SEMINARARBEIT

Der Satz von Kirszbraun

ausgeführt am

Institut für
Analysis und Scientific Computing
TU Wien

unter der Anleitung von

Harald Woracek

durch

Eva Wagner
Matrikelnummer: 1427565
Penzingerstraße 83/10
1140 Wien

Wien, am 18. Oktober 2020

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

In dieser Arbeit bringen wir zwei Beweise des Satzes von Kirszbraun. Dieser Satz befasst sich mit der Fragestellung, ob eine Lipschitz stetige Funktion auf den gesamten Ausgangsraum fortgesetzt werden kann, wobei die Lipschitz Konstante gleich bleiben soll.
Die beiden Beweise, die vorgestellt werden, haben gemein, dass sie sich indirekt auf das Auswahlaxiom stützen. Zum einen durch das Ultrafilter Lemma und zum anderen durch den Satz von Tychonoff (bzw. dem Satz von Banach-Alaoglu), der bekannterweise äquivalent zum Auswahlaxiom ist, wenn wir uns auf topologische Hausdorffräume beschränken.
Ist der Ausgangsraum H_1 unserer Lipschitz stetigen Funktion separabel, also gibt es eine abzählbare Teilmenge von H_1, die dicht ist, dann gibt es auch einen Beweis, der ohne dem Auswahlaxiom geführt wird. Im Folgenden werden aber nur die oben beschriebenen Beweise durchgeführt.
Noch zu beachten ist, dass davon ausgegangen wird, dass Bildraum und Zielraum der Funktion zwei Hilberträume über $\mathbb{R}$ sind. Andere Fälle und weitere Verallgemeinerungen sind möglich, werden in dieser Arbeit aber nicht behandelt.

2 Fortsetzbarkeit auf endlich vielen Punkten

In diesem Kapitel betrachten wir eine Lipschitz stetige Funktion f, die auf einer endlichen Teilmenge von H_1 definiert ist. Wir wollen zeigen, dass die Funktion f auf einer größeren endlichen Menge so fortgesetzt werden kann, dass die Fortsetzung wieder Lipschitz stetig ist. Die Lipschitz Konstante soll außerdem gleich bleiben.

Dafür benötigen wir zunächst folgende Resultate.

Lemma 2.1. *Seien H_1 und H_2 Hilberträume. Angenommen $\emptyset \neq J \subseteq H_1$, und J sei endlich. Sei $g : J \to H_2$ eine Funktion, für die*

$$\forall\ x, y \in J : \|g(x) - g(y)\| \leq \|x - y\| \wedge \|g(x)\| > \|x\|$$

gilt. Dann folgt:

$$0 \notin co(g[J]),$$

wobei $g[J] := \{g(x) : x \in J\} \subseteq H_2$ das Bild bezeichnet und

$$co(g[J]) := \bigcap_{\substack{g[J]\subseteq K\subseteq H_2,\\ K \text{ konvex}}} K = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot x_i : x_i \in g[J], n \in \mathbb{N}, \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1, \alpha_i \geq 0 \right\} \subseteq H_2$$

ist die konvexe Hülle.

Beweis. Zunächst wollen wir zeigen, dass das Skalarprodukt (x_i, x_j) zweier beliebiger Elemente $x_i, x_j \in J$ strikt kleiner ist als das Skalarprodukt der Funktionswerte $(g(x_i), g(x_j))$.

$$(x_i, x_j) = \frac{1}{2}((x_i, x_i) + (x_j, x_j) - ((x_i, x_i) - 2(x_i, x_j) + (x_j, x_j)) =$$

$$= \frac{1}{2}(||x_i||^2 + ||x_j||^2 - ||x_i - x_j||^2) < \frac{1}{2}(||g(x_i)||^2 + ||g(x_j)||^2 - ||g(x_i) - g(x_j)||^2) = (g(x_i), g(x_j)).$$

Angenommen $w \in co(g([J])$. Dann wissen wir, dass es eine Menge nichtnegativer, reeller Zahlen $(\alpha_i)_{i=1}^n$ gibt, sodass $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$ und $w = \sum_{i=1}^n \alpha_i g(x_i)$.
Da J endlich ist ($J = \{x_1, ..., x_n\}$) und unter Berücksichtigung der Rechenregeln für Skalarprodukte können wir folgern, dass

$$||w||^2 = (w, w) = \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i g(x_i), \sum_{j=1}^{n} \alpha_j g(x_j) \right) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \alpha_i \alpha_j (g(x_i), g(x_j)) >$$

$$> \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \alpha_i \alpha_j (x_i, x_j) = \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i, \sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_j \right) = || \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i ||^2 \geq 0.$$

Damit kann 0 nicht in der konvexen Hülle von $g[J]$ liegen.

□

Lemma 2.2. *Sei C eine konvexe, nichtleere und abgeschlossene Teilmenge von einem Hilbertraum H. Dann gibt es für jedes $b \in H$ ein $b' \in C$, sodass für alle $z \in C$ $(z-b, b'-b) \geq \|b'-b\|^2$ gilt.*

Beweis. Siehe [1, Lemma 1C (c)] □

Zunächst beschränken wir uns auf den Fall, dass die Lipschitz Konstante γ gleich 1 ist.

Lemma 2.3. *Seien H_1 und H_2 Hilberträume und $a \in H_1$. Sei $I \subseteq H_1$ endlich, $f : I \to H_2$ eine Lipschitz stetige Funktion mit 1 als Lipschitz Konstante. Dann existiert eine Fortsetzung $g : I \cup \{a\} \to H_2$ von f, die ebenfalls Lipschitz stetig ist mit der gleichen Lipschitz Konstante.*

Beweis.

(i) Es muss also gezeigt werden, dass ein $b \in H_2$ existiert, sodass für alle $x \in I$ $\|f(x) - b\| \leq \|x - a\|$ gilt. Denn dann können wir $g(a) := b$ definieren und die Fortsetzung g hat die gewünschten Eigenschaften.

(ii) Falls $I = \emptyset$, setzen wir $b = 0$, falls $a \in I$, setze $b = f(a)$. Wir können also annehmen, dass $I \neq \emptyset$ und $a \notin I$.

(iii) Wir setzen $K = co(f[I])$.
$[0,1]^n$ ist kompakt und die Menge $A = \{(\alpha_i)_{i=1}^n : \forall\, x \in I : \alpha_i \leq 0,\ \sum_{i=1}^n \alpha_i = 1\}$ ist eine abgeschlossene Teilmenge von $[0,1]^n$, also auch kompakt. Die Funktion $(\alpha_i)_{i=1}^n \mapsto \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i$ ist stetig und aus der Definiton der konvexen Hülle folgt sofort, dass sie A surjektiv auf K abbildet. Damit ist auch K kompakt.
Damit ist K eine nichtleere, kompakte und konvexe Teilmenge von H_2.

(iv) Für jedes festes $x \in I$, sind die Funktionen $z \mapsto \|z - f(x)\|$ und $z \mapsto \frac{\|z-f(x)\|}{\|a-x\|}$ von K nach $[0, \infty)$ stetig. Da I endlich ist, ist auch die Funktion $h : z \mapsto \max_{x \in I} \frac{\|z-f(x)\|}{\|a-x\|}$ stetig. Deswegen nimmt die Funktion h ihr Infinum an (auf kompakten Mengen ist jede stetige Funktion beschränkt). Also existiert $b \in K$ sodass für alle $z \in K$ $\quad h(b) \leq h(z)$ gilt. Nun setzen wir $\gamma = h(b)$ und $\emptyset \neq J = \{x : x \in I, \frac{\|b-f(x)\|}{\|a-x\|} = \gamma\} \subseteq I$.

(v) Angenommen $b \notin co(f[J])$. Das gleiche Argument wie in Punkt (i) zeigt, dass auch $co(f[J])$ eine kompakte, konvexe Teilmenge von H_2 ist. Damit folgt aus Lemma 2.2, dass ein $b' \in co(f[J])$ existiert, sodass für alle $z \in co(f[J])$ $(z - b, b' - b) \geq \|b' - b\|^2$

gilt. Insbesonders gilt für $x \in J$, dass $(f(x)-b, b'-b) \geq \|b'-b\|^2$. Wir betrachten nun $b_\delta := (1-\delta)b + \delta b' = b + \delta(b'-b)$ für $\delta > 0$.
Diese b_δ sind für jedes $\delta \in (0,1)$ in K, da $b, b' \in K$ und K konvex ist. Für $x \in J$ gilt

$$(f(x)-b, b_\delta - b) = \delta(f(x)-b, b'-b) \geq \delta \left\|b'-b\right\|^2$$

und

$$\|f(x)-b_\delta\|^2 = \|f(x)-b-(b_\delta-b)\|^2 = \|f(x)-b\|^2 - 2(f(x)-b, b_\delta-b) + \|b_\delta-b\|^2 \leq$$
$$\leq \|f(x)-b\|^2 - 2\delta \left\|b'-b\right\|^2 + \delta^2 \left\|b'-b\right\|^2 < \|f(x)-b\|^2, \; 0 < \delta \leq 1.$$

Daraus folgt

$$\frac{\|f(x)-b_\delta\|}{\|a-x\|} < \frac{\|f(x)-b\|}{\|x-a\|} = \gamma, \; 0 < \delta \leq 1.$$

Andererseits gilt für $x \in I \setminus J$, dass

$$\lim_{\delta \to 0} \frac{\|f(x)-b_\delta\|}{\|a-x\|} = \frac{\|f(x)-b\|}{\|x-a\|} < \gamma.$$

Also existiert ein $\delta_x > 0$, sodass $\frac{\|f(x)-b_\delta\|}{\|a-x\|} < \gamma$ für $0 < \delta \leq \delta_x$. Da aber die Menge $I \setminus J$ endlich ist, gibt es ein $\delta > 0$, sodass $\delta \leq \delta_x, \; x \in I \setminus J$. Da für alle $x \in I$ $\frac{\|f(x)-b_\delta\|}{\|a-x\|} < \gamma$ gilt, gilt auch $h(b_\delta) < \gamma = h(b)$. Dies führt aber nun zu einem Widerspruch, da h an der Stelle b minimal ist. Also muss $b \in co(f[J])$ sein.

(*vi*) Wir wollen zeigen, dass $\gamma \leq 1$. Wir definieren $J' := \{x - a : x \in J\}$, $g : J' \to H_2$ und $g : x \mapsto f(x+a) - b$. Für $x', y' \in J'$ gilt

$$\left\|g(x') - g(y')\right\| = \left\|f(x'+a) - f(y'+a)\right\| \leq \left\|(x'+a) - (y'+a)\right\| = \left\|x' - y'\right\|$$

und

$$\left\|g(x')\right\| = \left\|f(x'+a) - b\right\| = \gamma \left\|x'\right\|.$$

Da $b \in co(f[J])$, können wir auch $b = \sum_{x \in J} \lambda_x f(x)$ schreiben, wobei für alle $x \in J$ $\lambda_x \geq 0$ und $\sum_{x \in J} \lambda_x = 1$ gilt. Daraus folgt nun

$$\sum_{x \in J'} \lambda_{x+a} g(x) = \sum_{x \in J'} \lambda_{x+a}(f(x+a) - b) = \sum_{x \in J} \lambda_x (f(x) - b) =$$
$$= \sum_{x \in J} \lambda_x f(x) - \sum_{x \in J} \lambda_x b = b - b = 0,$$

für $\lambda_{x+a} \geq 0$, $x \in J'$ und $\sum_{x\in J'} \lambda_{x+a} = \sum_{x\in J} \lambda_x = 1$.

Da daraus folgt, dass 0 in $co(g[J'])$ enthalten ist, können wir die Kontraposition des vorherigen Lemmas 2.1 anwenden. Es existiert also ein $x \in J'$, sodass $\|x\| \geq \|g(x)\| = \gamma \|x\|$. Für dieses $x \in J'$ gilt deswegen auch, dass $\|x-a\| \geq \gamma \|x-a\|$. Da laut Voraussetzung $x - a$ ungleich 0 ist, ist damit bewiesen, dass $\gamma \leq 1$ ist.

(vii) Zusammengefasst haben wir also $\gamma = h(b) \leq 1$, weswegen für alle $x \in I$ gilt, dass $\|f(x) - b\| \leq \|x - a\|$.

□

Das nächste Korollar zeigt, dass auch die Verallgemeinerung für eine beliebige positive Lipschitz Konstante gilt.

Korollar 2.4. *Seien H_1 und H_2 Hilberträume, $I \subseteq H_1$ eine endliche Menge, $a \in H_1$. Wir können eine Lipschitz stetige Funktion $f : I \to H_2$ auf $I \cup \{a\}$ fortsetzen, wobei die Lipschitz Konstante $\gamma \in [0,\infty)$ gleich bleibt.*

Beweis. Wir suchen wieder ein $b \in H_2$, sodass die durch $g(a) := b$ definierte Fortsetzung die gewünschte Eigenschaften erfüllt. Für $\gamma = 0$ ist f konstant und $b = f(x)$. Falls I leer ist, können wir $b = 0$ setzen. Im Folgenden können wir nun annehmen, dass $\gamma \neq 0$ und definieren die Funktion $g(x) := \frac{1}{\gamma} f(x)$.
Nun gilt für $x, y \in I$:

$$\|g(x) - g(y)\| = \frac{1}{\gamma} \|f(x) - f(y)\| \leq \|x - y\| .$$

Lemma 2.3 besagt nun, dass ein $b_1 \in H_2$ existiert, sodass für alle $x \in I$ $\|b_1 - g(x)\| \leq \|a - x\|$ gilt. Wenn wir nun $b = \gamma b_1$ setzen, folgt, dass $\|b - f(x)\| = \gamma \|b_1 - g(x)\| \leq \gamma \|a - x\|$. □

Nun können wir mittels Induktion von der Fortsetzbarkeit eines Punktes auf die Fortsetzbarkeit einer beliebigen endlichen Menge schließen.

Korollar 2.5. *Es gelten die gleichen Voraussetzungen wie in Korollar 2.4. Zusätzlich sei J eine endliche Teilmenge von H_1. Dann gibt es eine Lipschitz stetige Fortsetzung $g : I \cup J \to H_2$ von f, wobei die Lipschitz Konstante $\gamma \in [0,\infty)$ gleich bleibt.*

Beweis. Wir führen den Beweis mittels Induktion.
Aus $|J| = 0$ folgt $J = \emptyset$ und $g = f$.
Angenommen $|J| = n + 1$, $n \in \mathbb{N}$. Wir wählen ein beliebiges Element $a \in J$ und definieren $J' := J \setminus \{a\}$. Dann enthält J' genau n Elemente und laut unserer Induktionsvoraussetzung gibt es eine Funktion $f_1 : I \cup J' \to H_2$, sodass für $x \in I$ $f_1(x) = f(x)$ gilt und für $x, y \in I \cup J'$ $\|f_1(x) - f_1(y)\| \leq \gamma \|x - y\|$. Falls nun $a \in I \cup J'$, setzen wir $I \cup J = I \cup J'$ und unsere gesuchte Funktion ist $g = f_1$. Ansonsten wissen wir aus Korollar 2.4, dass ein $b \in H_2$ existiert, sodass für $x \in I \cup J'$ $\|f_1(x) - b\| \leq \gamma \|x - a\|$ gilt.

Nun definieren wir unsere Funktion g folgendermaßen:
$g : I \cup J \to H_2$

$$g(x) := \begin{cases} f_1(x), & x \in I \cup J' \\ b, & x = a \end{cases}$$

Durch elementares Nachrechnen wird gezeigt, dass diese Funktion alle gesuchten Bedingungen erfüllt.

- $g(x) = f_1(x) = f(x)$, $x \in I$,
- $\|g(x) - g(y)\| = \|f_1(x) - f_1(y)\| \leq \gamma \|x - y\|$, $x, y \in I \cup J'$,
- $\|g(x) - g(y)\| = \|f_1(x) - b)\| \leq \gamma \|x - a\| = \gamma \|x - y\|$, $x \in I \cup J'$ und $y = a$,
- $\|g(x) - g(y)\| = \|b - f_1(y)\| \leq \gamma \|y - a\| = \gamma \|x - y\|$, $x = a$ und $y \in I \cup J'$,
- $\|g(x) - g(y)\| = \|b - b\| = 0 = \gamma \|x - x\|$, $x = a$ und $y = a$.

□

Als Letztes bringen wir ein Resultat, das für beide Beweise des Satzes von Kirszbraun benötigt wird.

Lemma 2.6. *Seien H_1, H_2 Hilberträume, $\emptyset \neq A \subseteq H_1$ eine Menge und $f : A \to H_2$ eine Lipschitz stetige Funktion mit Lipschitz Konstante γ. Für ein $a \in A$ und eine beliebige endliche Teilmenge I von H_1, sodass $a \in I$ wird folgende Mengen definiert:*

$$F_I := \{g : H_1 \to H_2 : g|_{I \cap A} = f|_{I \cap A}, \forall x, y \in I : \|g(x) - g(y)\| \leq \gamma \|x - y\|\},$$

Es gilt, dass F_I nichtleer ist.

Beweis. Diese Behauptung folgt direkt aus Korollar 2.5. Es gibt also eine Fortsetzung $g_0 : I \to H_2$ von $f|_{I \cap A}$, die Lipschitz stetig ist mit Lipschitz Konstante γ. Wir setzen g_0 auf ganz H_1 fort.

$$g(x) := \begin{cases} g_0(x), & x \in I \\ 0, & x \in H_1 \setminus I \end{cases}$$

Dann ist $g \in F_I$. □

Bemerkung 2.7. Für $x \in H_1$ werden die Kugeln $B_x := \{y \in H_2 : \|y\| \leq \|f(a)\| + \gamma \|x - a\|\}$ definiert. Dann gilt, dass $F_I \subseteq \prod_{x \in H_1} B_x$.

3 Satz von Kirszbraun

Nun kommen wir zum Satz von Kirszbraun. Es wird mit einer Lipschitz stetigen Funktion gestartet, die auf einen Teilraum eines Hilbertraumes definiert ist und wieder in einen Hilbertraum hinein abbildet. Der Satz von Kirszbraun sagt nun aus, dass es eine Lipschitz stetige Fortsetzung auf den gesamten Hilbertraum gibt, wobei die Lipschitz Konstante aus der Voraussetzung gleich bleibt.

Satz 3.1 (*Satz von Kirszbraun*)**.** *Seien H_1, H_2 Hilberträume, $A \subseteq H_1$ eine Menge und $f : A \to H_2$ eine Funktion. Angenommen es existiert ein $\gamma \geq 0$, sodass für alle $x, y \in A$ $\|f(x) - f(y)\| \leq \gamma \|x - y\|$ gilt. Dann folgt, dass eine Funktion $g : H_1 \to H_2$ existiert, sodass für alle $x \in A$ $g(x) = f(x)$ und für alle $x, y \in H_1$ $\|g(x) - g(y)\| \leq \gamma \|x - y\|$ gilt.*

3.1 Beweis mittels Tychonoff

Es werden einige Begriffe aus der Funktionalanalysis wiederholt.

Definition 3.2. Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Vektorraum. Wir wählen zunächst einen punktetrennenden, linearen Teilraum Y von X^*. Nun betrachten wir die initiale Topologie $\sigma(X, Y)$, sodass alle y in Y stetig sind. Diese initiale Toplogie ist die *von Y induzierte schwache Topologie.* Falls $Y = X'$ ist und $(X, \mathcal{T})$ lokalkonvex ist, sprechen wir von **der** schwachen Topologie $\sigma(X, X')$.

Definition 3.3. Wir betrachten die lineare Abbildung $\iota : X \to X''$, definiert durch $\iota(x)(y) := y(x)$. Die *schwach-*-Topologie* ist nun definiert durch $\sigma(X', X) := \sigma(X', \iota(X))$.

Satz 3.4 (Riesz-Fischer)**.** *Sei H ein Hilbertraum. Für ein lineares Funktional $f : H \to \mathbb{R}$ und $\gamma = \sup\{|f(x)|, x \in H, \|x\| \leq 1\} < \infty$ gibt es genau ein $c \in H$, sodass für alle $x \in H$ $f(x) = (x, c)$. Es ist dabei $\|c\| = \gamma$.*

Definition 3.5. Ein normierter Raum $(X, \|.\|)$ heißt *reflexiv* falls $X'' = \iota(X)$.
Aufgrund des Satzes von Riesz-Fischer ist ein Hilbertraum immer reflexiv.

Beweis. (von Satz 3.1)

(*i*) Angenommen $A = \emptyset$. Dann wird für alle x in H_1 $g(x) = 0$ gesetzt. Damit kann vorrausgesetzt werden, dass A nichtleer ist.

(*ii*) Wir betrachten die in Bemerkung 2.7 definierten Kugeln B_x. Für jedes $x \in H_1$ sind Einheitskugeln laut Banach-Alaoglu kompakt bezüglich $\sigma(H_1, H_1')$. Somit sind auch die Kugeln B_x schwach-*-kompakt, da der Skalierungs-Homomorphismus diese Eigenschaft beibehält. Wenn wir nun H_1 mit H_1' identifizieren (mithilfe von dem Darstellungssatz von Riesz-Fischer), dann sind die Kugeln B_x auch bezüglich der schwachen

Topologie, $\sigma(H_1, H_1')$, kompakt. Laut dem Satz von Tychonoff ist nun $X := \prod_{x \in H_1} B_x$ auch kompakt bezüglich der Produkttopologie.

(*iii*) Nun wollen wir zeigen, dass für jede endliche Menge $I \subseteq H_1$, mit $a \in I$, die Menge F_I aus Lemma 2.6 abgeschlossen ist. Dazu halten wir zunächst fest, dass Elemente von X folgende Form haben:

$$X = \prod_{x \in H_1} B_x = \{g : I \to \bigcup_{x \in H_1} B_x : g(x) \in B_x\}$$

Die dazugehörigen kanonischen Projektionen schauen folgendermaßen aus

$$\pi_x(g) := g(x),\ g \in \prod_{x \in H_1} B_x.$$

Diese sind laut Definition stetig bezüglich unserer Produkttopologie.
Die einpunktige Menge $\{f(x)\}$ ist abgeschlossen. Deswegen ist auch das Urbild $\pi_x^{-1}(\{f(x)\}) = \{g \in X : g(x) = f(x)\}$ abgeschlossen.

Die Funktionen π_x, π_y und $h : \begin{cases} H_1 \to \mathbb{R} \\ z \mapsto (z, c) \end{cases}$ sind stetig und damit ist auch die Zusammensetzung $g \mapsto (g(x) - g(y), c)$ von X nach $\mathbb{R}$ stetig. Die Menge

$$\{g \in X : (g(x) - g(y), c) \leq \gamma \|x - y\|\}$$

ist somit abgeschlossen in X.

Die Menge

$$\{g \in X : \|g(x) - g(y)\| \leq \gamma \|x - y\|\} = \bigcap_{\|c\| \leq 1} \{g \in X : (g(x) - g(y), c) \leq \gamma \|x - y\|\}$$

ist ein Durchschnitt von abgeschlossenenen Mengen, deswegen wieder abgeschlossen. Die Gleichheit folgt mithilfe der Festellung, dass $\|x\| = max_{\|c\| \leq 1, c \in H}\{(x, c)\}$. Dieses Resultat kann leicht mithilfe der Cauchy-Schwartz Ungleichung nachgeprüft werden.

Nun können wir F_I folgendermaßen umschreiben

$$F_I = \bigcap_{x \in I \cap A} \{g \in X : g(x) = f(x)\} \cap \bigcap_{\|c\| \leq 1} \{g \in X : \|(g(x) - g(y))\| \leq \gamma \|x - y\|\}$$

Dies ist nun wieder ein Durchschnitt abgeschlosssener Mengen, also abgeschlossen.

(iv) Wir setzen $\mathcal{E} := \{F_I,\ I \subseteq H_1$ endlich, $a \in I\}$. Da alle F_I abgeschlossen sind, ist $\mathcal{E}$ eine Familie abgeschlossener Mengen. Diese besitzen auch die endliche Durchschnittseigenschaft. Wenn wir $I_1, ..., I_n \subseteq H_1$ wählen, ist $I = \bigcup_{i=1}^n I_i$ endlich und

$$\bigcup_{i=1}^{n} F_{I_i} \supset F_I \neq \emptyset.$$

(v) Zusammenfassend haben wir eine kompakte Menge X und eine Familie $\mathcal{E}$ abgeschlossener Teilmengen von X mit der endlichen Durchschnittseigenschaft. Aus einem Resultat in Fundament Analysis (siehe [4, Proposition 12.11.2]) folgt nun, dass der Durchschnitt all dieser Mengen F_I nichtleer ist. Deswegen existiert ein $g \in X$, dass zu jedem Element von $\mathcal{E}$ gehört, also $g \in F_I$ für alle endlichen $I \subseteq H_1$, wobei $a \in I$. Falls $x \in A$, ist $g \in F_{\{a,x\}}$, also $g(x) = f(x)$ und, falls $x, y \in H_1$, ist $g \in F_{\{a,x,y\}}$, also $\|g(x) - g(y)\| \leq \gamma \|x - y\|$. Damit ist die Funktion g eine Lipschitz stetige Fortsetzung von f.

$\square$

3.2 Beweis mittels Ultrafilter

Für den zweiten Beweis werden als erstes Begriffe aus der Topologie wiederholt.

Definition 3.6. Ein *Filter* auf einer Menge X ist eine Teilmenge der Potenzmenge von X mit folgenden Eigenschaften:

(i) $\mathcal{F} \neq \emptyset$ und $\emptyset \notin \mathcal{F}$,

(ii) $A, B \in \mathcal{F} \implies A \cap B \in \mathcal{F}$,

(iii) $A \in \mathcal{F}$, $A \subseteq B \subseteq X \implies B \in \mathcal{F}$.

Definition 3.7. Ein Filter $\mathcal{G}$ auf einer Menge X wird *Ultrafilter* gennant, falls für alle $A \subseteq X$ entweder $A \in \mathcal{G}$ oder $X \setminus A \in \mathcal{G}$ gilt.

Definition 3.8. Sei $\mathcal{F}$ ein Filter auf X. Ein Mengensystem $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{F}$ heißt *Filterbasis* von $\mathcal{F}$, falls es für alle $A \in \mathcal{F}$ ein $B \in \mathcal{B}$ gibt, sodass $B \subseteq A$.

Definition 3.9 (Konvergenz bzgl. eines Filters)**.** Sei $\mathcal{F}$ ein Filter auf der Menge X, $\phi : X \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $\alpha \in \mathbb{R}$. Die Funktion ϕ konvergiert nach α bezüglich dem Filter $\mathcal{F}$, falls

$$\forall \epsilon > 0 : \ \{t \in X : |\phi(t) - \alpha| \leq \epsilon\} \in \mathcal{F}$$

In diesem Fall wird $\lim\limits_{t \to \mathcal{F}} \phi(t) = \alpha$ geschrieben.

Proposition 3.10. *Sei $\mathcal{G}$ ein Ultrafilter auf X und sei eine Funktion $\phi : X \to \mathbb{R}$ so definiert, dass $B = \{t \in X : |\phi(t)| \leq \gamma\} \in \mathcal{G}$, für $\gamma \geq 0$. Dann existiert $\lim\limits_{t \to \mathcal{G}} \phi(t)$ und ist in dem Intervall $[-\gamma, \gamma]$ enthalten.*

Beweis. Für $\alpha \in \mathbb{R}$, setze

$$A_\alpha := \{t \in X : \phi(t) \geq \alpha\}, \ C := \{\alpha \in \mathbb{R} : A_\alpha \in \mathcal{G}\}.$$

Da $A_{-\gamma} \supseteq B \in \mathcal{G}$, ist $-\gamma \in C$. Falls $\alpha \in C$ gilt $A_\alpha \cap B \in \mathcal{G}$ und $A_\alpha \cap B \neq \emptyset$. Also existiert ein $t \in X$, dass $\phi(t) \geq \alpha$ und $|\phi(t)| \leq \gamma$ erfüllt. Deswegen ist γ eine obere Schranke von C. Zusammenfassend ist C eine nichtleere Teilmenge von $\mathbb{R}$, die nach oben beschränkt ist, also ein Supremum β mit $-\gamma \leq \beta \leq \gamma$, besitzt. Für $\epsilon > 0$ gilt, dass $\beta + \epsilon \notin C$, also gilt $A_{\beta+\epsilon} \notin \mathcal{G}$. Da aber $\mathcal{G}$ ein Ultrafilter ist, muss deswegen $X \setminus A_{\beta+\epsilon} \in \mathcal{G}$ sein. Zugleich ist $\beta - \epsilon$ sicherlich keine obere Schranke von C, also existiert ein $\alpha \in C$, das $\beta - \epsilon \leq \alpha$ und $A_\alpha \in \mathcal{G}$ erfüllt. Insgesamt haben wir

$$A_\alpha \setminus A_{\beta+\epsilon} = A_\alpha \cap (X \setminus A_{\beta+\epsilon}) \in \mathcal{G}.$$

Da diese Menge laut Definition nichtleer sein kann, gibt es ein $t \in A_\alpha \setminus A_{\beta+\epsilon}$, mit $\beta - \epsilon \leq \alpha \leq \phi(t) \leq \beta + \epsilon$ und $|\phi(t) - \beta| \leq \epsilon$. Insgesamt haben wir

$$\mathcal{G} \ni \{t \in X : |\phi(t) - \beta| \leq \epsilon\} \supseteq A_\alpha \setminus A_{\beta+\epsilon}.$$

Da ϵ beliebig gewählt war, gilt $\lim\limits_{t \to \mathcal{G}} \phi(t) = \beta \in [-\gamma, \gamma]$. $\square$

Satz 3.11 (Ultrafilter Lemma)**.** *Für jeden Filter $\mathcal{F}$ auf X gibt es einen Ultrafilter $\mathcal{G}$ auf X, der $\mathcal{F}$ umfasst.*

Beweis. Siehe Funktionalanalysis [3, Lemma 1.3.3] □

Beweis. (von Satz 3.1)

(*i*) Wir können wie im vorigen Beweis voraussetzen, dass $A \neq \emptyset$. Sei F_I wie in Lemma 2.6.

(*ii*) Wir wählen $I, J \subseteq H_1$ so, dass sie endlich sind und beide ein fest gewähltes a enthalten. Damit ist auch $I \cup J \subseteq H_1$ endlich und $F_{I \cup J} \subseteq F_I \cap F_J$. Also ist $\mathcal{E} = \{F_I : I \subseteq H_1$ endlich, $a \in I\}$ eine Filterbasis auf X. Sei F der von $\mathcal{E}$ erzeugte Filter. Wir wenden nun das Ultrafilter Lemma 3.11 an. Daraus folgt, dass es einen Ultrafilter $\mathcal{G}$ gibt, sodass $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$ gilt.

(*iii*) Aufgrund Proposition 3.10 ist $\lim_{f \to \mathcal{G}} (f(x), z) =: \phi_x(z)$ definiert, wobei $\phi_x : H_2 \to \mathbb{R}$. Mithilfe des Satzes von Riesz-Fischer (3.4) wollen wir ein eindeutiges Element $g^*(x) \in H_2$ finden, sodass für alle $z \in H_2$ $\phi_x(z) = (g^*(x), z)$ gilt. Dafür zeigen wir zunächst die Linearität von ϕ_x.

$$\phi_x(\alpha(w+z)) = \lim_{f \to \mathcal{G}} (f(x), \alpha(w+z)) = \lim_{f \to \mathcal{G}} \alpha(f(x), w+z) =$$

$$= \alpha \lim_{f \to \mathcal{G}} ((f(x), w) + (f(x, z))) = \alpha \lim_{f \to \mathcal{G}} (f(x), w) + \alpha \lim_{f \to \mathcal{G}} (f(x, z)) =$$

$$= \alpha(\phi_x(w) + \phi_x(z), \quad w, z \in H_2,\ \alpha \in \mathbb{R}.$$

(*iv*) Angenommen $x \in H_1$ und $z \in H_2$. Wegen der Cauchy-Schwarz und Dreiecksungleichung folgt, dass

$$\forall f \in X : |(f(x), z)| \leq \|f(x)\| \, \|z\| \leq (\|f(a)\| + \gamma \|x - a\|) \, \|z\| \, .$$

und es gilt $|\phi_x(z)| \leq (\|f(a)\| + \gamma \|x - a\|) \, \|z\| = \gamma_x \|z\|$. Also gilt für $z \in H_2$ mit $\|z\| \leq 1$, dass $|\phi_x(z)| \leq \gamma_x$. Damit sind unsere Voraussetzungen für Satz 3.4 erfüllt.

(*v*) Es soll nun gezeigt werden, dass die für $x \in H_1$ eindeutig gefundene Funktion $g^* : H_1 \to H_2$ eine Lipschitz stetige Fortsetzung von f, mit gleicher Lipschitz Konstante ist. Dafür wählen wir zunächst $x \in A$, für das $F_{\{x\}} \in \mathcal{E} \subseteq \mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$ und $g(x) = f(x)$ für $g \in F_{\{x\}}$, gilt. Für $z \in H_2$ und $\epsilon > 0$ wird die Menge $C := \{g \in X : |(g(x), z) - \phi_x(z)| \leq \epsilon\}$ definiert, die in $\mathcal{G}$ liegt. Damit liegt auch

$\emptyset \neq F_{\{x\}} \cap C$ in $\mathcal{G}$. Wir wählen eine Funktion g aus diesem Durchschnitt. Dann gilt

$$|(f(x) - g^*(x), z)| = |(f(x), z) - (g^*(x), z)| = |(g(x), z) - \phi_x(z)| \leq \epsilon.$$

Da ϵ beliebig war, ist für alle $z \in H_2$ $(f(x) - g^*(x), z) = 0$, also $f(x) = g^*(x)$.

(vi) Sei nun der allgemeine Fall mit $x, y \in H_1$ gegeben. Dann ist $F_{\{x,y\}} \in \mathcal{E} \subseteq \mathcal{G}$ und für $g \in F_{\{x,y\}}$ gilt $\|g(x) - g(y)\| \leq \gamma \|x - y\|$. Wir wählen wieder ein $z \in H_2$ und sei $\epsilon > 0$. Wir wissen, dass

$$\begin{aligned} &\lim_{g \to \mathcal{G}} (g(x) - g(y), z) = \lim_{g \to \mathcal{G}} (g(x), z) - \lim_{g \to \mathcal{G}} (g(y), z) = \\ &= \phi_x(z) - \phi_y(z) = (g^*(x), z) - (g^*(y), z) = (g^*(x) - g^*(y), z). \end{aligned}$$

Definiere

$$D := \{g \in X : |(g(x) - g(y), z) - (g^*(x) - g^*(y), z)| \leq \epsilon\} \in \mathcal{G}.$$

Wähle eine Funktion g aus dem Durchschnitt $D \cap F_{\{x,y\}} \neq \emptyset$. Dann gilt

$$|(g^*(x) - g^*(y), z)| \leq \epsilon + |(g(x) - g(y), z)| \leq \epsilon + \|g(x) - g(y)\| \, \|z\| \leq \epsilon + \gamma \|x - y\| \, \|z\| \, .$$

Für $\epsilon \to 0$ gilt

$$|(g^*(x) - g^*(y), z)| \leq \gamma \|x - y\| \, \|z\| \implies \|g^*(x) - g^*(y)\| \leq \gamma \|x - y\| \, .$$

$\square$

Literaturverzeichnis

[1] D.H. Fremlin. *Kirszbraun's theorem*. University of Essex, Colchester, England. Version of 14.9. 2018.
`https://www1.essex.ac.uk/maths/people/fremlin/n11706.pdf`

[2] Kirszbraun theorem - Encyclopedia of Mathematics
`https://encyclopediaofmath.org/wiki/Kirszbraun_theorem`

[3] H. Woracek, M. Kaltenbäck, M. Blümlinger. *Funktionalanalysis 1*. TU Wien, Juni 2020.
`https://www.asc.tuwien.ac.at/ funkana/skripten/fana2020.pdf`

[4] M. Kaltenbäck. *Fundament Analysis*. TU Wien, 2015.
`https://www.asc.tuwien.ac.at/ funkana/kaltenbaeck/kapiteln_buch_2015/kap12u13.pdf`