# Bachelorarbeit: Operatortheorie auf Tensorprodukten von Banachräumen

Philip Scheberan

26. November 2018

# Inhaltsverzeichnis

## 0.1 Einleitung

Diese Arbeit beschäftigt sich mit dem Tensorprodukt von Banachräumen. Das Tensorprodukt ist eine algebraische Konstruktion, welche oft in der Physik Anwendung findet, wobei man dabei meist das Tensorprodukt von Hilberträumen betrachtet.
Wenn man etwas allgemeiner das Tensorprodukt von Banachräumen beleuchtet, erhält man einige sehr interessante Resultate.

Im ersten Kapitel wird zuerst das Tensorprodukt als algebraische Konstruktion vorgestellt. Wir definieren dabei das Tensorprodukt zweier Vektorräume als Teilraum der linearen Funktionale auf dem Raum aller Bilinearformen auf diesen Vektorräumen. Wenn man das Tensorprodukt zweier Banachräume bildet, induziert dieses auf intuitive Art und Weise zwei Normen, die projektive und injektive Norm. Der Aufbau des Kapitels und die vorgestellten Resultate und Beweise orientieren sich dabei großteils an [Ry].

Im zweiten Kapitel werden die zuvor konstruierten Normen etwas genauer studiert. Dabei stehen die Klassen der nuklearen, integralen und Pietsch-integralen Operatoren im Zentrum. Als Grundlage für die vorgestellten Resultaten dienen dabei [Ry] und [DU].

## 0.2 Notation und einführende Bemerkungen

Die nachfolgenden Resultate über das algebraische Tensorprodukt wurden für Vektorräume über $\mathbb{C}$ formuliert, können jedoch auch allgemeiner für einen beliebigen Skalarkörper auf die gleiche Art und Weise gezeigt werden.

Im weiteren betrachten wir Banachräume über $\mathbb{C}$ und bezeichnen für einen Banachraum $X$ dessen algebraischen Dualraum mit $X^*$ und dessen topologischen mit $X'$. Elemente von $X^*$ werden üblicherweise mit $x^*$ bezeichnet, Elemente von $X'$ mit $x'$.
Wir bezeichnen mit $K_1^X(0)$ die abgeschlossene Kugel in $X$ mit Radius 1 um die Null.
Für $x \in X$ und $x^* \in X^*$ verwenden wir meist die Notation für duale Paare. Wir schreiben $\langle x, x^* \rangle := x^*(x)$.

Sind zwei Räume $X$ und $\tilde{X}$ isomorph zueinander, schreiben wir $X \simeq \tilde{X}$. Sind sie isometrisch isomorph zueinander, schreiben wir $X \cong \tilde{X}$.

Für einen Maßraum $(\Omega, \Sigma, \mu)$ bezeichnen wir mit $L_1(\mu)$ die Äquivalenzklassen aller betragsmäßig integrierbaren Funktionen und mir $L_\infty(\mu)$ die Äquivalenzklassen aller Funktionen, deren wesentliches Supremum endlich ist. Wir bezeichnen mit $|\mu|(\Omega)$ die Variation des Maßes $\mu$.

# Kapitel 1

# Tensorprodukte von Banachräumen

Dieses Kapitel behandelt zuerst das Tensorprodukt zweier Vektorräume im rein algebraischen Sinn und wie dieses konkret konstruiert werden kann. Setzt man zusätzlich voraus, dass diese Vektorräume Banachräume sind, kann man ausgehend von den gegebenen Normen die projektive und injektive Norm auf dem Tensorprodukt definieren. Nach Vervollständigung des Tensorproduktes unter diesen Normen erhalten wir jene Banachräume, die im Zentrum dieser Arbeit stehen.

## 1.1 Das algebraische Tensorprodukt

Sind $X$, $Y$ und $Z$ Vektorräume über $\mathbb{C}$, so heißt eine Abbildung $A : X \times Y \to Z$, vom kartesischen Produkt $X \times Y$ nach $Z$ *bilinear*, falls

$$A(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, y) = \alpha_1 A(x_1, y) + \alpha_2 A(x_2, y) \text{ und}$$
$$A(x, \beta_1 y_1 + \beta_2 y_2) = \beta_1 A(x, y_1) + \beta_2 A(x, y_2)$$

für alle $x, x_1, x_2 \in X$, $y, y_1, y_2 \in Y$ und für alle Skalare $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{C}$.
Wir bezeichnen mit $B(X \times Y, Z)$ als die Menge aller bilinearen Abbildungen von $X \times Y$ nach $Z$. Man zeigt unschwer, dass dieser Raum ein Vektorraum ist. Im Fall $Z = \mathbb{C}$ spricht man von Bilinearformen und schreibt kurz $B(X \times Y)$. Für $x \in X$ und $y \in Y$ definieren wir $x \otimes y$ als das Punktauswertungsfunktional im Punkt $(x, y)$, also

$$x \otimes y : \begin{cases} B(X \times Y) & \to & \mathbb{C} \\ A & \mapsto & A(x, y) \end{cases},$$

für jede Bilinearform $A$ auf $X \times Y$. Im folgenden Abschnitt betrachten wir vorerst nur den Fall $Z = \mathbb{C}$.

**Definition 1.1** Sind $X$ und $Y$ Vektorräume über $\mathbb{C}$, dann bezeichnet man mit $X \otimes Y$ den Unterraum von $B(X \times Y)^*$, der durch alle Elemente der Form $x \otimes y$ aufgespannt wird. Diesen Raum nennt man *das (algebraische) Tensorprodukt* von $X$ und $Y$. Die Elemente des Tensorproduktes heißen *Tensoren.*

Ein Tensor $v$ in $X \otimes Y$ hat also die Form

$$v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (x_i \otimes y_i)$$

für $n \in \mathbb{N}$, $x_i \in X$, $y_i \in Y$ und komplexe $\lambda_i \in \mathbb{C}$.
Aus der Tatsache, dass Elemente der Form $x \otimes y$ auf bilinearen Abbildungen wirken, folgt auch die Bilinearität der Abbildung

$$\tau : \left\{ \begin{array}{ccc} X \times Y & \to & X \otimes Y \\ (x, y) & \mapsto & x \otimes y \end{array} \right. .$$

**Korollar 1.2** Für $x, x_1, x_2 \in X$, $y, y_1, y_2 \in Y$ und $\lambda \in \mathbb{C}$ gilt

(i) $(x_1 + x_2) \otimes y = x_1 \otimes y + x_2 \otimes y$,

(ii) $x \otimes (y_1 + y_2) = x \otimes y_1 + x \otimes y_2$,

(iii) $\lambda(x \otimes y) = (\lambda x) \otimes y = x \otimes (\lambda y)$,

(iv) $0 \otimes y = x \otimes 0 = 0$.

Die Darstellung eines Tensors als Linearkombination von Elementen der Form $x \otimes y$ ist im Allgemeinen nicht eindeutig. Auf die Frage, ob eine Linearkombination dem Nulltensor entspricht, geht das folgende Resultat ein.

**Proposition 1.3** Sind $X$ und $Y$ Vektorräume über $\mathbb{C}$, $M \subseteq X^*$ eine punktetrennende Teilmenge von $X^*$ und $N \subseteq Y^*$ eine punktetrennende Teilmenge von $Y^*$, also $x^*(x) = 0$ für alle $x^* \in M$ impliziert $x = 0$, $y^*(y) = 0$ für alle $y^* \in N$ impliziert $y = 0$. Dann sind für $v = \sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i \in X \otimes Y$ folgende Aussagen äquivalent:

(i) $v = 0$;

(ii) $\sum_{i=1}^{n} x^*(x_i) y^*(y_i) = 0$, für alle $x^* \in M$, $y^* \in N$;

(iii) $\sum_{i=1}^{n} x^*(x_i) y_i = 0$, für alle $x^* \in M$;

(iv) $\sum_{i=1}^{n} y^*(y_i) x_i = 0$, für alle $y^* \in N$.

*Beweis.*

(i) $\Rightarrow$ (ii): Seien $x^* \in M$ und $y^* \in N$ gegeben. Wir definieren die Bilinearform $B$ durch $B(x, y) = x^*(x) y^*(y)$. Es folgt $0 = v(B) = \sum_{i=1}^{n} x^*(x_i) y^*(y_i)$.

(ii) $\Rightarrow$ (iii): Weil $N$ eine punktetrennende Teilmenge von $Y^*$ ist, folgt aus $0 = \sum_{i=1}^{n} x^*(x_i) y^*(y_i) = y^*\big(\sum_{i=1}^{n} x^*(x_i) y_i\big)$ für alle $y^* \in N$, dass $\sum_{i=1}^{n} x^*(x_i) y_i = 0$.

(iii) $\Rightarrow$ (i): Sei $v = \sum_{i=1}^n x_i \otimes y_i \neq 0$. O.B.d.A. können wir annehmen, dass $y_1, \dots, y_n$ linear unabhängig sind. Denn falls $y_n = \sum_{j=1}^{n-1} \lambda_j y_j$ mit $\lambda_1, \dots \lambda_n \in \mathbb{C}$, dann folgt

$$\begin{aligned} v &= \sum_{i=1}^{n-1} x_i^* \otimes y_i + x_n^* \otimes \big(\sum_{j=1}^{n-1} \lambda_j y_j\big) \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} (x_i^* + \lambda_i x_n^*) \otimes y_i. \end{aligned}$$

Wegen $0 \otimes y = 0$ können wir zusätzlich $x_1 \neq 0$ annehmen. Weil $M$ eine punktetrennende Teilmenge von $X^*$ ist, existiert ein $x^* \in M$, sodass $x^*(x_1) \neq 0$. Da der Nullvektor nur trivial aus $y_1, \dots, y_n$ linearkombiniert werden kann, ist auch $\sum_{i=1}^n x^*(x_i) y_i$ ungleich dem Nullvektor.

Auf genau die gleiche Weise beweist man (ii) $\Rightarrow$ (iv) und (iv) $\Rightarrow$ (i). $\square$

*Bemerkung 1.4* Für $v \in X \otimes Y$ stimmt die Summe aus Proposition 1.3 (ii) überein mit $v(B_{x^*,y^*})$, wobei $B_{x^*,y^*}$ die durch $B_{x^*,y^*}(x,y) = x^*(x) y^*(y)$ definierte Bilinearform ist.

**Proposition 1.5** Sind $X$, $Y$ und $Z$ Vektorräume über $\mathbb{C}$, dann ist die durch

$$\Psi(B)(v) = \sum_{i=1}^n B(x_i, y_i), \qquad v = \sum_{i=1}^n x_i \otimes y_i$$

definierte Abbildung eine lineare Bijektion $\Psi : B(X \times Y, Z) \to L(X \otimes Y, Z)$.

*Beweis.* Sei $B : X \times Y \to Z$ eine bilineare Abbildung. Wir definieren die Abbildung $\tilde{B} : X \otimes Y \to Z$ durch $\tilde{B}\big(\sum_{i=1}^n x_i \otimes y_i\big) = \sum_{i=1}^n B(x_i, y_i)$. Damit diese Abbildung wohldefiniert ist, müssen wir zeigen, dass die Definition unabhängig von der gewählten Darstellung von $v$ ist, also dass aus $v = \sum_{i=1}^n x_i \otimes y_i = \sum_{i=1}^n \hat{x}_i \otimes \hat{y}_i$ immer $\sum_{i=1}^n B(x_i, y_i) = \sum_{i=1}^n B(\hat{x}_i, \hat{y}_i)$ folgt. Dazu reicht es, aus $\sum_{i=1}^n x_i \otimes y_i = 0$ die Beziehung $\sum_{i=1}^n B(x_i, y_i) = 0$ zu folgern. Falls $\sum_{i=1}^n x_i \otimes y_i = 0$, so ist für jedes $z^* \in Z^*$ die Zusammensetzung $z^* \circ B$ ein bilineares Funktional, welches

$$z^*\big(\sum_{i=1}^n B(x_i, y_i)\big) = \sum_{i=1}^n z^* \circ B(x_i, y_i) = \big\langle z^* \circ B, \sum_{i=1}^n x_i \otimes y_i \big\rangle = 0$$

erfüllt. Nachdem dies für alle $z \in Z^*$ gilt, folgt $\sum_{i=1}^n B(x_i, y_i) = 0$. Also ist die Abbildung $\Psi(B) = \tilde{B}$ eine wohldefinierte und offensichtlich lineare Abbildung von $X \otimes Y$ nach $Z$. Um die Bijektivität von $\Psi$ zu zeigen, definieren wir uns explizit die Inverse. Für $S \in L(X \otimes Y, Z)$ folgt aus der Bilinearität der Abbildung $\tau : (x,y) \mapsto x \otimes y$, dass die Zusammensetzung $S \circ \tau$ ein Element von $B(X \times Y, Z)$ ist. Man erkennt leicht, dass $\Psi(S \circ \tau) = S$ und $(\Psi(B) \circ \tau)(x,y) = \Psi(B)(x \otimes y) = B(x,y)$ für $B \in B(X \times Y, Z)$ gilt. Also ist $\Psi$ eine Bijektion mit Inverse $\Psi^{-1} : S \mapsto S \circ \tau$. $\square$

**Korollar 1.6** Sind $X$ und $Y$ Vektorräume über $\mathbb{C}$, dann gilt

$$(X \otimes Y)^* \simeq B(X \times Y).$$

**Definition 1.7** Die letzten beiden Resultate prägen die Begriffsbildung, eine bilineare Abbildung zu *linearisieren*. Gemeint ist dabei die Identifikation von $B \in B(X \times Y, Z)$ mit der Abbildung $\tilde{B} = \Psi(B) \in L(X \otimes Y, Z)$, wie sie im Beweis konstruiert wurde.

**Korollar 1.8** Sind $X, Y, Z, W$ Vektorräume über $\mathbb{C}$ und $S : X \to Z$, $T : Y \to W$ lineare Abbildungen, dann existiert eine lineare Abbildung

$$S \otimes T : \begin{cases} X \otimes Y & \to & Z \otimes W \\ x \otimes y & \mapsto & Sx \otimes Ty \end{cases}$$

für alle $x \in X$ und $y \in Y$.

*Beweis.* Die Abbildung $(x, y) \mapsto (Sx) \otimes (Sy) \in Z \otimes W$ ist wohldefiniert und bilinear für alle $x \in X$ und $y \in Y$. Somit folgt die Aussage aus Proposition 1.5. □

### Tensoren als lineare und bilineare Abbildungen

Wir haben das Tensorprodukt als Teilraum linearer Funktionale auf $B(X \times Y)$ definiert. Es gibt jedoch andere Vorgehensweisen, das Tensorprodukt zu konstruieren. Im folgenden Abschnitt werden weitere Möglichkeiten diskutiert, wie Tensoren verstanden werden können.

**Proposition 1.9** Seien $X$ und $Y$ Vektorräume über $\mathbb{C}$ und für $x \in X$ und $y \in Y$ sei $B_{x,y} \in B(X^* \times Y^*)$ definiert durch $B_{x,y}(x^*, y^*) = x^*(x)y^*(y)$. Dann ist durch

$$\iota : \begin{cases} X \otimes Y & \to & B(X^* \times Y^*) \\ x \otimes y & \mapsto & B_{x,y} \end{cases},$$

eine lineare, injektive Abbildung definiert.

*Beweis.* Offensichtlich ist die Abbildung $(x, y) \mapsto B_{x,y} \in B(X^* \times Y^*)$ bilinear, womit aus Proposition 1.5 folgt, dass eine eindeutige, lineare Abbildung $\iota : X \otimes Y \to B(X^* \times Y^*)$ existiert mit $\iota(x \otimes y) = B_{x,y}$. Aus $\sum_{i=1}^n B_{x_i,y_i} = 0$ folgt wegen Proposition 1.3 mit $M = X^*$ und $N = Y^*$, dass $\sum_{i=1}^n x_i \otimes y_i = 0$. Also ist $\iota$ injektiv. □

**Proposition 1.10** Seien $X$ und $Y$ Vektorräume über $\mathbb{C}$ und $L_{x,y} \in L(X^*, Y)$ sowie $R_{x,y} \in L(Y^*, X)$ definiert durch $L_{x,y} : x^* \mapsto x^*(x)y$ und $R_{x,y} : y^* \mapsto y^*(y)x$ für alle $x \in X$ und $y \in Y$. Dann sind durch

$$\iota_L : \begin{cases} X \otimes Y & \to & L(X^*, Y) \\ (x \otimes y) & \mapsto & L_{x,y} \end{cases} \quad \text{und} \quad \iota_R : \begin{cases} X \otimes Y & \to & L(Y^*, X) \\ (x \otimes y) & \mapsto & R_{x,y} \end{cases}$$

injektive und lineare Abbildungen definiert.

*Beweis.* Offensichtlich sind die Abbildungen $(x, y) \mapsto L_{x,y}$ und $(x, y) \mapsto R_{x,y}$ bilinear. Damit existieren wegen Proposition 1.5 zwei eindeutige lineare Abbildungen $\iota_L : X \otimes Y \to L(X^*, Y)$ und $\iota_R : X \otimes Y \to L(Y^*, X)$ mit $\iota_L(x \otimes y) = L_{x,y}$ und $\iota_R(x \otimes y) = R_{x,y}$.
Für $v = \sum_{i=1}^n x_i \otimes y_i$ gilt

$$\iota_L(v)(x^*) = \sum_{i=1}^n x^*(x_i) y_i \quad \text{und} \quad \iota_R(y^*) = \sum_{i=1}^n y^*(y_i) \otimes x_i.$$

Weil aus $\sum_{i=1}^n x^*(x_i) y_i = 0$ bzw. $\sum_{i=1}^n y^*(y_i) \otimes x_i = 0$ wegen Proposition 1.3 mit $M = X^*$ und $N = Y^*$ immer $v = 0$ folgt, sind $\iota_L$ und $\iota_R$ injektiv. □

**Proposition 1.11** Seien $X$ und $Y$ Vektorräume über $\mathbb{C}$ und $L_{x^*,y} \in L(X, Y)$ definiert durch $L_{x^*,y} : x \mapsto x^*(x)y$ für alle $x^* \in X$ und $y \in Y$ und $R_{x,y^*} \in L(Y, X)$ definiert durch $L_{x^*,y} : y \mapsto y^*(y)x$ für alle $x \in X$ und $y^* \in Y$. Dann sind durch

$$\iota_L : \begin{cases} X^* \otimes Y & \to & L(X, Y) \\ (x^* \otimes y) & \mapsto & L_{x^*,y} \end{cases}, \qquad \iota_R : \begin{cases} X \otimes Y^* & \to & L(Y, X) \\ (x \otimes y^*) & \mapsto & R_{x,y^*} \end{cases}$$

injektive und lineare Abbildungen definiert.

*Beweis.* Offensichtlich ist die Abbildung $(x^*, y) \mapsto L_{x^*,y}$ bilinear, weshalb mit Proposition 1.5 eine eindeutige lineare Abbildung $\iota_L : X^* \otimes Y \to L(X, Y)$ existiert mit $\iota_L(x^* \otimes y) = L_{x^*,y}$. Es bleibt die Injektivität zu zeigen.
Sei $v = \sum_{i=1}^n x_i^* \otimes y_i \in X^* \otimes Y$ ungleich Null. Ist $\iota_X$ die kanonische Einbettung von $X$ nach $X^{**}$, dann ist $\iota_X(X)$ eine punktetrennende lineare Teilmenge von $X^*$. Gemäß Proposition 1.3 existiert ein $x \in X$, sodass $\sum_{i=1}^n \iota_X(x)(x_i^*) y_i = \sum_{i=1}^n x_i^*(x) y_i \neq 0$. Also ist $\iota_L$ injektiv. Ähnlich verfährt man mit $\iota_R : X \otimes Y^* \to L(Y, X)$. □

*Bemerkung 1.12* Die Einbettungen aus den Propositionen 1.9-1.11 bezeichnen wir als die kanonischen Einbettungen der jeweiligen Tensorprodukte in die entsprechenden Räume bilinearer oder linearer Funktionen.

## 1.2 Das Tensorprodukt von Banachräumen

### Das projektive Tensorprodukt

Sind $X$ und $Y$ zwei Banachräume, $x \in X$ und $y \in Y$, dann liegt es nahe, dass eine Norm auf dem Tensorprodukt die Ungleichung

$$\|x \otimes y\| = \|x\| \, \|y\|$$

erfüllt. Diese Tatsache führt zu folgender Definition einer Norm.

**Satz 1.13** Sind $X$ und $Y$ Banachräume über $\mathbb{C}$, dann ist durch

$$\pi(v) := \inf\{\sum_{i=1}^{n} \|x_i\|\,\|y_i\| : \ v = \sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i\}$$

eine Norm auf $X \otimes Y$ definiert. Weiters gilt $\pi(x \otimes y) = \|x\|\,\|y\|$ für alle $x \in X$ und $y \in Y$. Wir nennen diese Norm die *projektive Norm*. Falls spezifiziert werden muss, um welche Banachräume es sich handelt, schreiben wir $\pi_{X,Y}(v)$.

*Beweis.* Angenommen es gilt $\pi(v) = 0$ für $v \in X \otimes Y$. Wähle beliebige $x' \in X'$ und $y' \in Y'$. Dann existiert für alle $\epsilon > 0$ eine Darstellung $v = \sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i$, sodass $\sum_{i=1}^{n} \|x_i\|\,\|y_i\| \leq \epsilon$. Ist $B_{x',y'}$ die Bilinearform aus Bemerkung 1.4, dann erhalten wir

$$|v(B_{x',y'})| = \Big|\sum_{i=1}^{n} x'(x_i) y'(y_i)\Big| \leq \epsilon\,\|x'\|\,\|y'\|\,.$$

Weil $\epsilon$ beliebig gewählt war, gilt $v(B_{x',y'}) = 0$ und mit Proposition 1.3 angewandt auf $M = X'$ und $N = Y'$ folgt $v = 0$.
Wir zeigen nun $\pi(\lambda v) = |\lambda|\pi(v)$. Im Fall, dass $\lambda$ gleich Null ist, folgt die Aussage aus dem schon Gezeigten. Sei also $\lambda \neq 0$ und $v = \sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i$ eine Darstellung von $v$. Wegen $\lambda v = \sum_{i=1}^{n} (\lambda x_i) \otimes y_i$ gilt

$$\pi(\lambda v) \leq \sum_{i=1}^{n} \|\lambda x_i\|\,\|y_i\| = |\lambda| \sum_{i=1}^{n} \|x_i\|\,\|y_i\|\,.$$

Da die Darstellung von $v$ beliebig gewählt war, bleibt die Gleichung erhalten, wenn man das Infimum bildet, also $\pi(\lambda v) \leq |\lambda|\pi(v)$. Mit der gleichen Überlegung gilt

$$\pi(v) = \pi(\lambda^{-1}\lambda v) \leq |\lambda^{-1}|\pi(\lambda v).$$

Daraus folgt $|\lambda|\pi(v) \leq \pi(\lambda v)$ und insgesamt $\pi(\lambda v) = |\lambda|\pi(v)$.
Als nächstes zeigen wir die Dreiecksungleichung. Seien $u, v \in X \otimes Y$ und sei $\epsilon > 0$. Wir wählen Darstellungen $u = \sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i$ und $v = \sum_{i=1}^{n} w_i \otimes z_i$, sodass

$$\sum_{i=1}^{n} \|x_i\|\,\|y_i\| \leq \pi(u) + \frac{\epsilon}{2} \quad \text{und} \quad \sum_{i=1}^{n} \|w_i\|\,\|z_i\| \leq \pi(v) + \frac{\epsilon}{2}.$$

$\sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i + \sum_{i=1}^{n} w_i \otimes z_i$ ist eine Darstellung von $u + v$, welche

$$\pi(u+v) \leq \sum_{i=1}^{n} \|x_i\|\,\|y_i\| + \sum_{i=1}^{n} \|w_i\|\,\|z_i\| \leq \pi(u) + \pi(v) + \epsilon$$

erfüllt. Da $\epsilon$ beliebig gewählt war, folgt $\pi(u+v) \leq \pi(u) + \pi(v)$.
Schlussendlich ist $\pi(x \otimes y) = \|x\|\,\|y\|$ zu zeigen. Dazu wählen wir $x' \in K_1^{X'}(0)$ und $y' \in K_1^{Y'}(0)$, sodass $x'(x) = \|x\|$ und $y'(y) = \|y\|$, und definieren die Bilinearform $B$ auf $X \times Y$ durch $B(z,w) = x'(z)y'(w)$. Ihre Linearisierung $\tilde{B}$ erfüllt

$$\big|\tilde{B}\big(\sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i\big)\big| \leq \sum_{i=1}^{n} |\tilde{B}(x_i \otimes y_i)| = \sum_{i=1}^{n} |x'(x_i)y'(y_i)| \leq \sum_{i=1}^{n} \|x_i\|\,\|y_i\|\,,$$

was $|\tilde{B}(v)| \leq \pi(v)$ für alle $v \in X \otimes Y$ impliziert. Somit ist $\tilde{B}$ ein beschränktes lineares Funktional auf dem Raum $(X \otimes Y, \pi)$ mit Abbildungsnorm $\|B\| \leq 1$. Insbesondere gilt

$$\|x\| \, \|y\| = B(x, y) = \tilde{B}(x \otimes y) \leq \pi(x \otimes y).$$

Die umgekehrte Ungleichung $\pi(x \otimes y) \leq \|x\| \, \|y\|$ folgt unmittelbar aus der Definition von $\pi$. $\square$

**Definition 1.14** Wir bezeichnen mit $X \otimes_\pi Y$ das Tensorprodukt $X \otimes Y$ versehen mit der projektiven Norm und $X \hat{\otimes}_\pi Y$ als dessen Vervollständigung. Den Banachraum $X \hat{\otimes}_\pi Y$ nennt man das *projektive Tensorprodukt der Banachräume $X$ und $Y$*.

*Bemerkung 1.15* Für Banachräume $X, Y$ und $Z$ heißt eine bilineare Abbildung $B : X \times Y \to Z$ beschränkt, falls eine Konstante $C > 0$ existiert, sodass $\|B(x, y)\|_Z \leq C\|x\|_X \|y\|_Y$ für alle $x \in X$ und $y \in Y$. Wir bezeichnen mit $\mathcal{B}(X \times Y, Z)$ die Menge aller beschränkten, bilinearen Abbildungen. Man zeigt leicht, dass diese einen Vektorraum bilden, und dass

$$\|B\| = \sup\{\|B(x, y)\|_Z : \ x \in X, \ y \in Y, \ \|x\|_X \leq 1, \ \|y\|_Y \leq 1\}$$

eine Norm darauf ist. Außerdem ist der Vektorraum aller beschränkten Bilinearformen, versehen mit dieser Norm, ein Banachraum; siehe Anhang A.1.
Eine bilineare Abbildung ist genau dann beschränkt, wenn sie stetig ist; siehe Anhang A.2.

*Bemerkung 1.16* Für einen normierten Raum $(X, \|.\|)$, dessen Vervollständigung $(\hat{X}, \|.\|)$ und einen Banachraum $(Y, \|.\|)$ ist die Abbildung

$$\begin{array}{rcl} L_b(\hat{X}, Y) & \to & L_b(X, Y) \\ T & \mapsto & T|_X \end{array} \tag{1.1}$$

ein isometrischer Isomorphismus. Dies folgt sofort aus der Tatsache, dass jede beschränkte lineare Abbildung von $X$ nach $Y$ normtreu auf die Vervollständigung $\hat{X}$ fortgesetzt werden kann; vgl. Satz 2.5.2 in [BKW].

Das folgende Resultat erweitert Proposition 1.5 auf Banachräume und lässt uns den Dualraum des projektiven Tensorprodukts bestimmen.

**Lemma 1.17** Seien $X$, $Y$ und $Z$ Banachräume über $\mathbb{C}$ und $\mathcal{B}(X \times Y, Z)$ der Raum aller beschränkten bilinearen Abbildungen von $X \times Y$ nach $Z$ und $\Psi : B(X \times Y, Z) \to L(X \otimes Y, Z)$ die Abbildung aus Proposition 1.5. Dann ist $\Psi|_{\mathcal{B}(X \times Y, Z)} : \mathcal{B}(X \times Y, Z) \to L_b(X \otimes_\pi Y, Z)$ ein isometrischer Isomorphismus.

*Beweis.* Sei $B : X \times Y \to Z$ eine beschränkte bilineare Abbildung und betrachte $\tilde{B} = \Psi(B) \in L(X \otimes Y, Z)$. Für $v = \sum_{i=1}^n x_i \otimes y_i \in X \otimes Y$ gilt

$$\left\|\tilde{B}(v)\right\|_Z = \left\|\sum_{i=1}^n B(x_i, y_i)\right\|_Z \leq \|B\| \sum_{i=1}^n \|x_i\|_X \|y_i\|_Y.$$

Bildet man das Infimum über alle Darstellungen von $v$, dann folgt $\|\tilde{B}(v)\| \leq \|B\| \, \pi(v)$. Also ist $\tilde{B}$ beschränkt mit Abbildungsnorm $\|\tilde{B}\| \leq \|B\|$. Andererseits gilt

$$\|B(x, y)\| = \|\tilde{B}(x \otimes y)\| \leq \|\tilde{B}\| \, \|x\| \, \|y\| \,,$$

insgesamt also $\|B\| = \|\tilde{B}\|$. Es bleibt die Surjektivität zu zeigen. Gegeben sei eine lineare Abbildung $A \in L_b(X \otimes Y, Z)$. Dann ist $\Psi^{-1}(A) \in B(X \times Y, Z)$ und erfüllt $\Psi(\Psi^{-1}A) = A$. Dabei ist $\Psi^{-1}(A)$ beschränkt, denn es gilt

$$\left\|(\Psi^{-1}A)(x, y)\right\| = \left\|\Psi(\Psi^{-1}A)(x \otimes y))\right\| = \|A(x \otimes y)\| \leq \|A\| \, \|x\| \, \|y\| \,.$$

□

Mit Bemerkung 1.16 schließen wir auf die folgende Aussage.

**Korollar 1.18** Seien $X, Y$ und $Z$ Banachräume über $\mathbb{C}$ und $\mathcal{B}(X \times Y, Z)$ der Raum aller beschränkten bilinearen Abbildungen von $X \times Y$ nach $Z$. Ist $\Psi|_{\mathcal{B}(X \times Y)} : \mathcal{B}(X \times Y, Z) \to L_b(X \otimes Y, Z)$ wie in Lemma 1.17, und definieren wir für $B \in \mathcal{B}(X \times Y)$ die lineare Abbildung $\hat{\Psi}(B) : X \hat{\otimes}_\pi Y \to Z$ als die stetige Fortsetzung von $\Psi(B)$ auf $X \hat{\otimes}_\pi Y$, so ist $\hat{\Psi} : \mathcal{B}(X \times Y) \to L_b(X \hat{\otimes}_\pi Y)$ ein isometrischer Isomorphismus.

**Korollar 1.19** Sind $X$, $Y$ und $Z$ Banachräume über $\mathbb{C}$ und $\mathcal{B}(X \times Y, Z)$, dann gilt für den topologischen Dualraum des projektiven Tensorprodukts

$$(X \hat{\otimes}_\pi Y)' \cong \mathcal{B}(X \times Y).$$

*Bemerkung 1.20* Für eine Indexmenge $I$ und einen Banachraum $X$ über $\mathbb{C}$ nennt man eine Familie $x = (x_i)_{i \in I} \in X$ absolut summierbar, falls

$$\|x\|_1 := \lim_{A \in \mathcal{E}(I)} \sum_{i \in A} \|x_i\|_X < +\infty,$$

wobei $(\mathcal{E}(I), \preceq)$ die gerichtete Menge aller endlichen Teilmengen von $I$, versehen mit $A \preceq B :\Leftrightarrow A \subseteq B$, ist; siehe Abschnitt 5.3 und 5.4 in [Ka].
Mit $\ell_1(I, X)$ bezeichnen wir die Menge aller absolut summierbaren Tupel $(x_i)_{i \in I}$ mit $x_i \in X$, $i \in I$. Man erkennt leicht, dass diese, versehen mit der punktweisen Addition, einen Vektorraum bilden und $\|.\|_1$ eine Norm darauf ist. Dieser Raum ist sogar ein Banachraum; siehe Anhang A.3. Im Fall $X = \mathbb{C}$ schreiben wir kurz $\ell_1(I)$. Für $k \in I$ definieren wir den $k$-ten kanonischen Einheitsvektor als $e_k := (\delta_{ik})_{i \in I}$, wobei $\delta_{ik}$ für das Kronecker-$\delta$ steht.

Für $x = (x_i)_{i\in I}$ definieren wir dessen Träger $\mathrm{supp}(x) := \{i \in I : \; x_i \neq 0\}$. Weil $x$ absolut summierbar ist, muss $S_n(x) := \{i \in I : \; |x_i| < 1/n\}$ endlich sein. Wegen $\mathrm{supp}(x) = \cup_{n\in\mathbb{N}} S_n(x)$ ist der Träger von $x$ infolge höchstens abzählbar.

**Satz 1.21** Ist $X$ ein Banachraum über $\mathbb{C}$ und $I$ eine beliebige Indexmenge und bezeichnen wir mit $J$ die Abbildung

$$J : \begin{cases} \ell_1(I) \otimes X & \to & \ell_1(I, X) \\ (a \otimes x) & \mapsto & (a_i x)_{i\in I} \end{cases}, \qquad\qquad a = (a_i)_{i\in I} \in \ell_1(I), \; x \in X.$$

Dann existiert eine eindeutige Fortsetzung $\tilde{J} : \ell_1(I)\hat{\otimes}_\pi X \to \ell_1(I, X)$ von $J$. Diese Forstsetzung ist ein isometrischer Isomorphismus und für $(x_i)_{i\in I} \in \ell_1(I, X)$ erfüllt sie $\tilde{J}(\sum_{i\in I} e_i \otimes x_i) = (x_i)_{i\in I}$.

*Beweis.* Zu $a = (a_i)_{i\in I} \in \ell_1(I)$ und $x \in X$ betrachten wir $(a_i x)_{i\in I} \in X^I$. Dieses Tupel ist sogar absolut summierbar, also $(a_i x)_{i\in I} \in \ell_1(I, X)$, denn

$$\sum_{i\in I} \|a_i x\|_X \leq (\sum_{i\in I} |a_i|) \|x\|_X = \|a\|_1 \|x\|_X.$$

Da die Abbildung $(a, x) \mapsto (a_i x)_{i\in I} \in \ell_1(I, X)$ bilinear ist, ist mit Proposition 1.5 die Abbildung $J : \ell_1(I) \otimes X \to \ell_1(I, X)$ durch $J(a \otimes x) = (a_i x)_{i\in I}$ wohldefiniert. Wir zeigen als nächstes, dass $J$ isometrisch ist.

Sei dazu $v = \sum_{k=1}^n a_k \otimes x_k \in \ell_1(I) \otimes X$ mit $a_k = (a_{ki})_{i\in I} \in \ell_1(I)$ und $x_k \in X$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \|J(v)\|_1 &= \left\| \big(\sum_{k=1}^n a_{ki} x_k\big)_i \right\|_1 = \sum_{i\in I} \left\| \big(\sum_{k=1}^n a_{ki} x_k\big) \right\|_X \\ &\leq \sum_{i\in I} \sum_{k=1}^n \|a_{ki} x_k\|_X = \sum_{k=1}^n \left[ \big(\sum_{i\in I} |a_{ki}|\big) \|x_k\|_X \right] = \sum_{i=k}^n \|a_k\|_1 \|x_k\|_X. \end{aligned}$$

Bildet man das Infimum über alle Darstellungen von $v$, so folgt $\|J(v)\|_1 \leq \pi(v)$.

Für die umgekehrte Ungleichung wählen wir wie vorher eine Darstellung $v = \sum_{k=1}^n a_k \otimes x_k$ mit $a_k = (a_{ki})_{i\in I}$. Definieren wir $(v_i)_{i\in I} \in \ell_1(I, X)$ durch $v_i := \sum_{k=1}^n a_{ki} x_k$, dann gilt $J(v) = (v_i)_{i\in I}$.
Wir zeigen, dass $\sum_{i\in I} e_i \otimes v_i$ gegen $v$ in $\ell_1(I)\hat{\otimes}_\pi X$ konvergiert. Dafür definieren wir für jede endliche Menge $A \subseteq I$ die Abbildung $\Pi_A : \ell_1(I) \to \ell_1(I)$ durch $\Pi_A((a_i)_{i\in I}) := \sum_{j\in A} a_j e_j$. Dann konvergiert $\Pi_A((a_i)_{i\in I})$ für $A \in \mathcal{E}(I)$ gegen $(a_i)_{i\in I}$, denn für $(a'_i)_{i\in I}$, definiert durch $a'_i = a_i$, $i \notin A$, $a'_i = 0$ sonst, gilt

$$\|\Pi_A(a) - a\| = \|\sum_{j\in A} a_j e_j - (a_i)_{i\in I}\| = \|(a'_i)_{i\in I}\| = \sum_{i\in I} |a'_i| = \sum_{i\in I} |a_i| - \sum_{i\in A} |a_i|,$$

wodurch

$$\lim_{A\in\mathcal{E}(I)} \|\Pi(a) - a\| = \sum_{i\in I} |a_i| - \lim_{A\in\mathcal{E}(I)} \sum_{i\in A} |a_i| = 0.$$

Somit gilt

$$\begin{aligned}
\pi\Big[v - \sum_{i\in A} e_i \otimes v_i\Big] &= \pi\Big[\sum_{k=1}^{n} a_k \otimes x_k - \sum_{i\in A}\sum_{k=1}^{n} e_i \otimes (a_{ki}x_k)\Big] \\
&= \pi\Big[\sum_{k=1}^{n}\Big(a_k \otimes x_k - \sum_{i\in A}(a_{ki}e_i)\otimes x_k\Big)\Big] \\
&= \pi\Big[\sum_{k=1}^{n}\big(a_k - \Pi_A(a_k)\big)\otimes x_k\Big] \\
&\leq \sum_{k=1}^{n} \|a_k - \Pi_A(a_k)\|_{\ell_1(I)} \|x_k\|_X \xrightarrow{A\in\mathcal{E}(I)} 0.
\end{aligned}$$

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned}
\pi(v) &= \pi\big(\sum_{i\in I} e_i \otimes v_i\big) = \pi\big(\lim_{A\in\mathcal{E}(I)} \sum_{i\in A} e_i \otimes v_i\big) = \lim_{A\in\mathcal{E}(I)} \pi\big(\sum_{i\in A} e_i \otimes v_i\big) \\
&\leq \lim_{A\in\mathcal{E}(I)} \sum_{i\in A} \|v_i\| = \sum_{i\in I} \|v_i\|_1 = \|J(v)\|_1.
\end{aligned}$$

Damit ist $J$ eine Isometrie von $\ell_1 \otimes X$ nach $\ell_1(I, X)$. Weil $\ell_1(I, X)$ vollständig ist, existiert mit Satz 2.5.2 aus [BKW] eine eindeutige beschränkte, lineare Fortsetzung $\tilde{J} : \ell_1(I)\hat{\otimes}_\pi X \mapsto \ell_1(I, X)$, welche auch isometrisch ist.
Für $x = (x_i)_{i\in I} \in \ell_1(I, X)$ gilt

$$\sum_{i\in I} \|e_i \otimes x_i\|_\pi \leq \sum_{i\in I} \|x_i\|_X < +\infty.$$

Also konvergiert $\tilde{x} = \sum_{i\in I} e_i \otimes x_i$ unbedingt und wir erhalten $\tilde{x} \in \ell_1(I)\hat{\otimes}_\pi X$. Wegen $J(e_i \otimes x_i) = e_i x_i \in \ell_1(I, X)$ folgt aus der Stetigkeit von $\tilde{J}$, dass $\tilde{J}(\tilde{x}) = x$. □

**Lemma 1.22** Sind $X, Y, Z, W$ Banachräume über $\mathbb{C}$ und $S : X \to Z$, $T : Y \to W$ beschränkte, lineare Abbildungen, dann ist durch

$$S \otimes_\pi T : \begin{cases} X\hat{\otimes}_\pi Y & \to & Z\hat{\otimes}_\pi W \\ x \otimes y & \mapsto & Sx \otimes Ty \end{cases}$$

eine beschränkte, lineare Abbildung definiert. Dabei gilt $\|S \otimes_\pi T\| = \|S\|\,\|T\|$.

*Beweis.* Mit Korollar 1.8 existiert eine lineare Abbildung $S \otimes T : X \otimes Y \to Z \otimes W$ mit $(S \otimes T)(x \otimes y) = Sx \otimes Ty$ für alle $x \in X$ und $y \in Y$. Für $v = \sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i \in X \otimes Y$ gilt

$$\pi\big((S \otimes T)v\big) = \pi\big(\sum_{i=1}^{n}(Sx_i) \otimes (Ty_i)\big) \leq \|S\|\,\|T\| \sum_{i=1}^{n} \|x_i\|\,\|y_i\|.$$

Bildet man das Infimum über alle Darstellungen von $v$, dann folgt $\|S \otimes T\| \leq \|S\|\,\|T\|$. Damit ist $S \otimes T$ eine beschränkte lineare Abbildung. Aus $(S \otimes T)(x \otimes y) = (Sx) \otimes (Ty)$ folgt $\|S \otimes T\| \geq \|S\|\,\|T\|$, insgesamt also $\|S \otimes T\| = \|S\|\,\|T\|$. Mit Satz 2.5.2 aus [BKW] existiert eine eindeutige lineare und beschränkte Fortsetzung $S \otimes_\pi T: \ X\hat{\otimes}_\pi Y \to Z\hat{\otimes}_\pi W$ mit gleicher Abbildungsnorm. $\square$

**Definition 1.23** Sind $X$ und $Z$ normierte Räume über $\mathbb{C}$, dann heißt ein beschränkter, linearer Operator $Q : X \to Z$ ein *Quotientenoperator*, falls $Q$ surjektiv ist und $\|z\| = \inf\{\|x\| : \ x \in X, \ Q(x) = z\}$ für alle $y \in Y$ erfüllt.

*Bemerkung 1.24* Man überlegt sich leicht, dass die zweite Bedingung Definition 1.23 bedeutet, dass $Q$ die offene Einheitskugel in $X$ auf die offene Einheitskugel in $Z$ abbildet. Somit gilt dann $Z \cong X/\ker Q$ und $\|Q\| = 1$.

**Lemma 1.25** Sind $X$ und $Y$ normierte Räume und $Q : X \to Y$ ein Quotientenoperator, so ist auch die stetige Fortsetzung $\hat{Q} : \hat{X} \to \hat{Y}$ von $Q$ auf die Vervollständigung $\hat{X}$ von $X$ in die Vervollständigung $\hat{Y}$ von $Y$ ein Quotientenoperator.

*Beweis.* Weil $\hat{X}$ die Vervollständigung von $X$ ist, existiert eine isometrische Abbildung $\iota : X \to \hat{X}$, wobei $\iota(X)$ dicht in $\hat{X}$ liegt. Wir setzen im folgenden $N := \overline{\iota(\ker(Q))}^{\hat{X}}$. Für den Beginn des Beweises zeigen wir, dass die Vervollständigung von $X/\ker(Q)$ übereinstimmt mit $\hat{X}/N$. Weil $\hat{X}$ ein Banachraum ist, ist es auch $\hat{X}/N$, wobei $X/\ker(Q)$ und $\hat{X}/N$ mit der Faktorraumnorm versehen sind, also

$$\begin{aligned} \|x + \ker(Q)\|_{X/\ker(Q)} &= \inf\{\|x - w\|_X : \ w \in \ker(Q)\}, \quad \text{für } x \in X, \\ \|\hat{x} + N\|_{\hat{X}/N} &= \inf\{\|\hat{x} - z\|_{\hat{X}} : \ z \in N\}, \quad \text{für } \hat{x} \in \hat{X}_{\hat{X}/N}. \end{aligned}$$

Wegen $\iota(\ker(Q)) \subseteq N$ ist die Abbildung

$$\kappa : \begin{cases} X/\ker(Q) & \to & \hat{X}/N \\ x + \ker(Q) & \mapsto & \iota(x) + N \end{cases}$$

wohldefiniert und linear. Wir zeigen zuerst, dass $\kappa$ isometrisch ist. Weil $\iota$ isometrisch ist, gilt

$$\begin{aligned} \|x + \ker(Q)\|_{X/\ker(Q)} &= \inf\{\|x - w\|_X : \ w \in \ker(Q)\} \\ &= \inf\{\|\iota(x) - \iota(w)\|_{\hat{X}} : \ w \in \ker(Q)\} \\ &\geq \inf\{\|\iota(x) - z\|_{\hat{X}} : \ z \in N\} = \|\kappa(x + \ker(Q))\|_{\hat{X}/N}. \end{aligned}$$

Für $z \in N$ existiert eine Folge $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $w_n \in \ker(Q)$, sodass $\lim_{n\to\infty}\|z - \iota(w_n)\|_{\hat{X}} = 0$. Es folgt

$$\|x + \ker(Q)\|_{X/\ker(Q)} \leq \inf\{\|\iota(x) - \iota(w_n)\|_{\hat{X}} : \ n \in \mathbb{N}\} \leq \|\iota(x) - z\|_{\hat{X}}.$$

Bilden wir das Infimum über alle $z \in N$, erhalten wir die umgekehrte Ungleichung, womit sich $\kappa$ als isometrisch herausstellt.
Zu $\hat{x} + N \in \hat{X}/N$ wählen wir eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_n \in X$, sodass $\|\iota(x_n) - \hat{x}\|_{\hat{X}}$ für $n \to \infty$ gegen 0 konvergiert. Dann gilt

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \|(\hat{x} + N) - (\iota(x_n) + N)\|_{\hat{X}/N} &= \lim_{n\to\infty} \|(\hat{x} - \iota(x_n)) + N)\|_{\hat{X}/N} \\ &\leq \lim_{n\to\infty} \|(\hat{x} - \iota(x_n))\|_{\hat{X}} = 0. \end{aligned}$$

Also liegt $\kappa(X/\mathrm{ker}Q)$ dicht in $\hat{X}/N$, womit sich $\hat{X}/N$ als die Vervollständigung von $X/\mathrm{ker}(Q)$ herausstellt.
Gemäß Bemerkung 1.24 ist die Abbildung $Q/\mathrm{ker}(Q) : X/\mathrm{ker}(Q) \to Y$, definiert durch $(Q/\mathrm{ker}(Q))(x + \mathrm{ker}(Q)) = Q(x)$ für $x \in X$ ein isometrischer Isomorphismus. Somit ist auch die Fortsetzung $R$ von $Q/\mathrm{ker}(Q)$ auf $\hat{X}/N$ nach $\hat{Y}$ ein isometrischer Isomorphismus. Die Abbildung $\pi_N : \hat{X} \to \hat{X}/N$ definiert durch $\pi_N(\hat{x}) = \hat{x} + N$ für $\hat{x} \in \hat{X}$ ist ein Quotientenoperator und somit auch $R \circ \pi_N : \hat{X} \to \hat{Y}$. Wegen $R \circ \pi_N \circ \iota = Q$ gilt $R \circ \pi_N = \hat{Q}$. Also ist $\hat{Q}$ ein Quotientenoperator mit $\mathrm{ker}(\hat{Q}) = N$. □

**Lemma 1.26** Sind $X, Y, Z, W$ Banachräume über $\mathbb{C}$ und $Q : X \to Z$, $R : Y \to W$ Quotientenoperatoren, dann ist auch $Q \otimes_\pi R : X \hat{\otimes}_\pi Y \to Z \hat{\otimes}_\pi W$ ein Quotientenoperator.

*Beweis.* Wir zeigen die Aussage zuerst für den Operator $Q \otimes R : X \otimes_\pi Y \to Z \otimes_\pi W$. Sei $\sum_{i=1}^n z_i \otimes w_i \in Z \otimes_\pi W$. Dann existieren $x_i \in X$ und $y_i \in Y$, sodass $Qx_i = z_i$ und $Ry_i = w_i$ für $i \in \{1, \dots, n\}$. Es folgt $(Q \otimes R)(\sum_{i=1}^n x_i \otimes y_i) = \sum_{i=1}^n z_i \otimes w_i$. Also ist $Q \otimes R$ surjektiv.
Sind $u \in Z \otimes_\pi W$ und $v \in X \otimes_\pi Y$ mit $(Q \otimes R)v = u$, so gilt

$$\pi(u) \leq \|Q\| \, \|R\| \, \pi(v) = \pi(v).$$

Zu $\epsilon > 0$ wähle eine Darstellung $\sum_{i=1}^n z_i \otimes w_i$ von $u$, sodass $\sum_{i=1}^n \|z_i\| \, \|w_i\| \leq \pi(u) + \epsilon$. Für $i \in \{1, \dots, n\}$ wähle $x_i \in X$ und $y_i \in Y$, sodass $Qx_i = z_i$, $Ry_i = w_i$ und $\|x_i\| \leq (1+\epsilon) \|z_i\|$ und $\|y_i\| \leq (1 + \epsilon) \|w_i\|$. Es folgt

$$\begin{aligned}
\pi\Big(\sum_{i=1}^n x_i \otimes y_i\Big) &\leq \sum_{i=1}^n \|x_i\| \, \|y_i\| \leq \sum_{i=1}^n (1 + \epsilon) \|z_i\| \, (1 + \epsilon) \|w_i\| \\
&\leq \sum_{i=1}^n (1 + \epsilon)^2 \|z_i\| \, \|w_i\| \leq (1 + \epsilon)^2 \Big( \sum_{i=1}^n \|z_i\| \, \|w_i\| \Big) \\
&\leq (1 + \epsilon)^2 \Big( \sum_{i=1}^n \|z_i\| \, \|w_i\| \Big) \leq (1 + \epsilon)^2 (\pi(u) + \epsilon).
\end{aligned}$$

Nachdem $(Q \otimes R)(\sum_{i=1}^n x_i \otimes y_i) = u$ und $\epsilon > 0$ beliebig gewählt war, erhalten wir

$$\pi(u) = \inf\{\pi(v) : \; v \in X \otimes_\pi Y, \; (Q \otimes R)v = u\}.$$

Also ist $Q \otimes R$ ein Quotientenoperator und mit Lemma 1.25 auch $Q \otimes_\pi R$. □

**Lemma 1.27** Jeder Banachraum über $\mathbb{C}$ kann dargestellt werden als Quotient von $\ell_1(I)$ für eine entsprechend gewählte Indexmenge $I$. Das heißt, es existiert ein Quotientenoperator $T : \ell_1(I) \to X$.

*Beweis.* Wähle $I = \{x \in X : \; \|x\| = 1\}$ und betrachte den Raum $\ell_1(I)$ aller absolut summierbaren, komplexwertigen Tupel über $I$. Wegen

$$\sum_{x \in I} \|\lambda_x x\|_X = \sum_{x \in I} |\lambda_d| = \|(\lambda_d)_{x \in I}\|_{\ell_1(I)} < +\infty$$

ist die Abbildung $T : \ell_1(I) \to X$ mit

$$T((\lambda_x)_{x\in I}) := \sum_{x\in I} \lambda_x x$$

für alle $(\lambda_x)_{x\in I} \in \ell_1(I)$ wohldefiniert und bildet einen linearen, beschränkten Operator mit $\|T\| \leq 1$.
$T$ ist surjektiv, denn für $x \in X$ gilt $T(\|x\| \, e_{\frac{x}{\|x\|}}) = x$, wobei $e_{\frac{x}{\|x\|}}$ den $\frac{x}{\|x\|}$-ten kanonischen Einheitsvektor in $\ell_1(I)$ bezeichnet. Dies impliziert auch, dass $T$ ein Quotientenoperator ist, denn es gilt

$$\left\| \|x\| \, e_{\frac{x}{\|x\|}} \right\|_{\ell_1(I)} = \|x\| \, .$$

□

**Satz 1.28** Seien $X$ und $Y$ Banachräume über $\mathbb{C}$. Zu jedem $u \in X \hat{\otimes}_\pi Y$ und $\epsilon > 0$ existieren beschränkte Folgen $(x_k)_{k=1}^\infty \in X$ und $(y_k)_{k=1}^\infty \in Y$, sodass die Reihe $\sum_{k=1}^\infty x_k \otimes y_k$ gegen $u$ konvergiert, wobei

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\| \, \|y_k\| < \pi(u) + \epsilon.$$

*Beweis.* Wegen Lemma 1.26 können wir eine Indexmenge $I$ und einen Quotientenoperator $Q : \ell_1(I) \to X$ mit $X \cong \ell_1(I)/\ker Q$ wählen. Gemäß Lemma 1.25 ist der Operator $Q \otimes_\pi \mathrm{id} : \ell_1(I) \hat{\otimes}_\pi Y \to X \hat{\otimes}_\pi Y$ ebenfalls ein Quotientenoperator. Zu $u \in X \hat{\otimes}_\pi Y$ und $\epsilon > 0$ finden wir $v \in \ell_1(I) \hat{\otimes}_\pi Y$, sodass $(Q \otimes_\pi \mathrm{id})(v) = u$ und $\pi(v) < \pi(u) + \epsilon$. Laut Satz 1.21 ist $\ell_1(I) \hat{\otimes}_\pi Y$ isometrisch isomorph zu $\ell_1(I, Y)$. Somit können wir $v$ mit einem absolut summierbaren Tupel $(v_i)_{i\in I} \in Y$ identifizieren. Anhand der in Satz 1.21 beschriebenen isometrischen Isomorphie $\tilde{J}$ können wir $v$ als $\sum_{i\in I} e_i \otimes v_i$ schreiben, wobei $\pi(v) = \sum_{i\in I} \|v_i\|$. Wählen wir $x_i := Q(e_i)$ und $y_i := v_i$, dann gilt $u = (Q \otimes_\pi \mathrm{id})v = \sum_{i\in I} x_i \otimes y_i$, wobei $\sum_{i\in I} \|x_i\| \, \|y_i\| = \pi(v) < \pi(u) + \epsilon$. Mit Bemerkung 1.20 ist der Träger eines jeden absolut summierbaren Tupels abzählbar, weshalb wir $\sum_{i\in I} x_i \otimes y_i$ schreiben können als $\sum_{k=1}^\infty x_k \otimes y_k$ für entsprechend gewählte $x_k \in X$, $y_k \in Y$. □

**Korollar 1.29** Sind $X$ und $Y$ Banachräume über $\mathbb{C}$ und $v \in X \hat{\otimes}_\pi Y$, dann gilt

$$\pi(v) = \inf\Big\{ \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| \, \|y_n\| : \ \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| \, \|y_n\| < +\infty, \ v = \sum_{n=1}^{\infty} \ x_n \otimes y_n \Big\}.$$

### Das injektive Tensorprodukt

Betrachten wir die in Proposition 1.9 definierte, kanonische Einbettung $\iota : X \otimes Y \to B(X^*, Y^*)$ mit $\iota(x, y) = B_{x,y}$, dann können wir $B_{x,y}$ auf das Produkt der topologischen Dualräume, $(X' \times Y')$, einschränken. Man erhält folgendes Resultat.

**Lemma 1.30** Sind $X$ und $Y$ Banachräume über $\mathbb{C}$ und $\iota : X \otimes Y \to B(X^*, Y^*)$ die kanonische Einbettung aus Proposition 1.9. Dann ist die Abbildung

$$\kappa : \begin{cases} X \otimes Y & \to & B(X', Y') \\ v & \mapsto & \iota(v)|_{X' \times Y'} \end{cases},$$

injektiv.

*Beweis.* Weil $X'$ und $Y'$ punktetrennende, lineare Unterräume von $X^*$ bzw. $Y^*$ sind, folgt aus Proposition 1.3, angewandt mit $M = X'$ und $N = Y'$ auf $v = \sum_{i=1}^n x_i \otimes y_i$, dass $\iota(v)(x', y') = \sum_{i=1}^n x'(x_i) y'(y_i') = 0$ für alle $x' \in X'$ und $y' \in Y'$ die Gleichung $v = 0$ impliziert. □

*Bemerkung 1.31* Wir zeigen, dass $\kappa$ eine Abbildung nach $\mathcal{B}(X', Y')$ ist. In der Tat gilt für $x' \in X'$ und $y' \in Y'$

$$\|\kappa(x \otimes y)(x', y')\| = \|x'(x) y'(y)\| \leq \|x'\| \, \|y'\| \, \|x\| \, \|y\| \, .$$

Damit erhält man für $v = \sum_{i=1}^n x_i \otimes y_i$

$$\|(\kappa(v))(x', y')\| \leq \|x'\| \, \|y'\| \sum_{i=1}^n \|x_i\| \, \|y_i\| \, .$$

Bildet man das Infimum über alle Darstellungen von $v$, so folgt $\|\kappa(v)\| \leq \pi(v)$.

**Satz 1.32** Sind $X$ und $Y$ Banachräume über $\mathbb{C}$ und bezeichnen wir mit $\kappa(v) = B_v$ die Bilinearform aus Lemma 1.30, dann ist durch

$$\epsilon(v) := \sup\Big\{ |B_v(x', y')| : \ x' \in K_1^{X'}(0), \ y' \in K_1^{Y'}(0) \Big\}$$

eine Norm auf $X \otimes Y$ definiert. Wir nennen diese Norm die *injektive Norm*. Diese erfüllt $\epsilon(x \otimes y) = \|x\| \, \|y\|$ für alle $x \in X, y \in Y$ und $\epsilon(v) \leq \pi(v)$ für alle $v \in X \otimes Y$. Falls spezifiziert werden muss, um welche Banachräume es sich handelt, schreiben wir $\epsilon_{X,Y}(v)$.

*Beweis.* Der Raum $\kappa(X \otimes Y)$ ist mit Bemerkung 1.31 ein linearer Unterraum von $\mathcal{B}(X' \times Y')$, der die Norm

$$\|B\| = \sup\{\|B(x', y')\|_Z : \ x' \in X', \ y' \in Y', \ \|x'\|_{X'} \leq 1, \ \|y'\|_{Y'} \leq 1\}$$

trägt. Wegen $\epsilon(v) = \|B_v\|$ ist $\epsilon$ eine Norm auf $X \otimes Y$. Mit Bemerkung 1.31 erkennt man, dass $\epsilon(v) \leq \pi(v)$. Insbesondere gilt $\epsilon(x \otimes y) \leq \pi(x \otimes y) = \|x\| \, \|y\|$ für alle $x \in X$ und $y \in Y$. Gemäß Korollar 5.2.4 in [BKW] existiert ein $f \in X'$ und $g \in Y'$ mit $\|f\| = 1$, $\|g\| = 1$, sodass $f(x) = \|x\|$ und $g(y) = \|y\|$. Deshalb gilt $\epsilon(x \otimes y) = |f(x) g(y)| = \|x\| \, \|y\|$. □

*Bemerkung 1.33* Für $v = \sum_{i=1}^n x_i \otimes y_i \in X \otimes Y$ gilt $B_v = \sum_{i=1}^n x'(x_i) y'(y_i)$ und daher

$$\epsilon(v) = \sup\Big\{ |\sum_{i=1}^n x'(x_i) y'(y_i)| : \ x' \in K_1^{X'}(0), \ y' \in K_1^{Y'}(0) \Big\}.$$

**Definition 1.34** Wir bezeichnen mit $X \otimes_\epsilon Y$ das Tensorprodukt $X \otimes Y$ versehen mit der injektiven Norm und mit $X \hat{\otimes}_\epsilon Y$ seine Vervollständigung. Den Banachraum $X \hat{\otimes}_\epsilon Y$ nennt man das *injektive Tensorprodukt der Banachräume $X$ und $Y$*.

Vor dem nächsten Resultat wollen wir an den Begriff des konjungierten Operators erinnern. Ist $T : X \to Y$ ein Operator zwischen Banachräumen $X$ und $Y$, dann existiert ein eindeutiger Operator $T' : Y' \to X'$, welcher

$$\langle Tx, y' \rangle = \langle x, T'y' \rangle \quad \text{für alle } \; x \in X, y' \in Y'$$

erfüllt. Wir nennen $T'$ den zu $T$ konjungierten Operator. Dabei gilt $\|T\| = \|T'\|$.

**Proposition 1.35** Sind $X, Y, Z, W$ Banachräume über $\mathbb{C}$ und $S : X \to Z$, $T : Y \to W$ beschränkte, lineare Abbildungen. Dann ist durch

$$S \otimes_\epsilon T : \begin{cases} X \hat{\otimes}_\epsilon Y & \to & Z \hat{\otimes}_\epsilon W \\ x \otimes y & \mapsto & Sx \otimes Ty \end{cases}$$

eine beschränkte, lineare Abbildung definiert, wobei $\|S \otimes_\epsilon T\| = \|S\| \, \|T\|$.

*Beweis.* Sei $S \otimes T : X \otimes Y \to Z \otimes W$ der Operator aus Korollar 1.8. Für $v = \sum_{i=1}^n x_i \otimes y_i \in X \otimes Y$ gilt

$$\begin{aligned}
\epsilon_{Z,W}\big((S \otimes T)v\big) &= \sup\big\{ \big| \sum_{i=1}^n z'(Sx_i) \cdot w'(Ty_i) \big| : \; z' \in Z', \; w' \in W', \; \|z'\|, \|w'\| \leq 1 \big\} \\
&= \sup\big\{ \big| \sum_{i=1}^n (S'z')(x_i) \cdot (T'w')(y_i) \big| : \; z' \in Z', \; w' \in W', \; \|z'\|, \|w'\| \leq 1 \big\} \\
&\leq \sup\big\{ \big| \sum_{i=1}^n \|S'\| x'(x_i) \cdot \|T'\| y'(y_i) \big| : \; x' \in X', \; y' \in Y', \; \|x'\|, \|y'\| \leq 1 \big\} \\
&= \|S'\| \, \|T'\| \, \epsilon_{X,Y}(v) = \|S\| \, \|T\| \, \epsilon_{X,Y}(v).
\end{aligned}$$

Damit ist $S \otimes T$ beschränkt bezüglich der injektiven Norm mit Abbildungsnorm $\|S \otimes T\| \leq \|S\| \, \|T\|$. Es bleibt die umgekehrte Ungleichung zu zeigen.
Zu $\delta > 0$ wähle $x \in X$ und $y \in Y$ mit $\|x\|, \|y\| \leq 1$ derart, dass $\|Sx\| \geq (1 - \delta) \|S\|$ und $\|Ty\| \geq (1 - \delta) \|T\|$. Dann gilt $\epsilon_{X,Y}(x \otimes y) \leq 1$. Korollar 5.2.4 aus [BKW] besagt für einen normierten Raum $X$, dass $\|x\| = \sup\{|f(x)| : f \in X', \|f\| \leq 1\}$ für alle $x \in X$. Somit gilt

$$\begin{aligned}
\epsilon_{Z,W}((S \otimes T)(x \otimes y)) &= \epsilon_{Z,W}(Sx \otimes Ty) \\
&= \sup\big\{ |z'(Sx) w'(Ty)| : \; z' \in Z', w' \in W', \|z'\|, \|w'\| \leq 1 \big\} \\
&= \|Sx\| \, \|Ty\| \leq (1 - \delta)^2 \, \|S\| \, \|T\| \, .
\end{aligned}$$

Weil $\delta$ beliebig gewählt war, gilt $\|S \otimes T\| \geq \|S\| \, \|T\|$.
Als beschränkter linearer Operator hat $S \otimes T$ eine eindeutige Fortsetzung $S \otimes_\epsilon T$ auf

$X\hat{\otimes}_\epsilon Y$. $\square$

**Proposition 1.36** Seien $X$ und $Y$ Banachräume über $\mathbb{C}$ und $F \subseteq K_1^{X'}(0)$ sowie $G \subseteq K_1^{Y'}(0)$, sodass $\|x\| = \sup\{|f(x)| : f \in F\}$ für alle $x \in X$ und $\|y\| = \sup\{|g(y)| : g \in G\}$ für alle $y \in Y$. Dann gilt für $v = \sum_{i=1}^n x_i \otimes y_i$

$$\epsilon(v) = \sup\big\{|\sum_{i=1}^n f(x_i)g(y_i)| : \ f \in F, g \in G\big\}.$$

*Beweis.* Nach Voraussetzung erhalten wir

$$\begin{aligned}
\epsilon(v) &= \sup\big\{|\sum_{i=1}^n x'(x_i)y'(y_i)| : \ x' \in K_1^{X'}(0), y' \in K_1^{Y'}(0)\big\} \\
&= \sup\big\{|y'\big(\sum_{i=1}^n x'(x_i)y_i\big)| : \ x' \in K_1^{X'}(0), y' \in K_1^{Y'}(0)\big\} \\
&= \sup\big\{|f\big(\sum_{i=1}^n y'(y_i)x_i\big)| : \ f \in F, y' \in K_1^{Y'}(0)\big\} \\
&= \sup\big\{|y'\big(\sum_{i=1}^n f(x_i)y_i\big)| : \ f \in F, y' \in K_1^{Y'}(0)\big\} \\
&= \sup\big\{|g\big(\sum_{i=1}^n f(x_i)y_i\big)| : \ f \in F, g \in G\big\} \\
&= \sup\big\{|\sum_{i=1}^n f(x_i)g(y_i)| : \ f \in F, g \in G\big\}.
\end{aligned}$$

$\square$

*Bemerkung 1.37* Ist $X$ ein Banachraum und $\iota_X$ die kanonische Einbettung von $X$ nach $X''$, dann gilt $\|x'\| = \sup\{|x'(x)| : x \in K_1^X(0)\} = \sup\{\iota_X x(x') : x \in K_1^X(0)\}$. Für $v = \sum_{i=1}^n x_i' \otimes y_i' \in X' \otimes Y'$ erhalten wir aus Proposition 1.34

$$\epsilon(v) = \sup\big\{|\sum_{i=1}^n x_i'(x)y_i'(y)| : \ x \in K_1^X(0), y \in K_1^Y(0)\big\}.$$

# Kapitel 2

# Operatortheorie auf Tensorprodukträumen

Im folgenden Kapitel werden die Begriffe der nuklearen, integralen und Pietsch-integralen Operatoren definiert, sowie die Zusammenhänge zum Tensorprodukt dargestellt.

## 2.1 Nukleare Operatoren

Dieser erste Abschnitt beschäftigt sich mit nuklearen Operatoren. Es wird sich herausstellen, dass diese mit einem Unterraum des projektiven Tensorprodukts übereinstimmen.

**Definition 2.1** Sind $X$ und $Y$ Banachräume über $\mathbb{C}$ und $T : X \to Y$ ein linearer Operator, dann heißt $T$ *nuklear*, falls Folgen $(x_i')_{i=1}^{\infty} \in X'$ und $(y_i)_{i=1}^{\infty} \in Y$ existieren, sodass $\sum_{i=1}^{\infty} \|x_i'\|\,\|y_i\| < +\infty$ und

$$T(x) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i'(x) y_i$$

für alle $x \in X$. Wir bezeichnen mit $N(X, Y)$ die Menge aller nuklearen Operatoren. Man überzeugt sich leicht davon, dass die nuklearen Operatoren, versehen mit der üblichen Addition und Skalarmultiplikation, einen Vektorraum bilden.

*Bemerkung 2.2* Wegen $\sum_{i=1}^{\infty} \|x_i'\|\,\|y_i\| < +\infty$ ist die Reihe $\sum_{i=1}^{\infty} x_i'(x) y_i$ absolut konvergent. Außerdem gilt $\|T(x)\| \leq \sum_{i=1}^{\infty} \|x_i'(x)\|\,\|y_i\| \leq \sum_{i=1}^{\infty} \|x_i'\|\,\|x\|\,\|y_i\| < +\infty$. Damit ist jeder nukleare Operator beschränkt mit Abbildungsnorm

$$\|T\| \leq \inf\{\sum_{i=1}^{\infty} \|x_i'\|\,\|y_i\| : \ T(x) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i'(x) y_i\}.$$

**Proposition 2.3** Sind $X$ und $Y$ Banachräume über $\mathbb{C}$ und $L_{x',y} \in L_b(X, Y)$ mit $L_{x',y}(x) = x'(x)y$, dann wird durch

$$J : \begin{cases} X'\hat{\otimes}_\pi Y & \to & N(X, Y) \\ x' \otimes y & \mapsto & L_{x',y} \end{cases} .$$

ein linearer, surjektiver Operator definiert. Dabei ist ker$J$ in $X'\hat{\otimes}_\pi Y$ abgeschlossen.

*Beweis.* Sei $\iota_L : X^* \otimes Y \to L(X,Y)$ die Abbildung aus Proposition 1.11. Für $v = \sum_{i=1}^n x_i^* \otimes y_i$ gilt $\iota_L(v)(x) = \sum_{i=1}^n x_i^*(x)y_i$. Wir betrachten die Einschränkung von $\iota_L$ auf $X' \otimes Y$. Für $u = \sum_{i=1}^n x_i' \otimes y_i \in X' \otimes Y$ und $x \in X$ gilt

$$\|\iota_L(u)|_{X'\otimes Y}(x)\|_Y \le \left\| \sum_{i=1}^n x_i'(x)y_i \right\|_Y \le \sum_{i=1}^n \|x_i'\|_{X'} \|x\|_X \|y_i\|_Y < +\infty.$$

Damit ist $\iota_L(u)|_{X'\otimes Y}$ ein beschränkter Operator mit Abbildungsnorm $\|\iota_L(u)|_{X'\otimes Y}\| \le \sum_{i=1}^n \|x_i'\|\|y_i\|$. Bildet man das Infimum über alle Darstellungen von $u$, so folgt $\|\iota_L(u)\| \le \pi(u)$, also $\|\iota_L\| \le 1$. Anhand der Definition nuklearer Operatoren erkennt man sofort, dass dieser nach $N(X,Y)$ hinein abbildet. Wegen Satz 2.5.2 aus [BKW] existiert eine eindeutige, lineare Fortsetzung $J : X'\hat{\otimes}_\pi Y \to L_b(X,Y)$. Aus Satz 1.28 folgt $J(X'\hat{\otimes}_\pi Y) = N(X,Y)$.
Zu einem nuklearen Operator $T \in N(X,Y)$ existieren Folgen $(x_i')_{i=1}^\infty \in X'$ und $(y_i)_{i=1}^\infty \in Y$, sodass $T(x) = \sum_{i=1}^\infty x_i'(x)y_i$ und $\sum_{i=1}^\infty \|x_i'\|\,\|y_i\| < \infty$. Die zweite Bedingung impliziert $\sum_{i=1}^\infty x_i' \otimes y_i \in X'\hat{\otimes}_\pi Y$. Wegen $\iota_L(\sum_{i=1}^n x_i' \otimes y_i)(x) = \sum_{i=1}^n x_i'(x)y_i$ folgt aus der Stetigkeit der Abbildung $J$, dass $J(\sum_{i=1}^\infty x_i' \otimes y_i)(x) = \sum_{i=1}^\infty x_i'(x)y_i = T(x)$. Somit ist $J$ surjektiv. Da $J : X'\hat{\otimes}_\pi Y \to L_b(X,Y)$ beschränkt ist, ist ker$J$ in $X'\hat{\otimes}_\pi Y$ abgeschlossen. □

**Korollar 2.4** Sind $X$ und $Y$ Banachräume über $\mathbb{C}$, dann ist der Raum $N(X,Y)$ versehen mit der Norm

$$\|T\|_N := \inf\{ \sum_{i=1}^\infty \|x_i'\|\,\|y_i\| : \; T(x) = \sum_{i=1}^\infty x_i'(x)y_n \} \tag{2.1}$$

ein Banachraum. Wir bezeichnen $\|T\|_N$ als die *nukleare Norm*. Insbesondere ist dann durch den Operator $J$ aus Proposition 2.3 ein Quotientenoperator gegeben.

*Beweis.* In Proposition 2.3 haben wir gesehen, dass der dort definierte Operator $J$ linear und surjektiv ist und das Tensorprodukt $X'\hat{\otimes}_\pi Y$ nach $N(X,Y)$ abbildet. Das heißt $N(X,Y)$ ist isomorph zum Raum $X'\hat{\otimes}_\pi Y/\ker(J)$. Die rechte Seite von (2.1) stimmt dabei genau mit der Operatornorm auf $X'\hat{\otimes}_\pi Y/\ker(J)$ überein, womit sich $\|.\|_N$ als Norm und $J$ als Quotientenoperator herausstellt. □

## 2.2 Integrale und Pietsch-integrale Operatoren

In diesem Abschnitt beschäftigen wir uns mit der Identifikation des Dualraums des injektiven Tensorprodukt. Dieser ist wesentlich schwieriger zu bestimmen als der des projektiven Tensorprodukts, erweist sich jedoch als wesentlich interessanter.

Wir werden uns außerdem mit komplexwertigen Borelmaßen auseinandersetzen. Für ein endliches, komplexwertiges Maß $\mu$ auf einem Maßraum $(\Omega, \Sigma)$ definieren wir dessen Variation $|\mu|$.

$$|\mu|(E) = \sup\{\sum_{i=1}^\infty |\mu(A_i)| : \; A_k \in \Sigma, k \in \mathbb{N}, \; \sum_{i=1}^\infty A_i = E\}.$$

Diese stellt ein endliches, positives Maß auf $(\Omega, \Sigma)$ dar. Dabei existiert zu jedem solchen $\mu$ eine komplexwertige, integrierbare Funktion $\phi$ mit $|\phi| = 1$ $|\mu|$-f.ü., sodass

$$\int_\Omega f \, d\mu = \int_\Omega f\phi \, d|\mu|, \tag{2.2}$$

siehe Abschnitt 3.1 und 3.2 in [Ka2]. Wir definieren damit $L_p(\mu) := L_p(|\mu|)$ für $p \in [1, \infty]$. Für ein $\sigma-$endliches Maß $\nu$, können wir den Dualraum von $L_1(\nu)$ mit $L_\infty(\nu)$ identifizieren; siehe Satz 13.40 in [Ku]. Damit gilt für ein endliches, komplexwertiges Borelmaß, dass $L_1(|\mu|)' \cong L_\infty(|\mu|)$, wobei $f \mapsto (g \mapsto \int fg \, d|\mu|) \in L_1(|\mu|)'$ für $f \in L_\infty(|\mu|)$ einen isometrischen Isomorphismus darstellt.

**Lemma 2.5** Ist $\mu$ ein komplexwertiges Borelmaß auf einem Maßraum $(\Omega, \Sigma)$, dann gilt $L_1(\mu)' \cong L_\infty(\mu)$, wobei $f \mapsto (g \mapsto \int fg \, d\mu) \in L_1(\mu)'$ für $f \in L_\infty(\mu)$ ein isometrischer Isomorphismus ist.

*Beweis.* Ist $\phi$ wie in (2.2) und $f \in L_\infty(\mu)$, so ist $f \mapsto \phi f$ eine isometrische, isomorphe Abbildung von $L_\infty(\mu)$ nach $L_\infty(\mu)$. Somit ist $f \mapsto (g \mapsto \int \phi fg \, d|\mu|) = (g \mapsto \int fg \, d\mu)$ ebenso ein isometrischer Isomorphismus. □

**Definition 2.6** Sind $X$ und $Y$ Banachräume über $\mathbb{C}$, dann heißt eine Bilinearform $B \in B(X \times Y)$ *integral*, falls ihre Linearisierung $\tilde{B}$ stetig bezüglich $\epsilon_{X,Y}$ ist, und infolge als Element von $\big(X \hat{\otimes}_\epsilon Y\big)'$ gesehen werden kann.
Wir definieren die *integrale Norm* von $B$ durch $\|B\|_I := \|\tilde{B}\|_\epsilon$, wobei $\|.\|_\epsilon$ die von $\epsilon$ auf $(X \hat{\otimes}_\epsilon Y)'$ induzierte Abbildungsnorm ist.
Wir bezeichnen die Menge aller integralen Bilinearformen versehen mit der integralen Norm als $B_I(X, Y)$. Man erkennt leicht, dass die integralen Bilinearformen, versehen mit der üblichen Addition und Skalarmultiplikation, einen Vektorraum bilden. Zusammenfassend gilt also

$$B_I(X, Y) \cong \big(X \hat{\otimes}_\epsilon Y\big)'. \tag{2.3}$$

*Bemerkung 2.7* Sind $X$ und $Y$ Banachräume und versehen wir $K_1^{X'}(0)$ sowie $K_1^{Y'}(0)$ jeweils mit der schwach*-Topologie, dann ist nach Banach-Alaoglu, Satz 5.5.5 in [BKW], der Raum $K := K_1^{X'}(0) \times K_1^{Y'}(0)$ kompakt. Für $x \in X$ und $y \in Y$ sind dann die Abbildungen $x' \mapsto x'(x)$ von $K_1^{X'}(0)$ nach $\mathbb{C}$ und $y' \mapsto y'(y)$ von $K_1^{Y'}(0)$ nach $\mathbb{C}$ stetig. Somit ist die Abbildung $(x', y') \mapsto x'(x)y'(y)$ von $K$ nach $\mathbb{C}$ ebenfalls stetig. Zudem ist $(x, y) \mapsto ((x', y') \mapsto x'(x)y'(y))$ bilinear. Damit existiert nach Proposition 1.5 eine eindeutige, lineare Abbildung $J : X \otimes Y \to C(K)$ mit

$$J(\sum_{i=1}^n x_i \otimes y_i) = \big[(x', y') \mapsto \sum_{i=1}^n x'(x_i)y'(y_i)\big].$$

Für $v = \sum_{i=1}^n x_i \otimes y_i \in X \otimes Y$ gilt

$$\epsilon(v) = \sup\Big\{|\sum_{i=1}^n x'(x_i)y'(y_i)| : \ x' \in K_1^{X'}(0), \ y' \in K_1^{Y'}(0)\Big\} = \Big\|\tilde{J}(v)\Big\|_\infty.$$

Also ist $J$ eine Isometrie, wenn wir $X \otimes Y$ mit $\epsilon$ und $C(K)$ mit der Supremumsnorm versehen. Infolge lässt sich $J$ zu einer linearen Isometrie $\tilde{J} : X\hat{\otimes}_\epsilon Y \to C(K)$ fortsetzen.

Diese Überlegungen leiten ein entscheidendes Resultat ein, welches uns den Raum aller integralen Bilinearformen charakterisieren lässt.

**Satz 2.8** Sind $X$ und $Y$ Banachräume über $\mathbb{C}$, dann ist für eine Bilinearform $B \in B(X \times Y)$ ihre Linearisierung $\tilde{B}$ genau dann stetig bzgl. $\epsilon_{X,Y}$, wenn ein reguläres, komplexes Borelmaß $\mu$ auf dem kompakten Raum $K := K_1^{X'}(0) \times K_1^{Y'}(0)$ existiert, wobei beide Mengen mit der entsprechenden schwach*-Topologie versehen sind, sodass

$$B(x, y) = \int_K x'(x)y'(y)\ d\mu(x', y') \quad \text{für alle } x \in X, y \in Y. \tag{2.4}$$

Dabei gilt $\|B\|_I = \min |\mu|(K)$, wobei dieses Infimum über alle komplexen Maße $\mu$ läuft, die (2.3) erfüllen.

*Beweis.*
Gemäß (2.3) sind die Elemente von $(X\hat{\otimes}_\epsilon Y)'$ genau jene von der Bauart $\tilde{B}$ mit einem integralen $B \in B(X\times Y)$. Ist $\tilde{J}$ die Abbildung aus Bemerkung 2.7, so stellt die Zusammensetzung $\tilde{B} \circ \tilde{J}^{-1}$ ein beschränktes lineares Funktional auf dem Raum $\tilde{J}(X\hat{\otimes}_\epsilon Y) \subseteq C(K)$ dar. Mit dem Satz von Hahn-Banach, Satz 5.2.3 in [BKW], können wir dieses zu einem Funktional $T$ auf $C(K)$ mit gleicher Norm erweitern. Der Darstellungssatz von Riesz-Markov, Theorem 2.12 und Theorem 6.19 in [Ru], besagt, dass dazu ein reguläres, komplexes Borelmaß $\mu$ auf $K$ existiert, sodass

$$T(f) = \int_K f(x', y')\ d\mu(x', y')$$

für alle $f \in C(K)$. Dabei gilt $|\mu|(K) = \|T\| = \|\tilde{B} \circ \tilde{J}^{-1}\| = \|\tilde{B}\| = \|B\|_I$. Nun gilt

$$\begin{aligned}\int_K x'(x)y'(y)\ d\mu(x', y') &= T\big(J(x \otimes y)\big) = (\tilde{B} \circ \tilde{J}^{-1} \circ \tilde{J})(x \otimes y)\\ &= \tilde{B}(x \otimes y) = B(x, y).\end{aligned}$$

Nun geben wir eine Bilinearform $B \in B(X \times Y)$ vor und setzen voraus, dass

$$B(x, y) = \int_K x'(x)y'(y)\ d\mu(x', y') \quad \text{für alle } x \in X, y \in Y,$$

wobei $\mu$ ein komplexes, reguläres Borelmaß auf $K$ ist. Definieren wir in gewohnter Art und Weise die Linearisierung

$$\tilde{B}\big(\sum_{i=1}^n x_i \otimes y_i\big) = \sum_{i=1}^n B(x_i, y_i),$$

dann gilt

$$\tilde{B}(v) = \int_K J(v)(x', y')\ d\mu(x', y')$$

für alle $v \in X \otimes Y$. Es folgt

$$\begin{aligned}
|\tilde{B}(v)| &= \Big| \int_K (Jv)(x', y')\ d\mu(x', y') \Big| \\
&\leq \int_K |(Jv)(x', y')|\ d|\mu|(x', y') \\
&\leq \|Jv\|_\infty |\mu|(K) = \epsilon(v)|\mu|(K).
\end{aligned}$$

Damit ist $\tilde{B}$ beschränkt bezüglich der injektiven Norm und lässt sich zu einem linearen Funktional auf $X \hat{\otimes}_\epsilon Y$ erweitern mit $\|\tilde{B}\| \leq |\mu|(K)$. Mit dem ersten Teil des Beweises erkennen wir, dass $\|\tilde{B}\|_I = \min |\mu|(K)$. □

**Definition 2.9** Seien $X$ und $Y$ Banachräume über $\mathbb{C}$ und $T : X \to Y$ ein linearer Operator. Dann heißt $T$ *integral*, falls die Bilinearform $B_T : X \times Y' \to \mathbb{C}$, definiert durch $B_T(x, y') := \langle Tx, y' \rangle$ eine integrale Bilinearform ist.
Wir definieren die *integrale-Norm* von $T$ als $\|T\|_I := \|B_T\|_I$ und bezeichnen die Menge aller integralen Operatoren mit $I(X, Y)$. Man erkennt sofort, dass die integralen Operatoren, versehen mit der üblichen Addition und Skalarmultiplikation, einen Vektorraum bilden.

**Proposition 2.10** Sind $W, X, Y$, und $Z$ Banachräume über $\mathbb{C}$, $T : W \to X$ und $R : Y \to Z$ beschränkte, lineare Operatoren. Falls $S : X \to Y$ ein integraler Operator ist, dann ist es auch $RST : W \to Z$, wobei $\|RST\|_I \leq \|R\|\ \|S\|_I\ \|T\|$.

$$\begin{tikzcd}
W \arrow[r, "RST"] \arrow[d, "T"'] & Z \\
X \arrow[r, "S"'] & Y \arrow[u, "R"']
\end{tikzcd}$$

*Beweis.* Für $T : W \to X$ und $R' : Z' \to Y'$ betrachten wir den durch Proposition 1.35 gegebenen, beschränkten, linearen Operator $T \otimes_\epsilon R' : W \hat{\otimes}_\epsilon Z' \to X \hat{\otimes}_\epsilon Y'$ sowie dessen adjungierten Operator $(T \otimes_\epsilon R')' : (X \hat{\otimes}_\epsilon Y')' \to (W \hat{\otimes}_\epsilon Z')'$. Sei $B_S \in B_I(X, Y')$ die integrale Bilinearform definiert durch $B_S(x, y') = \langle Sx, y' \rangle$. Dann ist ihre Linearisierung $\tilde{B}_S$ ein Element von $(X \hat{\otimes}_\epsilon Y')'$. Wir berechnen für $w \in W$ und $z' \in Z'$

$$\begin{aligned}
\big\langle (w \otimes z'), (T \otimes_\epsilon R')'\tilde{B}_S \big\rangle &= \big\langle (T \otimes_\epsilon R')(w \otimes z'), \tilde{B}_S \big\rangle = \big\langle (Tw \otimes R'z'), \tilde{B}_S \big\rangle \\
&= B_S(Tw, R'z') = \langle STw, R'z' \rangle = \langle RSTw, z' \rangle \\
&= B_{RST}(w, z') = \tilde{B}_{RST}(w \otimes z').
\end{aligned}$$

Also ist die Linearisierung von $B_{RST}$ das Bild von $\tilde{B}_S$ unter dem Operator $(T \otimes_\epsilon R')'$ und daher ein Element von $(W \hat{\otimes}_\epsilon Z')'$. Somit ist auch $RST$ ein integraler Operator. Für diesen gilt

$$\begin{aligned}
\|RST\|_I &= \|B_{RST}\|_I = \|(T \otimes R')'(\tilde{B}_S)\|_\epsilon \leq \|(T \otimes R')'\| \cdot \|\tilde{B}_S\|_\epsilon \\
&= \|T \otimes_\epsilon R'\| \, \|S\|_I \leq \|T\| \, \|R'\| \, \|S\|_I \\
&= \|R\| \, \|S\|_I \, \|T\| \, .
\end{aligned}$$

□

**Proposition 2.11** Sind $X$ und $Y$ Banachräume und $\iota_Y : Y \to Y''$ die kanonische Einbettung. Dann ist $T : X \to Y$ genau dann integral, wenn $\iota_Y T : X \to Y''$ integral ist. Dabei gilt $\|T\|_I = \|\iota_Y T\|_I$.

*Beweis.* Aus Proposition 2.10 folgt sofort, dass $\iota_Y T$ integral ist, wobei $\|\iota_Y T\|_I \leq \|T\|_I$. Angenommen $\iota_Y T$ ist integral. Sei $B := B_{\iota_Y T} \in B_I(X, Y''')$ die Bilinearform definiert durch $B(x, y''') = \langle \iota_Y T(x), y''' \rangle$ für $x \in X$ und $y''' \in Y'''$. Sei $\iota_{Y'}$ die kanonische Einbettung von $Y'$ nach $Y'''$ und $Id_X$ die Identität auf $X$. Wir definieren den durch Proposition 1.35 gegebenen, beschränkten, linearen Operator $\sigma := Id_X \otimes_\epsilon \iota_{Y'} : X \hat{\otimes}_\epsilon Y' \to X \hat{\otimes}_\epsilon Y'''$ und betrachten dessen adjungierten Operator $\sigma' : (X \hat{\otimes}_\epsilon Y''')' \to (X \hat{\otimes}_\epsilon Y')'$. Weil $\iota_Y T$ integral ist, ist auch die Bilinearform $B$ integral. Also ist ihre Linearisierung $\tilde{B}$ ein Element von $(X \hat{\otimes}_\epsilon Y''')'$. Wir berechnen

$$\begin{aligned}
\left\langle (x \otimes y'), \sigma'(\tilde{B}) \right\rangle &= \left\langle \sigma(x \otimes y'), \tilde{B} \right\rangle = \left\langle (x \otimes \iota_{Y'}(y')), \tilde{B} \right\rangle \\
&= B(x, \iota_{Y'}(y')) = \left\langle (\iota_Y T x, \iota_{Y'}(y') \right\rangle \\
&= \left\langle y', \iota_Y(Tx) \right\rangle = \left\langle Tx, y' \right\rangle \\
&= B_T(x, y') = \langle (x \otimes y'), \tilde{B}_T \rangle .
\end{aligned}$$

Als Bild von $\tilde{B}$ unter $\sigma'$ ist die Linearisierung $\tilde{B}_T$ von $B_T$ ein Element von $(X \hat{\otimes}_\epsilon Y')'$. Somit ist auch $T$ integral, wobei

$$\begin{aligned}
\|T\|_I &= \|B_T\|_I = \|\sigma'(\tilde{B})\| \\
&\leq \|\sigma\| \, \|B\|_I = \|Id_X \otimes_\pi \iota'_Y\| \, \|\iota_Y T\|_I \\
&\leq \|Id_X\| \, \|\iota'_Y\| \, \|\iota_Y T\|_I = \|\iota_Y T\|_I .
\end{aligned}$$

□

**Proposition 2.12** Sei $(\Omega, \Sigma, \mu)$ ein endlicher Maßraum mit positiven $\mu$. Dann ist die kanonische Einbettung $I : L_\infty(\mu) \to L_1(\mu)$ ein integraler Operator, wobei $\|I\|_I = \mu(\Omega)$.

*Beweis.* Weil wir $L_1(\mu)'$ mit $L_\infty(\mu)$ identifizieren können, genügt es zu zeigen, dass die Bilinearform $B_I : L_\infty(\mu) \times L_\infty(\mu) \to \mathbb{C}$, definiert durch $B_I : (f, g) \mapsto \int_\Omega fg \; d\mu$ integral ist, also ihre Linearisierung $\tilde{B}_I$ ein Element des Dualraums von $(L_\infty(\mu) \hat{\otimes}_\epsilon L_\infty(\mu))$ abgibt. Wir betrachten zuerst Tensoren der Bauart $v = \sum_{i=1}^n f_i \otimes g_i$, wobei $f_i$ und $g_i$ messbare Treppenfunktionen sind. Wir können $v$ dann schreiben als $v = \sum_{j,k} \lambda_{jk} (\chi_{A_j} \otimes \chi_{B_k})$, wobei $(A_j)$ und $(B_k)$ endliche Folgen von paarweise disjunkten, messbaren Mengen auf $\Omega$ sind mit strikt positiven Maß. Mit Bemerkung 1.37 erhalten wir

$$\begin{aligned}
\epsilon(v) &= \sup\{\big|\sum_{j,k}\lambda_{jk}\ \langle f,\chi_{A_j}\rangle\ \langle g,\chi_{B_k}\rangle\big| :\ f,g\in L_1(\mu),\|f\|_1,\|g\|_1\leq 1\}\\
&\leq \sup\{\sum_{j,k}|\lambda_{jk}|\ |\langle f,\chi_{A_j}\rangle|\ |\langle g,\chi_{B_k}\rangle| :\ f,g\in L_1(\mu),\|f\|_1,\|g\|_1\leq 1\}\\
&\leq \sup_{j,k}|\lambda_{jk}|\ \sup\{\big(\sum_j\int_{A_j}|f|\ d\mu\big)\big(\sum_k\int_{B_k}|g|\ d\mu\big) :\ f,g\in L_1(\mu),\|f\|_1,\|g\|_1\leq 1\}\\
&\leq \sup_{j,k}|\lambda_{jk}|.
\end{aligned}$$

Für festes $j$ und $k$ sind $f=\mu(A_j)^{-1}\chi_{A_j}$ und $g=\mu(B_k)^{-1}\chi_{B_k}$ Elemente von $L_1(\mu)$ mit Norm 1 und es gilt

$$\epsilon(v)\geq\big|\sum_{j,k}\lambda_{jk}\langle f,\chi_{A_j}\rangle\langle g,\chi_{B_k}\rangle\big|=|\lambda_{jk}|.$$

Wir erhalten $\epsilon(v)=\sup_{j,k}|\lambda_{jk}|$. Für diesen Tensor $v$ gilt

$$\begin{aligned}
|\tilde{B}_I(v)| &= \big|\sum_{j,k}\lambda_{jk}\int_\Omega\chi_{A_j}\chi_{B_k}\ d\mu\big| = \big|\sum_{jk}\lambda_{jk}\mu(A_j\cap B_k)\big|\\
&\leq \sup_{j,k}|\lambda_{jk}|\ \sum_{j,k}\mu(A_j\cap B_k)\leq\mu(\Omega)\sup_{j,k}|\lambda_{jk}|=\mu(\Omega)\epsilon(v).
\end{aligned}$$

Weil die messbaren Treppenfunktionen dicht in $L_\infty(\mu)$ liegen, gelten die oben angestellten Rechnungen auch für beliebige Funktionen in $L_\infty(\mu)$. Dafür wählt man für zu $v=\sum_{i=1}^n f_i\otimes g_i\in L_\infty(\mu)\otimes_\epsilon L_\infty$ Folgen $(f_{ik})_{k=1}^\infty$, $(g_{ik})_{k=1}^\infty$ von Treppenfunktionen, welche gleichmäßig gegen $f$ bzw. $g$ konvergieren. Dann konvergiert $v_k=\sum_{i=1}^n f_{ik}\otimes g_{ik}$ gegen $v$. Denn für jedes $k\in\{1,\dots,n\}$ gilt

$$\begin{aligned}
\epsilon(f_{ik}\otimes g_{ik}-f_i\otimes g_i) &= \epsilon(f_{ik}\otimes g_{ik}-f_{ik}\otimes g_i+f_{ik}\otimes g_i-f_{ik}\otimes g_{ik})\\
&\leq \epsilon\big(f_{ik}\otimes(g_{ik}-g_i)\big)+\epsilon\big((f_{ik}-f_i)\otimes g_i\big)\\
&\leq \|f_{ik}\|\ \|g_{ik}-g_i\|+\|f_{ik}-f_i\|\ \|g_{ik}\|.
\end{aligned}$$

Weil $(\|f_{ik}\|)_{k\in\mathbb{N}},(\|g_{ik}\|)_{k\in\mathbb{N}}$ beschränkt sind, konvergiert der letzte Ausdruck für $k\to\infty$ gegen Null. Weil $v$ Summe der Tensoren $f_i\otimes g_i$ ist, konvergiert für $k\to\infty$ auch $v_k$ gegen $v$ bzgl. $\epsilon$. Weiters gilt

$$\tilde{B}_I(f_{ik}\otimes g_{ik})=\int_\Omega f_{ik}g_{ik}\ d\mu\stackrel{k\to\infty}{\longrightarrow}\int_\Omega f_ig_i\ d\mu=\tilde{B}_I(f_i\otimes g_i).$$

Weil wir bereits gezeigt haben, dass $|\tilde{B}_I(v_k)|\leq\mu(\Omega)\epsilon(v_k)$, erhalten wir mit Grenzübergang $k\to\infty$, dass $|\tilde{B}_I(v)|\leq\mu(\Omega)\epsilon(v)$, womit sich $\tilde{B}_I$ als beschränkt herausstellt. Somit ist $B$ eine beschränkte Bilinearform auf $L_\infty(\mu)\otimes_\epsilon L_\infty(\mu)$ mit $\|B\|_I\leq\mu(\Omega)$.
Für $f=g=1$ und den Tensor $v=f\otimes g$ mit $\|v\|_\epsilon=1$ gilt $\tilde{B}_I(v)=\mu(\Omega)\leq\|B_I\|_I$. Insgesamt gilt also $\|B_I\|_I=\mu(\Omega)$. $\square$

Wenden wir das obige Resultat für ein komplexwertiges Maß $\mu$ auf das positive Maß $|\mu|$ an, erhalten wir folgendes Resultat.

**Korollar 2.13** Ist $\mu$ ein komplexes, reguläres Borelmaß, dann ist die kanonische Einbettung $I : L_1(\mu) \to L_\infty(\mu)$ integral.

**Satz 2.14** Sind $X$ und $Y$ Banachräume über $\mathbb{C}$, dann ist ein Operator $T : X \to Y$ genau dann integral, wenn ein endliches, komplexes Maß $\mu$ auf einem kompakten Hausdorff Raum $\Omega$ und beschränkte, lineare Operatoren $S : X \to L_\infty(\mu)$ und $Q : L_1(\mu) \to Y''$ existieren, sodass $\iota_Y T = QIS$, wobei $\iota_Y$ die kanonische Einbettung von $Y$ nach $Y''$ und $I$ die kanonische Abbildung von $L_\infty(\mu)$ nach $L_1(\mu)$ ist. In dem Fall gilt $\|T\|_I \le \|S\| \, \|Q\| \, |\mu|(\Omega)$. Dabei können $S$, $Q$, $\Omega$ und $\mu$ so gewählt werden, dass $\|S\|$,$\|Q\| = 1$ und $\|T\|_I = |\mu|(\Omega)$.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "T"] \arrow[d, "S"'] & Y \arrow[r, "\iota_Y"] & Y'' \\ L_\infty(\mu) \arrow[rr, "I"'] & & L_1(\mu) \arrow[u, "Q"'] \end{tikzcd}$$

*Beweis.* Sei $T : X \to Y$ ein integraler Operator, d.h. die Bilinearform $B_T \in B(X, Y')$, definiert durch $B_T(x, y') = y'(Tx)$ ist integral. Mit Satz 2.7 existiert ein reguläres, komplexes Borelmaß $\mu$ auf dem kompakten Hausdorffraum $K := K_1^{X'} \times K_1^{Y''}$, wobei diese Mengen jeweils mit der schwach*-Topologie versehen sind, sodass

$$\langle Tx, y' \rangle = B_T(x, y') = \int\limits_K x'(x) y''(y') \; d\mu(x', y'')$$

und $|\mu|(K) = \|B_T\|_I = \|T\|_I$. Wir definieren $S : X \to L_\infty(\mu)$ durch $Sx = [(x', y'') \mapsto x'(x)]$ und $R : Y' \to L_\infty(\mu)$ durch $Ry' = [(x', y'') \mapsto y''(y')]$. Offensichtlich sind $S$ und $R$ linear und beschränkt mit Abbildungsnorm $\|S\|, \|R\| = 1$. Wir berechnen unter Verwendung von $L_1(\mu) \cong L_\infty(\mu)$

$$\begin{aligned} (\iota_Y Tx)(y') = y'(Tx) &= \int\limits_K x'(x) y''(y') \; d\mu(x', y'') \\ &= \int\limits_K (Sx)(x', y'')(Ry')(x', y'') \; d\mu(x', y'') \\ &= \langle ISx, Ry' \rangle = \langle Ry', \iota_{L_1(\mu)} ISx \rangle \\ &= \langle y', R' \iota_{L_1(\mu)} ISx \rangle = (R' \iota_{L_1(\mu)} ISx)(y'). \end{aligned}$$

wobei $R' : L_\infty(\mu)' \to Y''$ der konjungierte Operator von $R$ und $\iota_{L_1(\mu)}$ die kanonische Einbettung von $L_1$ nach $L_1''$ ist. Wir definieren $Q := R' \circ \iota_{L_1(\mu)}$ und erhalten $\iota_Y T = QIS$, was eine gewünschte Zerlegung darstellt.
Setzen wir voraus, dass zu $T : X \to Y$ eine geeignete Zerlegung $\iota_Y T = QIS$ existiert. Dann folgt aus den Propositionen 2.10-2.11 und Korollar 2.13, dass $T$ ein integraler Operator ist mit $\|T\|_I \le \|S\| \, \|Q\| \, |\mu|(\Omega)$. □

In Satz 2.14 ist es nötig, den Bildbereich von $T : X \to Y$ auf den Bidualraum $Y''$ zu erweitern, um eine geeignete Faktorisierung zu erhalten. Wenn wir darauf bestehen, dass diese Faktorisierung nur Werte in $Y$ annimmt, erhalten wir eine kleinere Klasse von Operatoren.

**Definition 2.15** Sind $X$ und $Y$ Banachräume und $T : X \to Y$ ein beschränkter, linearer Operator. Dann heißt $T$ *Pietsch-integral*, falls ein komplexes, reguläres Borelmaß $\mu$ auf einem kompakten Hausdorff Raum $\Omega$ und beschränkte, lineare Operatoren $S : X \to L_\infty(\mu)$ und $Q : L_1(\mu) \to Y$ existieren mit $\|Q\|, \|S\| \leq 1$, sodass $T = QIS$, wobei $I$ die kanonische Abbildung von $L_\infty(\mu)$ nach $L_1(\mu)$ ist.
Wir definieren die *Pietsch-integrale Norm* durch $\|T\|_{PI} = \inf \|Q\| \|S\| |\mu|(\Omega)$, wobei das Infimum über alle solchen Zerlegungen läuft. Wir bezeichnen die Menge aller Pietsch-integralen Operatoren versehen mit der entsprechenden Norm als $PI(X, Y)$.

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{T} & Y \\ {\scriptstyle S}\downarrow & & \uparrow{\scriptstyle Q} \\ L_\infty(\mu) & \xrightarrow[I]{} & L_1(\mu) \end{array}$$

*Bemerkung 2.16* Man kann zeigen, dass die Pietsch-integralen Operatoren einen Vektorraum bilden, und dass die Pietsch-integrale Norm auch tatsächlich eine Norm ist. Der Beweis dieser Aussage benötigt jedoch Theorie über vektorielle Maße, weshalb dieser hier nicht ausgeführt ist; siehe [DU], Abschnitt VI.3. Die obige Definition ist aber bereits ausreichend, um den Zusammenhang zwischen nuklearen und integralen Operatoren herzustellen.

**Proposition 2.17** Sind $X$ und $Y$ Banachräume, dann ist jeder nukleare Operator $T : X \to Y$ ein Pietsch-integral Operator. Dabei gilt $\|T\|_{PI} \leq \|T\|_N$.

*Beweis.* Wir bezeichnen mit $I$ wieder die kanonische Einbettung von $L_\infty(\mu)$ nach $L_1(\mu)$. Als nuklearer Operator hat $T$ eine Darstellung $T(x) = \sum_{i=1}^\infty x_i'(x) y_i$ für gewisse $x_i' \in X'$ und $y_i \in Y$ mit $\sum_{i=1}^\infty \|x_i\| \|y_i\| < +\infty$. Wir definieren $\phi_i := x_i' / \|x_i'\| \in X'$, $z_i := y_i / \|y_i\| \in Y$, $\lambda_i := \|x_i'\| \|y_i\| \in \mathbb{R}$. Damit gilt $T(x) = \sum_{i=1}^\infty \lambda_i \phi_i(x) z_i$. Wir definieren $\Omega := K_1^{X'}(0)$, wobei wir diesen Raum mit der schwach*-Topologie versehen. Darauf definieren wir $\mu$ als das Punktmaß mit Wert $\lambda_i$ im Punkt $\phi_i$ für $i \in \mathbb{N}$. Für eine Borelmenge $E \subseteq \Omega$ gilt also $\mu(E) = \sum_{i=1}^\infty \lambda_i \delta_{\phi_i}(E)$, wobei $\delta_{\phi_i}(E) = 1$, falls $\phi_i \in E$, und $\delta_{\phi_i}(E) = 0$ sonst. Dann erhalten wir

$$\mu(\Omega) = \sum_{i=1}^\infty \lambda_i \delta_{\phi_i}(\Omega) = \sum_{i=1}^\infty \lambda_i = \sum_{i=1}^n \|x_i'\| \|y_i\| < +\infty,$$

weshalb $\mu$ ein endliches Maß ist. Wir definieren für $x \in X$ den Operator $S : X \to L_\infty(\mu)$ durch $Sx = (x' \to x'(x))$. Diese Abbildung ist linear und beschränkt mit Abbildungsnorm

$\|S\| \leq 1$. Für alle $f \in L_1(\mu)$ gilt

$$\sum_{i=1}^{\infty} \|\lambda_j f(\phi_j) z_j\| = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_j |f(\phi_j)| = \int_{\Omega} |f| \, d\mu < +\infty,$$

weshalb die Reihe $\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_j f(\phi_j) z_j$ absolut konvergent ist. Damit ist die Abbildung $Q : L_1(\mu) \to Y$ durch $Q(f) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_j f(\phi_j) z_j$ wohldefiniert. Außerdem gilt

$$\|Qf\| = \|\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_j f(\phi_j) z_j\| \leq \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_j |f(\phi_j)| = \|f\|_1,$$

womit $Q$ beschränkt mit Abbildungsnorm $\|Q\| \leq 1$ ist. Insbesondere gilt für $x \in X$

$$Q(ISx) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i (Sx)(\phi_i) z_i = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i \phi_i(x) z_i = T(x).$$

Also gilt $T = QIS$, wobei $Q$, $S$, $\Omega$ und $\mu$ wie in Definition 2.15 gewählt wurden. Somit in $T$ ein Pietsch-integraler Operator.
Es bleibt $\|T\|_{PI} \leq \|T\|_N$ zu zeigen. Für eine feste Darstellung $T(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i'(x) y_i$ können wir $Q$ und $S$ wie in obiger Konstruktion wählen. Dann gilt

$$\|T\|_{PI} \leq \|S\| \, \|Q\| \, |\mu|(\Omega) \leq |\mu|(\Omega) = \sum_{i=1}^{\infty} \|x_i'\| \, \|y_i\| \,. \tag{2.5}$$

Bildet man nun das Infimum über alle solchen Darstellungen von $T$, so erhält man die Behauptung. □

**Satz 2.18** Sind $X$ und $Y$ Banachräume, dann ist jeder Pietsch-integrale Operator $T : X \to Y$ ein integraler Operator mit $\|T\|_I \leq \|T\|_{PI}$.
Ist $\iota_Y$ die kanonische Einbettung von $Y$ nach $Y''$, und existiert eine Projektion $P : Y'' \to Y''$ mit $\|P\| = 1$, sodass $\text{ran}P = \iota_Y(Y)$, dann ist jeder integrale Operator $T : X \to Y$ auch ein Pietsch-integraler Operator, und die integrale und Pietsch-integrale Norm stimmen überein.

*Beweis.* Ist $T : X \to Y$ ein Pietsch-integraler Operator, dann existiert für ein komplexes, reguläres Borelmaß $\mu$ auf einem kompakten Hausdorff Raum $\Omega$ eine Darstellung $T = QIS$ wie in Definition 2.15. Bezeichnen wir mit $\iota_Y$ die kanonische Einbettung von $Y$ nach $Y''$, und definieren $R := \iota_Y Q$, dann gilt $\iota_Y T = RIS$, was eine Zerlegung wie in Satz 2.14 ergibt.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "T"] \arrow[d, "S"'] & Y \arrow[r, "\iota_Y"] & Y'' \\
L_\infty(\mu) \arrow[r, "I"'] & L_1(\mu) \arrow[u, "Q"'] \arrow[ur, "R"'] &
\end{tikzcd}$$

Für diese Darstellung $T = QIS$ gilt

$$\|T\|_I \leq \|RIS\|_I \leq \|\iota_Y\| \, \|Q\| \, \|I\|_I \, \|S\| = \|Q\| \, \|S\| \, |\mu|(\Omega).$$

Bildet man das Infimum über alle solchen Darstellungen, so folgt $\|T\|_I \leq \|T\|_{PI}$.

Angenommen $T : X \to Y$ ist ein integraler Operator und es existiert eine Projektion $P$ auf $Y''$ mit Bildbereich $\iota_Y(Y)$ und Norm $\|P\| = 1$. Wir wählen $S$, $Q$, $\Omega$ und $\mu$ wie in Satz 2.12, sodass $\|T\|_I = |\mu|(\Omega)$. Definieren wir $R := \iota_Y^{-1} PQ$, dann ist $T = RIS$ eine Zerlegung wie in Definition 2.15.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "T"] \arrow[d, "S"'] & Y & Y'' \arrow[l, "(\iota_Y)^{-1}P"'] \\ L_\infty(\mu) \arrow[r, "I"'] & L_1(\mu) \arrow[u, "R"'] \arrow[ur, "Q"'] & \end{tikzcd}$$

Außerdem gilt
$$\|T\|_{PI} \leq \|R\| \, \|S\| \, |\mu|(\Omega) \leq |\mu|(\Omega) = \|T\|_I.$$

□

*Bemerkung 2.19* Wenn für einen Banachraum $Y$ eine Projektion wie in Satz 2.18 gegeben ist, sagen wir, dass $Y$ *komplementiert* in $Y''$ durch eine Norm-1 Projektion ist. Das ist insbesondere dann erfüllt, wenn $Y$ ein Dualraum ist. Um das einzusehen geben wir einen Banachraum $X$ vor. Dann ist die kanonische Einbettung $\iota_X : X \to X''$ eine Isometrie, hat also Norm $\|\iota_X\| = 1$. Ihr konjungierter Operator $(\iota_X)'$ ist eine Abbildung von $X'''$ nach $X'$ gleicher Norm. Die gesuchte Projektion ist dann $\iota_{X'} \circ (\iota_X)'$.

**Korollar 2.20** Für zwei Banachräume $X$ und $Y$ über $\mathbb{C}$ gilt
$$N(X, Y) \subseteq PI(X, Y) \subseteq I(X, Y),$$
und für jeden nuklearen Operator $T : X \to Y$ gilt
$$\|T\|_N \geq \|T\|_{PI} \geq \|T\|_I.$$

**Proposition 2.21** Sind $X$ und $Y$ Banachräume über $\mathbb{C}$, dann ist ein beschränkter, linearer Operator $T : X \to Y$ genau dann integral, wenn sein konjungierter Operator $T' : Y' \to X'$ integral ist. In diesem Fall gilt $\|T\|_I = \|T'\|_I$.

*Beweis.* Angenommen $T : X \to Y$ ist integral. Wir wählen $Q$, $S$, $\Omega$ und $\mu$ wie in Satz 2.14, sodass $\|Q\|, \|S\| = 1$, $\|T\|_I = |\mu|(\Omega)$ und $\iota_Y T = QIS$. Wir bezeichnen mit $\iota_{Y'}$ die kanonische Einbettung von $Y'$ nach $Y'''$ und mit $L$ die kanonische Einbettung von $L_1(\mu)$ nach $L_1(\mu)''$. Weil für $f, g \in L_\infty(\mu)$
$$\langle f, LIg \rangle = \langle Ig, f \rangle = \int_\Omega fg \, d\mu = \langle If, g \rangle$$
und damit $I' = LI$ erfüllt ist, folgt mit $(\iota_Y)' \circ \iota_{Y'} = \mathrm{id}_{Y'}$
$$T' = T'(\iota_Y)'\iota_{Y'} = S'LIQ'\iota_{Y'}.$$

Also ergibt sich folgendes kommutative Diagramm.

$$\begin{tikzcd}
Y' \arrow[r, "\iota_{Y'}"] & Y''' \arrow[r, "(\iota_Y)'"] \arrow[d, "Q'"'] & Y' \arrow[r, "T'"] & X' \\
L_\infty(\mu) = L_1(\Omega)' \arrow[rr, "I"'] & & L_1(\Omega) \arrow[r, "L"'] & L_\infty(\mu)' = L_1(\Omega)'' \arrow[u, "S'"']
\end{tikzcd}$$

Wegen Proposition 2.10 und 2.11 ist $T'$ integral. Dabei gilt

$$\begin{aligned}
\|T'\|_I = \|S'LIQ'\iota_{Y'}\|_I &\leq \|S'\|\,\|L\|\,\|I\|_I\,\|Q'\|\,\|\iota_{Y'}\| \\
&\leq \|S\|\,\|L\|\,\|I\|_I\,\|Q\|\,\|\iota_{Y'}\| \\
&\leq \|I\|_I = |\mu|(\Omega) = \|T\|_I.
\end{aligned}$$

Angenommen $T : X \to Y$ ist ein beschränkter, linearer Operator und $T' : Y'' \to Y'$ ist integral. Wir erhalten folgendes kommutative Diagramm:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "T"] \arrow[dr, "\iota_X"'] & Y \arrow[r, "\iota_Y"] & Y'' \\
& X'' \arrow[ur, "T''"'] &
\end{tikzcd}$$

Mit dem ersten Teil des Beweises ist $T''$ integral. Wegen Proposition 2.10 ist es auch $\iota_Y T = T''\iota_X$ und mit Proposition 2.11 auch $T$. Schließlich gilt $\|T\|_I = \|\iota_Y T\|_I \leq \|T''\iota_X\|_I \leq \|T'\|_I$. $\square$

**Korollar 2.22** Für Banachräume $X$ und $Y$ über $\mathbb{C}$ und $B \in \mathcal{B}(X,Y)$ ist $B$ genau dann integral, wenn der beschränkte, lineare Operator $T_B : X \to Y'$, definiert durch $\langle y, T_B x\rangle = B(x,y)$ integral ist. Dabei gilt $\|T\|_I = \|T_B\|_I$, insgesamt also

$$B_I(X,Y) \cong I(X,Y').$$

*Beweis.* Angenommen $T_B$ ist integral. Dann ist das bilineare Funktional $\tau \in B(X,Y'')$, definiert durch $\tau(x,y'') = \langle T_B x, y''\rangle$ eine integrale Bilinearform mit $\|\tau\|_I = \|T_B\|_I$. Also ist ihre Linearisierung $\tilde{\tau}$ ein Element von $(X\hat{\otimes}_\epsilon Y'')'$. Wir betrachten den durch Proposition 1.35 gegebenen Operator $Id_X \otimes_\epsilon \iota_Y : X\hat{\otimes}_\epsilon Y \to X\hat{\otimes}_\epsilon Y''$ und berechnen für die Linearisierung $\tilde{B} : X \otimes Y \to \mathbb{C}$

$$\begin{aligned}
\langle x \otimes y, \tilde{B}\rangle = B(x,y) = \langle y, T_B x\rangle = \langle T_B x, \iota_Y(y)\rangle &= \tau(x, \iota_Y(y)) \\
&= \langle x \otimes \iota_Y(y), \tilde{\tau}\rangle = \langle (Id_X \otimes_\epsilon \iota_Y)(x \otimes y), \tilde{\tau}\rangle \\
&= \langle x \otimes y, (Id_X \otimes_\epsilon \iota_Y)'(\tilde{\tau})\rangle.
\end{aligned}$$

Damit ist $\tilde{B}$ als Bild von $\tilde{\tau}$ unter $(Id_X \otimes_\epsilon \iota_Y)'$ ein Element von $(X\hat{\otimes}_\epsilon Y)'$, womit sich $B$ als integral herausstellt. Zudem gilt

$$\begin{aligned}
\|B\|_I = \left\|(Id_X\hat{\otimes}_\epsilon\iota_Y)'\tau\right\|_I &\leq \left\|(Id_X\hat{\otimes}_\epsilon\iota_Y)'\right\|\,\|\tau\|_I \\
&= \left\|Id_X\hat{\otimes}_\epsilon\iota_Y\right\|\,\|T_B\|_I = \|Id_X\|\,\|\iota_Y\|\,\|T_B\|_I \\
&= \|T_B\|_I.
\end{aligned}$$

Sei umgekehrt $B$ eine integrale Bilinearform auf $X \times Y$. Gemäß Satz 2.8 existiert ein reguläres, komplexes Borelmaß $\mu$ auf $K := K_1^{X'}(0) \times K_1^{Y'}(0)$, sodass

$$B(x, y) = \int_K x'(x)y'(y)\ d\mu(x', y')$$

für alle $x \in X$ und $y \in Y$ und $\|B\|_I = |\mu|(K)$. Definieren wir $R : X \to L_\infty(\mu)$ und $S : Y \to L_\infty(\mu)$ durch $Rx = [(x', y') \mapsto x'(x)]$ und $Sy = [(x', y') \mapsto y'(y)]$, so folgt

$$\begin{aligned}\langle y, T_B x\rangle = B(x, y) &= \int_K x'(x)y'(x)\ d\mu(x', y') \\ &= \int_K (Rx)(x', y')(Sy)(x', y')\ d\mu(x', y') \\ &= \langle ISy, Rx\rangle = \langle y, (IS)'(Rx)\rangle,\end{aligned}$$

wobei $I : L_\infty(\mu) \to L_1(\mu)$ die kanonische Einbettung bezeichnet. Wir erhalten $T_B = S'I'R$. Weil $I$ integral ist, folgt aus Proposition 2.10 und 2.21, dass $T_B$ auch integral ist. Außerdem impliziert 2.21

$$\begin{aligned}\|T_B\|_I = \|S'I'R\|_I &\leq \|S'\|\ \|I'\|_I\ \|R\| \\ &\leq \|I'\|_I = \|I\|_I \leq |\mu|(K) = \|B\|_I.\end{aligned}$$

$\square$

# Anhang

**Satz A.1** Sind $X$, $Y$ und $Z$ Banachräume über $\mathbb{C}$, so ist $\mathcal{B}(X \times Y, Z)$ der Vektorraum aller beschränkten Bilinearform von $X \times Y$ nach $Z$, versehen mit der Norm

$$\|B\| = \sup\{\|B(x,y)\|_Z : \; x \in X, \; y \in Y, \; \|x\|_X \leq 1, \; \|y\|_Y \leq 1\}$$

vollständig.

*Beweis.* Sei $(B_n)_{n=1}^{\infty}$ eine Cauchyfolge in $\mathcal{B}(X \times Y, Z)$. Insbesondere existiert damit ein $M > 0$, sodass $\|B_n\| \leq M$ für alle $n \in \mathbb{B}$. Für $x \in X$, $y \in Y$ und $n, m \in \mathbb{N}$ gilt

$$\|B_n(x,y) - B_m(x,y)\| \leq \|B_n - B_m\| \, \|x\| \, \|y\| \, .$$

Damit ist $(B_n(x,y))_{n=1}^{\infty}$ eine Cauchy-Folge in $Z$ und infolge konvergent. Wir definieren $B \in B(X \times Y, Z)$ durch

$$B(x,y) := \lim_{n \to \infty} B_n(x,y).$$

Aus der Bilinearität der Abbildungen $B_n(x,y)$ folgt sofort die Bilinearität von $B$.
Seien $x \in X$, $y \in Y$ und $\epsilon > 0$. Wir wählen $N \in \mathbb{N}$, sodass $\|B_n(x,y) - B(x,y)\| < \epsilon$ für alle $n > N$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \|B(x,y)\| &\leq \|B_n(x,y)\| + \|B_n(x,y) - B(x,y)\| \\ &\leq M\|x\|\|y\| + \epsilon \end{aligned}$$

für alle $n > N$. Weil $\epsilon$ beliebig gewählt war, gilt $\|B(x,y)\| \leq M \, \|x\| \, \|y\|$ für alle $x \in X$ und $y \in Y$. Also ist $B$ beschränkt.

Es bleibt zu zeigen, dass die Cauchyfolge $(B_n)_{n=1}^{\infty}$ gegen $B$ konvergiert. Seien also $x \in K_1^X(0)$, $y \in K_1^Y(0)$ und $\epsilon > 0$. Wir wählen $N \in \mathbb{N}$, sodass $\|B_n - B_m\| \leq \epsilon$ für $n, m > N$. Dann gilt

$$\|B_n(x,y) - B_m(x,y)\| \leq \|B_n - B_m\| \, \|x\| \, \|y\| \leq \epsilon \, \|x\| \, \|y\| \, .$$

Bildet man nun den Limes für $m \longrightarrow \infty$, erhält man

$$\|B_n(x,y) - B(x,y)\| \leq \epsilon \, \|x\| \, \|y\| \, .$$

Bildet man nun das Supremum über alle $x, y$ mit $\|x\| \, , \|y\| \leq 1$, erhält man $\|B_n - B\| \leq \epsilon$. Weil $\epsilon$ beliebig gewählt war, folgt die Behauptung. □

**Satz A.2** Sind $X, Y$, und $Z$ Banachräume über $\mathbb{C}$, dann ist eine bilineare Abbildung $B \in B(X \times Y, Z)$ genau dann beschränkt, wenn sie stetig ist, wobei wir $X \times Y$ mit der Maximumsnorm versehen.

*Beweis.* Sei $B \in B(X \times Y, Z)$ eine beschränkte Bilinearform. Sei $(x_n, y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $X \times Y$, welche gegen $(x,y)$ konvergiert. Dann gilt

$$\begin{aligned} \|B(x_n, y_n) - B(x,y)\| &= \|B(x_n, y_n) - B(x, y_n) + B(x, y_n) - B(x,y)\|_Z \\ &\leq \|B(x_n - x, y_n)\|_Z + \|B(x, y_n - y_n)\|_Z \\ &\leq \|B\|\|x_n - x\|_X\|y_n\|_Y + \|B\|\|x\|_X\|y_n - y\|_Y \stackrel{n \to \infty}{\longrightarrow} 0. \end{aligned}$$

Also ist $B$ auch stetig.
Sei umgekehrt $B \in B(X \times Y, Z)$ stetig. Die Stetigkeit bei 0 impliziert, dass für ein $\delta > 0$ aus $\|x\|_X, \|y\|_Y < \delta$ die Ungleichung $\|B(x,y)\|_Z < 1$ folgt. Für beliebige $x \in X \setminus \{0\}$ und $y \in Y \setminus \{0\}$ gilt dann

$$\begin{aligned}\|B(x,y)\|_Z &= \|B\big(\frac{\|x\|_X}{\delta}\frac{\delta x}{\|x\|_X}, \frac{\|y\|_Y}{\delta}\frac{\delta y}{\|y\|_Y}\big)\|_Z \\ &= \delta^{-2}\|x\|_X\|y\|_Y\|B\big(\frac{\delta x}{\|x\|}, \frac{\delta y}{\|y\|}\big)\|_Z < \delta^{-2}\|x\|_X\|y\|_Y.\end{aligned}$$

□

**Satz A.3** Sei $I$ eine Indexmenge und $X$ ein Banachraum über $\mathbb{C}$. Dann ist $\ell_1(I,X)$ versehen mit der Norm

$$\|x\|_1 := \lim_{A\in\mathcal{E}(I)} \sum_{i\in A} \|x_i\|_X.$$

vollständig.

*Beweis.* Sei $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ mit $x_n = (x_{ni})_{i\in I}$ eine Cauchyfolge in $\ell_1(I,X)$. Damit existiert damit ein $M > 0$, sodass $\|x_n\| \leq M$, für alle $n \in \mathbb{N}$. Sei $j \in I$, $\epsilon > 0$. Wir wählen $N \in \mathbb{N}$, sodass $\|x_n - x_m\| < \epsilon$ für $n, m > N$. Dann gilt

$$\|x_{nj} - x_{mj}\| \leq \sum_{i\in I} \|x_{ni} - x_{mi}\| = \|x_n - x_m\| < \epsilon,$$

für $n, m > N$. Damit ist $(x_{ni})_{n=1}^{\infty}$ für alle $i \in I$ eine Cauchyfolge in $X$ und infolge konvergent. Wir definieren $y = (y_i)_{i\in I} \in \ell_1(I,X)$ durch

$$y_i := \lim_{n\to\infty} x_{ni}.$$

Wir zeigen zuerst, dass $y \in \ell_1(I,X)$. Für $A \in \mathcal{E}(I)$ wählen wir zu $\epsilon > 0$ ein $n \in \mathbb{N}$, sodass $\sum_{i\in A} \|y_i - x_{ni}\| < \epsilon$. Dann gilt

$$\begin{aligned}\sum_{i\in A} \|y_i\| &\leq \sum_{i\in A} \|x_{ni}\| + \sum_{i\in A} \|y_i - x_{ni}\| \\ &\leq \sum_{i\in I} \|x_{ni}\| + \sum_{i\in A} \|y_i - x_{ni}\| \leq M + \epsilon.\end{aligned}$$

Somit gilt auch $\lim_{A\in\mathcal{E}(I)} \sum_{i\in A} \|y_i\| \leq M + \epsilon$ und $y$ ist absolut summierbar.
Es bleibt zu zeigen, dass $y$ Grenzwert der Folge $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ ist. Zu $\epsilon > 0$ wählen wir ein $N \in \mathbb{N}$, sodass $\|x_n - x_m\| \leq \epsilon$ für $m, n > N$. Für $A \in \mathcal{E}(I)$ gilt dann

$$\sum_{i\in A} \|x_{ni} - x_{mi}\| \leq \|x_n - x_m\| \leq \epsilon.$$

Bildet man den Grenzübergang für $m \longrightarrow \infty$, erhält man

$$\sum_{i\in A} \|x_{ni} - y\| \leq \epsilon$$

für alle $n > N$. Weil $A$ beliebig gewählt war, gilt auch $\lim_{A\in\mathcal{E}(I)} \sum_{i\in A} \|y_i - x_{ni}\| = \|y - x_n\| \leq \epsilon$ für alle $n > N$, womit die Behauptung gezeigt wurde. □

# Literatur

[BKW] M. Blümlinger, M. Kaltenbäck, H. Woracek, *Funktionalanalysis 1*, Vorlesungsskript Februar 2018

[DU] J.Diestel, J.J.Uhl, *Vector Measures*, Mathematical Surveys Nr. 15, American Mathematical Society, 1977

[Ka] M. Kaltenbäck, *Fundament Analysis*, Berliner Studienreihe zur Mathematik Band 26, Heldermann Verlag, 2014

[Ka2] M. Kaltenbäck, *Analysis und Maßtheorie auf Topologischen Räumen*, Vorlesungsskript Juni 2013

[Ku] N. Kusolitsch, *Maß- und Wahrscheinlichkeitstheorie*, 2. Auflage, Springer Spektrum, 2014

[Ru] W. Rudin, *Real and Complex Analysis*, GTM 96, Springer Verlag, 1985

[Ry] R.R. Ryan, *Introduction to Tensor Products of Banach Spaces*, Springer Verlag, 2002