TECHNISCHE UNIVERSITÄT WIEN

SEMINARARBEIT

Über Ringe der Form C(X)

ausgeführt am

Institut für
Analysis und Scientific Computing
TU Wien

unter der Anleitung von

Ao.Univ.Prof. Dr. Harald Woracek

durch

Dina Ettel
Matrikelnummer: 11915302

Wien, Juni 2022

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Die Menge $C(X)$ aller stetigen reellwertigen Funktionen auf einem topologischen Raum X ist mit punktweiser Multiplikation und Addition ein Ring. Diese Arbeit beschäftigt sich mit der Frage, wann es zu einem gegebenen Ring A einen topologischen Raum X gibt, so dass A Ring-isomorph zu $C(X)$ ist.

Ein Funktionenring ist eine Menge von reellwertigen Funktionen, die mit punktweiser Multiplikation und Addition einen Ring bildet und alle konstanten Funktionen enthält. Zunächst wird in Abschnitt 2 gezeigt, wann ein Ring isomorph zu einem Funktionenring ist.

In Abschnitt 3 wird die Frage beantwortet, wann es zu einer Menge Φ von Funktionen von X nach $\mathbb{R}$ eine Topologie auf X gibt, sodass $\Phi = C(X)$. Das ist genau dann der Fall, wenn Φ eine verallgemeinerte Ring-Eigenschaft erfüllt, die wir „strongly composition-closed“ nennen.

Um die bisherigen Erkenntnisse später zusammenzusetzen, wird in Abschnitt 4 und 5 zuerst noch ein Abstecher zu realkompakten topologischen Räumen gemacht. Es wird gezeigt, dass jeder $C(X)$-Ring isomorph zu einem $C(X')$ eines realkompakten Raumes X' ist. Realkompakte Räume haben außerdem die Eigenschaft, dass eine Bijektion zwischen ihren Punkten und der Menge der nicht verschwindenden Homomorphismen von $C(X)$ nach $\mathbb{R}$ existiert.

Zuletzt wird in Abschnitt 6 eine Charakterisierung von Ringen, die isomorph zu einem $C(X)$-Ring sind, gezeigt. Ein Ring, der isomorph zu einem $C(X)$-Ring sein soll, muss natürlich isomorph zu einem Funktionenring sein. Unter welchen Voraussetzungen das gilt und auf welche Art und Weise so ein isomorpher Funktionenring dann konstruiert werden kann, ist aus Abschnitt 2 bekannt. Formuliert man die „strongly composition-closed“-Eigenschaft für diese Konstruktion, erhält man eine Eigenschaft, die sich auf die reellwertigen Homomorphismen auf dem Ring bezieht. So erhält man alle Voraussetzungen dafür, dass ein Ring isomorph zu einem $C(X)$-Ring ist. Die Aussagen über realkompakte Räume werden verwendet, um zu zeigen, dass auch $C(X)$ diese Homomorphismen-Eigenschaft erfüllt.

Diese Seminararbeit basiert auf dem Paper „Some problems concerning $C(X)$“ von Ákos Császár [2]. Andere Quellen werden explizit im Text angeführt.

2 Funktionenringe

Definition 2.1. Sei X eine Menge und Φ eine Menge von Funktionen von X nach $\mathbb{R}$. Φ heißt mit punktweiser Addition und Multiplikation *Funktionenring auf* X, falls

(i) Φ mit punktweiser Addition und Multiplikation von Funktionen ein Ring ist und

(ii) Φ alle konstanten Funktionen von X nach $\mathbb{R}$ enthält.

Bemerkung 2.2. (Notation)
Konstante Funktionen werden ab jetzt immer fett notiert.
Weiters bezeichnet S_A die Menge aller reellwertigen, nicht verschwindenden Ring-Homomorphismen auf einem gegebenen Ring A.

Satz 2.3. *Ein Ring* $(A, +_A, \cdot_A, -_A, 0_A)$ *ist isomorph zu einem Funktionenring genau dann, wenn die Bedingungen* (a) *und* (b) *sowie eine der Bedingungen* $(c_1), (c_2), (c_3)$ *erfüllt sind.*

(a) *A ist ein Ring mit Einselement* $1_A \neq 0_A$.

(b) *Es gibt einen Ring-Homomorphismus* $\chi : \mathbb{R} \to A$ *mit* $1_A \in \chi(\mathbb{R})$.

(c_1) *Für jedes Ideal* $I \lhd A, I \neq \{0_A\}$ *gibt es einen Ring-Homomorphismus* $\psi : I \to \mathbb{R}$ *mit* $1 \in \psi(I)$.

(c_2) *Für jedes Ideal* $I \lhd A, I \neq \{0_A\}$ *gibt es einen Ring-Homomorphismus* $s : A \to \mathbb{R}$ *mit* $s(I) \neq \{0\}$.

(c_3) *Für jedes* $a \in A, a \neq 0_A$ *gibt es einen Ring-Homomorphismus* $s : A \to \mathbb{R}$ *mit* $s(a) \neq 0$.

Bemerkung 2.4. Man sieht sofort, dass (c_2) aus (c_3) folgt. Setzen wir nun umgekehrt (c_2) voraus. Angenommen, es gibt eine Stelle $a \in A \backslash \{0_A\}$, auf der alle Homomorphismen s von A nach $\mathbb{R}$ verschwinden. Dann ist $\bigcap_{s \in S_A} \ker(s)$ ein nichttriviales Ideal von A. Nach Voraussetzung muss es ein $s \in S_A$ geben, das auf $\bigcap_{s \in S_A} \ker(s)$ nicht verschwindet - Widerspruch. Also sind (c_2) und (c_3) äquivalent.

Außerdem impliziert die Bedingung (c_1) die Bedingungen (c_2) und (c_3). Denn wenn ψ ein Homomorphismus wie in (c_1) ist und $i \in I$ mit $\psi(i) = 1$, dann ist $\Psi : A \to \mathbb{R}, \Psi(a) := \psi(iai)$ ein Homomorphismus auf A mit $\Psi(i) = 1 \neq 0$.

Beweis. (Satz 2.3)
„$\Rightarrow$“ Sei Φ ein Funktionenring.

(a) Die konstante 1-Funktion $\mathbf{1} \in \Phi$ ist Einselement.

(b) Setze $\chi : \mathbb{R} \to \Phi, \chi(c) := \mathbf{c}$.

(c_1) Für ein Ideal $I \neq \{0\}$ wähle $g \in I,\ x \in X$ mit $g(x) \neq 0$.
Setze $\psi : I \to \mathbb{R}, \psi(f) := f(x)$. Dann ist $\psi(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{g(x)}}\mathrm{g}) = 1$.

Mit Bemerkung 2.4 erfüllt Φ, und auch jeder zu Φ isomorphe Ring, also $(a), (b), (c_1), (c_2), (c_3)$.

„$\Leftarrow$“ Wir setzen

$$\Phi := \{h_a \mid a \in A\} \text{ wobei } h_a : S_A \to \mathbb{R},\ h_a(s) := s(a)$$

und wollen zeigen, dass Φ ein zu A isomorpher Funktionenring ist.

Die Abbildung $\varphi : a \mapsto h_a$ von A in den Ring aller reellwertigen Funktionen auf S_A mit punktweiser Addition und Multiplikation ist ein Homomorphismus. Also ist $\varphi(A) = \Phi$ ein Ring. Da, mit Bemerkung 2.4, (c_3) vorausgesetzt ist, folgt aus $h_a(s) \equiv 0$ schon $a = 0_A$ und φ ist injektiv.
Es bleibt zu zeigen, dass Φ alle konstanten Funktionen enthält. Sei χ wie in (b) gewählt. Für $s \in S_A$ ist $s(1_A) \neq 0$ und der Homomorphismus $s \circ \chi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ nicht verschwindend. In [4, Seite 8] wird gezeigt, dass der einzige nicht verschwindende Ring-Homomorphismus von $\mathbb{R}$ auf sich selbst die Identität ist. Damit ist $s \circ \chi$ die Identität und für $c \in \mathbb{R}$ ist $\varphi(\chi(c)) = \mathbf{c}$. □

3 Abgeschlossenheit unter Komposition

Wir betrachten im Folgenden eine Menge von Funktionen Φ, die von einer Menge X in die reellen Zahlen abbilden. Wir wollen die Frage beantworten, wann es eine Topologie auf X gibt, so dass $\Phi = C(X)$ ist.

Jeder $C(X)$-Ring ist natürlich abgeschlossen unter punktweiser Addition und Multiplikation. Erfüllt Φ die folgende Verallgemeinerung dieser Eigenschaft, dann gibt es so eine Topologie auf X, wie in Satz 3.2 gezeigt wird.

In der ganzen Arbeit werden Mengen der Gestalt $\prod_{i \in I} \mathbb{R}$ mit der Produkttopologie der Euklidischen Topologie und Teilmengen davon mit der Teilraumtopologie betrachtet.

Definition 3.1. Φ heißt *strongly composition-closed (scc)*, falls für jede Familie $(f_i)_{i \in I}$ in Φ gilt:

$$\forall k \in C(h(X)) : k \circ h \in \Phi$$

wobei $h : X \to \prod_{i \in I} \mathbb{R}, x \mapsto (f_i(x))_{i \in I}$ die Auswertung der Familie $(f_i)_{i \in I}$ bezeichnet.

Satz 3.2. *Sei X eine Menge, $\Phi \subseteq \mathbb{R}^X$. Dann gilt:*

$$\Phi \textit{ ist scc} \iff \exists \mathcal{T} \textit{ Topologie auf } X\textit{: } C^{\mathcal{T}}(X) = \Phi.$$

Beweis. [1, Satz 2.6]
" $\Leftarrow$ " Für eine beliebige Familie $(f_i)_{i \in I}$ in $C(X)$ ist die Auswertung $h : X \to \prod_{i \in I} \mathbb{R}$ stetig, da sie komponentenweise stetig ist. Die Zusammensetzung stetiger Funktionen ist stetig. Also ist $C(X)$ scc.

" $\Rightarrow$ " Bezeichne mit h die Auswertung der Familie Φ und mit $\mathcal{T}$ die initiale Topologie auf X bezüglich $\{h\}$, also

$$\mathcal{T} = \{h^{-1}(O) \mid O \subseteq h(X) \text{ offen}\}.$$

Wir zeigen, dass $C^{\mathcal{T}}(X) = \Phi$ gilt.
" $\supseteq$ " Nach Definition der Topologie ist jede Funktion aus Φ stetig.
" $\subseteq$ " Sei $g \in C(X)$. Definiere

$$k : \begin{cases} h(X) & \to & \mathbb{R} \\ h(x) & \mapsto & g(x). \end{cases}$$

Es bleibt zu zeigen, dass k wohldefiniert und stetig ist, dann folgt $g = k \circ h \in \Phi$ nach Voraussetzung.

<u>Wohldefiniertheit:</u> Seien $x, y \in X$.

$$\begin{aligned} h(x) = h(y) &\implies [\forall \mathcal{O} \in \mathcal{T} : x \in \mathcal{O} \iff y \in \mathcal{O}] \\ &\implies g(x) = g(y) \end{aligned}$$

Die erste Implikation gilt nach Definition von $\mathcal{T}$, die zweite wegen der Stetigkeit von g (sonst gäbe es eine Umgebung von x, die y nicht enthält).

<u>Stetigkeit:</u> Sei $z_0 \in h(X),\ x_0 \in X$ mit $h(x_0) = z_0$ und $\varepsilon > 0$.
Mit der Stetigkeit von g und der Konstruktion von $\mathcal{T}$ gilt:

$$\begin{aligned} \exists V \subseteq \prod_{i \in I} \mathbb{R} \text{ offen } &: x_0 \in h^{-1}(V) \text{ und } \forall x \in h^{-1}(V) : |g(x) - g(x_0)| < \varepsilon \\ &\implies z_0 \in V \cap h(X) \text{ und } \forall z \in V \cap h(X) : |k(z) - k(z_0)| < \varepsilon \end{aligned}$$

□

Die Definition von scc lässt an mehreren Stellen Raum zur Variation. So kann die Eigenschaft etwa nur für endliche oder abzählbare Mengen I verlangt werden, was zu den Begriffen *finitely composition-closed* oder *countably composition-closed* führt. Auf diese Varianten und ihre Beziehungen untereinander wird hier nicht weiter eingegangen, siehe dazu [1, Abschnitt 2] und [2]. Wir betrachten nur die folgende Variation und wie sich diese auf die Aussage in Satz 3.2 auswirkt.

Definition 3.3. Φ heißt *composition-closed (cc)*, falls für jede Familie $(f_i)_{i\in I}$ in Φ gilt:

$$\forall k \in C(\overline{h(X)}) : k \circ h \in \Phi$$

wobei $h : X \to \prod_{i\in I} \mathbb{R}, x \mapsto (f_i(x))_{i\in I}$ die Auswertung der Familie $(f_i)_{i\in I}$ bezeichnet.

Beispiel. *Klarerweise impliziert scc die Eigenschaft cc. Umgekehrt gilt das nicht, wie das folgende Beispiel zeigt [1, Seite 147]:*

$$\Phi := \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f \text{ stetig}, \exists c \in \mathbb{R} : \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = c\}$$

Φ ist cc. *Für eine Familie $(f_i)_{i\in I}$ in Φ und $k \in C(\overline{h(\mathbb{R})})$ ist $k\circ h$ als Zusammensetzung stetiger Funktionen stetig. Ist nun $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}$ mit $x_n \to \infty$, dann gibt es ein $c = (c_i)_{i\in I} \in \overline{h(X)}$, sodass $h(x_n) = (f_i(x_n))_{i\in I}$ für $n \to \infty$ in der Produkttopologie gegen c konvergiert.*
Für $k \in C(\overline{h(\mathbb{R})})$ konvergiert dann $(k \circ h)(x_n)$ gegen $k(c) \in \mathbb{R}$. Analog argumentiert man den zweiten Limes und insgesamt folgt, dass $k\circ h$ in Φ liegt.

Φ ist nicht scc. *Die Funktion $f(x) := \exp(-x^2)$ liegt in Φ, $f(\mathbb{R}) = (0, 1]$. Die Funktion $k(x) := 1/x$ ist stetig auf $f(\mathbb{R})$ (nicht auf $\overline{f(\mathbb{R})}$). Die Verknüpfung $(k \circ f)(x) = \exp(x^2)$ ist unbeschränkt für $x \to \infty$ und nicht in Φ.*

Bemerkung 3.4. (Notation) $C^{\mathcal{T}}(Y)_{|X} := \{f_{|X} \mid f \in C^{\mathcal{T}}(Y)\}$

Satz 3.5. *Sei X eine Menge, $\Phi \subseteq \mathbb{R}^X$. Dann gilt:*

$$\Phi \text{ ist cc} \iff$$
$$\exists Y \supseteq X, \mathcal{T} \text{ Topologie auf } Y \text{ so, dass } C^{\mathcal{T}}(Y)_{|X} = \Phi \text{ und } \overline{X} = Y.$$

Beweis. " $\Leftarrow$ " Für eine Familie $(f_i)_{i\in I}$ in Φ existiert eine Familie $(g_i)_{i\in I}$ in $C(Y)$, sodass $f_i = g_{i|X}$ für alle $i \in I$. Bezeichne mit $g : Y \to \mathbb{R}^I$ die Auswertung von $(g_i)_{i\in I}$, g ist wieder stetig. Sei $k \in C(\overline{h(X)})$ beliebig. Da

$$g(Y) = g(\overline{X}) \subseteq \overline{g(X)} = \overline{h(X)},$$

ist $k \in C(g(Y))$. Damit ist $k \circ g \in C(Y)$, also $k \circ g_{|X} \in C(Y)_{|X}$. Nachdem $g_{|X}$ die Auswertung der Familie $(f_i)_{i\in I}$ ist, ist damit die erste Implikation gezeigt.
" $\Rightarrow$ " Sei $Y \supseteq X$ so, dass eine Bijektion $h' : Y \setminus X \to \overline{h(X)} \setminus h(X)$ existiert. Definiere

$$q : \begin{cases} Y & \to \quad \overline{h(X)} \\ x & \mapsto \quad \begin{cases} h(x), & x \in X \\ h'(x), & x \in Y \setminus X. \end{cases} \end{cases}$$

Setze $\mathcal{T}$ als die initiale Topologie bezüglich $\{q\}$. Wir zeigen, dass $C^{\mathcal{T}}(Y)_{|X} = \Phi$ gilt.
" $\supseteq$ " Für $i \in I$ ist $f_i = p_i \circ q_{|X}$, wobei p_i die i-te Projektion auf dem Raum $\mathbb{R}^I$ bezeichnet. Da $p_i \circ q \in C(Y)$, ist $f_i \in C(Y)_{|X}$.
" $\subseteq$ " Sei $g \in C(Y)$. Definiere

$$k : \begin{cases} \overline{h(X)} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ q(y) & \mapsto & g(y). \end{cases}$$

Da $\mathcal{T}$ als die initiale Topologie bezüglich $\{q\}$ gesetzt wurde, ist wie im Beweis von Satz 3.2 k wohldefiniert und stetig.
Mit der Voraussetzung, dass Φ cc ist, folgt daher: $g_{|X} = (k \circ q)_{|X} = k \circ h \in \Phi$.

Es bleibt zu zeigen, dass X dicht in Y liegt. Das der Topologie $\mathcal{T}$ zugehörige System abgeschlossener Mengen ist $\mathcal{A} = \{\left(q^{-1}(O)\right)^c \mid O \text{ offen in } q(X)\} = \{q^{-1}(O^c) \mid O \text{ offen in } q(X)\} = \{q^{-1}(A) \mid A \text{ abgeschlossen in } q(X)\}$.
Angenommen, $\exists A \in \mathcal{A} : X \subseteq A \subsetneq Y$. Dann gibt es eine in $q(X)$ abgeschlossene Menge $\tilde{A} \subsetneq q(Y)$, sodass $A = q^{-1}(\tilde{A})$. Dann folgt

$$\overline{q(X)} \subseteq \overline{q(A)} = \tilde{A} \subsetneq q(Y).$$

Das ist jedoch ein Widerspruch, da $\overline{q(X)} = \overline{h(X)} = q(Y)$ gilt. □

4 Realkompakte Räume

Um die Erkenntnisse aus Abschnitt 2 und 3 zu einer Charakterisierung von Ringen der Gestalt $C(X)$ zusammensetzen zu können, unternehmen wir zunächst noch einen Abstecher und führen das Konzept von realkompakten topologischen Räumen ein. Für diese wird im Folgenden die Definition aus dem Buch „General topology“ von Stephen Willard verwendet [5, Seite 125f.] und die sogenannte Hewitt-Kompaktifizierung nach der dort gegebenen Anleitung konstruiert [5, Seite 144].

Definition 4.1. Ein topologischer Raum $(X, \mathcal{T})$ heißt *realkompakt*, falls es eine Menge I gibt, sodass X homöomorph zu einer abgeschlossenen Teilmenge von $\prod_{i \in I} \mathbb{R}$ ist.

Definition 4.2. Ein topologischer Raum $(X, \mathcal{T})$ heißt *Tychonoff*, falls er Hausdorff und vollständig regulär ist, das heißt falls gilt:

(i) Für zwei verschiedene Punkte $x, y \in X$ gibt es zwei disjunkte Mengen $O_x, O_y \in \mathcal{T}$ mit $x \in O_x$ und $y \in O_y$.

(ii) Für eine abgeschlossene Menge A und einen Punkt $x \notin A$ gibt es ein $f \in C(X)$ mit $f(x) = 1,\ f_{|A} \equiv 0$.

Lemma 4.3. *In einem vollständig regulären Raum* $(X,\mathcal{T})$ *ist* $\{f^{-1}(V) \mid V \subseteq \mathbb{R}$ *offen* $, f \in C(X)\}$ *eine Basis der Topologie.*

Beweis. Für $U \in \mathcal{T}, x \in U$ gibt es ein $f \in C(X)$ mit $f_{|U^c} \equiv 0, f(x) = 1$. Für $V := \{r \in \mathbb{R} \mid |r-1| < 1/2\}$ ist $x \in f^{-1}(V) \subseteq U$. □

Bemerkung 4.4. Weil $\mathbb{R}$ Hausdorff und vollständig regulär ist und diese Eigenschaften unter Produktbildung [1] und auf Teilräumen erhalten bleiben, ist jeder realkompakte Raum ein Tychonoff-Raum.

Wir zeigen, dass jeder Tychonoff-Raum $(X,\mathcal{T})$, bis auf Homöomorphie, dicht in einem realkompakten Raum liegt. Dafür betrachten wir für so einen Raum die Auswertung

$$e : \begin{cases} X & \to & \prod_{f\in C(X)} \mathbb{R} \\ x & \mapsto & (f(x))_{f\in C(X)} \end{cases}$$

und zeigen, dass e ein Homöomorphismus auf sein Bild ist.

Weil $C(X)$ punktetrennend ist (Singletons sind in Hausdorff-Räumen abgeschlossen und X ist vollständig regulär), ist e injektiv.

Da alle Komponentenfunktionen stetig sind und wir $\prod_{f\in C(X)} \mathbb{R}$ mit der Produkttopologie betrachten, ist e stetig.

Wir zeigen zunächst, dass für $f \in C(X)$ und eine offene Menge $V \subseteq \mathbb{R}$ die Menge $U = f^{-1}(V)$ ein offenes Bild hat. Im Folgenden bezeichnet p_f die Projektion auf die f-te Komponente.

$$\begin{aligned} U = (p_{f|_{e(X)}} \circ e)^{-1}(V) &= e^{-1}(p^{-1}_{f|_{e(X)}}(V)) \\ \implies e(U) &= p_f^{-1}(V) \cap e(X) \end{aligned}$$

Damit ist $e(U)$ offen in $e(X)$.
Mit Lemma 4.3 ist jedes $O \in \mathcal{T}$ Vereinigung von Mengen der obigen Gestalt. Das Bild von O unter e ist dann die Vereinigung der Bilder der entsprechenden Basismengen und damit wiederum offen in $e(X)$. Also ist e eine offene Abbildung.

Klarerweise ist $\overline{e(X)}$ realkompakt, $e(X)$ ist, wie eben gezeigt, homöomorph zu X und dicht in $\overline{e(X)}$ - man spricht von einer Realkompaktifizierung.

Definition 4.5. Für einen Tychonoff-Raum $(X,\mathcal{T})$ heißt $\overline{e(X)}$ wie eben die <u>*Hewitt-Realkompaktifizierung*</u> von X.

[1] Dass vollständige Regularität unter Produktbildung erhalten bleibt, ist in [5, Satz 14.10, Seite 95] bewiesen.

Satz 4.6. *(universelle Eigenschaft der Hewitt-Realkompaktifizierung). Sei $(X,\mathcal{T})$ ein Tychonoff-Raum und $\overline{e(X)}$ die Hewitt-Realkompaktifizierung von X. Dann gilt:*

$$\forall f \in C(X) \exists F : \overline{e(X)} \to \mathbb{R} \textit{ stetig, so dass } F \circ e = f.$$

Beweis. Die Aussage folgt mit $F = p_f$ für $f \in C(X)$. □

5 Eigenschaften von realkompakten Räumen

Bevor wir zwei Sätze über realkompakte Räume beweisen, sei noch etwas zu vollständig regulären Räumen bemerkt.

Definition 5.1. Für ein topologischen Raum $(X,\mathcal{T})$ und $f \in C(X)$ bezeichne

$$Z(f) := \{x \in X \mid f(x) = 0\} \text{ und } Z(X) := \{Z(f) \mid f \in C(X)\}.$$

Definition 5.2. Sei $(X,\mathcal{T})$ einen topologischer Raum. Eine Menge $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$ heißt *Basis der abgeschlossenen Mengen*, falls

$$\mathcal{A} = \{A \subseteq X \mid \text{A abgeschlossen }\} = \{\bigcap_{B \in \mathcal{C}} B \mid \mathcal{C} \subseteq \mathcal{B}\}.$$

Lemma 5.3. *Sei $(X,\mathcal{T})$ ein topologischer Raum. Dann gilt:*

$$X \textit{ ist vollständig regulär } \iff$$
$$Z(X) \textit{ ist Basis der abgeschlossenen Mengen.}$$

Beweis. „$\Rightarrow$“ Alle $Z(f)$ sind als stetige Urbilder abgeschlossener Mengen abgeschlossen. Sei $A \subseteq X$ abgeschlossen. Wähle für $x \in A^c$ eine Funktion $f_x \in C(X)$, $f_x(x) = 1, f_{x|A} \equiv 0$. Dann ist $A = \bigcap_{x \in A^c} Z(f_x)$.
„$\Leftarrow$“ Sei $A = \bigcap_{f \in \mathcal{C}} Z(f)$ abgeschlossen. Für $x \notin \bigcap_{f \in \mathcal{C}} Z(f)$ gibt es ein $\overline{f} \in \mathcal{C}$ mit $\overline{f}(x) \neq 0$. Es liefert also $f(x) := \overline{f}(x)\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{\overline{f}(x)}}$ die gesuchte Funktion aus der Definition von vollständig regulär.

□

Bemerkung 5.4. Ist $(X,\mathcal{T})$ ein topologischer Raum, dann ist $\mathcal{A} := \{\bigcap_{f \in \mathcal{F}} Z(f) \mid \mathcal{F} \subseteq C(X)\}$ ein System abgeschlossener Mengen, für das $Z(X)$ offensichtlich eine Basis ist. Es ist $\emptyset = Z(\mathbf{1}) \in \mathcal{A}$ und $X = Z(\mathbf{0}) \in \mathcal{A}$. Klarerweise ist $\mathcal{A}$ abgeschlossen unter beliebigen Schnitten. Auch Abgeschlossenheit unter endlichen Vereinigungen ist gegeben:
$\bigcap_{f \in \mathcal{F}} Z(f) \cup \bigcap_{g \in \mathcal{G}} Z(g) = \bigcap_{f \in \mathcal{F}, g \in \mathcal{G}} (Z(f) \cup Z(g)) = \bigcap_{\{fg \mid f \in \mathcal{F}, g \in \mathcal{G}\}} Z(fg)$.

Satz 5.5. *Sei $(X,\mathcal{T})$ ein topologischer Raum. Dann existiert ein realkompakter Raum $(X',\mathcal{T}')$, so dass $C^{\mathcal{T}}(X)$ und $C^{\mathcal{T}'}(X')$ Ring-isomorph sind.*

Beweis. Der Beweis erfolgt in drei Schritten.

1. Um vollständige Regularität zu erreichen, statten wir X mit der Topologie aus, für die $Z(X)$ Basis der abgeschlossenen Mengen ist, vgl. Bemerkung 5.4 und Lemma 5.3. Wir nennen diese Topologie $\mathcal{V}$ und zeigen, dass $C^{\mathcal{T}}(X) = C^{\mathcal{V}}(X)$ ist.

   „ $\supseteq$ " Jede $\mathcal{V}$-abgeschlossene Menge ist Schnitt von Mengen der Gestalt $Z(f) = f^{-1}(\{0\})$, also Schnitt von $\mathcal{T}$-abgeschlossenen Mengen, und damit selbst $\mathcal{T}$- abgeschlossen. Urbilder abgeschlossener Mengen unter Funktionen aus $C^{\mathcal{V}}(X)$ sind also insbesondere $\mathcal{T}$-abgeschlossen.

   „ $\subseteq$ " Sei $f \in C^{\mathcal{T}}(X), A \subseteq \mathbb{R}$ abgeschlossen. Da $\mathbb{R}$ vollständig regulär ist, gibt es für jedes $x \in \mathbb{R} \setminus A$ eine Funktion $g_x \in C(\mathbb{R})$, die auf A verschwindet und in x den Wert 1 hat. Seien solche g_x gewählt, dann ist $f^{-1}(A) = \bigcap_{x \in \mathbb{R} \setminus A} Z(g_x \circ f) \in \mathcal{V}$.

2. Um einen Hausdorff-Raum zu erhalten, definieren wir die Äquivalenzrelation

$$x \sim y :\Longleftrightarrow \; f(x) = f(y) \text{ für alle } f \in C^{\mathcal{V}}(X) \; .$$

   und bezeichnen die kanonische Projektion $[x] \mapsto [x]_\sim$ mit π. $X_{/\sim}$ sei mit der Quotiententopologie versehen, das heißt mit der finalen Topologie bezüglich $\{\pi\}$. Dann ist

$$\varphi : \begin{cases} C(X_{/\sim}) & \to \quad C^{\mathcal{V}}(X) \\ \quad f & \mapsto \quad f \circ \pi \end{cases}$$

   ein wohldefinierter und bijektiver Ring-Homomorphismus. $C(X_{/\sim})$ ist punktetrennend und $X_{/\sim}$ damit Hausdorff. Für eine abgeschlossene Menge A im Quotientenraum und $[x]_\sim \notin A$, ist $\pi^{-1}(A)$ abgeschlossen und es gibt ein $f \circ \pi \in C^{\mathcal{V}}$, das $\pi^{-1}(A)$ und einen Repräsentanten x trennt. Die Funktion f trennt dann A und $[x]_\sim$. Also ist $X_{/\sim}$ immer noch vollständig regulär.

3. Da $X_{/\sim}$ Tychonoff ist, können wir nun die Hewitt-Realkompaktifizierung $(X', \mathcal{T}')$ bilden. Verstehen wir $X_{/\sim}$ über die Einbettung als Teilmenge von X', können wir den Homomorphismus

$$\sigma : \begin{cases} C(X') & \to \quad C(X_{/\sim}) \\ \quad f & \mapsto \quad f_{|(X_{/\sim})} \end{cases}$$

   definieren. Da Grenzwerte in $\mathbb{R}$ eindeutig sind und $X_{/\sim}$ eine dichte Teilmenge von X' ist, ist diese Abbildung injektiv. Mit der universellen Eigenschaft der Hewitt-Kompaktifizierung (Satz 4.6) lässt sich jedes $f \in C(X_{/\sim})$ zu einem $F \in C(X')$ fortsetzen und σ ist surjektiv.

$\square$

Der Beweis des folgenden Satzes stammt aus dem Paper „A remark on the homomorphisms on $C(X)$“ von Ercan und Onal [3].

Satz 5.6. *Sei $(X, \mathcal{T})$ realkompakt, $s : C(X) \to \mathbb{R}$ eine Abbildung, die nicht die Nullabbildung ist. Dann gilt:*

$$s \text{ ist ein Ring-Homomorphismus} \iff \exists! c \in X \forall f \in C(X) : s(f) = f(c).$$

Beweis. „$\Leftarrow$“ klar.
„$\Rightarrow$“ Zur Eindeutigkeit: Da X Tychonoff ist (Bem. 4.4), ist $C(X)$ punktetrennend und aus $s(f) = f(c) = f(d)$ für alle $f \in C(X)$ folgt $c = d$.

Zur Existenz: Wir zeigen die Existenz-Aussage zunächst für $X = \prod_{i \in I} \mathbb{R}$. Sei $s : C(X) \to \mathbb{R}$ ein Ring-Homomorphismus. Wir bezeichnen mit $p_i : \prod_{i \in I} \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die Projektion auf die i-te Komponente. Setze

$$c = (c_i)_{i \in I} := (s(p_i))_{i \in I}.$$

Es reicht zu zeigen, dass für alle $f \in C(X)$ aus $f(c) = 0$ schon $s(f) = 0$ folgt. Denn da die Nullabbildung und die Identität die einzigen Homomorphismen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ sind [4, Seite 8], muss $s(\mathbf{a}) = a$ für alle konstanten Funktionen $\mathbf{a} \in C(X)$ gelten. Für $f(c) \neq 0$ können wir deshalb die Funktion $f - \mathbf{f(c)}$ mit Nullstelle in c betrachten und erhalten aus $s(f - \mathbf{f(c)}) = 0$, dass $s(f) = s(\mathbf{f(c)}) = f(c)$ ist.

Wir nehmen zunächst an, dass f sogar auf einer offenen Umgebung um c verschwindet. Da wir $\prod_{f \in C(X)} \mathbb{R}$ mit der Produkttopologie betrachten, ist in dieser Umgebung eine Menge $\prod_{i \in I} O_i$ enthalten, wobei O_i offene Mengen in $\mathbb{R}$ sind und die Menge $J := \{i \in I \mid O_i \neq \mathbb{R}\}$ endlich ist. Die Funktion $h(x) := \sum_{i \in J} (p_i - c_i)^2 \in C(X)$ ist auf O^c ungleich Null und es gilt:

$$s(f) = s(f \cdot \mathbb{1}_{O^c}) = s(\frac{f(x)h(x)}{h(x)} \mathbb{1}_{O^c}) = s(\frac{f(x)}{h(x)} \mathbb{1}_{O^c}) \cdot \sum_{i \in J} (\underbrace{s(p_i) - c_i}_{=0})^2 = 0.$$

Nehmen wir nun an, es gibt ein $f \in C(X)$, das in c verschwindet, aber für das $s(f) \neq 0$ gilt. OBdA nehmen wir $s(f) = 2$ an. Wir beschränken die Funktion f auf $(-1, 1)$ durch Verknüpfung mit

$$g : \begin{cases} \mathbb{R} & \to \quad \mathbb{R} \\ x & \mapsto \quad \begin{cases} -1, & x \leq -1 \\ x, & 1 < x < 1 \\ 1, & x \geq 1 \end{cases} \end{cases}.$$

Dann verschwindet $f - g \circ f$ auf $U := f^{-1}(-1, 1)$. U ist eine Umgebung von c. Wir haben bereits gezeigt, dass damit $s(f - g \circ f) = 0$ ist, also $s(g \circ f) = s(f) = 2$. Da das Bild von $g \circ f$ durch -1 und 1 beschränkt ist, können wir schreiben:

$$1 = s(\frac{\mathbf{2} - g \circ f}{\mathbf{2} - g \circ f}) = \left(\underbrace{s(\mathbf{2}) - s(g \circ f)}_{=0}\right) s(\frac{1}{\mathbf{2} - g \circ f}) = 0 \quad ,$$

was ein Widerspruch ist.
Sei nun X ein realkompakter Raum, also homöomorph zu einem abgeschlossenen Teilraum von $\prod_{i \in I} \mathbb{R} := Y$ und s ein nicht verschwindender Ring-Homomorphismus. Betrachte den (nicht verschwindenden) Ring-Homomorphismus

$$\psi : \begin{cases} C(Y) & \to & C(X) \\ f & \mapsto & f_{|X} \end{cases} .$$

Wir haben gezeigt, dass es ein $c \in Y$ mit $(s \circ \psi)(f) = f(c)$ für alle $f \in C(Y)$ gibt. Angenommen, $c \notin X$. Sei $f \in C(Y)$ mit $f(c) = 1, f_{|X} \equiv 0$. Dann folgt

$$1 = f(c) = (s \circ \psi)(f) = s(f_{|X}) = 0,$$

ein Widerspruch. $\square$

6 Charakterisierung von Ringen der Form C(X)

Wir setzen nun unsere Erkenntnisse über Isomorphie zu Funktionenringen aus Abschnitt 2 und scc aus Abschnitt 3 zusammen und zeigen, wann es zu einem Ring A einen isomorphen $C(X)$-Ring gibt.

Wie in Abschnitt 2 bezeichnen wir für einen Ring A die Menge aller nicht-verschwindenden Ring-Homomorphismen von A nach $\mathbb{R}$ mit S_A. Für eine Familie $(a_i)_{i \in I}$ in A sei $h' : S_A \to \prod_{i \in I} \mathbb{R},\ s \mapsto (s(a_i))_{i \in I}$.

Satz 6.1. *Ein Ring A ist isomorph zu einem Ring der Gestalt $C(X)$ genau dann wenn*

(i) Die Eigenschaften $(a), (b), (c_1), (c_2), (c_3)$ aus Satz 2.3 erfüllt sind und

(ii) es für jede Familie $(a_i)_{i \in I}$ in A, $k \in C(h'(S_A))$ ein $a \in A$ gibt, sodass für alle $s \in S_A$ gilt: $k(h'(s)) = s(a)$.

Beweis. „⇒“ Da $C(X)$ ein Funktionenring ist, erfüllt $C(X)$ Punkt (i), vgl Beweis von Satz 2.3. Für Punkt (ii) verwenden wir Satz 5.5 mit dem wir ohne Einschränkung annehmen können, dass X realkompakt ist. Damit kann mit Satz 5.6 jeder nicht verschwindende, reellwertige Homomorphismus s auf $C(X)$ mit einem $c_s \in X$ identifiziert werden, so dass $s(f) = f(c_s)$. Sei nun $(f_i)_{i\in I}$ eine Familie in $C(X)$ und $s \in S_A$ sowie $k \in C(h'(S_A))$, also eine stetige punktweise Abbildung von $(s(f_i))_{i\in I} = (f_i(c_s))_{i\in I} = h(c_s)$, wobei h wie in der Definition von strongly composition-closed die Auswertung der Familie $(f_i)_{i\in I}$ bezeichnet. Es folgt, dass $h'(S_A) = h(X)$ und da $C(X)$ strongly composition-closed ist, ist $f := k \circ h \in C(X)$. Weil $k(h'(s)) = k(h(c_s)) = f(c_s) = s(f)$, ist f das gesuchte Element von $C(X)$.

„⇐“ Ist (i) erfüllt, dann folgt mit dem Beweis von Satz 2.3, dass A isomorph zu dem Funktionenring $\Phi = \{h_a \mid a \in A\}$ ist, wobei $h_a : S_A \to \mathbb{R},\ h_a(s) := s(a)$. Sei $(h_{a_i})_{i\in I}$ eine Familie in Φ und $s \in S_A$. Wir betrachten die Auswertung $s \mapsto (h_{a_i}(s))_{i\in I} = (s(a_i))_{i\in I}$, die der Funktion h' entspricht. Nach Voraussetzung gibt es für eine beliebige stetige Funktion $k \in C(h'(S_A))$ ein $a \in A$, sodass $k \circ h' = h_a \in \Phi$ ist. Damit ist Φ strongly composition-closed und mit Satz 3.2 von der Gestalt $C(X)$. □

Literatur

[1] Ákos Császár. “Function classes, compactification, realcompactifications”. In: *Ann.Univ.Sci. Budapest. Eötvös Sect. Math* 17 (1974), S. 139–156.

[2] Ákos Császár. “Some problems concerning C(X)”. In: *General topology and its relations to modern analysis and algebra IV* Part A: Invited papers (1976), S. 43–55.

[3] Z. Ercan und S. Onal. “A Remark on the Homomorphism on C(X)”. In: *Proceedings of the American Mathematical Society* 133.12 (2005), S. 3609–3611. ISSN: 00029939, 10886826. URL: http://www.jstor.org/stable/4097503 (besucht am 23. 06. 2022).

[4] Leonard Gillman und Meyer Jerison. *Rings of continuous functions.* eng. The university series in higher mathematics. Princeton, NJ [u.a.]: Van Nostrand, 1960. ISBN: 0442026919.

[5] Stephen Willard. *General topology.* eng. Addison-Wesley, 1970.