem der vier Quadranten enthalten sein.

Für den Beweis der einen Implikation von Satz 6.7 haben wir nur benötigt, dass es für jedes  $\delta > 0$  eine am Rand antipodale Triangulierung  $\Delta$  von  $\hat{\mathbb{B}}^n$  mit  $\max_{\sigma \in \Delta} \text{diam}(\sigma) \leq \delta$  gibt, auf welche wir dann das Lemma von Tucker angewandt haben. Wenn wir mit einer speziellen

Triangulierung starten und wiederholt die baryzentrische Unterteilung durchführen, erhalten wir spezielle Triangulierungen mit beliebiger Feinheit. Es ist also hinreichend, das Lemma von Tucker für spezielle Triangulierungen zu beweisen, um den Satz von Borsuk-Ulam zu folgern. Aus diesem folgt dann mit der umgekehrten Implikation in Satz 6.7 wiederum die allgemeine Fassung des Lemmas von Tucker.

*Beweis (des Lemmas von Tucker für spezielle Triangulierungen).* Sei  $\sigma \in \Delta$ , dann definieren wir

$$\lambda(\sigma) := \{\lambda(v) : v \in V(\sigma)\}$$

und

$$S(\sigma) := \{+i : x_i > 0, i \in [n]\} \cup \{-i : x_i < 0, i \in [n]\},$$

wobei  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \text{relint}(\sigma)$  beliebig ist (das ist wohldefiniert, weil  $\Delta$  feiner ist als  $\diamond^n$ ).

Wir nennen ein Simplex *richtig beschriftet*, wenn  $S(\sigma) \subseteq \lambda(\sigma)$ .

Wenn ein Simplex  $\sigma$  richtig beschriftet ist, dann gilt  $\sigma \subseteq L_\sigma := \text{span}(\{e_i : i \in S(\sigma) \vee -i \in S(\sigma)\})$ . Für  $|S(\sigma)| = k$  ist also  $\dim(\sigma) \leq k$ . Umgekehrt ist  $|\lambda(\sigma)| \geq k$ , also gilt  $\dim(\sigma) \geq k - 1$ . Die richtig beschrifteten Simplexe gliedern sich also in zwei Unterkategorien:

- Falls  $\dim(\sigma) = k - 1$ , dann nennen wir  $\sigma$  *eng*. In diesem Fall sind alle Knotennummierungen notwendig, damit  $\sigma$  richtig beschriftet ist.
- Falls  $\dim(\sigma) = k$ , dann nennen wir  $\sigma$  *weit*. Hier können zwei Dinge passieren: Entweder tritt eine Nummerierung doppelt auf, oder ein Knoten ist mit einer nicht benötigten Zahl nummeriert.

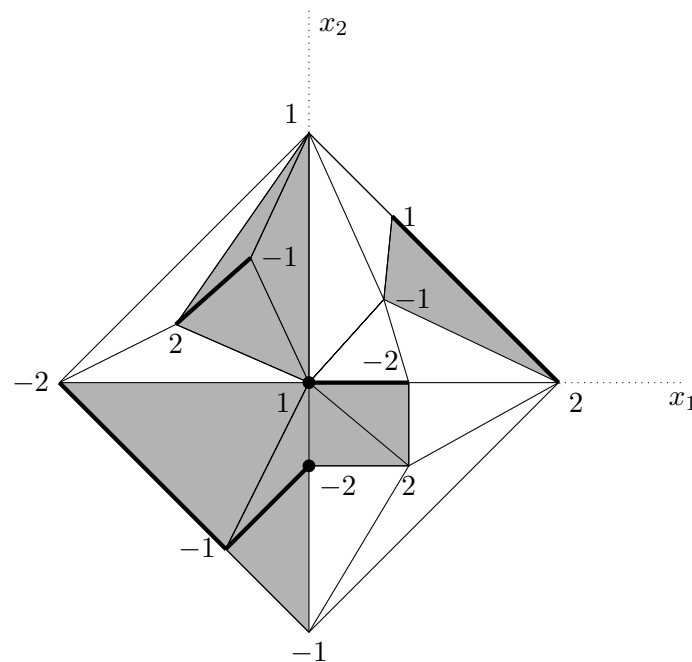


Abb. 7: Die richtig beschrifteten Simplexe sind grau bzw. fett markiert.

Beispielsweise ist das richtig beschriftete Simplex mit der Nummerierung  $\{-1, -2, 1\}$  ein weites und die mit  $\{-1, -2\}$  und  $\{-2\}$  nummerierten vollständig beschrifteten Simplexe eng.



Nun sind wir fast am Ziel angelangt. Im letzten Schritt werden wir nun einen ungerichteten Graphen definieren, dessen Knoten richtig beschriftete Simplexe sind. Unter der Annahme, es gäbe keine komplementäre Kante, werden wir einen einfachen graphentheoretischen Widerspruch erhalten.

Sei also  $G = (V, E)$  der folgende ungerichtete Graph: Die Knotenmenge  $V$  ist die Menge der richtig beschrifteten Simplexe; die Knotenmenge  $E \subseteq V^2$  besteht aus jenen Paarmengen  $\{\sigma, \tau\}$ , für die eine der folgenden beiden Bedingungen gelten:

- $\sigma = -\tau \subseteq \partial \hat{\mathbb{B}}^n$  oder
- $\sigma$  ist eine Seitenfläche von  $\tau$  mit  $\lambda(\sigma) = S(\tau)$  (d. h. die Beschriftung der Knoten der Seitenfläche  $\sigma$  ist bereits hinreichend dafür, dass  $\tau$  richtig beschriftet ist).

Unter der Annahme, dass es keine komplementäre Kante gibt, zeigen wir nun, dass jedes richtig beschriftete Simplex  $\sigma$  außer  $\{0\}$  zu *genau zwei* Simplexen adjazent ist. Sei  $k := |S(\sigma)|$ . Wir machen eine Fallunterscheidung:

- Fall 1:  $\sigma$  ist ein enges Simplex.

◊ Fall 1.1:  $\sigma \subseteq \partial \hat{\mathbb{B}}^n$ :

Weil unsere Triangulierung  $\Delta$  antipodal am Rand ist, gilt auch  $-\sigma \in \Delta$  und daher  $\{\sigma, -\sigma\} \in E$ . Für eine davon verschiedene Kante  $\{\tau, \sigma\} \in E$  muss  $\sigma$ , weil es eng ist, eine Seitenfläche von  $\tau$  sein und die Nummerierung von  $\sigma$  muss  $\tau$  zu einem richtig beschrifteten Simplex machen. So ein  $\tau$  liegt also im  $k$ -dimensionalen Unterraum  $L_\sigma$ . Offensichtlich ist  $L_\sigma \cap \hat{\mathbb{B}}^n$  ein  $k$ -dimensionales Kreuzpolytop. Wenn wir nur jene Simplexe aus  $\Delta$  betrachten, die in  $L_\sigma$  enthalten sind, erhalten wir zudem eine Triangulierung dieses Polytops. Nun ist  $\sigma$  also ein  $(k-1)$ -dimensionales Simplex, das am Rand einer Triangulierung von  $\hat{\mathbb{B}}^k$  liegt; damit kann es nur Seitenfläche von genau einem  $k$ -Simplex, nämlich  $\tau$  sein.

◊ Fall 1.2:  $\sigma$  liegt nicht in  $\partial \hat{\mathbb{B}}^n$ :

Wir argumentieren ganz ähnlich wie in Fall 1.1:  $\sigma$  ist wieder ein  $(k-1)$ -Simplex in einer Triangulierung von  $\hat{\mathbb{B}}^k$ , diesmal liegt es aber nicht am Rand. Damit muss es Seitenfläche von genau zwei Simplexen  $\tau_1$  und  $\tau_2$  sein, die auch in dieser Triangulierung, also in  $L_\sigma$  liegen und folglich genau die zwei zu  $\sigma$  adjazenten Simplexe sind.

- Fall 2:  $\sigma$  ist ein weites Simplex. Sei  $\sigma = \text{conv}(\{v_0, \dots, v_k\})$ .

◊ Fall 2.1:  $S(\sigma) = \lambda(\sigma)$ :

Es muss es also zwei verschiedene Zahlen  $i, j \in [k]_0$  geben, sodass  $v_i$  und  $v_j$  dieselbe Nummerierung haben. Nun sind  $\text{conv}(\{v_0, \dots, v_k\} \setminus \{v_i\})$  und  $\text{conv}(\{v_0, \dots, v_k\} \setminus \{v_j\})$  genau die zu  $\sigma$  adjazenten Simplexe. Des Weiteren kann  $\sigma$  nicht selbst Seitenfläche eines richtig beschrifteten Simplex  $\tau$  sein, denn sonst wäre  $\dim(\tau) = k+1$ , andererseits aber  $|S(\tau)| = |S(\sigma)| = k$  und folglich  $\dim(\tau) \leq k$ .

◊ Fall 2.2: Es gibt ein  $i \in \lambda(\sigma) \setminus S(\sigma)$ , d. h. eine unnötige Nummerierung.

Weil wir angenommen haben, dass es keine komplementäre Kante gibt, ist  $-i \notin S(\sigma)$  (sonst wäre, weil  $\sigma$  richtig beschriftet ist,  $-i \in \lambda(\sigma)$ ). Sei  $v_j$  der Knoten, der mit  $i$  nummeriert ist. Dann ist  $\text{conv}(\{v_0, \dots, v_k\} \setminus \{v_j\})$  eines der zu  $\sigma$  adjazenten Simplexe. Wenn  $\tau$  ein richtig beschriftetes Simplex ist, das  $\sigma$  als Seitenfläche hat, muss  $S(\tau) = \lambda(\sigma) = S(\sigma) \cup \{i\}$  gelten. Wegen  $\pm i \notin S(\sigma)$  liegt  $\sigma$  in der durch  $x_{|i|} = 0$  definierten

Hyperebene. Wenn wir an einem Punkt  $x \in \text{relint}(\sigma)$  starten und parallel zur  $x_{|i|}$ -Achse gehen (in die positive Richtung für  $i > 0$  und in die negative Richtung für  $i < 0$ ), treffen wir auf genau so ein  $\tau$ .

Das Simplex  $\{0\}$  ist tatsächlich zu genau einem Simplex adjazent, nämlich zu jener Kante, die auf der  $x_{|\lambda(0)|}$ -Achse liegt (auf der positiven Halbachse für  $\lambda(0) > 0$  und auf der negativen für  $\lambda(0) < 0$ ) und  $0$  enthält.

Wir haben also unter der Annahme, es gäbe keine komplementäre Kante, einen endlichen, ungerichteten Graphen konstruiert, der genau einen Knoten mit ungeradem Grad hat; ein Widerspruch zu Lemma 6.2.  $\square$

Aus diesem Beweis geht überdies hervor, dass jedes richtig beschriftete Simplex außer  $\{0\}$  entweder eine komplementäre Kante besitzt oder Grad 2 in  $G$  hat. Damit können wir einen einfachen Algorithmus angeben, der für eine gegebene Triangulierung  $\Delta$  die komplementäre Kante findet:

1. Baue den zu  $\Delta$  gehörenden Graphen aus den richtig beschrifteten Simplexen auf.
2. Starte bei  $\{0\}$ .
3. An jedem Knoten überprüfe, ob dieser ein Simplex mit komplementärer Kante ist.
  - 3.2. Wenn ja, gib die komplementäre Kante aus.
  - 3.3. Wenn nein, dann hat der Knoten genau einen adjazenten Knoten, der noch nicht erreicht wurde. Gehe zu diesem und wiederhole 3.

Die Vorschrift 3.3 ist wohldefiniert, denn erstens hat jedes Simplex ohne komplementäre Kante außer  $\{0\}$  Grad 2, und zweitens können nicht beide Nachbarn bereits in einem früheren Schritt erreicht worden sein, weil dann entweder  $\deg(\{0\}) \geq 2$  oder  $\deg(\{v\}) \geq 3$  für ein zuvor erreichtes  $v$  wäre (dieses  $v$  wäre dann ein Simplex ohne komplementäre Kante, sonst hätte der Algorithmus ja gar nicht weitergesucht). Der Algorithmus terminiert, weil der durchsuchte Graph endlich ist und in jedem Schritt ein neuer Knoten erreicht wird.

## 7 Brouwerscher Fixpunktsatz

Eine Folgerung aus dem Satz von Borsuk-Ulam ist der bekannte Fixpunktsatz von Brouwer, dessen Beweis mit dem bereits erworbenen Wissen nicht mehr sehr aufwendig ist.

**7.1 Satz.** Jede stetige Abbildung  $f: \mathbb{B}^n \rightarrow \mathbb{B}^n$  hat einen Fixpunkt, d. h. es gibt ein  $x$  mit  $f(x) = x$ .

*Beweis.* Wir führen einen Widerspruchsbeweis: Angenommen, es gäbe ein fixpunktfreies  $f: \mathbb{B}^n \rightarrow \mathbb{B}^n$ . Dann definieren wir die Abbildung

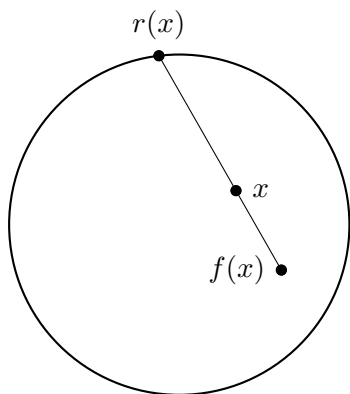
$$r: \begin{cases} \mathbb{B}^n \rightarrow \mathbb{S}^{n-1} = \partial\mathbb{B}^n \\ x \mapsto x + \lambda(x)(x - f(x)), \end{cases}$$

wobei

$$\lambda(x) = \frac{\langle x, f(x) - x \rangle + \sqrt{\langle x, f(x) - x \rangle^2 + (1 - \|x\|^2)\|f(x) - x\|^2}}{\|f(x) - x\|^2}.$$

Die Abbildung  $r$  ist, weil  $f$  fixpunktfrei ist, wohldefiniert und als Zusammensetzung stetiger Funktionen stetig.  $\lambda(x)$  ist die positive Lösung der quadratischen Gleichung

$$\begin{aligned} 1 &= \|x + \lambda(x)(x - f(x))\|^2 = \langle x + \lambda(x)(x - f(x)), x + \lambda(x)(x - f(x)) \rangle \\ &= \|x\|^2 + 2\lambda(x)(\|x\|^2 - \langle x, f(x) \rangle) + \lambda(x)^2(\|x - f(x)\|^2), \end{aligned}$$



womit  $r$  also tatsächlich nach  $\mathbb{S}^{n-1}$  abbildet. Für ein beliebiges  $x \in \mathbb{S}^{n-1}$  gilt des Weiteren  $\|x\| = 1$  und  $\langle x, f(x) - x \rangle \leq 0$ , folglich  $\lambda(x) = 0$  und somit  $r(x) = x$ . Insbesondere gilt also  $r(-x) = -r(x)$  für alle  $x \in \mathbb{S}^n$ .

So eine Abbildung  $r$  kann es aber nach Satz 5.4 (IV) nicht geben – Widerspruch.  $\square$

Abb. 8: Wäre  $f$  fixpunktfrei, wäre  $r$  eine Retraktion der Einheitskugel auf ihren Rand.

**7.2 Proposition.** Sei  $K \subseteq \mathbb{R}^n$  eine kompakte, konvexe Menge mit nichtleerem Inneren. Dann gilt  $K \cong \mathbb{B}^n$ .

*Beweis.* Weil Translationen Homöomorphismen sind, können wir annehmen, dass es ein  $r > 0$  gibt mit  $U_r(0) \subseteq K$ . Damit ist das Minkowskifunktional

$$\mu_K(x) = \inf \left\{ t > 0 : \frac{1}{t}x \in K \right\}$$

wohldefiniert. Wir behaupten nun, dass ein Homöomorphismus gegeben ist durch

$$T: x \mapsto \begin{cases} \frac{\mu_K(x)}{\|x\|}x, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Zuerst zeigen wir, dass  $T$  stetig ist. Weil  $K$  kompakt ist, gibt es ein  $R > 0$  mit  $K \subseteq U_R(0)$ . Unmittelbar aus der Definition des Minkowskifunktional folgt, dass

$$\frac{\|x\|}{R} \leq \mu_K(x) \leq \frac{\|x\|}{r}. \quad (13)$$

Seien  $x, y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  beliebig, dann gilt  $\mu_K(x), \mu_K(y) \neq 0$  und

$$\frac{1}{\mu_K(x) + \mu_K(y)}(x + y) = \frac{\mu_K(x)}{\mu_K(x) + \mu_K(y)} \left( \frac{1}{\mu_K(x)} x \right) + \frac{\mu_K(y)}{\mu_K(x) + \mu_K(y)} \left( \frac{1}{\mu_K(y)} y \right). \quad (14)$$

Weil  $K$  abgeschlossen ist, sind  $\frac{1}{\mu_K(x)}x$  und  $\frac{1}{\mu_K(y)}y$  in  $K$  und wegen (14) auch  $\frac{1}{\mu_K(x) + \mu_K(y)}(x + y)$  als Konvexkombination dieser beiden Elemente. Es gilt also  $\mu_K(x + y) \leq \mu_K(x) + \mu_K(y)$ .

Durch Anwendung der letzten Ungleichung erhalten wir  $\mu_K(x) \leq \mu_K(x - y) + \mu_K(y)$  sowie  $\mu_K(y) \leq \mu_K(y - x) + \mu_K(x)$ , also

$$|\mu_K(x) - \mu_K(y)| \leq \max\{\mu_K(x - y), \mu_K(y - x)\} \quad \text{für alle } x, y \in \mathbb{R}^n.$$

Mit (13) folgt  $|\mu_K(x) - \mu_K(y)| \leq \frac{\|x - y\|}{r}$ , also ist  $\mu_K$  stetig und damit auch  $T$  für  $x \neq 0$ . Abermals aus (13) folgt  $\|T(x)\| \leq \frac{1}{r}\|x\|$ , womit  $T$  auch bei 0 stetig ist.

Seien  $\lambda > 0$  und  $x \in \mathbb{R}^n$  beliebig, dann gilt

$$\begin{aligned} \mu_K(\lambda x) &= \inf \left\{ t > 0 : \frac{1}{t} \lambda x \in K \right\} = \lambda \inf \left\{ \frac{t}{\lambda} > 0 : \frac{1}{t} \lambda x \in K \right\} \\ &= \lambda \inf \left\{ s > 0 : \frac{1}{s} x \in K \right\} = \lambda \mu_K(x). \end{aligned}$$

Daraus folgt sofort, dass

$$T^{-1}: y \mapsto \begin{cases} \frac{\|y\|}{\mu_K(y)} y, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

die Inverse von  $T$  ist, also ist  $T$  bijektiv. Ganz analog wie vorher erhält man, dass auch  $T^{-1}$  stetig ist.

Es bleibt noch zu zeigen, dass  $T[K] = \mathbb{B}^n$ . Hinreichend dafür ist offenbar der Nachweis von  $K = \{x \in \mathbb{R}^n : \mu_K(x) \leq 1\}$ . Das ist aber eine unmittelbare Folgerung aus der Konvexität von  $K$  und der Tatsache, dass  $0 \in K$ .  $\square$

Der Fixpunktsatz lässt sich nun leicht von der Kugel auf beliebige kompakte, konvexe Teilmengen des  $\mathbb{R}^n$  verallgemeinern:

**7.3 Satz** (Fixpunktsatz von Brouwer). *Sei  $K \subseteq \mathbb{R}^n$  eine kompakte, konvexe Menge und  $f: K \rightarrow K$  stetig. Dann hat  $f$  einen Fixpunkt.*

*Beweis.* Sei  $x_0 \in K$  und  $q := \dim(\text{span}\{x - x_0 \mid x \in K\})$ . Nach Proposition 7.2 gibt es einen Homöomorphismus  $T: K \rightarrow \mathbb{B}^q$ . Die Abbildung  $g := TfT^{-1}$  ist eine stetige Selbstabbildung von  $\mathbb{B}^q$ , hat also nach Satz 7.1 einen Fixpunkt  $z$ . Nun gilt  $T^{-1}(z) = T^{-1}(TfT^{-1}(z)) = f(T^{-1}(z))$ , also ist  $T^{-1}(z)$  ein Fixpunkt von  $f$ .  $\square$

## 8 Einige Anwendungen

Die Anwendungen des Satzes von Borsuk-Ulam sind mannigfaltig; zu guter Letzt wollen wir als Lohn für die Mühsalen vergangener Kapitel einige davon kennenlernen. Die folgenden Sätze werden grob gesprochen Aussagen darüber machen, dass man bestimmte Mengen auf einfache Art und Weise »fair« aufteilen kann. Man könnte sich zum Beispiel die Frage stellen, ob es stets möglich ist, einen Schinken-Käse-Toast so durchzuschneiden, dass sich in jeder Hälfte jeweils dieselbe Menge Schinken, Käse und Toast befindet. Das ist tatsächlich immer der Fall:

**8.1 Satz** (Ham-Sandwich-Theorem). *Seien  $\mu_1, \dots, \mu_n$  endliche Borelmaße auf  $\mathbb{R}^n$ , sodass jede Hyperebene eine Nullmenge all dieser Maße ist. Dann gibt es eine Hyperebene  $h$  mit*

$$\mu_i(h^+) = \frac{1}{2} \mu_i(\mathbb{R}^n) \quad \text{für alle } i \in [n],$$

wobei  $h^+$  einer der durch  $h$  bestimmten Halbräume ist.

*Beweis.* Sei  $u = (u_0, \dots, u_n) \in \mathbb{S}^n$ , dann definieren wir

$$h^+(u) := \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : u_1 x_1 + \dots + u_n x_n \leq u_0\}$$

und eine Funktion  $f: \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  durch

$$f(u) := (\mu_1(h^+(u)), \dots, \mu_n(h^+(u))).$$

Offenbar gilt  $h^+(1, 0, \dots, 0) = \mathbb{R}^n$  und  $h^+(-1, 0, \dots, 0) = \emptyset$ . Wir zeigen zuerst, dass  $f$  stetig ist: Sei dazu  $(u_k)_{k=1}^\infty$  eine Folge in  $\mathbb{S}^n$ , die gegen  $u$  konvergiert. Für  $\mu_i$ -fast alle  $x$  gilt für hinreichend großes  $k$

$$x \in h^+(u_k) \iff x \in h^+(u). \quad (15)$$

Für einen Punkt  $u \neq (\pm 1, 0, \dots, 0)$  gilt das für alle  $x \notin \partial h^+(u)$  und ist leicht nachzurechnen; die Hyperebene  $\partial h^+(u)$  ist nach Voraussetzung eine  $\mu_i$ -Nullmenge. Wenn  $u_k$  gegen  $(1, 0, \dots, 0)$  konvergiert, enthält  $h^+(u_k)$  für hinreichend großes  $k$  beliebig große Kugeln um den Ursprung, also gilt (15) auch hier  $\mu_i$ -fast überall. Ist  $u = (-1, 0, \dots, 0)$ , so hat  $h^+(u_k)$  für hinreichend großes  $k$  mit beliebig großen Kugeln um den Ursprung leeren Schnitt.

Mit dem Satz von der dominierten Konvergenz erhalten wir aus (15)

$$\mu_i(h^+(u_k)) = \int \mathbb{1}_{h^+(u_k)} d\mu_i \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \int \mathbb{1}_{h^+(u)} d\mu_i = \mu_i(h^+(u))$$

für alle  $i \in [n]$ ; also ist  $f$  stetig.

An dieser Stelle kommt der Satz von Borsuk-Ulam ins Spiel, der uns ein  $v = (v_0, \dots, v_n) \in \mathbb{S}^n$  mit  $f(v) = f(-v)$  liefert. Gilt  $v = (\pm 1, 0, \dots, 0)$ , dann befinden wir uns im Trivialfall, dass alle Maße das Nullmaß sind; andernfalls ist  $h^+(v)$  tatsächlich ein Halbraum. Dann gilt

$$\begin{aligned} h^+(v) &= \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : v_1 x_1 + \dots + v_n x_n \leq v_0\}, \\ h^+(-v) &= \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : v_1 x_1 + \dots + v_n x_n \geq v_0\} \end{aligned}$$

und folglich für alle  $i \in [n]$

$$\frac{1}{2} \mu_i(\mathbb{R}^n) = \frac{1}{2} (\mu_i(h^+(v)) + \mu_i(h^+(-v))) = \frac{1}{2} (f_i(v) + f_i(-v)) = f_i(v) = \mu_i(h^+(v));$$

also ist  $\partial h^+(v)$  unsere gesuchte Hyperebene. □

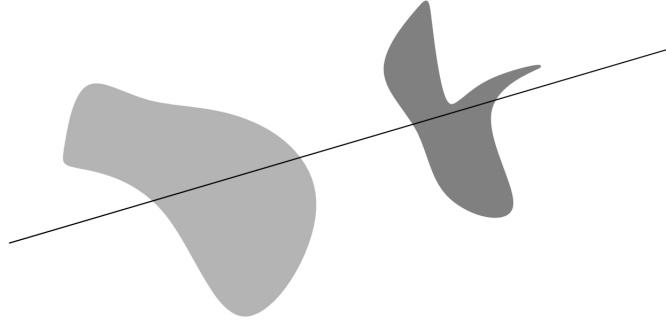


Abb. 9: Illustration des Ham-Sandwich-Theorems im  $\mathbb{R}^2$  (Quelle: [1, S. 47]).

Als Anwendung des Ham-Sandwich-Theorems zeigen wir:

**8.2 Korollar.** Sei  $\mu$  ein endliches Borelmaß auf  $\mathbb{R}^2$ , sodass jede Hyperebene eine Nullmenge ist. Dann gibt es zwei Geraden, die  $\mathbb{R}^2$  derart in vier Teile zerlegen, dass das Maß aller vier Teile gleich groß ist.

*Beweis.* Sei  $g_1$  eine Gerade, die  $\mathbb{R}^2$  bezüglich  $\mu$  halbiert, d. h. sodass für die beiden durch  $g_1$  bestimmten Halbräume  $h^+$  und  $h^-$

$$\mu(h^+) = \mu(h^-)$$

gilt. Nun definieren wir  $\mu_1$  als die Einschränkung von  $\mu$  auf  $h^+$  und  $\mu_2$  als die Einschränkung von  $\mu$  auf  $h^-$ . Satz 8.1 angewandt auf die Maße  $\mu_1$  und  $\mu_2$  liefert eine Gerade  $g_2$ , die die beiden Mengen  $h^+$  und  $h^-$  jeweils bezüglich  $\mu$  halbiert, womit die Aussage gezeigt ist.  $\square$

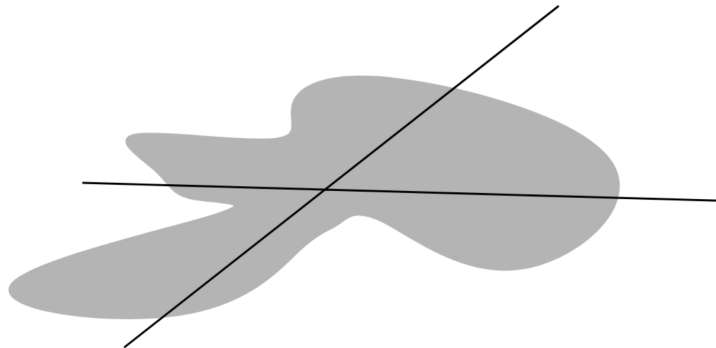


Abb. 10: Illustration von Korollar 8.2 (Quelle: [1, S. 50]).

Eine analoge Aussage gilt im  $\mathbb{R}^3$ : Jede Menge  $A \subseteq \mathbb{R}^3$  kann durch drei Ebenen in acht gleich große Teile geteilt werden. Man kann zeigen, dass es im Allgemeinen unmöglich ist, ein  $A \subseteq \mathbb{R}^5$  durch fünf Hyperebenen in 32 gleich große Mengen zu teilen. Die Frage, ob man ein  $A \subseteq \mathbb{R}^4$  mit vier Hyperebenen in sechzehn gleich große Teile teilen kann, ist ungelöst.

Ein Analogon zu Satz 8.1 gilt auch für endliche Mengen:

**8.3 Satz** (Ham-Sandwich-Theorem für endliche Mengen). Seien  $A_1, \dots, A_n \subseteq \mathbb{R}^n$  endliche Mengen. Dann existiert eine Hyperebene  $h$ , sodass die beiden durch  $h$  definierten offenen Halbräume für alle  $i \in [n]$  höchstens  $\lfloor \frac{1}{2}|A_i| \rfloor$  Elemente von  $A_i$  enthalten.

*Beweis.* Zuerst stellen wir fest, dass wir nur den Fall betrachten müssen, wo alle  $A_i$  ungerade Kardinalität haben. Andernfalls können wir aus allen Mengen, die eine gerade Anzahl von

Punkten enthalten, genau einen davon entfernen und den Satz auf die so erhaltenen Mengen anwenden. Die beiden durch die erhaltene Hyperebene  $h$  definierten Halbräume enthalten dann, falls  $|A_i|$  gerade war, höchstens  $\lfloor \frac{1}{2}(|A_i| - 1) \rfloor + 1 = (\frac{1}{2}(|A_i| - 1) - \frac{1}{2}) + 1 = \frac{1}{2}|A_i| = \lfloor \frac{1}{2}|A_i| \rfloor$  Elemente. Sei nun also angenommen, dass alle  $A_i$  ungerade Kardinalität haben.

Die Beweisidee ist nun folgende: Wir ersetzen die endlich vielen Punkte durch immer kleiner werdende Kugeln, auf die wir Satz 8.1 anwenden können.

Vorerst wollen wir weiters voraussetzen, dass die Mengen paarweise disjunkt sind und dass jede Hyperebene  $h$  höchstens  $n$  Elemente von  $\bigcup_{i=1}^n A_i$  enthält. Wir definieren nun

$$A_i^\varepsilon := \bigcup_{x \in A_i} K_\varepsilon(x),$$

wobei  $\varepsilon > 0$  so klein gewählt sei, dass alle Kugeln  $K_\varepsilon(x)$ ,  $x \in \bigcup_{i=1}^n A_i$ , paarweise disjunkt sind und jede Hyperebene  $h$  mit höchstens  $n$  dieser Kugeln nichtleeren Schnitt hat. Für  $i \in [n]$  sei  $\mu_i$  die Einschränkung des  $n$ -dimensionalen Lebesguemaßes auf  $A_i^\varepsilon$ , dann gibt es nach Satz 8.1 eine Hyperebene  $h$  mit  $\mu_i(h^+) = \frac{1}{2} \mu_i(\mathbb{R}^n)$  für alle  $i \in [n]$ , wobei  $h^+$  einer der durch  $h$  bestimmten Halbräume ist. Weil  $A_i^\varepsilon$  aus einer ungeraden Anzahl von Kugeln besteht, muss  $h$  mindestens eine dieser Kugeln schneiden. Weil  $h$  insgesamt höchstens  $n$  Kugeln schneiden kann, schneidet sie sogar für jedes  $i \in [n]$  genau eine der Kugeln. Diese Kugel muss von  $h$  halbiert werden, ihr Mittelpunkt also auf  $h$  liegen; das zeigt die Aussage für den betrachteten Spezialfall.

Den allgemeinen Fall führen wir nun mithilfe eines Störungsarguments auf diesen Spezialfall zurück: Seien dazu für jedes  $\eta > 0$  und jedes  $i \in [n]$  Mengen  $A_{i,\eta}$  so gewählt, dass  $|A_{i,\eta}| = |A_i|$ ,  $\max_{x \in A_{i,\eta}} \text{dist}(x, A_{i,\eta}) < \eta$ ,  $\bigcap_{i=1}^n A_{i,\eta} = \emptyset$  und dass jede Hyperebene  $h$  höchstens  $n$  Elemente von  $\bigcup_{i=1}^n A_{i,\eta}$  enthält. Wie wir bereits gezeigt haben, existiert in diesem Fall eine Hyperebene  $h_\eta$ , sodass die beiden durch  $h_\eta$  definierten offenen Halbräume für alle  $i \in [n]$  höchstens  $\lfloor \frac{1}{2}|A_i| \rfloor$  Elemente von  $A_{i,\eta}$  enthalten. Als Hyperebene hat  $h_\eta$  eine Darstellung der Form  $h_\eta = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle a_\eta, x \rangle = b_\eta\}$  mit  $\|a_\eta\| = 1$ . Die Zahlen  $b_\eta$  liegen in einem beschränkten Intervall. Ist die Menge  $\{(a_\eta, b_\eta) \mid \eta > 0\} \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$  endlich, sind wir fertig. Andernfalls ist sie beschränkt und unendlich und hat daher einen Häufungspunkt  $(a, b)$ . Sei  $(\eta_j)_{j \in \mathbb{N}}$  eine Nullfolge mit  $(a_{\eta_j}, b_{\eta_j}) \xrightarrow{j \rightarrow \infty} (a, b)$  und sei  $h = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle a, x \rangle = b\}$ .

Sei nun  $x \in A_i$  für ein  $i \in [n]$  und  $\text{dist}(x, h) = |\langle a, x \rangle - b| > \delta > 0$ , dann gilt wegen der Stetigkeit des Skalarproduktes für hinreichend großes  $j$  auch  $\text{dist}(x, h_{\eta_j}) = |\langle a_{\eta_j}, x \rangle - b_{\eta_j}| > \frac{\delta}{2}$ . Nach Voraussetzung gibt es für jedes  $\eta > 0$  einen Punkt  $x_\eta \in A_{i,\eta}$  mit  $d(x, x_\eta) < \eta$ . Jeder Punkt, der in einem der beiden durch  $h$  bestimmten offenen Halbräume liegt, liegt für hinreichend großes  $j$  also auch im entsprechenden Halbraum von  $h_{\eta_j}$ . Wenn einer der beiden durch  $h$  bestimmten offenen Halbräume also  $k$  Punkte aus  $A_i$  enthält, enthält der entsprechende durch  $h_\eta$  bestimmte offene Halbraum daher mindestens  $k$  Punkte aus  $A_{i,\eta_j}$ .  $\square$

Wenn wir den relativ uninteressanten Spezialfall ausschließen, dass mehr als  $n$  Elemente von  $\bigcup_{i=1}^n A_i$  auf einer gemeinsamen Hyperebene liegen, können wir Satz 8.3 noch verschärfen:

**8.4 Korollar.** *Seien  $A_1, \dots, A_n \subseteq \mathbb{R}^n$  paarweise disjunkte, endliche Mengen, sodass jede Hyperebene höchstens  $n$  Elemente von  $\bigcup_{i=1}^n A_i$  enthält. Dann existiert eine Hyperebene  $h$ , sodass die beiden durch  $h$  definierten offenen Halbräume für alle  $i \in [n]$  genau  $\lfloor \frac{1}{2}|A_i| \rfloor$  Elemente von  $A_i$  enthalten.*

*Beweis.* Nach Satz 8.3 gibt es eine Hyperebene  $h$ , sodass die beiden durch  $h$  definierten offenen Halbräume für alle  $i \in [n]$  höchstens  $\lfloor \frac{1}{2}|A_i| \rfloor$  Elemente von  $A_i$  enthalten. O. B. d. A. können wir davon ausgehen, dass  $h = \{x \in \mathbb{R}^n : x_n = 0\}$ . Wir definieren  $B := h \cap \bigcup_{i=1}^n A_i$ ; nach Voraussetzung ist  $|B| \leq d$ . Falls  $\left| \bigcup_{i=1}^n A_i \right| \leq n$ , gilt der Satz trivialerweise. Andernfalls folgt aus der Voraussetzung, dass jede Hyperebene höchstens  $n$  Elemente von  $\bigcup_{i=1}^n A_i$  enthält, dass jede Menge  $X \subseteq \bigcup_{i=1}^n A_i$  mit  $|X| \leq n + 1$  affin unabhängig ist. Demnach können wir  $B$  zu einer affin unabhängigen Menge  $C \subseteq h$  mit  $|C| = d$  erweitern.

Nun verwenden wir wieder ein Störungsargument: Sei  $\varepsilon > 0$ , dann definieren wir für jedes  $a \in C$  in geeigneter Weise entweder  $\hat{a} = a$  (falls  $a \in C \setminus B$  oder falls  $a$  auch auf der neuen Hyperebene liegen soll) oder  $\hat{a} = a + \varepsilon e_n$  oder  $\hat{a} = a - \varepsilon e_n$ . Für hinreichend kleines  $\varepsilon$  ist  $\hat{C} := \{\hat{a} \mid a \in C\}$  eine affin unabhängige Menge und spannt daher eine Hyperebene auf, die wir mit  $h_\varepsilon$  bezeichnen.

Für  $\varepsilon \rightarrow 0$  konvergieren die charakteristischen Funktionen der durch  $h_\varepsilon$  bestimmten offenen Halbräume punktweise gegen die entsprechenden charakteristischen Funktionen der durch  $h$  bestimmten offenen Halbräume. Für alle hinreichend kleinen  $\varepsilon > 0$  ist  $h_\varepsilon$  also eine passende Hyperebene.  $\square$

Stellen wir uns folgende Situation vor: Zwei Diebe haben eine offene Halskette mit verschiedenen Arten von Edelsteinen gestohlen, wobei sich von jeder Art von Stein eine gerade Anzahl auf der Kette befindet. Da sie den Wert der einzelnen Steine nicht kennen, wollen sie die Kette so zerschneiden und aufteilen, dass jeder der beiden die Hälfte der Steine jeder Art erhält. Weil die Kette selbst aus Platin besteht, welches nur schwer zu zerschneiden ist, wollen sie mit möglichst wenigen Schnitten auskommen. Erstaunlicherweise sind ausschließlich topologische Beweise für den folgenden Satz bekannt:

**8.5 Satz** (Necklace-Theorem). *Eine offene Kette mit  $d$  Arten von Steinen, bei der jede Art von Stein mit gerader Vielfachheit auftritt, kann mit höchstens  $d$  Schnitten so in zwei Teile geteilt werden, dass jeder Teil genau die Hälfte der Steine jeder Art enthält.*

*Beweis.* Sei  $n$  die Anzahl der Steine auf der Kette. Wir legen die Kette wie folgt auf die Momentenkurve  $\gamma(t) = (t, t^2, \dots, t^d)$  im  $\mathbb{R}^d$ : Für  $i \in [d]$  sei

$$A_i = \{\gamma(k) \mid k \in [n] \text{ und der } k\text{-te Stein ist von der } i\text{-ten Art}\}.$$

Nach Lemma 3.9 schneidet die Momentenkurve eine beliebige Hyperebene in höchstens  $d$  Punkten. Damit sind die Voraussetzungen von Korollar 8.4 erfüllt und es gibt eine Hyperebene  $h$ , sodass die beiden durch  $h$  definierten offenen Halbräume für alle  $i \in [d]$  genau  $\frac{1}{2}|A_i|$  Elemente von  $A_i$  enthalten.

Nun schneidet  $\gamma$  insbesondere die Hyperebene  $h$  in höchstens  $d$  Punkten – wir erhalten also eine faire Zerteilung, wenn wir die Kette an den genau diesen Stellen durchschneiden.  $\square$



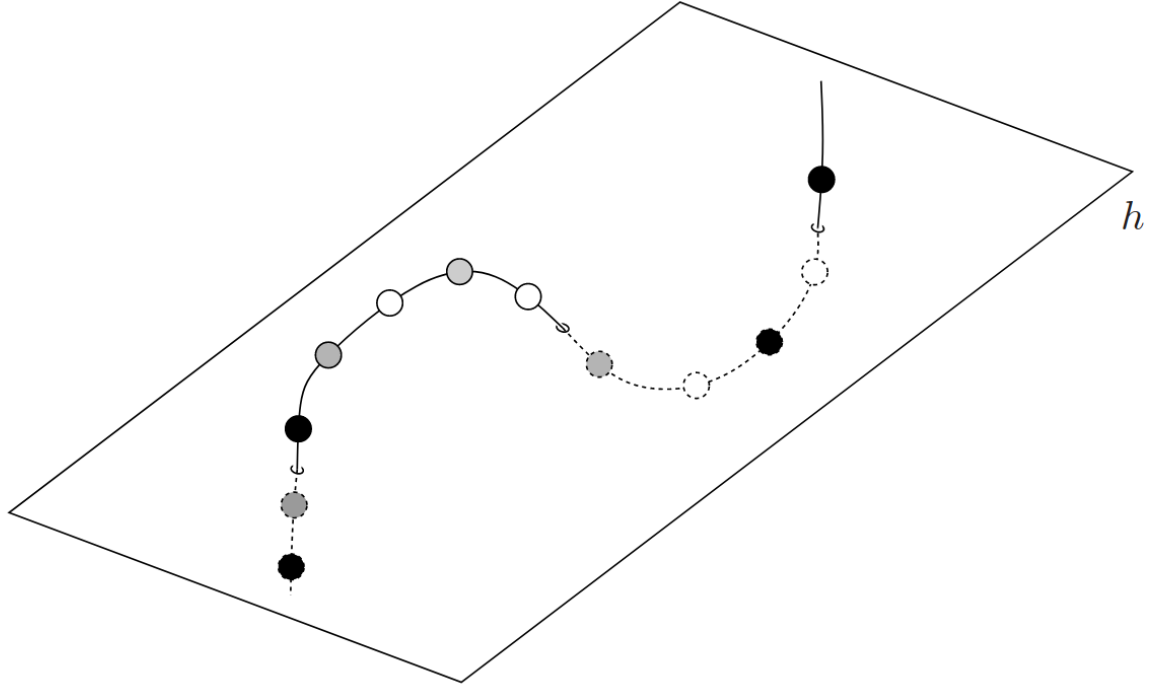


Abb. 11: Illustration des Beweises von Satz 8.5: Die Kette wird an der Momentenkurve »aufgefädelt« (Quelle: [1, S. 55]).

Der folgende Satz kann als Verallgemeinerung von Satz 8.5 auf kontinuierliche Mengen verstanden werden:

**8.6 Satz.** Seien  $\mu_1, \dots, \mu_n$  stetige Wahrscheinlichkeitsmaße auf  $[0, 1]$ . Dann existieren eine Zerlegung von  $[0, 1]$  in Intervalle  $I_0, \dots, I_n$  und Vorzeichen  $\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_n \in \{-1, 1\}$ , sodass

$$\sum_{j=0}^n \varepsilon_j \mu_i(I_j) = 0 \quad \text{für alle } i \in [n]. \quad (16)$$

*Beweis.* Wir können eine Zerlegung von  $[0, 1]$  in  $n + 1$  Teilintervalle durch einen Punkt  $x = (x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{S}^n$  codieren: Sei  $z_0 = 0$  und  $z_i = \sum_{k=1}^i x_k^2$  für  $i \in [n + 1]$ , dann bilden die Intervalle

$$I_j = [z_{j-1}, z_j], \quad j \in [n + 1]$$

eine Partition von  $[0, 1]$ . Nun definieren wir eine Funktion  $g = (g_1, \dots, g_{n+1}): \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  durch

$$g_i(x) = \sum_{j=1}^{n+1} \text{sgn}(x_j) \mu_i([z_{j-1}, z_j]) \quad \text{für alle } i \in [n + 1].$$

$g$  ist klarerweise stetig und antipodal, daher existiert nach dem Satz von Borsuk-Ulam ein  $x \in \mathbb{S}^n$  mit  $g(x) = 0$ . Die durch dieses  $x$  codierten Intervalle und Vorzeichen erfüllen offensichtlich genau (16).  $\square$

Wir können Satz 8.5 leicht aus Satz 8.6 herleiten, indem wir uns die Kette als das Einheitsintervall vorstellen, wobei wir den  $k$ -ten Stein mit dem Intervall  $[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n})$  identifizieren und für die  $i$ -te Art von Stein das Maß  $\mu_i$  als normierte Einschränkung des Lebesguemaßes auf die

Intervalle der zugehörigen Steine definieren. Dann können wir Satz 8.6 anwenden und erhalten Intervalle und Vorzeichen wie in (16). Der erste Dieb bekommt nun die Intervalle mit positivem und der zweite jene mit negativem Vorzeichen. Es ist noch die Subtilität zu beachten, dass die Schnittstellen bei dieser Konstruktion durch einen Stein durchgehen können. Das kann man aber leicht beheben (z. B. mit Induktion nach der Anzahl dieser Schnittstellen).

# Symbolverzeichnis

$\ \cdot\ $	Euklidische Norm im $\mathbb{R}^n$ ( $\ x\  = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$ )
$\ \cdot\ _1$	Eins-Norm im $\mathbb{R}^n$ ( $\ x\ _1 = \sum_{i=1}^n  x_i $ )
$\ \cdot\ _\infty$	Maximumsnorm im $\mathbb{R}^n$ ( $\ x\ _\infty = \max_{i=1}^n  x_i $ )
$\langle \cdot, \cdot \rangle$	Euklidisches Skalarprodukt im $\mathbb{R}^n$ ( $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$ )
$d(\cdot, \cdot)$	Euklidische Metrik im $\mathbb{R}^n$ ( $d(x, y) = \ x - y\ $ )
$\text{diam}(A)$	$\sup\{d(x, y) : x, y \in A\}$
$\text{dist}(A, B)$	$\inf\{d(a, b) : a \in A, b \in B\}$
$X \cong Y$	$X$ und $Y$ sind homöomorph
$\mathbb{B}^n$	$\{x \in \mathbb{R}^n : \ x\  \leq 1\}$
$\mathbb{S}^n$	$\{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \ x\  = 1\}$
$\mathbb{S}_+^n$	$\{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{S}^n : x_{n+1} \geq 0\}$
$\mathbb{S}_-^n$	$\{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{S}^n : x_{n+1} \leq 0\}$
$e_i$	$i$ -ter kanonischer Basisvektor des $\mathbb{R}^n$
$[n]$	$\{1, 2, \dots, n\}$
$[n]_0$	$\{0, 1, \dots, n\}$
$f[A]$	$\{f(x) : x \in A\}$

## Literatur

- [1] MATOUŠEK, JIŘÍ: *Using the Borsuk-Ulam Theorem: Lectures on Topological Methods in Combinatorics and Geometry*. 2. Auflage, Springer-Verlag, 2008.
- [2] BLÜMLINGER, MARTIN: *Analysis 3*. Vorlesungsskript, Technische Universität Wien, 2019.
- [3] MUNKRES, JAMES R.: *Elements of Algebraic Topology*. Addison Wesley Publishing Company, 1984.  
<https://people.dm.unipi.it/benedett/MUNKRES-ETA.pdf>
- [4] WILKINS, DAVID R.: *Module MA3428: Algebraic Topology II, Hilary Term 2011*. Vorlesungsskript, University of Dublin, 2011.  
[https://www.maths.tcd.ie/~dwilkins/Courses/MA3428/MA3428\\_Hil2011\\_PartII.pdf](https://www.maths.tcd.ie/~dwilkins/Courses/MA3428/MA3428_Hil2011_PartII.pdf)