Der Spektralsatz für unbeschränkte normale Operatoren

Arpad Pinter

22. Februar 2011

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Diese Arbeit beschäftigt sich, wie der Titel bereits aussagt, mit dem Spektralsatz für unbeschränkte normale Operatoren. Bereits der Name dieses Satzes sollte dem Leser Respekt einflößen, denn es handelt sich dabei um ein mächtiges mathematisches Werkzeug aus der Funktionalanalysis. Der Spektralsatz für unbeschränkte normale Operatoren ist dabei die Krönung aller Spektralsätze aus der Spektraltheorie, denn er umfasst alle weiteren Spektralsätze, von den Spektralsätzen aus der Linearen Algebra für Matrizen bis hin zu den Spektralsätzen für unbeschränkte selbstadjungierte Operatoren.

In der Physik findet der Spektralsatz große Verwendung. Besonders in der Quantenmechanik wird oft auf verschiedene Spektralsätze der Mathematik zurückgegriffen.
Auch im mathematischen Teilgebiet der Partiellen Differentialgleichungen wird oft der Spektralsatz herangezogen, um komplizierte Aufgabenstellungen zu vereinfachen und Lösungen zu berechnen. Zum Beispiel zerlegt man bei parabolischen Differentialgleichungen den Lösungsoperator der Differentialgleichung mit Hilfe des Spektralsatzes für kompakte, selbstadjungierte Operatoren, um eine Lösung des Problems konstruieren zu können.

Doch worum geht es eigentlich beim Spektralsatz? Was macht ihn so besonders?
Der Spektralsatz für unbeschränkte normale Operatoren erlaubt es, gewisse lineare Operatoren, nämlich genau die normalen, dazu zählen auch selbstadjungierte und unitäre, eindeutig mit einem Spektralmaß darzustellen. Dabei spielt das Spektrum des Operators eine große Rolle, daher auch der Name dieses Satzes. Mit diesem Spektralmaß lässt sich nicht nur der Operator darstellen, man erhält noch viel mehr. Auch gewisse Funktionen des Operators können dann mit Hilfe dieses Spektralmaßes dargestellt werden.

Die Begriffsbildungen mögen auf den ersten Blick ein wenig kompliziert erscheinen, doch man sollte sich nicht scheuen, trotzdem weiterzulesen. Mit einigen Vorkenntnissen aus der Funktionalanalysis sollte es keine Probleme bereiten, diese Arbeit zu verstehen bzw. sie sogar zu genießen. Als Voraussetzung zum besseren Verständnis einiger Sachverhalte dienen die Erkenntnisse aus dem Vorlesungsskriptum *Funktionalanalysis* von M.Kaltenbäck,H.Woracek und M.Blümlinger. Außerdem werden auch einige Kapitel aus dem Skriptum *Funktionalanalysis II* von M.Kaltenbäck und M.Weberndorfer vorausgesetzt. Besonders wichtig sind einige Vorkenntnisse über das Funktionalkalkül für beschränkte und unbeschränkte messbare Funktionen bei Spektralmaßen, die Gelfandtransformation und das Funktionalkalkül für C^*-Algebren bzw. der Spektralsatz für beschränkte normale Operatoren.

Doch genug der großen Worte. Im Folgenden wird nun versucht, dem Leser den Beweis des Spektralsatzes für unbeschränkte Operatoren auf eine möglichst verständliche Weise zu präsentieren.

Arpad Pinter

2 Ergebnisse aus der Spektraltheorie

Als Einstieg in das Thema werden wir zuerst einige Definitionen, Sätze und Lemmata angeführt, die bereits bekannt sein sollten, aber als Auffrischung der eigenen Kenntnisse trotzdem noch einmal aufgelistet werden. Die entsprechenden Beweise dieser Sätze kann man in [F] nachlesen.

Definition 2.1.

- Sei H ein Hilbertraum. Dann bezeichnet $\mathcal{B}(H)$ die Menge aller linearen, stetigen Funktionen auf H. Funktionen $B \in \mathcal{B}(H)$ werden auch als **Operatoren** bezeichnet.
- Sei Ω eine Menge und $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra auf Ω. Dann bezeichnet $B(\Omega, \mathcal{A})$ die Menge der beschränkten, $\mathcal{A}$-messbaren, komplexwertigen Funktionen $\phi\colon \Omega \to \mathbb{C}$.
- Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ eine Borelmenge. Dann bezeichnet $\mathfrak{B}(D)$ die Menge aller Borelteilmengen von D.

Definition 2.2. Sei Ω eine Menge, $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra auf Ω und H ein Hilbertraum.
Ein **Spektralmaß** für $\langle \Omega, \mathcal{A}, H \rangle$ ist eine Funktion $E\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}(H)$, sodass gilt

(i) Für jedes $\Delta \in \mathcal{A}$ ist $E(\Delta)$ eine orthogonale Projektion;

(ii) $E(\emptyset) = 0$ und $E(\Omega) = I$;

(iii) $E(\Delta_1 \cap \Delta_2) = E(\Delta_1)E(\Delta_2)$ für je zwei $\Delta_1, \Delta_2 \in \mathcal{A}$;

(iv) Sind $\Delta_n \in \mathcal{A}, n \in \mathbb{N}$, paarweise disjunkt, so gilt

$$E\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \Delta_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} E(\Delta_n).$$

Bemerkung 2.3. Die Reihe in Bedingung (iv) ist als Grenzwert im starken Sinne zu verstehen. Man beachte, dass für eine Folge von orthogonalen Projektionen E_n deren Bildräume paarweise orthogonal sind, stets die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} E_n$ im starken Sinne konvergiert, und zwar gegen die orthogonale Projektion auf

$$\overline{\operatorname{span}\{\operatorname{ran} E_n \colon n \in \mathbb{N}\}}.$$

Lemma 2.4. *Sei Ω eine Menge, $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra auf Ω und H ein Hilbertraum.*
Sei E ein Spektralmaß für $\langle \Omega, \mathcal{A}, H \rangle$, und seien $g, h \in H$ festgehalten.
Dann ist die Abbildung $E_{g,h}\colon \mathcal{A} \to \mathbb{C}$

$$E_{g,h}(\Delta) := (E(\Delta)g, h),$$

ein komplexes Maß auf $\mathcal{A}$. Für die Variation $|E_{g,h}|$ gilt die Abschätzung $|E_{g,h}|(\Delta) \leq \|E(\Delta)g\| \cdot \|E(\Delta)h\|$.
Die Totalvariation von $E_{g,h}$ ist somit höchstens gleich $\|g\| \cdot \|h\|$. Für diese komplexen Maße gilt $E_{g,h} = \overline{E_{h,g}}$. Außerdem ist $E_{g,g}$ ein positives Maß.

Lemma 2.5. *Sei Ω eine Menge, $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra auf Ω und H ein Hilbertraum.*
Sei E ein Spektralmaß für $\langle \Omega, \mathcal{A}, H \rangle$, und sei $\phi \in B(\Omega, \mathcal{A})$. Dabei bezeichnet $B(\Omega, \mathcal{A})$ die Menge

aller beschränkten, $\mathcal{A}$-messbaren, komplexwertigen Funktionen und ist mit der Supremumsnorm $\|.\|_\infty$ versehen.
Dann existiert ein eindeutiger Operator $A \in \mathcal{B}(H)$, sodass für alle $g, h \in H$

$$(Ag, h) = \int_\Omega \phi \, dE_{g,h}.$$

Dabei ist $\|A\| \leq \|\phi\|_\infty$.
Der Operator A heißt das Integral von ϕ bzgl. E, und wird bezeichnet mit $\int \phi \, dE$.

Definition 2.6. Sei A ein Vektorraum über $\mathbb{C}$. Sei A versehen mit einer bilinearen Abbildung

$$A \times A \to A, \quad (a, b) \mapsto ab,$$

die assoziativ ist und ein Einselement besitzt. Weiters sei A mit einer Norm versehen, die

$$\|ab\| \leq \|a\| \cdot \|b\|, \quad \forall a, b \in A$$

erfüllt und die A zu einem Banachraum macht. Dann spricht man von einer **Banachalgebra**. Ist A noch zusätzlich versehen mit einer Abbildung $.^*\colon A \to A$, die für alle $a, b \in A$ und $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$

$$(a^*)^* = a, (ab)^* = b^* a^*, (\lambda a + \mu b)^* = \overline{\lambda} a^* + \overline{\mu} b^*, \|a^*\| = \|a\| \text{ und } \|aa^*\| = \|a\|^2$$

erfüllt, dann wird A als C^*-Algebra bezeichnet.

Bemerkung 2.7. $B(\Omega, \mathcal{A})$ ist nicht nur eine Menge, sondern, versehen mit der punktweisen Addition, der Skalarmultiplikation, der punktweisen Multiplikation, dem Konjugieren und der Supremumsnorm eine C^*-Algebra.
$\mathcal{B}(H)$ ist ebenfalls eine C^*-Algebra, und zwar mit der punktweisen Addition, der Skalarmultiplikation, der Hintereinanderausführung von Funktionen, dem Adjungieren und der Operatornorm, siehe [F2].
Eine Abbildung zwischen zwei C^*-Algebren wird auch als C^*-Algebren-Homomorphismus bezeichnet, wenn er mit den algebraischen Strukturen auf den beiden C^*-Algebren verträglich ist, vgl. Bemerkung 2.9.
Genauere Informationen über diese Sachverhalte und generell über C^*-Algebran kann man in [F2, Kapitel 1] nachlesen. Dort wird auch mit Hilfe der Gelfandtransformation ein Funktionalkalkül für C^*-Algebren konstruiert, von dem im weiteren Verlauf an einigen Stellen Gebrauch gemacht wird.

Satz 2.8 (Funktionalkalkül für beschränkte messbare Funktionen).
Sei Ω eine Menge, $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra auf Ω, H ein Hilbertraum und E ein Spektralmaß für $\langle \Omega, \mathcal{A}, H \rangle$.
Dann ist die Abbildung

$$\Phi_E \colon \begin{cases} B(\Omega, \mathcal{A}) & \to \mathcal{B}(H) \\ \phi & \mapsto \int \phi \, dE \end{cases}$$

ein C^*-Algebren-Homomorphismus mit folgenden Eigenschaften:

(i) $\Phi_E(\mathbb{1}_\Delta) = E(\Delta) \quad \forall \Delta \in \mathcal{A}$

(ii) $\|\Phi_E\| = 1$

(iii) *Vertauscht ein $B \in \mathcal{B}(H)$ mit allen Projektionen $E(\Delta), \Delta \in \mathcal{A}$, so auch mit allen Operatoren der Form $\Phi_E(\phi), \phi \in B(\Omega, \mathcal{A})$.*

(iv) *Jeder Operator im Bild von Φ_E ist normal.*

(v) *Für $g \in H$ und $\phi \in B(\Omega, \mathcal{A})$ gilt $\| \left[\int \phi \, dE\right] g\|^2 = \int_\Omega |\phi|^2 \, dE_{g,g}$.*

Bemerkung 2.9. Satz 2.8 besagt, dass Φ_E ein C^*-Algebren-Homomorphismus ist, also dass Φ_E mit allen algebraischen Operationen verträglich ist. Das bedeutet gerade für $\phi, \psi \in B(\Omega, \mathcal{A})$ und $\lambda \in \mathbb{C}$

$$\Phi(\phi + \psi) = \Phi(\phi) + \Phi(\psi), \quad \Phi(\lambda\phi) = \lambda\Phi(\lambda), \quad \Phi(\phi \cdot \psi) = \Phi(\phi)\Phi(\psi),$$
$$\Phi(\overline{\phi}) = (\Phi(\phi))^*, \quad \Phi(\mathbb{1}_\Omega) = I$$

Den Beweis des folgenden Lemmas findet man in [F2, Bemerkung 2.1.10].

Lemma 2.10. *Sei Ω eine Menge, $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra auf Ω, H ein Hilbertraum und E ein Spektralmaß für $\langle \Omega, \mathcal{A}, H \rangle$. Sei Ω' eine weitere Menge, $\mathcal{B}$ eine σ-Algebra auf Ω' und $T \colon \Omega \to \Omega'$ sei $\mathcal{A}$-$\mathcal{B}$-messbar. Definiere $E^T(\Delta) := E(T^{-1}(\Delta)), \Delta \in \mathcal{B}$.*
Dann ist E ein Spektralmaß für $\langle \Omega', \mathcal{B}, H \rangle$ und für alle $\phi \in B(\Omega', \mathcal{B})$ gilt

$$\int \phi \, dE^T = \int \phi \circ T \, dE.$$

Da die folgenden beiden Spektralsätze eine wesentliche Rolle im Beweis des Spektralsatzes für unbeschränkte normale Operatoren spielen, werden sie an dieser Stelle formuliert. Die Beweise erfordern ein tiefliegendes Hilfsmittel aus der Theorie der C^*-Algebren, nämlich die so genannte Gelfand-Transformation. Die Theorie dazu und auch die entsprechenden Beweise der beiden Spektralsätze findet man in [F2]. Dabei ist der Spektralsatz für beschränkte selbstadjungierte Operatoren eine einfache Folgerung aus dem Spektralsatz für beschränkte normale Operatoren.

Satz 2.11 (Spektralsatz für beschränkte normale Operatoren).
Sei H ein Hilbertraum und $T \in \mathcal{B}(H)$ ein normaler Operator.
Dann existiert ein eindeutiges Spektralmaß E für $\langle \mathbb{C}, \mathfrak{B}(\mathbb{C}), H \rangle$, sodass für eine gewisse kompakte Menge $K \subseteq \mathbb{C}$ gilt, dass $E(\mathbb{C} \setminus K) = 0$ und

$$T = \int_K z \, dE(z) := \int z \cdot \mathbb{1}_K(z) \, dE(z)$$

Weiters gilt:

(i) *Man kann $K = \sigma(T)$ wählen, d.h. E lebt nur auf $\sigma(T)$*

(ii) *Für alle $\phi \in \mathcal{C}(\sigma(T))$ gilt*

$$\phi(T) = \int_{\sigma(T)} \phi \, dE,$$

wobei $\phi(T)$ der eindeutige beschränkte Operator im Sinne des Funktionalkalküls für C^*-Algebren ist, siehe [F2][Kapitel 1].

(iii) Liegt $B \in \mathcal{B}(H)$, so ist

$$BT = TB \wedge T^*B = BT^* \quad \Leftrightarrow \quad BE(\Delta) = E(\Delta)B \quad \forall \Delta \in \mathfrak{B}(\mathbb{C})$$

Satz 2.12 (Spektralsatz für beschränkte selbstadjungierte Operatoren).
Sei H ein Hilbertraum und $A \in \mathcal{B}(H)$ ein selbstadjungierter Operator.
Dann existiert ein eindeutiges Spektralmaß E für $\langle \mathbb{R}, \mathfrak{B}(\mathbb{R}), H \rangle$, sodass für eine gewisse kompakte Menge $K \subseteq \mathbb{R}$ gilt, dass $E(\mathbb{R} \setminus K) = 0$ und

$$A = \int_K t \, dE(t)$$

Weiters gilt:

(i) Man kann $K = \sigma(A)$ wählen, d.h. E lebt nur auf $\sigma(A)$

(ii) Liegt $B \in \mathcal{B}(H)$, so ist

$$BA = AB \quad \Leftrightarrow \quad BE(\Delta) = E(\Delta)B \quad \forall \Delta \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})$$

3 Grundlagen über lineare Relationen

Mit den Vorbereitungen aus der Spektraltheorie wollen wir uns jetzt auf unser eigentliches Ziel konzentrieren, nämlich den Beweis des Spektralsatzes für unbeschränkte normale Operatoren.
Doch gleich zu Beginn treten schon Schwierigkeiten auf. Was ist denn eigentlich ein unbeschränkter normaler Operator?
Wenn $T \in \mathcal{B}(H)$, also T ein beschränkter Operator auf dem Hilbertraum H ist, dann existiert immer ein adjungierter Operator T^* zu T, der ebenfalls beschränkt ist. Dann heißt der Operator T normal, wenn $T^*T = TT^*$ gilt.
Doch was passiert, wenn T nicht mehr beschränkt ist, also T unbeschränkt ist? Kann man dann überhaupt eine Adjungierte zu T definieren? Wie soll man nun einen unbeschränkten normalen Operator definieren?
Außerdem treten in vielen Problemen der Analysis lineare Abbildungen T von einem Raum X in einem Raum Y auf, meist Banachräume oder Hilberträume, die nicht auf ganz X definiert sind, sondern nur auf einem dichten Teilraum.
Man könnte sich partiell definierte lineare Funktionen anschauen und diese studieren. Wir wählen aber nicht diesen Zugang, sondern einen viel interessanteren, nämlich den Zugang über lineare Relationen, der uns eine geeignete Definition einer Adjungierten zu einem unbeschränkten Operator ermöglicht.

Sind X, Y Vektorräume, dann benutzen wir für Elemente aus dem kartesischen Produkt $X \times Y$ die Schreibweise $(f; g) \in X \times Y$, wobei $f \in X$, $g \in Y$, damit Verwechslungen mit dem Skalarprodukt $(.,.)$ auf einem Hilbertraum vermieden werden.

Definition 3.1. T heißt **lineare Relation** zwischen den Vektorräumen X und Y, falls T ein linearer Unterraum von $X \times Y$ ist, d.h. $T \leq X \times Y$.
Sind X und Y topologische Vektorräume, so sei $X \times Y$ mit der Produkttopologie versehen. Ist $T \leq X \times Y$ abgeschlossen, so spricht man von einer **abgeschlossenen linearen Relation**. Weiters bezeichne $\overline{T}$ den Abschluss von $T \leq X \times Y$.

Definition 3.2. Seien X, Y Vektorräume und $T \leq X \times Y$ eine lineare Relation, dann definiert man analog zu linearen Abbildungen bzw. Operatoren

(i) den **Domain** oder **Definitionsbereich** $\operatorname{dom} T := \{x \in X : \exists y \in Y : (x; y) \in T\}$,

(ii) den **Range** oder **Bildbereich** $\operatorname{ran} T := \{y \in Y : \exists x \in X : (x; y) \in T\}$,

(iii) den **Kern** $\ker T := \{x \in X : (x; 0) \in T\}$,

(iv) den **Multi-Valued-Part** $\operatorname{mul} T := \{y \in Y : (0; y) \in T\}$.

Bemerkung 3.3. Sind X und Y topologische Vektorräume und ist $T \leq X \times Y$ abgeschlossen, so sind $\ker T$ und $\operatorname{mul} T$ abgeschlossene Unterräume von X bzw. Y. In der Tat gilt

$$\ker T = \pi_X(T \cap (X \times \{0\})).$$

Dabei ist $T \cap (X \times \{0\})$ ein abgeschlossener Unterraum von $X \times \{0\}$. Die Projektion auf die erste Komponente π_X eingeschränkt auf $X \times \{0\}$ ist aber ein Homöomorphismus von $X \times \{0\}$ auf X. Also ist $\ker T$ abgeschlossen. Die Abgeschlossenheit von $\operatorname{mul} T$ sieht man genauso.

Folgendes Lemma legt nahe, lineare Relationen als mehrwertige Funktionen zu sehen:

Lemma 3.4. *Ist $(f;g) \in T$, so gilt $\{h \in Y : (f;h) \in T\} = g + \operatorname{mul} T$.*

Beweis. Sei $W := \{h \in Y : (f;h) \in T\}$.
Sind $(f;g)$ und $(f;h) \in T$, d.h. $h \in W$, so ist $(f - f; h - g) \in T$, da T ein linearer Raum ist. Daher ist $h - g \in \operatorname{mul} T$ bzw. $h \in g + \operatorname{mul} T$.
Ist umgekehrt $z \in \operatorname{mul} T$, dann ist nach Definition $(0;z) \in T$, und weiter $(f; g + z) = (f;g) + (0;z) \in T$, also $g + z \in W$. $\square$

Bemerkung 3.5. Indem man einen linearen Operator T von $M \leq X$ nach Y mit seinem Graph identifiziert, kann man T als lineare Relation betrachten. Umgekehrt ist eine Relation T mit $\operatorname{mul} T = \{0\}$ wegen Lemma 3.4 offensichtlich der Graph eines Operators.

Definition 3.6. Seien X, Y topologische Vektorräume und $M \leq X$ ein linearer Unterraum. Ein linearer Operator $B : M \to Y$ heißt **abgeschlossen**, wenn sein Graph in $X \times Y$ abgeschlossen bzgl. der Produkttopologie ist.

Lemma 3.7. *Seien X, Y topologische Vektorräume, $M \leq X$ ein linearer Unterraum und $B : M \to Y$ linear. Dann gilt:*

(i) Sei B stetig. Ist M abgeschlossen, so auch (der Graph von) B.

(ii) Sind X und Y Banachräume, und sind M und B abgeschlossen, so ist B stetig.

Beweis.

(i) Konvergiert das Netz $((x_i; Bx_i))_{i \in I}$ in $B \leq X \times Y$ gegen $(x : y) \in X \times Y$, so heißt das $x_i \to x$ und $Bx_i \to y$. Ist M abgeschlossen, so folgt $x \in M = \operatorname{dom} B$, und wegen der Stetigkeit von B gilt $Bx_i \to Bx$. Die Eindeutigkeit des Grenzwertes zeigt $y = Bx$. Also ist $(x;y)$ im Graph von B und dieser somit abgeschlossen.

(ii) Diese Aussage folgt unmittelbar aus dem Satz von abgeschlossenen Graphen, siehe [F].

$\square$

Definition 3.8. Sind X, Y, Z Vektorräume, $S, T \leq X \times Y$, $R \leq Y \times Z$ und $\alpha \in \mathbb{C}$, so definiert man

(i) $S + T := \{(f;g) \in X \times Y : \exists h, k \in Y : g = h + k, (f;h) \in S, (f;k) \in T\}$

(ii) $\alpha T := \{(f; \alpha g \in X \times Y : (f;g) \in T\}$

(iii) $T^{-1} := \{(g;f) \in Y \times X : (f;g) \in T\}$ und

(iv) $RS := \{(f;k) \in X \times Z : \exists g \in Y : (f;g) \in S \wedge (g;k) \in R\}$

Bemerkung 3.9. Man überprüft unmittelbar, dass mit R, S, T auch $S + T, \alpha T, T^{-1}, RS$ lineare Relationen sind. Außerdem überzeugt man sich leicht, dass $P(RS) = (PR)S$ und $(RS)^{-1} = S^{-1}R^{-1}$, wenn noch $P \leq Z \times V$ für einen Vektorraum V.
Man sieht unmittelbar, dass $\operatorname{dom}(T^{-1}) = \operatorname{ran} T, \operatorname{ran}(T^{-1}) = \operatorname{dom} T, \ker(T^{-1}) = \operatorname{mul} T$ und $\operatorname{mul}(T^{-1}) = \ker T$ gilt. Insbesondere ist T^{-1} genau dann ein Operator, wenn $\ker T = \{0\}$.

Bemerkung 3.10. Seien R, S, T Operatoren.

- Dann ist αT die übliche Multiplikation einer linearen Abbildung mit einem Skalar.
- $S+T$ ist eine lineare Abbildung von $\operatorname{dom} S \cap \operatorname{dom} T$ nach Y und stimmt dort mit der punktweisen Addition von S und T überein.
- RS ist eine lineare Abbildung von $\{f \in \operatorname{dom} S \colon Sf \in \operatorname{dom} R\}$ nach Z und stimmt dort mit der üblichen Hintereinanderausführung zweier Funktionen überein.

Ist S ein Operator und T eine lineare Relation, so gilt

$$S + T := \{(f; g + Sf) \in X \times Y \colon (f; g) \in T, f \in \operatorname{dom} S\}$$

Ist $X = Y$ und I der Identitätsoperator auf X und $\alpha \in \mathbb{C}$, so gilt

$$T + \alpha I := \{(f; g + \alpha f) \in X \times X \colon (f; g) \in T\}.$$

Lemma 3.11. *Seien X, Y, Z Vektorräume und seien $S, T \leq X \times Y, P, R \leq Y \times Z$ lineare Relationen. Dann gilt*

(i) $R(S+T) \supseteq RS + RT$
Falls S ein Operator mit $S(\operatorname{dom}(S+T)) \subseteq \operatorname{dom} R$ ist, dann gilt sogar Gleichheit.

(ii) $(P+R)S \subseteq PS + RS$
Falls S ein Operator ist, dann gilt sogar Gleichheit.

Beweis.

(i) Sei $(a;b) \in RS + RT$. Dann existieren $b_1, b_2 \in Z$ mit $b_1 + b_2 = b$, sodass $(a; b_1) \in RS$ und $(a; b_2) \in RT$ gilt. Nach Definition existieren $g, h \in Y$, sodass $(a; g) \in S, (g; b_1) \in R$ und $(a; h) \in T, (h; b_2) \in R$. Nun ist $(a; g+h) \in S+T$. Da R ein Unterraum von $Y \times Z$ ist, gilt

$$(g + h; b) = (g + h; b_1 + b_2) = (g; b_1) + (g; b_2) \in R.$$

Daher ist $(a; b) \in R(S+T)$.
Sei nun zusätzlich S ein Operator mit $S(\operatorname{dom}(S+T)) \subseteq \operatorname{dom} R$. Wenn $(a;b) \in R(S+T)$, dann existiert $g \in Y$, sodass $(a; g) \in S + T$ und $(g; b) \in R$ gilt. Wegen der zusätzlichen Forderung an S ist $Sa \in \operatorname{dom} R$, also $(Sa; RSa) \in R$. Daraus erhalten wir $(a; g - Sa) \in T$ und $(g - Sa; b - RSa) \in R$. Das bedeutet $(a; b - RSa) \in RT$ bzw. $(a; b) \in RS + RT$.

(ii) Sei $(a;b) \in (P+R)S$. Nach Definition existiert $g \in Y$, sodass $(a; g) \in S$ und $(g; b) \in P + R$ gilt. Dann existieren $b_1, b_2 \in Z$ mit $b_1 + b_2 = b$, sodass $(g; b_1) \in P$ und $(g; b_2) \in R$. Daher gilt $(a; b_1) \in PS$ und $(a; b_2) \in RS$, woraus wir auf $(a; b) = (a; b_1 + b_2) \in PS + RS$ schließen können.
Sei zusätzlich S ein Operator und sei $(a; b) \in PS + RS$ gegeben. Dann ist $(a; b_1) \in PS$ und $(a; b_2) \in RS$ für Elemente $b_1, b_2 \in Z$, die $b_1 + b_2 = b$ erfüllen. Da S ein Operator ist, gilt daher $(Sa; b_1) \in P$ und $(Sa; b_2) \in R$, also $(Sa; b) = (Sa; b_1 + b_2) \in P + R$. Folglich ist dann $(a; b) \in (P + R)S$.

□

Lemma 3.12. *Sei H ein Hilbertraum und $T \in \mathcal{B}(H)$, aufgefasst als lineare Relation. Dann gilt $TT^{-1} \subseteq I \subseteq T^{-1}T$.*

Beweis. Wenn $(a;b) \in TT^{-1}$ ist, dann existiert $h \in H$, sodass $(a;h) \in T^{-1}$ und $(h;b) \in T$ gilt. Außerdem ist $(h;a) \in T$. Da T ein Operator ist, gilt $a = b$. Somit haben wir $TT^{-1} \subseteq I$ gezeigt. Da T überall definiert ist, gilt für jedes $h \in H$, dass $(h;Th) \in T$ und $(Th;h) \in T^{-1}$. Daraus folgt $(h;h) \in T^{-1}T$ für jedes $h \in H$, womit $I \subseteq T^{-1}T$ gezeigt ist. □

Seien von nun an H_1 und H_2 immer Hilberträume. Das Produkt $H_1 \times H_2$ ist bekannterweise auch ein Hilbertraum, wenn man für $(x;y),(u;v) \in H_1 \times H_2$

$$((x;y),(u;v))_{H_1 \times H_2} := (x,u)_{H_1} + (y,v)_{H_2}$$

definiert. Dann lässt sich $H_1 \times H_2$ offensichtlich zerlegen in $H_1 \times H_2 = (H_1 \times \{0\}) \oplus (\{0\} \times H_2)$, wobei $\oplus$ für die orthogonale direkte Summe steht.

Definition 3.13. Für eine lineare Relation $T \leq H_1 \times H_2$ sei

$$T^* := \{(x;y) \in H_2 \times H_1 \colon (x,v)_{H_2} = (y,u)_{H_1} \quad \forall (u;v) \in T\}$$

die **adjungierte Relation** zu T, oder einfach nur die **Adjungierte** zu T.

Bemerkung 3.14. Die adjungierte Relation T^* zu T ist eine lineare Relation auf $H_2 \times H_1$. Direkt aus der Definition folgt für lineare Relationen $S, T \leq H_1 \times H_2$ mit $S \subseteq T$, dass $T^* \subseteq S^*$.

Bemerkung 3.15. Ist $T \colon H_1 \to H_2$ ein beschränkter linearer Operator, und bezeichne $T^+ \colon H_2 \to H_1$ den adjungierten Operator zu T im klassischen Sinn. Dieser ist ebenfalls linear und beschränkt und erfüllt

$$(x, Tu) = (T^+x, u), \quad x \in H_2$$

für alle $(u;Tu) \in T$. Damit folgt $(x;T^+x) \in T^*$, also $T^+ \subseteq T^*$.
Ist umgekehrt $(x;y) \in T^*$, so gilt

$$(T^+x, u) = (x, Tu) = (y, u)$$

für alle $u \in H_1$, also $y = T^+x$. Insgesamt gilt $T^+ = T^*$. $x \in H_2$

Bemerkung 3.16. Wir definieren die Abbildungen $J \colon H_1 \times H_2 \to H_2 \times H_1, (u;v) \mapsto (-v;u)$ und $\tilde{J} \colon H_2 \times H_1 \to H_1 \times H_2, (u;v) \mapsto (-v;u)$. Man überprüft leicht, dass die Inverse von J gerade $-\tilde{J}$, bzw. die Inverse von $\tilde{J}$ gerade $-J$ ist und dass J und $\tilde{J}$ Homöomorphismen sind.

Klarerweise ist $(x;y) \in T^*$ genau dann, wenn

$$((x;y),(-v;u))_{H_2 \times H_1} = (x,v)_{H_2} - (y,u)_{H_1} = 0 \quad \forall (u;v) \in T.$$

Nun ist $\{(-v;u) \in H_1 \times H_2 \colon (u;v) \in T\}$ das Bild von T unter J. Also gilt

$$T^* = J(T)^{\perp}, \tag{3.1}$$

wobei rechts das orthogonale Komplement von $J(T)$ im Hilbertraum $H_2 \times H_1$ gemeint ist. Insbesondere ist T^* immer ein abgeschlossener linearer Unterraum von $H_2 \times H_1$. Da J ein Homöomorphismus ist, gilt außerdem $\overline{T}^* = T^*$.

Ebenso erkennt man, dass $(x; y) \in T^*$ genau dann, wenn

$$((-y; x), (u; v))_{H_1 \times H_2} = (x, v)_{H_2} - (y, u)_{H_1} = 0 \quad \forall (u; v) \in T.$$

Das bedeutet $\tilde{J}(T^*) = T^\perp$ bzw. $T^* = -J(T^\perp)$. Wenden wir nun diese Tatsache und (3.1) auf T^* statt T an, so folgt

$$T^{**} := (T^*)^* = \tilde{J}(T^*)^* = \tilde{J}(-J(T^\perp))^\perp = (T^\perp)^\perp = \overline{T} \tag{3.2}$$

Insbesondere ist T genau dann abgeschlossen, wenn $T^{**} = T$

Satz 3.17. *Seien H_1, H_2 Hilberträume und $T \leq H_1 \times H_2$ eine lineare Relation. Dann gilt $\operatorname{mul} T^* = (\operatorname{dom} T)^\perp$ und $\ker T^* = (\operatorname{ran} T)^\perp$.*

Beweis. Durch Einsetzen in die Definitionen ergibt sich sofort

$$\begin{aligned}\operatorname{mul} T^* &= \{y \in H_1 \colon (0, v) - (y, u) = 0, \forall (u; v) \in T\} \\ &= \{y \in H_1 \colon (y, u) = 0, \forall u \in \operatorname{dom} T\} = (\operatorname{dom} T)^\perp\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\ker T^* &= \{x \in H_2 \colon (x_v) - (0, u) = 0, \forall (u; v) \in T\} \\ &= \{x \in H_2 \colon (x_v) = 0, \forall v \in \operatorname{ran} T\} = (\operatorname{ran} T)^\perp.\end{aligned}$$

□

Korollar 3.18. *Seien H_1, H_2 Hilberträume und $T \colon \operatorname{dom} T (\subseteq H_1) \to H_2$ ein Operator.*

(i) Ist T dicht definiert, d.h. $\overline{\operatorname{dom} T} = H_1$, dann ist die lineare Relation T^* auch ein Operator, d.h. $\operatorname{mul} T^* = \{0\}$.

(ii) Ist T abgeschlossen, dann ist T^* dicht definiert, d.h. $\overline{\operatorname{dom} T^*} = H_2$.

Beweis.

(i) Die Aussage folgt unmittelbar aus $\operatorname{mul} T^* = (\operatorname{dom} T)^\perp = \overline{(\operatorname{dom} T)}^\perp = H_1^\perp = \{0\}$.

(ii) Da T abgeschlossen ist, gilt $(T^*)^* = T$. Daraus ergibt sich $(\operatorname{dom} T^*)^\perp = \operatorname{mul}(T^*)^* = \operatorname{mul} T = \{0\}$ bzw. $\overline{\operatorname{dom} T^*} = (\operatorname{dom} T^*)^{\perp\perp} = \{0\}^\perp = H_2$.

□

Bemerkung 3.19. Sei T ein linearer Operator, der auf einem Teilraum von einem Hilbertraum H definiert ist. Dann ist die Adjundierte T^* vorerst nur eine lineare Relation nach Definition 3.13. Ist T^* jedoch ein Operator, zum Beispiel wenn T dicht definiert ist, dann gilt die bekannte Beziehung aus der Funktionalanalysis. Für $(y; T^*y) \in T^*$ bzw. äquivalent $y \in \operatorname{dom} T^*$ gilt

$$(Tx, y) = (x, T^*y) \quad \forall x \in \operatorname{dom} T.$$

Lemma 3.20. *Es gilt* $(T^{-1})^* = (T^*)^{-1}$ *und* $(B+T)^* = B^* + T^*$ *für jedes* $B \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$.

Beweis. Es gilt $(x;y) \in (T^{-1})^*$ genau dann, wenn $(x,v) = (y,u)$ für alle $(u;v) \in T^{-1}$, bzw. $(x,a) = (y,b)$ für alle $(a;b) \in T$. Das ist aber äquivalent zu $(y;x) \in T^*$, bzw. $(x;y) \in (T^*)^{-1}$. Insgesamt also $(T^{-1})^* = (T^*)^{-1}$.
Weiters ist $(x,y) \in (B+T)^*$ genau dann, wenn $(x,v) = (y,u)$ für alle $(u;v) \in B+T$, bzw. $(x, b+Ba) = (y,a)$ für alle $(a;b) \in T$. Wegen

$$(x, b+Ba) = (y,a) \quad \Leftrightarrow (x,b) = (y - B^*x, a)$$

ist das äquivalent zu $(x; y - B^*x) \in T^*$ und weiter zu $(x;y) \in B^* + T^*$. □

Lemma 3.21. *Seien* H_1, H_2, H_3 *Hilberträume,* $R \leq H_1 \times H_2$ *und* $S \leq H_2 \times H_3$ *lineare Relationen.*
Dann gilt $R^*S^* \subseteq (SR)^*$.

Beweis. Wenn $(a;c) \in R^*S^*$, dann existiert ein $b \in H_2$, sodass $(a;b) \in S^*$ und $(b;c) \in R^*$. Das bedeutet aber gerade

$$[(a,x) = (b,y_1) \quad \forall (y_1;x) \in S] \quad \text{und} \quad [(b,y_2) = (c,z) \quad \forall (z;y_2) \in R] \,.$$

Insbesondere gilt für Elemente aus R und S, für die ein $y \in H_2$ mit $(z;y) \in R$ und $(y;x) \in S$ existiert, d.h. $(z;x) \in SR$, dass $(a,x) = (b,y) = (c,z)$. Damit haben wir $(a,x) = (c,z)$ für alle $(z;x) \in SR$, also $(a;c) \in (SR)^*$.
Insgesamt also $R^*S^* \subseteq (SR)^*$. □

4 Funktionalkalkül für unbeschränkte messbare Funktionen

Mit Hilfe von linearen Relationen kann man auch einen Funktionalkalkül für unbeschränkte messbare Funktionen bzgl. einem Spektralmaß aufbauen.
Die Beweise sind nicht schwierig, werden aber an dieser Stelle nicht gebracht und können in [F2][Kapitel 3] nachgelesen werden.
Sei Ω eine Menge und $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra auf Ω. Bezeichne die Menge aller $\mathcal{A}$-messbaren, komplexwertigen Funktionen $\phi\colon \Omega \to \mathbb{C}$ mit $U(\Omega, \mathcal{A})$. Wir wollen nun überlegen, wie man eine Funktion $\phi \in U(\Omega, \mathcal{A})$ bezüglich eines Spektralmaßes E für $\langle \Omega, \mathcal{A}, H\rangle$ integrieren kann, wobei H ein Hilbertraum ist.
Im Allgemeinen erhalten wir keinen beschränkten, sondern nur abgeschlossenen Operator. Für den Spezialfall $\phi \in B(\Omega, \mathcal{A})$ wird dieses Integral mit dem schon bekannten beschränkten Operator $\int \phi \, dE$ übereinstimmen.

Bemerkung 4.1. Ist $\phi \in U(\Omega, \mathcal{A})$, so kann man ϕ immer als Summe $\phi = \phi_1 + \phi_2$ schreiben, wobei $\phi_1, \phi 2$ in $U(\Omega, \mathcal{A})$ liegen, ϕ_1 beschränkt ist und $|\phi_2| \geq \delta$ für ein festes $\delta > 0$ gilt. Man nehme zum Beispiel

$$\phi_2 = \mathbb{1}_{\{t\in\Omega\colon |\phi(t)|\geq 1\}} \cdot \phi + \mathbb{1}_{\{t\in\Omega\colon |\phi(t)|<1\}} \text{ und } \phi_1 = \mathbb{1}_{\{t\in\Omega\colon |\phi(t)|<1\}}(\phi - 1).$$

Gemäß dem Funktionalkalkül für beschränkte messbare Funktionen existieren $\int \phi_1 \, dE$ und $\int \frac{1}{\phi_2} \, dE$ in $\mathcal{B}(H)$. Man kann sogar zeigen, dass $\ker[\int \frac{1}{\phi_2} \, dE] = \{0\}$ und $\overline{\operatorname{ran}[\int \frac{1}{\phi_2} \, dE]} = H$.

Definition 4.2. Sei Ω eine Menge, $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra auf Ω und H ein Hilbertraum. Weiters sei E ein Spektralmaß für $\langle \Omega, \mathcal{A}, H\rangle$.
Sei $\phi \in U(\Omega, \mathcal{A})$ und sei $\phi = \phi_1 + \phi_2$ zerlegt wie in Bemerkung 4.1. Dann setzen wir

$$\int \phi \, dE := \left[\int \frac{1}{\phi_2} \, dE\right]^{-1} + \int \phi_1 \, dE.$$

Bemerkung 4.3. Wir haben in Bemerkung 4.1 gesehen, dass $\int \frac{1}{\phi_2} \, dE$ ein injektiver Operator aus $\mathcal{B}(H)$ mit dichtem Bild ist. Somit ist $[\int \frac{1}{\phi_2} \, dE]^{-1}$ ein abgeschlossener mit dichtem Definitionsbereich $\operatorname{ran}[\int \frac{1}{\phi_2} \, dE]$. Wegen $\int \phi_1 \, dE \in \mathcal{B}(H)$ ist dann auch $\int \phi \, dE$ ein abgeschlossener Operator mit dichtem Definitionsbereich $\operatorname{ran}[\int \frac{1}{\phi_2} \, dE]$.
Ist ϕ beschränkt, so ist auch ϕ_2 beschränkt. Nach der Multiplikativität des Funktionalkalküls für Funktionen aus $B(\Omega, \mathcal{A})$ gilt $[\int \frac{1}{\phi_2} \, dE]^{-1} = \int \phi_2 \, dE$. Man sieht also, dass die Definition von $\int \phi \, dE$ in Definition 4.2 mit der üblichen Definition von $\int \phi \, dE$ übereinstimmt.

Lemma 4.4. *Sei Ω eine Menge, $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra auf Ω und H ein Hilbertraum. Weiters sei E ein Spektralmaß für $\langle \Omega, \mathcal{A}, H\rangle$.*
Sei $\phi \in U(\Omega, \mathcal{A})$ und sei $\Delta_n \in \mathcal{A}, n \in \mathbb{N}$, eine monoton wachsende Folge von Mengen, sodass $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Delta_n = \Omega$ und sodass ϕ auf allen $\Delta_n, n \in \mathbb{N}$, beschränkt ist. Dann gilt

(i) Für $g \in H$ gilt: $g \in \operatorname{dom}[\int \phi \, dE] \Leftrightarrow \int_\Omega |\phi|^2 dE_{g,g} < \infty$

(ii) Für $g \in \operatorname{dom}[\int \phi \, dE]$ und $h \in H$ ist ϕ bzgl. $E_{g,h}$ integrierbar, wobei

$$\left(\left[\int \phi \, dE\right] g, h\right) = \int \phi \, dE_{g,h}.$$

(iii) $\int \phi \, dE$ *ist unabhängig von der gewählten Zerlegung* $\phi = \phi_1 + \phi_2$.

(iv) Für alle $n \in \mathbb{N}$ *gilt* $\int (\phi \cdot \mathbb{1}_{\Delta_n}) \, dE \big|_{\operatorname{ran} E(\Delta_n)} \subseteq \int \phi \, dE$.

Beweis. Die Beweise findet man in [F2, Lemma 3.5.4]. □

5 Vorbereitungen für den Beweis des Spektralsatzes

Definition 5.1. Sei H ein Hilbertraum und $T \leq H \times H$ eine lineare Relation, dann heißt T

- **symmetrisch**, falls $T \subseteq T^*$
- **selbstadjungiert**, falls $T = T^*$
- **normal**, falls $T^*T = TT^*$

Lemma 5.2. *Seien H_1, H_2 Hilberträume, sei $T \leq H_1 \times H_2$ eine abgeschlossene lineare Relation.*

- *Sind $a, h \in H_1$, dann ist $(a; h) \in I + T^*T$ genau dann, wenn $(h; 0)$ zerlegt werden kann in*

$$(h; 0) = (a; b) + (d; -c), \tag{5.3}$$

mit $b, d \in H_2$ und $c \in H_1$, sodass $(a; b) \in T$ und $(c, d) \in T^*$.

- *Zu jedem $h \in H_1$ existiert ein eindeutiges $a \in H_1$, sodass $(a; h) \in I + T^*T$ gilt.*

Beweis.

- Wenn $(a; h) \in I + T^*T$ gilt, dann ist $(a; h - a) \in T^*T$. Laut Definition 3.8 bedeutet das aber, dass ein $b \in H_2$ existiert, sodass $(a; b) \in T$ und $(b; h - a) \in T^*$. Damit können wir $(h; 0)$ darstellen als $(h; 0) = (a; b) + (h - a; -b)$.
  Gilt umgekehrt die Gleichung (5.3) für $(a; b) \in T$ und $(c; d) \in T^*$, dann folgt offensichtlich, dass $c = b$ und $d = h - a$ sein muss. Also ist $(b; h - a) \in T^*$ und somit gilt $(a; h - a) \in T^*T$. Daraus folgt dann $(a; h) \in I + T^*T$.

- Nun zeigen wir, die Existenz und Eindeutigkeit der Zerlegung von $(h; 0)$ in (5.3). Da T ein abgeschlossener Unterraum von $H_1 \times H_2$ ist, kann man $H_1 \times H_2$ eindeutig zerlegen in $H_1 \times H_2 = T \oplus T^\perp$. In Bemerkung 3.16 haben wir gesehen, dass $T^\perp = \tilde{J}(T^*)$ gilt, wobei $\tilde{J}$ ein Homöomorphismus von $H_2 \times H_1$ nach $H_1 \times H_2$ ist, der $\tilde{J}((c; d)) = (d; -c)$ leistet. Somit gilt

$$T^\perp = \tilde{J}(T^*) = \{(d; -c) \in H_1 \times H_2 \colon (c; d) \in T^*\}.$$

  Damit lässt sich jedes Element $(h_1; h_2) \in H_1 \times H_2$ eindeutig zerlegen in $(h_1; h_2) = (a; b) + (d; -c)$, mit $a, c \in H_1$, $b, d \in H_2$, sodass $(a; b) \in T$ und $(c; d) \in T^*$. Insbesondere lässt sich also $(h; 0)$ für jedes $h \in H_1$ eindeutig zerlegen.
  Für $h \in H_1$ existieren eindeutige $a, c \in H_1$ und $b, d \in H_2$, sodass die Zerlegung in (5.3) gilt. Aus dem vorigen Punkt ergibt sich daraus, dass für jedes $h \in H_1$ ein eindeutiges $a \in H_1$ existiert, sodass $(a; h) \in I + T^*T$ gilt.

□

Bemerkung 5.3. Seien H_1, H_2 Hilberträume, sei $T \leq H_1 \times H_2$ eine abgeschlossene lineare Relation und sei $h \in H_1$. Wenn man $(h; 0)$ wie in (5.3) zerlegt, mit $a, c \in H_1, b, d \in H_2$, sodass $(a; b) \in T$ und $(c; d) \in T^*$. Dann gilt

$$\|h\|^2 = \|(h; 0)\|^2 = \|(a; b)\|^2 + \|(d; -c)\|^2 \geq \|(a; b)\|^2 = \|a\|^2 + \|b\|^2,$$

woraus wir auf

$$\|h\| \geq \|a\| \quad \text{und} \quad \|h\| \geq \|b\| \tag{5.4}$$

schließen können.

Satz 5.4. *Seien H_1, H_2 Hilberträume und sei $T \leq H_1 \times H_2$ eine abgeschlossene lineare Relation. Dann gilt:*

(i) $B := (I + T^*T)^{-1}$ *ist ein beschränkter linearer Operator mit Norm* $\|B\| \leq 1$.

(ii) *Die linearen Relation* $(I + T^*T)^{-1}, (I + T^*T)$ *und* T^*T *sind selbstadjungiert.*

(iii) B *ist ein positiver Operator, d.h.* $(Bh, h) \geq 0$ *für alle* $h \in H_1$.

(iv) $\ker B = \operatorname{mul} T^*T = \operatorname{mul} T^*$ *und* $\overline{\operatorname{ran} B} = \overline{\operatorname{dom} T^*T} = \overline{\operatorname{dom} T}$

(v) $B(I + T^*T) \subseteq I \subseteq (I + T^*T)B$

Beweis.

(i) Aus dem Lemma 5.2 wissen wir, dass es für jedes $h \in H_1$ genau ein $a \in H_1$ gibt, sodass $(a; h) \in I + T^*T$ bzw. $(h; a) \in (I + T^*T)^{-1}$. Damit ist B ein überall definierter Operator. Für $(h; a) \in B, a = Bh$, ergibt sich aus (5.4), dass $\|Bh\| = \|a\| \leq \|h\|$ ist. Daher gilt $\|B\| \leq 1$ und damit ist $B \in \mathcal{B}(H_1)$.´

(ii) Nun gilt wegen Lemma 3.20, Lemma 3.21 und $T^{**} = T$, dass

$$((I + T^*T)^{-1})^* = ((I + T^*T)^*)^{-1} = (I^* + (T^*T)^*)^{-1} \supseteq (I + T^*T^{**})^{-1} = (I + T^*T)^{-1}.$$

Wegen Bemerkung 3.15 ist B^* ein beschränkter linearer Operator. Da B und B^* beides überall definierte Operatoren sind, muss wegen der Beziehung $B \subseteq B^*$ bereits $B = B^*$ gelten.
Das Lemma 3.20 zeigt, dass man das Adjungieren mit der Inversenbildung vertauschen kann. Das ergibt $(I + T^*T)^{-1} = ((I + T^*T)^*)^{-1}$. Aus der Definition der Inversen einer linearen Relation, vgl. Def. 3.8 *(iii)*, folgt $(I + T^*T) = (I + T^*T)^*$. Also ist auch $I + T^*T$ selbstadjungiert. Mit Hilfe von Lemma 3.20 und $I^* = I$ ergibt sich $I + T^*T = (I + T^*T)^* = I + (T^*T)^*$ und daraus folgt $T^*T = (T^*T)^*$. Somit ist T^*T selbstadjungiert.

(iii) Sei $h \in H_1$ und $a = Bh$, also $(h; a) \in B$. Nun ist $(a; h) \in I + T^*T$ und wegen Lemma 5.2 kann $(h; 0)$ eindeutig als $(h; 0) = (a; b) + (d; -b)$ dargestellt werden, wobei $b \in H_2, d \in H_1$, sodass $(a; b) \in T$ und $(b; d) \in T^*$. Einerseits ergibt sich daraus $h = a + d$. Andererseits erkennen wir aus der Definition von T^*, dass für $(b; d) \in T^*$ die Gleichung $(u, d) = (v, b)$ für alle $(u; v) \in T$ gilt, insbesondere also auch für $(a; b) \in T$. Wir erhalten damit die Gleichung $(a, d) = (b, b) = \|b\|$. Nun gilt

$$(Bh, h) = (a, h) = (a, a) + (a, d) = \|a\|^2 + \|b\|^2 \geq 0.$$

(iv) Ein $x \in H_1$ liegt genau dann in $\ker(I + T^*T)^{-1}$, wenn $(0; x) \in I + T^*T$ bzw. wenn $(0; x) \in T^*T$. Also gilt $\ker B = \operatorname{mul} T^*T$.
Wenn $(0; x) \in T^*T$ gilt, bedeutet das die Existenz von $h \in H_1$, sodass $(0; h) \in T$ und $(h; x) \in T^*$. Da $(0; h)$ ein Element von T ist, erhalten wir aus der Definition von T^* die Gleichung $\|h\|^2 = (h, h) = (x, 0) = 0$. Somit muss $h = 0$ sein. Deshalb ist $(0; x) \in T^*T$ äquivalent zu $(0; x) \in T^*$. Insgesamt haben wir also $\ker B = \operatorname{mul} T^*T = \operatorname{mul} T^*$.
Der zweite Teil der Aussage folgt aus dem ersten Teil mit Hilfe von Satz 3.17, indem man zu den orthogonalen Komplementen übergeht.

(v) Die Aussage folgt sofort aus Lemma 3.12, da $B \in \mathcal{B}(H_1)$ und $B^{-1} = (I + T^*T)$, im Sinne von linearen Relationen, gilt.

$\square$

Bemerkung 5.5.

(i) Da $B = (I + T^*T)^{-1}$ ein positiver, beschränkter Operator ist, ist das Spektrum $\sigma(B)$ von B eine Teilmenge von $[0, +\infty)$. Für den Spektralradius $r(B) := \sup\{|\lambda| \colon \lambda \in \sigma(B)\}$ gilt $r(B) = \|B\| \leq 1$ ist. Daraus folgt $\sigma(B) \subseteq [0, 1]$.
Wegen Satz 2.12 existiert ein eindeutiges Spektralmaß P zu T, sodass $T = \int_{\sigma(B)} t \, dP(t)$. Dieses Hilfsmittel ist ein entscheidender Schritt beim Beweis des Spektralsatzes für unbeschränkte normale Operatoren.

(ii) Ist T zusätzlich dicht definiert, dann ist nach Korollar 3.18 T^* ein Operator und damit auch $I + T^*T$, vgl. Satz 5.4 (*iv*). Dann gilt in Satz 5.4 (*v*) bei der zweiten Inklusion sogar Gleichheit, denn sowohl I als auch $I + T^*T$ sind Operatoren und I ist überall definiert. Daher kann $I + T^*T$ keine echte Obermenge von I sein.
Für $h \in \operatorname{dom} T^*T$ gilt in diesem Fall

$$B(I + T^*T)h = (I + T^*T)Bh = h. \tag{5.5}$$

Satz 5.6. *Seien H_1, H_2 Hilberträume und sei $T \leq H_1 \times H_2$ eine abgeschlossene lineare Relation. Bezeichne mit $P_{(\operatorname{mul} T)^\perp}$ die orthogonale Projektion auf $(\operatorname{mul} T)^\perp$. Dann gilt:*

(i) $P_{(\operatorname{mul} T)^\perp} T = T \cap (H_1 \times (\operatorname{mul})^\perp)$

(ii) $P_{(\operatorname{mul} T)^\perp} T$ *ist ein abgeschlossener linearer Operator.*

(iii) $C := P_{(\operatorname{mul} T)^\perp} T(I + T^*T)^{-1}$ *ist ein beschränkter linearer Operator von H_1 nach H_2 mit* $\|C\| \leq 1$.

(iv) Der Abschluss von $R := \{((I + T^*T)^{-1}h; Ch) \colon h \in H_1\} = CB^{-1}$ *ist genau* $P_{(\operatorname{mul} T)^\perp} T$.

Beweis.

(i) Für $(x; y) \in T \cap (H_1 \times (\operatorname{mul})^\perp)$ gilt $(x; y) \in T$ und $y \in (\operatorname{mul} T)^\perp$. Offensichtlich ist $(y; y) \in P_{(\operatorname{mul} T)^\perp}$, da y bereits in $(\operatorname{mul} T)^\perp$ liegt. Aus $(x; y) \in T$ und $(y; y) \in P_{(\operatorname{mul} T)^\perp}$ folgt laut Definition, dass $(x; y) \in P_{(\operatorname{mul} T)^\perp} T$.
Wenn nun $(x; y) \in P_{(\operatorname{mul} T)^\perp} T$ ist, dann existiert ein $z \in H_2$, sodass $(x; z) \in T$ und $(z; y) \in P_{(\operatorname{mul} T)^\perp}$, bzw. $y = P_{(\operatorname{mul} T)^\perp} z$. Da $\operatorname{mul} T \subseteq H_2$ abgeschlossen ist, kann man z eindeutig darstellen als $z = \tilde{y} + y$ mit $\tilde{y} \in \operatorname{mul} T$ und $y \in (\operatorname{mul} T)^\perp$. Wir können also y auch schreiben als $y = z - \tilde{y}$. Somit ist y ein Element von $z + \operatorname{mul} T$. Wegen Lemma 3.4 gilt aber $z + \operatorname{mul} T = \{h \in H_2 \colon (x; h) \in T\}$, daher ist $(x; y) \in T$. Wegen $y \in (\operatorname{mul} T)^\perp$ gilt insgesamt $(x; y) \in T \cap (H_1 \times (\operatorname{mul} T)^\perp)$.

(ii) $(\operatorname{mul} T)^\perp$ ist ein abgeschlossener Teilraum von H_2. Daher ist $H_1 \times (\operatorname{mul} T)^\perp$ abgeschlossen in $H_1 \times H_2$ bzgl. der Produkttopologie. Da wir T als abgeschlossen in $H_1 \times H_2$ voraussetzen, ist $P_{(\operatorname{mul} T)^\perp} T$ als Durchschnitt zweier abgeschlossener Mengen ebenfalls abgeschlossen.
Sei nun $(0; x) \in T \cap (H_1 \times (\operatorname{mul} T)^\perp) = P_{(\operatorname{mul} T)^\perp} T$. Dann gilt einerseits $(0; x) \in T$, also $x \in \operatorname{mul} T$, und andererseits $x \in (\operatorname{mul} T)^\perp$. Somit ist $x = 0$ und $P_{(\operatorname{mul} T)^\perp} T$ ein Operator.

(iii) C ist als Zusammensetzung der Operatoren $P_{(\operatorname{mul} T)^\perp} T$ und $B := (I + T^*T)^{-1}$ wieder ein Operator.
Für $h \in H_1$ bezeichne $a = Bh$. Wir wissen bereits, dass $P_{(\operatorname{mul} T)^\perp} T = T \cap (H_1 \times (\operatorname{mul} T)^\perp)$ gilt. Die Gleichung $Ch = (P_{(\operatorname{mul} T)^\perp} T)Bh = (P_{(\operatorname{mul} T)^\perp} T)a$ bedeutet daher, dass Ch das eindeutige Element aus $(\operatorname{mul} T)^\perp$ ist, für das $(a, Ch) \in T$ gilt.
Wegen $(h; a) \in B$ bzw. $(a; h) \in I + T^*T$ folgt aus (5.3), dass $(h; 0)$ eindeutig in $(h; 0) = (a; b) + (d; -b)$ zerlegt werden kann, mit $b \in H_2, d \in H_1$, sodass $(a; b) \in T$ und $(b; d) \in T^*$. Wir zeigen nun, dass $b \in (\operatorname{mul} T)^\perp$ gilt und daher $Ch = b$ sein muss.
Sei $(0; x) \in T$ beliebig, dann gilt $(b, x) = (d, 0) = 0$. Das zeigt gerade, dass $(b, x) = 0$ für alle $x \in \operatorname{mul} T$, d.h. $b \in (\operatorname{mul} T)^\perp$.
Die Abschätzung (5.4) liefert nun $\|Ch\| = \|b\| \leq \|h\|$. Da $h \in H_1$ beliebig gewählt war, folgt $\|C\| \leq 1$.

(iv) Offensichtlich gilt $R \subseteq P_{(\operatorname{mul} T)^\perp} T$. Da $P_{(\operatorname{mul} T)^\perp} T$ abgeschlossen ist, folgt $\overline{R} \subseteq P_{(\operatorname{mul} T)^\perp} T$. Als abgeschlossener Unterraum des Hilbertraums $H_1 \times H_2$ ist $P_{(\operatorname{mul} T)^\perp} T$ auch ein Hilbertraum, der den abgeschlossenen Unterraum $\overline{R}$ enthält. Natürlich ist $\overline{R}$ auch im Hilbertraum $P_{(\operatorname{mul} T)^\perp} T$ abgeschlossen und daher lässt sich $P_{(\operatorname{mul} T)^\perp} T = \overline{R} \oplus R^\perp$ als orthogonale direkte Summe schreiben, wobei hier das orthogonale Komplement im Hilbertraum $P_{(\operatorname{mul} T)^\perp} T$ zu verstehen ist. Angenommen $\overline{R}$ wäre eine echter Teilraum von $P_{(\operatorname{mul} T)^\perp} T$, dann bedeutet das, dass ein nicht-triviales Element in $R^\perp$ existieren muss.
Sei also $(r; s) \neq (0; 0)$ und $(r; s) \in R^\perp \subseteq P_{(\operatorname{mul} T)^\perp} T$. Damit ist $(r; s) \in T$ mit $s \in (\operatorname{mul} T)^\perp$. Die Elemente von R sind von der Form $(Bh; Ch)$ für ein $h \in H_1$. Wähle $h \in H_1$ beliebig, dann kann man $(h; 0)$ darstellen als

$$(h; 0) = \underbrace{(a; b)}_{\in R} + (d; -c),$$

sodass $(a; b) \in T$ und $(d; -c) \in T^\perp$. Es gilt $Bh = a$ und $Ch = b$ und daher ist $(a; b) \in R$. Da $(r; s)$ auf R orthogonal steht, gilt einerseits

$$((r; s), (a; b)) = 0.$$

Andererseits steht $(d; -c)$ orthogonal auf T, insbesondere auf $(r; s)$, also

$$((r; s), (d; -c)) = 0.$$

Insgesamt haben wir $0 = ((r; s), (h; 0)) = (r, h) + (s, 0)$, womit $(r, h) = 0$. Da $h \in H_1$ beliebig war, folgt $r = 0$. Wir haben also $(0; s) \in T$ mit $s \in (\operatorname{mul} T)^\perp$, woraus $s = 0$ folgt. Das ist aber ein Widerspruch zu unserer Annahme, dass $(r; s) \neq (0; 0)$. Wir schließen, dass $\overline{R}$ kein echter Teilraum von $P_{(\operatorname{mul} T)^\perp} T$ sein kann, also $\overline{R} = P_{(\operatorname{mul} T)^\perp} T$.

□

Bemerkung 5.7. Seien H_1, H_2 Hilberträume. Ist $T \leq H_1 \times H_2$ sogar ein abgeschlossener Operator, dann gilt $\operatorname{mul} T = \{0\}$ und $(\operatorname{mul} T)^\perp = H_2$. Damit ist $P_{(\operatorname{mul} T)^\perp}$ genau die Identität auf H_2 und $C = T(I + T^*T)^{-1}$ ein Operator, der überall definiert und beschränkt ist.

Lemma 5.8. *Sei H ein Hilbertraum. Ist N eine abgeschlossene, normale lineare Relation, dann gilt $\operatorname{mul} N = \operatorname{mul} N^*N = \operatorname{mul} N^*$. Ist N sogar ein Operator, dann ist auch N^* ein Operator und sowohl N als auch N^* sind dicht definiert.*

Beweis. Aus Satz 5.4 (iv), $N^{**} = N$ und da N normal ist, folgt

$$\operatorname{mul} N^* = \operatorname{mul} N^*N = \operatorname{mul} NN^* = \operatorname{mul} N^{**}N^* = \operatorname{mul} N^{**} = \operatorname{mul} N.$$

Wenn N ein Operator ist, d.h. $\operatorname{mul} N = \{0\}$, dann ist daher auch N^* ein Operator. Wegen Satz 3.17 folgt

$$(\operatorname{dom} N)^\perp = \operatorname{mul} N^* = \{0\} \quad \text{und} \quad (\operatorname{dom} N^*)^\perp = \operatorname{mul} N^{**} = \operatorname{mul} N = \{0\}.$$

Daher sind N und N^* dicht definiert. □

Lemma 5.9. *Sei H ein Hilbertraum und N ein normaler Operator auf H, d.h. eine lineare Relation mit $\operatorname{mul} N = \{0\}$ und $N^*N = NN^*$.*
Dann gilt $N(I + NN^*) = (I + NN^*)N$.

Beweis. Da N ein Operator ist und I ein Operator mit $I(\operatorname{dom}(I + N^*N)) = \operatorname{dom} N^*N \subseteq N$ ist, sind die zusätzlichen Forderungen in Lemma 3.11 erfüllt. Daraus folgt

$$N(I + N^*N) = N + NN^*N = N + N^*NN = (I + N^*N)N,$$

wobei die zweite Gleichheit gilt, da N als normal vorausgesetzt wurde. □

Korollar 5.10. *Sei H ein Hilbertraum und N ein abgeschlossener normaler Operator, d.h. eine abgeschlossene lineare Relation mit $\operatorname{mul} N = \{0\}$ und $N^*N = NN^*$. Bezeichne nun mit $B := (I + N^*N)^{-1}$ und $C := NB$ die Operatoren aus Satz 5.4 bzw. 5.6.*
Dann gilt $BN \subseteq C$ und $BC = CB$.

Beweis. Wegen Satz 5.4 (v) und Lemma 5.9 gilt

$$BN \subseteq BN(I + N^*N)B \subseteq B(I + N^*N)NB \subseteq NB = C$$

im Sinne von linearen Relationen.
Weiters folgt daraus und aus Bemerkung 3.9

$$BC = B(NB) = (BN)B \subseteq CB.$$

Sowohl B als auch C sind überall definierte Operatoren, daher sind es auch BC und CB. Wegen $\operatorname{dom} BC = \operatorname{dom} CB = H_1$ kann BC keine echte Teilmenge von CB sein. Deswegen gilt $BC = CB$. □

Bemerkung 5.11.

(i) Sei P das eindeutige Spektralmaß zu B, das wegen Satz 2.12 existiert. Dann folgt aus $BC = CB$, dass C mit jeder Projektion $P(\Delta)$ kommutiert. Wegen Satz 2.8 (iii) vertauscht C mit allen Operatoren der Form $\int \phi \, dP$, wobei ϕ eine beschränkte, messbare Funktion auf dem Spektrum $\sigma(B)$ von B ist.

(ii) Wenn N ein abgeschlossener normaler Operator ist, dann haben wir in Lemma 5.8 bereits gesehen, dass N^* ebenfalls ein abgeschlossener Operator mit dichtem Definitionsbereich ist. Wegen der Abgeschlossenheit von N gilt $N^{**} = N$ und daher

$$(N^*)^*N^* = NN^* = N^*N = N^*(N^*)^*.$$

Also ist N^* auch normal.
Bezeichne nun $M := N^*$ und definiere $\tilde{B} = (1 + M^*M)^{-1}$, dann gilt

$$\tilde{B} = (1 + (N^*)^*(N^*))^{-1} = (1 + NN^*)^{-1} = (1 + N^*N)^{-1} = B \tag{5.6}$$

Analog zu Satz 5.6 und Korollar 5.10 kann man zeigen, dass $\tilde{C} := N^*\tilde{B} = N^*B$ ein beschränkter Operator ist, der $B\tilde{C} = \tilde{C}B$ erfüllt. Daher vertauscht $\tilde{C}$ auch mit allen Operatoren der Form $\int \phi\, dP$, wobei ϕ eine beschränkte, messbare Funktion auf dem Spektrum $\sigma(B)$ von B ist.

Lemma 5.12. *Sei H ein Hilbertraum und N ein abgeschlossener, normaler Operator auf H. Bezeichne nun mit $B := (I + N^*N)^{-1}$ und $C := NB$ die Operatoren aus Satz 5.4 bzw. Satz 5.6. Sei P das eindeutige Spektralmaß zu B nach Satz 2.12.*
Weiters sei $0 < \delta < 1$ und Δ eine Borelteilmenge von $[\delta, 1]$. Definiere $H_\Delta := P(\Delta)H$, $N_\Delta := N|_{H_\Delta}$ und $N_\Delta^* := (N^*)|_{H_\Delta}$ im Sinne von linearen Abbildungen.
Dann gilt:

(i) *H_Δ ist ein Hilbertraum.*

(ii) $H_\Delta \subseteq \operatorname{dom} N$

(iii) *H_Δ ist invariant unter N und N^*, d.h. $NH_\Delta \subseteq H_\Delta$ und $N^*H_\Delta \subseteq H_\Delta$.*

(iv) *N_Δ ist ein beschränkter normaler Operator auf H_Δ.*

(v) *$B|_{H_\Delta}$ ist bijektiv und es gilt*
$$B|_{H_\Delta} = (I + N_\Delta^* N_\Delta)^{-1}. \tag{5.7}$$

(vi) $\sigma(B|_{H_\Delta}) \subseteq \overline{\Delta}$

Beweis.

(i) Da $P(\Delta)$ eine orthogonale Projektion ist, ist ihr Bildraum $\operatorname{ran} P(\Delta)$ ein abgeschlossener Teilraum von H. Als abgeschlossener Teilraum eines Hilbertraumes ist $H_\Delta = \operatorname{ran} P(\Delta)$ wieder ein Hilbertraum.

(ii) Die Funktion $\phi(t) := \mathbb{1}_\Delta(t)\frac{1}{t}$ ist beschränkt und messbar auf $\sigma(B) \subseteq [0, 1]$. Daher kann man $G := \int \mathbb{1}_\Delta \frac{1}{t}\, dP$ definieren, und zwar im Sinne des Funktionalkalküls für beschränkte messbare Funktionen nach Satz 2.8. Dabei gilt

$$P(\Delta) = \int \mathbb{1}_\Delta\, dP = \int \mathbb{1}_\Delta \frac{1}{t} \cdot t\, dP = \int \mathbb{1}_\Delta \frac{1}{t}\, dP \cdot \int t\, dP = GB.$$

Analog zeigt man $P(\Delta) = BG$.
Da $C \in \mathcal{B}(H)$ wegen Satz 5.6 und $G \in \mathcal{B}(H)$ wegen Satz 2.8 gilt, folgt daraus

$$NP(\Delta) = NBG = CG \in B(H). \tag{5.8}$$

Damit ist $\operatorname{dom}(NP(\Delta)) = H$. Das kann aber nur dann gelten, wenn $H_\Delta = \operatorname{ran} P(\Delta) \subseteq \operatorname{dom} N$.

(iii) Wegen Korollar 5.10 gilt $BN \subseteq C$ und wegen Bemerkung 5.11 kommutiert C mit G. Daher gilt

$$P(\Delta)N = GBN \subseteq GC = CG = NBG = NP(\Delta).$$

Da sowohl $P(\Delta)N$ als auch $NP(\Delta)$ Operatoren sind, besagt diese Inklusion gerade, dass $NP(\Delta)$ und $P(\Delta)N$ auf $\operatorname{dom} P(\Delta)N = \operatorname{dom} N$ übereinstimmen.
Sei nun $h \in H_\Delta$, also $h = P(\Delta)h$. Wegen (ii) liegt dann $h \in \operatorname{dom} N$ und es gilt $Nh = NP(\Delta)h = P(\Delta)Nh$. Daraus erkennen wir, dass auch Nh in $\operatorname{ran} P(\Delta) = H_\Delta$ liegen muss. Somit ist H_Δ invariant unter N.
Da N ein abgeschlossener, dicht definierter normaler Operator ist, ist es wegen Korollar 3.18 auch N^*. Wegen Bemerkung 5.11 (ii) kann man somit die selben Überlegungen auch für N^* machen und erhält damit auch die Invarianz von H_Δ unter N^*.

(iv) Aus (5.8) folgt für $h \in H_\Delta$

$$N_\Delta h = N|_{H_\Delta} h = CG|_{H_\Delta} h,$$

womit N_Δ ein beschränkter Operator auf H_Δ ist.
Für $h \in H_\Delta$ sind auch $N^*Nh, NN^*h \in H_\Delta$. Da N normal ist, gilt $N^*Nh = NN^*h$ für alle $h \in \operatorname{dom} NN^*$, insbesondere gilt diese Gleichheit für $h \in H_\Delta$. Somit gilt

$$(N_\Delta^*)(N_\Delta)h = (N_\Delta)(N_\Delta^*)h, \quad \forall h \in H_\Delta.$$

Das zeigt gerade, dass N_Δ normal im Hilbertraum H_Δ ist.

(v) Da $H_\Delta \subseteq \operatorname{dom}(I + N^*N) = \operatorname{dom} N^*N$ ist, folgt aus (5.5), dass $B(I + N^*N)h = (I + N^*N)Bh = h$ für alle $h \in H_\Delta$ gilt. Somit gilt

$$B|_{H_\Delta} = [(I + N^*N)|_{H_\Delta}]^{-1} = (I + N_\Delta^* N_\Delta)^{-1}.$$

(vi) Sei $\lambda \in \mathbb{C}$. Wir betrachten den Operator $(B - \lambda I)P(\Delta) = \int (t - \lambda)\mathbb{1}_\Delta \, dP$. Wenn nun $\lambda \notin \overline{\Delta}$ ist, dann ist $t \mapsto (t - \lambda)^{-1}\mathbb{1}_\Delta$ eine beschränkte messbare Funktion auf $[0, 1]$. Wir definieren nun die Funktion $F := \int (t - \lambda)^{-1}\mathbb{1}_\Delta \, dP$. Dann gilt

$$(B - \lambda I)P(\Delta)F = \int (t - \lambda) \cdot \frac{1}{(t - \lambda)} \mathbb{1}_\Delta \, dP = \int \mathbb{1}_\Delta \, dP = P(\Delta).$$

Wegen $P(\Delta)F = F$ ist H_Δ invariant unter F. Für $h \in H_\Delta$ gilt somit $(B - \lambda I)Fh = F(B - \lambda I)h = h$. Somit ist der Operator $(B - \lambda I)|_{H_\Delta} = (B|_{H_\Delta} - \lambda I)$ invertierbar in $\mathcal{B}(H_\Delta)$, seine Inverse ist nämlich $F|_{H_\Delta}$.
Insgesamt folgt $\sigma(B|_{H_\Delta}) \subseteq \overline{\Delta}$.

$\square$

6 Einige Bemerkungen zu orthogonalen Summen

Definition 6.1. Sei $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Familie von Hilberträumen, dann bezeichnet man mit

$$\bigoplus_{n\in\mathbb{N}} H_n := \{(h_n)_{n\in\mathbb{N}} \colon h_n \in H_n \text{ für alle } n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \|h_n\|^2 < \infty\}$$

die **orthogonale direkte Summe** der Hilberträume $H_n, n \in \mathbb{N}$.

Proposition 6.2. *Sei $((H_n, (.,.)_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Familie von Hilberträumen und sei $H = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} H_n$. Dann ist die Bilinearform*

$$(f, g) := \sum_{n=1}^{\infty} (f_n, g_n)_n, \quad \text{mit } (f; g) \in H \times H, f = (f_n)_{n\in\mathbb{N}}, g = (g_n)_{n\in\mathbb{N}} \tag{6.9}$$

wohldefiniert auf $H \times H$ und ein Skalarprodukt auf H.
Versieht man H mit $(.,.)$, so ist $(H, (.,.))$ ein Hilbertraum.

Beweis. Sei $f, g \in H, f = (f_n)_{n\in\mathbb{N}}, g = (g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und seien $\|.\|_n, n \in \mathbb{N}$, die von $(.,.)_n$ induzierten Normen auf H_n. Dann folgt aus der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung

$$\sum_{n=1}^{\infty} |(f_n, g_n)_n| \le \sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_n \cdot \|g_n\|_n \le \left(\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_n^2\right)^{1/2} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \|h_n\|_n^2\right)^{1/2}.$$

Daher konvergiert die Reihe in (6.9) absolut und damit ist $(.,.)$ auf $H \times H$ wohldefiniert. Offensichtlich ist es ein Skalarprodukt, da alle $(.,.)_n$ Skalarprodukte sind. Der Beweis der Vollständigkeit von H bzgl. $(.,.)$ erfolgt in wesentlichen Schritten analog zum Beweis der Vollständigkeit des Folgenraums ℓ^2 und wird hier nicht näher ausgeführt. □

Lemma 6.3. *Sei H ein Hilbertraum und seien $P_n, n \in \mathbb{N}$, orthogonale Projektionen auf H, sodass ihre Bildräume paarweise orthogonal sind und $\sum_{n=1}^{\infty} P_n = I$ im Sinne der starken Operatortopologie auf H. Definiere $H_n := P_n H, n \in \mathbb{N}$.*
Dann ist die Abbildung

$$\Psi \colon \begin{cases} \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} H_n \to H \\ (h_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} h_n \end{cases}$$

wohldefiniert und ein isometrischer Isomorphismus.
Es gilt sogar

$$(g, h) = ((g_n)_{n\in\mathbb{N}}, (h_n)_{n\in\mathbb{N}}), \tag{6.10}$$

wobei $g = \Psi((g_n)_{n\in\mathbb{N}})$ und $h = \Psi((h_n)_{n\in\mathbb{N}})$.
Damit kann H mit $\bigoplus_{n\in\mathbb{N}} H_n$ in natürlicher Weise identifiziert werden.

Beweis. Zuerst bemerken wir, dass die $H_n, n \in \mathbb{N}$, als Bildräume der orthogonalen Projektionen $P_n, n \in \mathbb{N}$, paarweise orthogonale Hilberträume sind.
Sei nun $(h_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} H_n$. Nach dem Cauchyschen Konvergenzkriterium konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} h_n$ in H genau dann, wenn für jedes $\epsilon > 0$ ein Index $N \in \mathbb{N}$ existiert, sodass $\| \sum_{i=n}^{m} h_i\|^2 \le \epsilon$ für alle $n, m \ge N$. Da die $h_n, n \in \mathbb{N}$, paarweise orthogonal sind, gilt aber

$$\left\| \sum_{i=n}^{m} h_i \right\|^2 = \sum_{i=n}^{m} \|h_i\|^2.$$

Somit erkennen wir, dass $\sum_{n=1}^{\infty} h_n$ in H genau dann konvergiert, wenn $\sum_{n=1}^{\infty} \|h_n\|^2$ in $\mathbb{R}$ konvergiert, bzw. genau dann, wenn $\sum_{n=1}^{\infty} \|h_n\|^2 \leq \infty$ gilt. Also ist die Abbildung Ψ wohldefiniert. Offensichtlich ist sie auch linear. Die Injektivität von Ψ folgt sofort, da der Nullvektor 0 wegen der paarweisen Orthogonalität der $H_n, n \in \mathbb{N}$, nur durch die 0-Folge in $\bigoplus_{n\in\mathbb{N}} H_n$ dargestellt werden kann. Außerdem ist Ψ surjektiv, da ein Vektor $h \in H$, wegen unserer Annahme $\sum_{n=1}^{\infty} P_n = I$, gerade das Bild von $(P_n h)_{n\in\mathbb{N}} \in \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} H_n$ unter Ψ ist. Daher ist Ψ tatsächlich ein Isomorphismus.
Wegen der paarweisen Orthogonalität der $H_n, n \in \mathbb{N}$ gilt

$$(\Psi((g_n)_{n\in\mathbb{N}}), \Psi((h_n)_{n\in\mathbb{N}})) = (\sum_{n=1}^{\infty} g_n, \sum_{n=1}^{\infty} h_n) = \sum_{n=1}^{\infty} (g_n, h_n) = ((g_n)_{n\in\mathbb{N}}, (h_n)_{n\in\mathbb{N}})$$

für alle $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}, (h_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} H_n$. Insbesondere folgt daraus, dass Ψ isometrisch ist. □

Bemerkung 6.4. Sei $H = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} H_n$ die orthogonale direkte Summe von Hilberträumen $H_n, n \in \mathbb{N}$. Bezeichne mit ι_n die Einbettung von H_n in H für alle $n \in \mathbb{N}$, d.h. für $j \in \mathbb{N}$ ist $\iota_j(h_j)$ jene Folge in H, bei der an der j-ten Stelle h_j steht und sonst überall der Nullvektor. Nun liegt die Menge $M := \operatorname{span}\{\iota_n(H_n) : n \in \mathbb{N}\}$ dicht in H. Sei $(h_n)_{n\in\mathbb{N}} \in H$. Dann konvergiert nämlich $(h_1, h_2, ..., h_N, 0, 0, ...) = \sum_{n=1}^{N} \iota_n(h_n) \in M$ gegen $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in der Norm von H, denn es gilt

$$\|(h_n)_{n\in\mathbb{N}} - \sum_{n=1}^{N} \iota_n(h_n)\|^2 = \sum_{n=N+1}^{\infty} \|h_n\|.$$

Wegen $\sum_{n=1}^{\infty} \|h_n\| < \infty$ konvergiert $\sum_{n=N+1}^{\infty} \|h_n\| \to 0$ für $N \to \infty$.

Satz 6.5. *Sei $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Familie von Hilberträumen und sei $A_n \in \mathcal{B}(H_n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Definiere $H := \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} H_n$ und die Menge*

$$\mathcal{D} := \{(h_n)_{n\in\mathbb{N}} \in H : \sum_{n=1}^{\infty} \|A_n h_n\|^2 < \infty\}.$$

Die Abbildung $A : \mathcal{D}(\subseteq H) \to H$ sei definiert durch $A((h_n)_{n\in\mathbb{N}}) := (A_n h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ für $(h_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{D}$. A wird auch als $\bigoplus_{n\in\mathbb{N}} A_n$ bezeichnet.
Dann gilt:

(i) A ist ein abgeschlossener linearer Operator mit dichtem Definitionsbereich.

(ii) Die Adjungierte A^* zu A ist ebenfalls ein linearer Operator mit Definitionsbereich

$$\operatorname{dom} A^* = \{(h_n)_{n\in\mathbb{N}} \in H : \sum_{n=1}^{\infty} \|A_n^* h_n\| < \infty\}$$

und A^* erfüllt $A^*((h_n)_{n\in\mathbb{N}}) = (A_n^* h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ für $(h_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \operatorname{dom} A^*$.

(iii) A ist genau dann ein normaler Operator (im Sinne von Definition 5.1), wenn alle $A_n, n \in \mathbb{N}$ normal sind.

(iv) Sind alle $A_n, n \in \mathbb{N}$, invertierbar und ist $\operatorname{dom} A = H$, so ist auch A invertierbar und es gilt

$$A^{-1} = \left(\bigoplus_{n\in\mathbb{N}} A_n\right)^{-1} = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} A_n^{-1}.$$

Beweis.

(i) Die Linearität von A folgt aus der Linearität aller $A_n, n \in \mathbb{N}$. Nun liegen alle $H_n, n \in \mathbb{N}$, in $\mathcal{D}$, daher auch die lineare Hülle der $H_n, n \in \mathbb{N}$. Daher gilt

$$H = \overline{\operatorname{span}\{H_n \colon n \in \mathbb{N}\}} \subseteq \overline{\mathcal{D}} \subseteq H$$

Somit ist A dicht definiert.
Sei $(h^j)_{j\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathcal{D}$ mit $(h^j; Ah^j) \to (h; g)$ in $H \times H$. Damit konvergiert für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Folge $(h_n^j; A_n h_n^j) \to (h_n, g_n)$ in $H_n \times H_n$. Das bedeutet gerade $h_n^j \to h_n$ und $A_n h_n^j \to g_n$ in H_n. Wegen der Stetigkeit von A_n folgt aber $A_n h_n^j \to A_n h_n$. Aus der Eindeutigkeit des Grenzwertes erhalten wir daher $g_n = A_n h_n$. Nun gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|A_n h_n\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \|g_n\|^2 = \|g\|^2 < \infty.$$

Daher ist $h \in \mathcal{D}$ und $Ah = g$, womit die Abeschlossenheit von A gezeigt ist.

(ii) Nach Lemma 3.18 ist A^* ein Operator. Nach Definition ist A^* gerade

$$A^* = \{(f; g) \in H \times H \colon (g, u) = (f, Au) \quad \forall u \in \operatorname{dom} A\}.$$

Sei $(f; g) \in A^*, f = (f_n)_{n\in\mathbb{N}}, g = (g_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Da $A_n, n \in \mathbb{N}$, beschränkte lineare Operatoren sind, existieren die Adjungierten $A_n^*, n \in \mathbb{N}$, im klassischen Sinn. Für alle $u \in \operatorname{dom} A$ gilt wegen

$$\sum_{n=1}^{\infty}(g_n, u_n) = (g, u) = (f, Au) = \sum_{n=1}^{\infty}(f_n, A_n u_n) = \sum_{n=1}^{\infty}(A_n^* f_n, u_n),$$

dass $\sum_{n=1}^{\infty}(g_n - A_n^* f_n, u_n) = 0$.
Bezeichne mit ι_n die Einbettung von H_n in H. Dann sind speziell alle $\iota_n(h_n), h_n \in H_n$, in $\operatorname{dom} A$ enthalten und es gilt $(g_n - A_n^* f_n, h_n) = 0$ für alle $h_n \in H_n$, d.h. $g_n = A_n^* f_n$. Da A^* ein Operator ist, folgt daraus $A^*((f_n)_{n\in\mathbb{N}}) = (A_n^* f_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Offensichtlich ist A^* linear. Außerdem liegt ein $f \in \operatorname{dom} A^*$ genau dann, wenn $A^* f \in H$, d.h. $\sum_{n=1}^{\infty} \|A_n^* f_n\|^2 < \infty$.

(iii) Ist $f \in \operatorname{dom} A^*A, f = (f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, so bedeutet das gerade $\sum_{n=1}^{\infty} \|A_n^* A_n f_n\|^2 \leq \infty$.
Wenn nun alle $A_n, n \in \mathbb{N}$, normal sind, folgt

$$\operatorname{dom} A^*A = \operatorname{dom} AA^* = \{(h_n)_{n\in\mathbb{N}} \in H \colon \sum_{n=1}^{\infty} \|A_n^* A_n h_n\| < \infty\}.$$

Somit gilt für alle $f \in \operatorname{dom} A^*A, f = (f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, die folgende Gleichheit

$$A^*Af = (A_n^* A_n f_n)_{n\in\mathbb{N}} = (AA_n^* f_n)_{n\in\mathbb{N}} = AA^* f, \tag{6.11}$$

woraus wir erkennen, dass A normal ist.
Ist nun A normal, so gilt die Gleichheit in (6.11) für alle $f \in \operatorname{dom} A^*A$, insbesondere für alle $\iota_n(h_n)$ mit $h_n \in H_n$. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ haben wir also $A_n^* A_n h_n = A_n A_n^* h_n$ für alle $h_n \in H_n$. Also sind alle $A_n, n \in \mathbb{N}$, normal.

(iv) Wegen $\operatorname{dom} A = H$ ist A überall definiert und offensichtlich ist $\bigoplus_{n\in\mathbb{N}} A_n^{-1}$ die Inverse von A.

□

Bemerkung 6.6. Sei nun H ein Hilbertraum und seien $P_n, n \in \mathbb{N}$, orthogonale Projektionen auf H, sodass ihre Bildräume paarweise orthogonal sind und $\sum_{n=1}^{\infty} P_n = I$. Seien $H_n := P_n H$ für $n \in \mathbb{N}$.
Da $\bigoplus_{n\in\mathbb{N}} H_n$ mit H identifiziert werden kann, können wir $A = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} A_n$ auch als Operator auf H auffassen. Genauer gesagt, ist $\tilde{A} = \Psi A \Psi^{-1}$ ein Operator von $\operatorname{dom} \tilde{A} \subseteq H$ nach H, wobei Ψ der isometrische Isomorphimus aus Lemma 6.3 ist. Dabei ist

$$\operatorname{dom} \tilde{A} = \{h \in H\colon \sum_{n=1}^{\infty} \|A_n P_n h\|^2 < \infty\} = \Psi(\operatorname{dom} A)$$

Der Operator $\tilde{A}$ erfüllt

$$\tilde{A}h = \sum_{n=1}^{\infty} A_n(P_n h), \quad h \in H.$$

Wegen (6.10) gelten die Eigenschaften von A in Satz 6.5 in analoger Weise für $\tilde{A}$. Also gilt:

(i) $\tilde{A}$ ist ein abgeschlossener linearer Operator mit dichtem Definitionsbereich.

(ii) Die Adjungierte $\tilde{A}^*$ zu $\tilde{A}$ ist ebenfalls ein linearer Operator mit Definitionsbereich

$$\operatorname{dom} \tilde{A}^* = \{h \in H\colon \sum_{n=1}^{\infty} \|A_n^* P_n h\| < \infty\}$$

und $\tilde{A}^*$ erfüllt $\tilde{A}^* h = \sum_{n=1}^{\infty} A_n^* P_n h$ für $h \in \operatorname{dom} \tilde{A}^*$.

(iii) $\tilde{A}$ ist genau dann ein normaler Operator (im Sinne von Definition 5.1), wenn alle $A_n, n \in \mathbb{N}$ normal sind.

(iv) Sind alle $A_n, n \in \mathbb{N}$, invertierbar und ist $\operatorname{dom} \tilde{A} = H$, so ist auch $\tilde{A}$ invertierbar und es gilt

$$\tilde{A}^{-1} = \sum_{n=1}^{\infty} A_n^{-1} P_n.$$

Aus diesem Grund werden wir des Weiteren nicht mehr streng zwischen A und $\tilde{A}$ unterscheiden, wir schreiben daher $A \cong \tilde{A}$.

Beispiel 6.7. Sei Ω eine Menge, $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra auf Ω und H ein Hilbertraum. Sei E ein Spektralmaß für $\langle \Omega, \mathcal{A}, H \rangle$. Bezeichne mit $B(\Omega, \mathcal{A})$ die Menge aller beschränkten $\mathcal{A}$-messbaren Funktionen $\phi\colon \Omega \to \mathbb{C}$.
Sei $\phi\colon \Omega \to \mathbb{C}$ eine $\mathcal{A}$-messbare Funktion und definiere

$$\Delta_n := \{x \in \Omega\colon (n-1)^{1/2} \leq |\phi(x)| < n^{1/2}\}.$$

Dann ist $\mathbb{1}_{\Delta_n} \phi \in B(\Omega, \mathcal{A})$.
Wir setzen nun $H_n := E(\Delta_n)H$. Wegen der paarweisen Disjunktheit der $\Delta_n, n \in \mathbb{N}$, sind die $H_n, n \in \mathbb{N}$, paarweise orthogonal, denn es gilt für $n \neq m$

$$E(\Delta_m)E(\Delta_n) = E(\Delta_m \cap \Delta_n) = E(\emptyset) = 0.$$

Definieren wir E^n durch $E^n(\Delta) := E(\Delta \cap \Delta_n)$, dann ist E^n offensichtlich ein Spektralmaß für $\langle \Omega, \mathcal{A}, H_n \rangle$, da sich die Eigenschaften von E auf E^n übertragen lassen.
Wir können nun das Spektralmaß E darstellen als

$$E(\Delta) = \sum_{n=1}^{\infty} E^n(\Delta) E(\Delta_n), \quad \Delta \in \mathcal{A}. \tag{6.12}$$

Wegen Satz 2.8 (*iv*) ist $\int \phi \mathbb{1}_{\Delta_n} \, dE^n E(\Delta_n)$ ein normaler Operator auf H_n. Definiere nun

$$\mathcal{D}_\phi := \left\{ h \in H \colon \sum_{n=1}^{\infty} \| \left(\int \phi \mathbb{1}_{\Delta_n} \, dE^n \right) E(\Delta_n) h \|^2 < \infty \right\}.$$

Nach Bemerkung 6.6 ist $N_\phi \colon \mathcal{D}_\phi \subseteq H \to H$ gegeben durch

$$N_\phi h = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int \phi \mathbb{1}_{\Delta_n} \, dE^n \right) E(\Delta_n) h, \quad h \in \mathcal{D}_\phi$$

ein normaler Operator.

Wir betrachten nun den Operator $\int \phi \, dE$, im Sinne des Funktionalkalküls für unbeschränkte messbare Funktionen. Wegen Lemma 4.4 (*iv*) ist jedes $h \in H_n$ auch in $\mathrm{dom}(\int \phi \, dE)$. Sei also $h \in H_n$ und $d \in H$, dann gilt wegen der Darstellung (6.12)

$$E_{h,g}(\Delta) = (E(\Delta)h, g) = (E^n(\Delta)h, g) = E^n_{h,g}.$$

Daraus und wegen Lemma 4.4 (*ii*) folgt

$$([\int \phi \, dE]h, g) = \int \phi \, dE_{h,g} = \int \phi \, dE^n_{h,g} = ([\int \phi \, dE^n]h, g),$$

woraus sich $\int \phi \, dE|_{H_n} = \int \phi \, dE^n$ ergibt.
Gehen wir nun von H zu $\bigoplus_{n \in \mathbb{N}} H_n$ über, dann gilt einerseits $N_\phi \cong \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \int \phi \, dE^n$ und wie wir nachgerechnet haben auch $\int \phi \, dE \cong \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \int \phi \, dE^n$. Das bedeutet aber, dass

$$N_\phi = \int \phi \, dE$$

gelten muss.

7 Der Spektralsatz für unbeschränkte normale Operatoren

Satz 7.1 (**Spektralsatz für unbeschränkte normale Operatoren**).
Sei H ein Hilbertraum und $N\colon \operatorname{dom} N (\subseteq H) \to H$ ein abgeschlossener, normaler Operator, d.h. $N \leq H \times H$ ist eine abgeschlossene lineare Relation mit $\operatorname{mul} N = \{0\}$ und $NN^* = N^*N$. Dann existiert ein eindeutiges Spektralmaß E für $\langle \mathbb{C}, \mathfrak{B}(\mathbb{C}), H \rangle$, sodass

$$N = \int z \, dE(z).$$

Dabei gilt:

(i) Für $\Delta \in \mathfrak{B}(\mathbb{C})$ mit $\Delta \cap \sigma(N) = \emptyset$ gilt $E(\Delta) = 0$.

(ii) Liegt $A \in \mathcal{B}(H)$, sodass $AN \subseteq NA$ und $AN^* \subseteq N^*A$, dann gilt $A(\int \phi \, dE) \subseteq (\int \phi \, dE)A$ für alle messbaren ϕ auf $\mathbb{C}$.

Beweis.
<u>*Konstruktion von E:*</u>
Seien $B := (1 + N^*N)^{-1}$ und $C := NB$ definiert wie in Satz 5.4 bzw. Satz 5.6. Dann ist $B \in \mathcal{B}(H)$ ein positiver Operator mit Norm $\|B\| \leq 1$, daher gilt für das Spektrum $\sigma(B) \subseteq [0, 1]$. Sei nun P das eindeutige Spektralmaß zu B, das wegen Satz 2.12 existiert.
Definiere nun orthogonale Projektionen P_n durch $P_n := P((\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}]), n \in \mathbb{N}$. Wegen Satz 5.4 (iv) und dem dichtem Definitionsbereich von N folgt $\ker B = (\operatorname{dom} N)^\perp = \{0\}$. Somit liegt 0 nicht im Punktspektrum $\sigma_p(B)$ von B und daher $P(\{0\}) = 0$. Somit lebt das Spektralmaß P nur auf einer Teilmenge von $(0, 1]$, d.h. $P((0, 1]) = I$, und es gilt

$$I = P((0,1]) = P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right]\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P_n. \tag{7.13}$$

Für $i \neq j$ gilt

$$P_i P_j = P\left((\frac{1}{i+1}, \frac{1}{i}]\right) P\left((\frac{1}{j+1}, \frac{1}{j}]\right) = P\left((\frac{1}{i+1}, \frac{1}{i}] \cap (\frac{1}{j+1}, \frac{1}{j}]\right) = P(\emptyset) = 0.$$

Also haben die Projektionen $P_n, n \in \mathbb{N}$, paarweise orthogonale Bildräume. Wir definieren nun für $n \in \mathbb{N}$ den Hilbertraum $H_n := P_n H$, dann sind die Hilberträume $H_n, n \in \mathbb{N}$, paarweise orthogonal. Aus Lemma 5.12 folgt, dass $H_n \subseteq \operatorname{dom} N$ gilt, H_n invariant unter $N_n := N|_{H_n}$ und $N_n^* := (N^*)|_{H_n}$ ist und N_n ein beschränkter normaler Operator auf H_n ist.

Nun wollen wir das Spektrum von $N_n, n \in \mathbb{N}$, näher betrachten. Da N_n normal ist, gilt für $f \in \mathcal{C}(\sigma(N_n))$ folgende Beziehung

$$f(\sigma(N_n)) = \sigma(f(N_n)),$$

siehe Gelfandtransformation und Funktionalkalkül für C^*-Algebren in [F2, Kapitel 1].
Nun wissen wir, dass die Funktion ϕ definiert durch

$$\phi(z) = \frac{1}{1 + z\overline{z}} = \frac{1}{1 + |z|^2}$$

auf ganz $\mathbb{C}$ stetig ist. Wenn nun $\lambda \in \sigma(N_n)$ ist, dann liegt $(1+|\lambda|^2)^{-1} = \phi(\lambda) \in \sigma(\phi(N_n))$. Nach dem Funktionalkalkül für C^*-Algebren ist $\phi(N_n)$ aber nichts anderes als $(I + N_n^* N_n)^{-1}$ bzw. nach Lemma 5.12 (v) gilt daher

$$\phi(N_n) = (I + N_n^* N_n)^{-1} = B|_{H_n}. \tag{7.14}$$

Daher haben wir $(1 + |\lambda|^2)^{-1} \in \sigma(B|_{H_n}) \subseteq [\frac{1}{n}, \frac{1}{n+1}]$. Durch Umformen ergibt sich daher $|\lambda| \in [(n-1)^{1/2}, n^{1/2}]$. Für $n \in \mathbb{N}$ definieren wir

$$\Delta_n := \{\lambda \in \mathbb{C} \colon (n-1)^{\frac{1}{2}} \leq |\lambda| < n^{\frac{1}{2}}\}. \tag{7.15}$$

Für das Spektrum $\sigma(N_n)$ bedeutet das also $\sigma(N_n) \subseteq \overline{\Delta_n}$.
Sei E^n das eindeutige Spektralmaß von N_n für $n \in \mathbb{N}$, das wegen dem Spektralsatz für beschränkte normale Operatoren, Satz 2.11, existiert.
Wir zeigen nun, dass das Spektralmaß E^n auf Δ_n lebt, d.h. $E^n(\mathbb{C} \setminus \Delta_n) = 0$. Wegen $\sigma(N_n) \subseteq \overline{\Delta_n}$ lebt E^n nach dem Spektralsatz sicher auf $\overline{\Delta_n}$. Es bleibt noch zu zeigen, dass
$E^n(\{\lambda \in \mathbb{C} \colon |\lambda| = n^{\frac{1}{2}}\}) = 0$ ist.
Zuerst bemerken wir, dass $B|_{H_n}$ ein selbstadjungierter Operator auf H_n ist, für den ein eindeutiges Spektralmaß existiert. Wenn wir

$$P^n(\Delta) := P(\Delta)|_{H_n} = P\left(\Delta \cap \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n+1}\right]\right)|_{H_n}, \quad \Delta \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}),$$

definieren, dann gilt für alle $g, h \in H_n$ offensichtlich $P^n_{g,h} = P_{g,h}$. Daher gilt

$$(Bg, h) = \left([\int t\, dP]g, h\right) = \int t\, dP_{g,h} = \int t\, dP^n_{g,h} = \left([\int t\, dP^n]g, h\right) \tag{7.16}$$

für alle $g, h \in H_n$. Also gilt $B|_{H_n} = \int t\, dP^n$.
Andererseits gilt wegen (7.14) und Satz 2.11 (ii) die Gleichheit $\int \phi\, dE^n = \phi(N_n) = B|_{H_n}$. Wegen Lemma 2.10 erkennen wir, dass aber auch $(E^n)^\phi := E^n(\phi^{-1}(\Delta)), \Delta \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})$, ein Spektralmaß ist, das

$$\int t\, d(E^n)^\phi = \int \phi\, dE^n = B|_{H_n}$$

erfüllt. Aus der Eindeutigkeit des Spektralmaßes für den selbstadjungierten Operator $B|_{H_n}$ folgt daher $P^n = (E^n)^\phi$, bzw. $P^n(\Delta) = E^n(\phi^{-1}(\Delta))$ für alle $\Delta \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})$.
Betrachten wir $\Delta = \{\frac{1}{n+1}\}$, dann gilt

$$\begin{aligned} E^n(\{\lambda \in \mathbb{C} \colon |\lambda| = n^{\frac{1}{2}}\}) &= E^n\left(\phi^{-1}\left(\frac{1}{n+1}\right)\right) \\ &= P^n\left(\left\{\frac{1}{n+1}\right\}\right) = P\left(\left\{\frac{1}{n+1}\right\} \cap \left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right]\right) = P(\emptyset) = 0. \end{aligned}$$

Somit lebt E^n tatsächlich nur auf Δ_n.
Für eine Borelmenge $\Delta \in \mathfrak{B}(\mathbb{C})$ ist $E^n(\Delta)$ eine orthogonale Projektion von H_n auf einen Unterraum von H_n. Offensichtlich ist dann $E^n(\Delta)P_n$ eine orthogonale Projektion von H auf einen Unterraum von H_n, also $\operatorname{ran} E^n(\Delta)P_n \subseteq H_n$.
Für eine Borelmenge $\Delta \in \mathfrak{B}(\mathbb{C})$ definieren wir

$$E(\Delta) := \sum_{n=1}^{\infty} E^n(\Delta)P_n.$$

Da $(E^n(\Delta)P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge orthogonaler Projektionen ist, deren Bildräume paarweise orthogonal sind, konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} E^n(\Delta)P_n$ im starken Sinne, vgl. Bemerkung 2.3.

E ist ein Spektralmaß:
Wir zeigen nun, dass E tatsächlich ein Spektralmaß ist. Dass $E(\Delta), \Delta \in \mathfrak{B}(\mathbb{C})$, eine orthogonale Projektion ist, haben wir schon bemerkt. Klarerweise gilt $E(\emptyset) = 0$ und $E(\mathbb{C}) = I$, da alle $E^n, n \in \mathbb{N}$, Spektralmaße sind und aufgrund von (7.13).
Seien nun $\Delta_1, \Delta_2 \in \mathfrak{B}(\mathbb{C})$, dann gilt

$$\begin{aligned} E(\Delta_1 \cap \Delta_2) &= \sum_{n=1}^{\infty} E^n(\Delta_1 \cap \Delta_2)P_n \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} E^n(\Delta_1)E^n(\Delta_2)P_n \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} E^n(\Delta_1)P_n E^n(\Delta_2)P_n \end{aligned}$$

Die letzte Gleichheit gilt, da $E^n(\Delta_2)$ eine Projektion auf H_n ist und daher $P_nE^n(\Delta_2) = E^n(\Delta_2)$ gilt. Wegen der paarweisen Orthogonalität der $H_n, n \in \mathbb{N}$, folgt

$$\begin{aligned} E(\Delta_1 \cap \Delta_2) &= \left(\sum_{n=1}^{\infty} E^n(\Delta_1)P_n\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty} E^n(\Delta_1)P_n\right) \\ &= E(\Delta_1)E(\Delta_2) \end{aligned}$$

Für eine Borelmenge $\Delta \in \mathfrak{B}(\mathbb{C})$ konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} E^n(\Delta)P_nh, h \in H$, in der Norm von H. Aus der Stetigkeit des Skalarprodukts folgt daher

$$(E(\Delta)h, g) = \sum_{n=1}^{\infty}(E^n(\Delta)P_nh, g), \quad g, h \in H.$$

Seien nun $(\Delta_j)_{j\in\mathbb{N}}$ paarweise disjunkte Borelmengen von $\mathbb{C}$ und seien $g, h \in H$ beliebig. Dann gilt

$$\begin{aligned} \left(E\left(\bigcup_{j=1}^{\infty}\Delta_j\right)h, g\right) &= \sum_{n=1}^{\infty}\left(E^n\left(\bigcup_{j=1}^{\infty}\Delta_j\right)P_nh, g\right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{j=1}^{\infty}E^n(\Delta_j)P_nh, g\right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}(E^n(\Delta_j)P_nh, g) \end{aligned}$$

Die Doppelreihe konvergiert absolut, denn es gilt wegen der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}|(E^n(\Delta_j)P_nh, g)| \leq \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\|(E^n(\Delta_j)P_nh\|\|g\| = \left\|E\left(\bigcup_{j=1}^{\infty}\Delta_j\right)h\right\|\|g\| < \infty.$$

Somit kann die Reihenfolge der Summation vertauscht werden. Also gilt

$$\begin{aligned}
\left(E\Big(\bigcup_{j=1}^{\infty}\Delta_j\Big)h,g\right) &= \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}(E^n(\Delta_j)P_nh,g)\\
&= \sum_{j=1}^{\infty}(E(\Delta_j)h,g)\\
&= \left(\sum_{j=1}^{\infty}E(\Delta_j)h,g\right)
\end{aligned}$$

Da $g,h \in H$ beliebig waren, folgt insgesamt $E(\bigcup_{j=1}^{\infty}\Delta_j) = \sum_{j=1}^{\infty}E(\Delta_j)$.
Damit ist E tatsächlich ein Spektralmaß.

E ist ein Spektralmaß für N:
An dieser Stelle bemerken wir, dass $E(\Delta_n) = E^n(\Delta_n)P_n = P_n$ und $E(\Delta \cap \Delta_n) = E^n(\Delta)$ gilt. Nun sind alle Voraussetzungen aus Beispiel 6.7 gegeben, und zwar mit der auf $\mathbb{C}$ unbeschränkten Funktion $\psi(z) = z$. Dann gilt $\int z\,dE = N_\psi$. Dabei ist N_ψ wegen Bemerkung 6.6 gerade

$$N_\psi h = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\int z\,dE^n\right)E(\Delta_n)h = \sum_{n=1}^{\infty}N_nP_nh \tag{7.17}$$

für $h \in \operatorname{dom} N_\psi = \{h \in H\colon \sum_{n=1}^{\infty}\|N_nP_nh\|^2 < \infty\}$.
Sei also $h \in \operatorname{dom} N_\psi$, dann ist $h = \sum_{n=1}^{\infty}P_nh$ und $\sum_{n=1}^{\infty}\|N(P_nh)\|^2 < \infty$, d.h. die Reihe konvergiert. Da $\sum_{n=1}^{M}P_nh$ für alle $M \in \mathbb{N}$ in $\operatorname{dom} N$ liegt und N abgeschlossen ist, liegt auch $h \in \operatorname{dom} N$, insbesondere gilt in (7.17) die Gleichheit $N_\psi h = Nh$ für $h \in \operatorname{dom} N_\psi$.
Um $\operatorname{dom} N \subseteq \operatorname{dom} N_\psi$ zu zeigen, verwenden wir die Tatsache $P_nN = NP_n$, d.h. $P_nNh = NP_nh$ für $h \in \operatorname{dom} N$. Sei daher $h \in \operatorname{dom} N$, dann gilt wegen $\sum_{n=1}^{\infty}P_n = I$ und der paarweisen Orthogonalität der $P_n, n \in \mathbb{N}$, dass

$$\sum_{n=1}^{\infty}\|NP_nh\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty}\|P_nNh\|^2 = \|Nh\|^2 < \infty,$$

also $h \in \operatorname{dom} N_\psi$. Insgesamt gilt also Gleichheit $Nh = N_\psi h = [\int z\,dE]h$ für alle $h \in \operatorname{dom} N = \operatorname{dom} N_\psi$. Also $N = \int z\,dE$.

Eigenschaft (ii)
Um die Eigenschaft (ii) zu zeigen, sei $A \in \mathcal{B}(H)$ gegeben, sodass $AN \subseteq NA$ und $AN^* \subseteq N^*A$ gilt. Da A überall definiert ist, gilt

$$A(I + N^*N) = A + AN^*N \subseteq A + N^*NA = (I + N^*N)A.$$

Wegen Satz 5.4 (v) folgt daraus

$$BA \subseteq BA(I + N^*N)B \subseteq B(I + N^*N)AB \subseteq AB.$$

Da sowohl BA als auch AB überall definierte Operatoren sind, muss bereits $BA = AB$ gelten. Nach dem Spektralsatz für beschränkte selbstadjungierte Operatoren kommutiert daher A mit allen Projektionen $P(\Delta), \Delta \in \mathfrak{B}(\mathbb{C})$, insbesondere mit $P_n, n \in \mathbb{N}$. Für $n \in \mathbb{N}$ ist daher H_n invariant unter A und für $A_n := A|_{H_n}$ gilt $A_nN_n = N_nA_n$ und $A_nN_n^* = N_n^*A_n$. Nach dem

Spektralsatz für beschränkte normale Operatoren kommutiert A_n mit allen $E^n(\Delta), \Delta \in \mathfrak{B}(\mathbb{C})$. Wegen der Stetigkeit der Hintereinanderausführung von Operatoren gilt

$$AE(\Delta) = A\sum_{n=1}^{\infty} E^n(\Delta)P_n = \sum_{n=1}^{\infty} AE^n(\Delta)P_n = \sum_{n=1}^{\infty} E^n(\Delta)P_n A = E(\Delta)A$$

für alle $\Delta \in \mathfrak{B}(\mathbb{C})$.
Sei ϕ eine Borel-messbare Funktion. Für $g \in \operatorname{dom} A \int \phi\, dE$ und $h \in H$ gilt $E_{g,A^*h}(\Delta) = (E(\Delta)g, A^*h) = (AE(\Delta)g, h) = (E(\Delta)Ag, h) = E_{Ag,h}(\Delta)$ und daher

$$\left(A[\int \phi\, dE]g, h\right) = \left([\int \phi\, dE]g, A^*h\right) = \int \phi\, dE_{g,A^*h} = \int \phi\, dE_{Ag,h} = \left([\int \phi\, dE]Ag, h\right).$$

Also gilt $A[\int \phi\, dE]g = [\int \phi\, dE]Ag$ für alle $g \in \operatorname{dom} A \int \phi\, dE$ und daher $A[\int \phi\, dE] \subseteq [\int \phi\, dE]A$.

Eindeutigkeit von E:
Wir zeigen nun, die Eindeutigkeit des Spektralmaßes.
Sei F ein weiteres Spektralmaß für $\langle \mathbb{C}, \mathfrak{B}(\mathbb{C}), H\rangle$, sodass $N = \int z\, dF$ gilt. Die $F(\Delta), \Delta \in \mathfrak{B}(\mathbb{C})$, vertauschen mit sowohl mit N als auch mit N^*, da F ein Spektralmaß ist, vgl. Lemma 4.4. Mit der Eigenschaft (ii) liefert, dass $F(\Delta)$ mit allen $E(\tilde{\Delta}), \tilde{\Delta} \in \mathfrak{B}(\mathbb{C})$, vertauscht. Daher lässt $F(\Delta)$ den Raum H_n invariant. Wenn man $F^n(\Delta) := F(\Delta)|_{H_n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ definiert, dann erkennt man leicht, dass F_n ein Spektralmaß ist. Offensichtlich gilt dann $F_{g,h} = F^n_{g,h}$ für alle $g, h \in H_n$. Daraus folgt, vgl. (7.16), dass $N_n = \int z\, dF^n$. Wegen der Eindeutigkeit des Spektralmaßes gilt daher $F^n = E^n$.
Außerdem gilt für $n \in \mathbb{N}$ und Δ_n aus (7.15)

$$\begin{aligned} E(\Delta_n) = E^n(\Delta_n)E(\Delta_n) = F^n(\Delta_n)E(\Delta_n) = F(\Delta_n)E(\Delta_n) \\ = E(\Delta_n)F(\Delta_n) = E^n(\Delta_n)F(\Delta_n) = F^n(\Delta_n)F(\Delta_n) = F(\Delta_n). \end{aligned}$$

Also haben wir $P_n = E(\Delta_n) = F(\Delta_n)$. Insgesamt folgt wegen der paarweisen Disjunktheit der $\Delta_n, n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} E(\Delta) &= E\left(\Delta \cap \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \Delta_n\right)\right) = E\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} (\Delta \cap \Delta_n)\right) = \sum_{n=1}^{\infty} E(\Delta \cap \Delta_n) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} E^n(\Delta)P_n = \sum_{n=1}^{\infty} F^n(\Delta)P_n = \sum_{n=1}^{\infty} F^n(\Delta \cap \Delta_n) = F(\Delta) \end{aligned}$$

für jede Borelmenge $\Delta \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})$. Damit gilt $E = F$.

Eigenschaft (i):
Um die Aussage (i) zu beweisen, zeigen wir

$$\sigma(N) = \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} \sigma(N_n)}.$$

Wir definieren $D := \bigcup_{n=1}^{\infty} \sigma(N_n)$. Sei $n \in \mathbb{N}$ und $\lambda \in \sigma(N_n)$, d.h. $N_n - \lambda I$ ist nicht invertierbar in $\mathcal{B}(H_n)$. Wäre $N - \lambda I$ invertierbar in $\mathcal{B}(H)$, so würde $(N - \lambda I)^{-1}$ existieren. Dann wäre H_n auch invariant unter $(N - \lambda I)^{-1}$ wegen der Invarianz von H_n unter $N - \lambda I$. Somit wäre $(N - \lambda I)^{-1}|_{H_n}$ die Inverse von $N_n - \lambda I$ in $\mathcal{B}(H_n)$, was aber ein Widerspruch zu $\lambda \in \sigma(N_n)$ ist.

Daher gilt $D \subseteq \sigma(N)$. Da das Spektrum $\sigma(N)$ eines Operators immer abgeschlossen ist, es ist bekanntlicherweise sogar kompakt, gilt damit

$$\overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} \sigma(N_n)} \subseteq \sigma(N).$$

Für die umgekehrte Inklusion nehmen wir $\lambda \notin \overline{D}$ an. Dann hat λ sicher einen positiven Abstand zu $\overline{D}$, d.h. $\operatorname{dist}(\lambda, \overline{D}) \geq \delta$ mit $\delta > 0$. Für $n \in \mathbb{N}$ gilt $\sigma(N_n) \subseteq \overline{D}$, also muss der Abstand größer werden, das bedeutet $\operatorname{dist}(\lambda, \sigma(N_n)) \geq \operatorname{dist}(\lambda, \overline{D}) \geq \delta$.
Die Inverse zu $N_n - \lambda I = \int t - \lambda \, dE^n$ ist gerade $\int (t-\lambda)^{-1} \, dE^n$. Daher folgt

$$\|(N_n - \lambda I)^{-1}\| = \left\| \int \frac{1}{t-\lambda} \, dE^n \right\| \leq \left\| \frac{1}{t-\lambda} \right\|_\infty = \frac{1}{\inf\{|t-\lambda| \colon t \in \sigma(N_n)\}} = \frac{1}{\operatorname{dist}(\lambda, \sigma(N_n))} \leq \frac{1}{\delta}$$

Betrachten wir den Operator $A := \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} (N_n - \lambda I)^{-1}$ auf $\bigoplus_{n\in\mathbb{N}} H_n$. Wegen

$$\|A((h_n)_{n\in\mathbb{N}})\| = \sum_{n=1}^{\infty} \|(N_n - \lambda I) h_n\| \leq \frac{1}{\delta} \sum_{n=1}^{\infty} \|h_n\| = \frac{1}{\delta} \|(h_n)_{n\in\mathbb{N}}\|$$

ist A ein beschränkter Operator. Wegen Bemerkung 6.6 ist A die Inverse zu $\bigoplus_{n\in\mathbb{N}} (N_n - \lambda I) \cong N - \lambda I$. Daher ist $A \cong (N - \lambda I)^{-1}$ und daher $\lambda \notin \sigma(N)$.
Nun können wir die Behauptung von (i) zeigen. Sei Δ eine Borelmenge, sodass $\Delta \cap \sigma(N) = \emptyset$. Nach dem gerade Gezeigten gilt daher $\Delta \cap \sigma(N_n) = \emptyset$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Daher ist $E^n(\Delta) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, woraus wir sofort $E(\Delta) = 0$ folgern können. $\square$

8 Multiplikationsoperatoren

Definition 8.1. Sei H ein Hilbertraum und N ein abgeschlossener normaler Operator auf H. Ein Element $u \in H$ heißt **zyklisch** in H bzgl. N, falls $u \in \operatorname{dom}((N^*)^k N^\ell)$ für alle $k, \ell \in \mathbb{N}$ erfüllt ist und

$$H = \overline{\{(N^*)^k N^\ell u \colon n, m \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}} \tag{8.18}$$

Bemerkung 8.2. Ist $N \in \mathcal{B}(H)$ normal und $u \in H$ zyklisch, dann muss nur (8.18) gelten, denn die Bedingung $u \in \operatorname{dom}((N^*)^k N^\ell)$ für alle $k, \ell \in \mathbb{N}$ ist dann trivial erfüllt.

Definition 8.3. Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und μ ein positives Maß auf X. Bezeichnet $\mathcal{U}(z)$ den Umgebungsfilter von $z \in X$, so nennen wir

$$\operatorname{supp} \mu := \{z \in X : \forall V \in \mathcal{U}(z) \Rightarrow \mu(V) > 0\}$$

den **Träger** von μ.
Zwei positive Maße μ, ν auf $(X, \mathcal{T})$ heißen zueinander **singulär**, falls es zwei disjunkte Mengen $A, B \in \mathcal{T}, A \cup B = X$, sodass $\mu(A) = 0$ und $\mu(B) = 0$, d.h. dass μ und ν eigentlich auf zwei disjunkten Mengen leben.

Satz 8.4. *Sei H ein Hilbertraum, $N \in \mathcal{B}(H)$ normal und $u \in H$ zyklisch. Dann existiert ein endliches, nichtnegatives Borelmaß μ auf $\mathbb{C}$ und eine unitäre Abbildung $U \colon L^2(\mu) \to H$, d.h. $U^{-1} = U^*$, sodass gilt:*

(i) $\operatorname{supp} \mu = \sigma(N)$

(ii) $U(\mathbb{1}) = u$

(iii) $N \circ U = U \circ M_z$

Dabei ist $M_z \colon L^2(\mu) \to L^2(\mu), f \mapsto (z \mapsto z f(z))$ ein Multiplikationsoperator.

Beweis. Der Beweis ist in [F2] ausgeführt. □

Bemerkung 8.5. Das Maß μ in Satz 8.4 ist genau $E_{u,u}$, wobei u das zyklische Element von H ist, E das Spektralmaß zu N. Dabei ist dann $E_{u,u}$ das positive Borelmaß nach Lemma 2.4.

Beispiel 8.6. Wir bezeichnen mit $\mathbb{C}[z, \overline{z}]$ die Menge aller Polynome in z und $\overline{z}$ auf $\mathbb{C}$.
Sei μ ein endliches Maß auf $\mathbb{C}$, sodass $\mathbb{C}[z, \overline{z}] \subseteq L^2(\mu)$ gilt und sodass $\mathbb{C}[z, \overline{z}]$ dicht in $L^2(\mu)$ liegt. Sei $D_z = \{f \in L^2(\mu) \colon z f \in L^2(\mu)\}$ und definiere

$$M_z \colon \begin{cases} D_z \subseteq L^2(\mu) & \to L^2(\mu) \\ f & \mapsto (z \mapsto z f(z)) \end{cases}$$

Definiere analog $D_{\overline{z}}$ und $M_{\overline{z}}$, wobei sogar $D_{\overline{z}} = D_z$ gilt.
Dann ist M_z ein abgeschlossener normaler Operator auf $L^2(\mu)$ und seine Adjungierte ist $M_{\overline{z}}$, d.h.

$$(M_z)^* = M_{\overline{z}}.$$

M_z ist dicht definiert, denn es gilt $\mathbb{C}[z, \overline{z}] \subseteq D_z$ und nach Voraussetzung ist die Menge der Polynome $\mathbb{C}[z, \overline{z}]$ dicht in $L^2(\mu)$.

Wir zeigen nun, dass M_z abgeschlossen ist. Dabei identifizieren wir, M_z mit seinem Graph. Sei $((f_n; M_z f_n))_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in M_z, die gegen $(f;g) \in L^2(\mu)\times L^2(\mu)$ konvergiert, d.h. $f_n \to f$ und $M_z f_n \to g$ in $L^2(\mu)$. Da $L^2(\mu)$ vollständig ist, haben wir $f,g \in L^2(\mu)$. Nun gilt $zf_n \to zf$ in $L^2(\mu)$ und wegen der Eindeutigkeit des Grenzwertes muss daher $zf = g \in L^2(\mu)$ sein. Einerseits erhalten wir $f \in \mathrm{dom}_\mu$ und andererseits $(f;g) = (f;zf) \in M_z$.
Nun berechnen wir die Adjungierte zu M_z im Sinne von linearen Relationen. Wir wissen bereits aus Korollar 3.18, dass die Adjungierte ein dicht definierter, abgeschlossener Operator ist. Sei $(u;v) \in (M_z)^*$, dann gilt für alle $f \in D_z$

$$(v,f) = (u, M_z f) = \int_{\mathbb{C}} u(z)\overline{zf(z)}\,d\mu(z) = \int_{\mathbb{C}} (u(z)\overline{z})\overline{f(z)}\,d\mu(z) = (\overline{z}u, f).$$

Wegen der Dichtheit von D_z muss somit $v = \overline{z}u$ gelten.
Der adjungierte Operator zu M_z ist tatsächlich $M_{\overline{z}}$ und offensichtlich gilt $M_z M_{\overline{z}} = M_{\overline{z}} M_z$, also ist M_z normal.
Dabei ist $\mathbb{1}_{\mathbb{C}}$ ein zyklisches Element von $L^2(\mu)$.
Es sei noch bemerkt, dass zum Beispiel das Maß $\mu(\Delta) = \int_\Delta e^{|z|} d\lambda(z), \Delta \in \mathfrak{B}(\mathbb{C})$ die geforderten Eigenschaften erfüllt, wobei mit λ das Lebesguemaß auf $\mathbb{C}$ gemeint ist.

Satz 8.7. *Sei H ein Hilbertraum, N ein abgeschlossener normaler Operator und $u \in H$ zyklisch. Dann existiert ein endliches, nichtnegatives Borelmaß μ auf $\mathbb{C}$ und eine unitäre Abbildung $U\colon L^2(\mu) \to H$, d.h. $U^{-1} = U^*$, sodass gilt:*

(i) $U(\mathbb{1}) = u$

(ii) $N \circ U = U \circ M_z$

Dabei ist $M_z\colon L^2(\mu) \to L^2(\mu), f \mapsto (z \mapsto zf(z))$ ein Multiplikationsoperator.

Beweis. Sei E das Spektralmaß zu N. Wie im Beweis des Spektralsatzes für unbeschränkte normale Operatoren, bezeichne $B = (I + N^*N)^{-1}$ den beschränkten Operator aus Satz 5.4. Sei P das Spektralmaß zu B und $H_n := P(\Delta_n)H$ mit $\Delta_n = (1/(n+1), 1/n]$ für $n \in \mathbb{N}$. Mit N_n bezeichen wir die Einschränkung $N_n := N|_{H_n}$ und sei E^n das Spektralmaß von N_n. Dann gilt für $\Delta \in \mathfrak{B}(\mathbb{C})$

$$E(\Delta) = \sum_{n=1}^{\infty} E^n(\Delta) P_n. \tag{8.19}$$

Wir können nun $H \cong \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} H_n$ identifizieren und nach Bemerkung 6.6 auch $N \cong \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} N_n =: \tilde{N}$.
Da $u \in H$ zyklisch ist, gilt

$$H = \overline{\{(N^*)^k N^\ell u \colon k,\ell \in \mathbb{N}\cup\{0\}\}}.$$

Definiere $G := \{(N^*)^k N^\ell u \colon k,\ell \in \mathbb{N}\cup\{0\}\}$ und für $n \in \mathbb{N}$ sei $u_n := P(\Delta)u$.
Wir zeigen nun für $n \in \mathbb{N}$, dass u_n ein zyklisches Element für den Hilbertraum H_n bzgl. N_n ist. Dazu betrachten wir das orthongonale Komplement von $P(\Delta)G$ im Hilbertraum H_n. Für $h_n \in (P(\Delta)G)^\perp$ gilt

$$0 = (h_n, P(\Delta)(N^*)^k N^\ell u) = (h_n, (N^*)^k N^\ell u), \quad k,\ell \in \mathbb{N}\cup\{0\}.$$

Da G dicht in H liegt, muss bereits $h_n = 0$ sein und wir erhalten $(P(\Delta)G)^\perp = \{0\}$ bzw. $\overline{P(\Delta)G} = H_n$. Da $P(\Delta_n)$ mit N und N^* kommutiert, sind die Elemente von $P(\Delta)G$ von der Gestalt

$$P(\Delta)(N^*)^k N^\ell u = (N^*)^k N^\ell P(\Delta)u = (N_n^*)^k N_n^\ell P(\Delta)u = (N_n^*)^k N_n^\ell u_n.$$

Daher ist u_n tatsächlich ein zyklisches Element von H_n bzgl. N_n.
Nach Satz 8.4 existiert ein nichtnegatives Borelmaß μ_n auf $\mathbb{C}$ und eine unitäre Abbildung $U_n\colon L^2(\mu_n) \to H_n$, sodass $\operatorname{supp}(\mu_n) = \sigma(N_n)$, $U_n(\mathbb{1}) = u_n$ und $N_n \circ U = U \circ M_{z,\mu_n}$ mit dem Multiplikationsoperator M_{z,μ_n} auf $L^2(\mu_n)$. Dabei ist $\mu_n = E^n_{u_n,u_n}$, wobei E^n das Spektralmaß von N_n ist.
Wegen (8.19) und $u_n \in H_n$ gilt

$$E_{u_n,u_n}(\Delta) = (E(\Delta)u_n, u_n) = (E^n(\Delta)u_n, u_n) = E^n_{u_n,u_n}(\Delta), \quad \Delta \in \mathfrak{B}(\mathbb{C})$$

und daher $\mu_n = E^n_{u_n,u_n} = E_{u_n,u_n}$.
Wie wir im Beweis des Spektralsatzes gesehen haben, lebt für $n \in \mathbb{N}$ das Spektralmaß E^n, und daher auch μ_n, auf der Menge $\Delta_n := \{\lambda \in \mathbb{C}\colon (n-1)^{\frac{1}{2}} \leq |\lambda| < n^{\frac{1}{2}}\}$. Wegen der paarweisen Disjunktheit der $\Delta_n, n \in \mathbb{N}$, sind die Maße $\mu_n, n \in \mathbb{N}$, paarweise zueinander singulär. Nun gilt

$$\begin{aligned}
E_{u,u}(\Delta) = (E(\Delta)u, u) &= \left(E(\Delta)\Big(\sum_{n=1}^{\infty} u_n\Big), \sum_{n=1}^{\infty} u_n\right) \\
&= \left(\sum_{n=1}^{\infty} E(\Delta)u_n, \sum_{n=1}^{\infty} u_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty}(E(\Delta)u_n, u_n) = \sum_{n=1}^{\infty} E_{u_n,u_n}(\Delta) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n(\Delta).
\end{aligned}$$

Wir definieren $\mu := E_{u,u}$ und $\tilde{U} := \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} U_n$, vgl. Bemerkung 6.6. Dabei ist $\tilde{U}$ ein Operator von $\bigoplus_{n\in\mathbb{N}} H_n$ nach $\bigoplus_{n\in\mathbb{N}} L^2(\mu_n)$ mit

$$\operatorname{dom} \tilde{U} = \{(h_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} H_n\colon \sum_{n=1}^{\infty} \|U_n h_n\|^2_{L^2(\mu_n)} < \infty\}$$

Da aber alle $U_n, n \in \mathbb{N}$, als unitäre Operatoren isometrisch sind, gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|U_n h_n\|^2_{L^2(\mu_n)} = \sum_{n=1}^{\infty} \|h_n\|^2_{H_n} = \|(h_n)_{n\in\mathbb{N}}\|^2 < \infty$$

für alle $(h_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} H_n$. Somit ist $\tilde{U}$ überall definiert.
Analog definieren wir $\tilde{M}_z := \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} M_{z,\mu_n}$ einen Multiplikationsoperator auf $\bigoplus_{n\in\mathbb{N}} H_n$ mit

$$\operatorname{dom} \tilde{M}_z = \{(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} L^2(\mu_n)\colon \sum_{n=1}^{\infty} \|M_{z,\mu_n} f_n\|^2_{L^2(\mu_n)} < \infty\}$$

Da die $\mu_n, n \in \mathbb{N}$, paarweise singulär zueinander sind, können wir $\bigoplus_{n\in\mathbb{N}} L^2(\mu_n) \cong L^2(\mu)$ identifizieren. Es ist leicht nachzuprüfen, dass $\|f\|^2_{L^2(\mu)} = \sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|^2_{L^2(\mu_n)}$, wobei $f|_{\operatorname{supp}\mu_n} = f_n$ für $n \in \mathbb{N}$ ist und außerhalb von $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \operatorname{supp}\mu_n$ beliebig ist.
Offensichtlich gilt $\tilde{N} \circ \tilde{U} = \tilde{U} \circ \tilde{M}_z$. Seien nun $M_z\colon L^2(\mu) \to L^2(\mu)$ und $U\colon H \to L^2(\mu)$ die entsprechenden Abbildungen zu $\tilde{M}_z$ und $\tilde{U}$, dann ist mit $\tilde{U}$ auch U überall definiert. Außerdem gilt

$$N \circ U = U \circ M_z.$$

Abschließend können wir mit Bemerkung 6.6 (*ii*) und (*iv*) folgern, dass U tatsächlich unitär ist.
□

Literatur

[F] H.Woracek, M.Kaltenbäck, M.Blümlinger: *Funtionalanalysis*, Skriptum, 5.Auflage, 2009

[F2] M.Kaltenbäck, M.Weberndorfer: *Funtionalanalysis II*, Skriptum, 2010

[R] W.Rudin: *Functional Analysis*, Second Edition

[C] J.B.Conway: *A Course in Functional Analysis*, Springer Verlag, New York 1985