TECHNISCHE UNIVERSITÄT WIEN

BACHELORARBEIT

Die Dimension von topologischen Räumen

ausgeführt am Institut für

Analysis & Scientific Computing

der

Technischen Universität Wien

unter der Anleitung von

Ao.Univ.Prof. Dipl.-Ing. Dr.techn. Michael Kaltenbäck

durch

Benedikt Spiegel

01427242

11. September 2018

Inhaltsverzeichnis

0.1 Einleitung

Intuitiv ist uns klar - Geraden haben Dimension 1, Flächen haben Dimension 2 und Würfel haben Dimension 3. Wir ordnen also gewissen Teilmengen des $\mathbb{R}^3$ Zahlen zu und sprechen dabei von der "Dimension"dieser Mengen. Nun stellt sich die Frage: Lässt sich auf einem beliebigen topologischen Raum eine Abbildung finden, die jeder Teilmenge dieses Raumes eine ganze Zahl zuordnet und im Spezialfall des $\mathbb{R}^n$ mit unserer Intuition übereinstimmt?
In meiner Arbeit werde ich drei Möglichkeiten, die sogenannte *kleine induktive Dimension*, die *große induktive Dimension* und die *Überdeckungsdimension*, zur Lösung dieses Problems präsentieren, allerdings mit der Voraussetzung, dass der Grundraum zumindest regulär bzw. normal ist.

Im ersten Abschnitt möchte ich den Begriff der kleinen induktiven Dimension erarbeiten und beweisen, dass dieser auf separablen metrischen Räumen mit jenem der großen induktiven Dimension, einem sehr ähnlichen Zugang, übereinstimmt. Im zweiten Abschnitt werde ich die Überdeckungsdimension definieren und beweisen, dass auf separablen metrischen Räumen alle drei Begriffe äquivalent sind und dass diese mit unserer Intuition übereinstimmen. Die Vorgangsweise wird sich im wesentlichen an jener in [1] orientieren.

0.2 Grundbegriffe

Ich werde in meiner Arbeit die Notation und Begriffsbildungen aus [5] verwenden. Bevor wir eine erste Definition für die Dimension topologischer Räume angeben, möchte ich einige besonders wichtige Begriffe wiederholen und Resultate ergänzen.

Definition 0.2.1. Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und A, B Teilmengen von X. Dann ist nennt man A und B *getrennt*, wenn $\overline{A} \cap B = A \cap \overline{B} = \emptyset$.

Definition 0.2.2. Ein topologischer Raum $(X, \mathcal{T})$ erfüllt das Trennungsaxiom

(T1), falls $\{x\}$ für jedes $x \in X$ eine abgeschlossene Menge ist.

(T2), falls es zu je zwei Punkten $x, y \in X$ disjunkte offene Mengen $U, V \in \mathcal{T}$ gibt, sodass $x \in U$ und $y \in V$.

(T3), falls es zu jedem Punkt $x \in X$ und jeder abgeschlossenen Teilmenge $A \subset X$, die x nicht enthält, disjunkte offene Mengen $U, V \in \mathcal{T}$ gibt, sodass $x \in U$ und $A \subset V$.

(T4), falls es zu je zwei disjunkten abgeschlossenen Mengen $A, B \subset X$ disjunkte offene Mengen $U, V \in \mathcal{T}$ gibt, sodass $A \subset U$ und $B \subset V$.

(T5), falls es zu je zwei getrennten Mengen $A, B \subset X$ disjunkte offene Mengen $U, V \in \mathcal{T}$ gibt, sodass $A \subset U$ und $B \subset V$.

Definition 0.2.3. Ein topologischer Raum $(X, \mathcal{T})$ heißt

regulär, wenn $(X, \mathcal{T})$ die Trennungsaxiome $(T1)$ und $(T3)$ erfüllt.

normal, wenn $(X, \mathcal{T})$ die Trennungsaxiome $(T1)$ und $(T4)$ erfüllt.

Satz 0.2.4. *Jeder normale Raum $(X, \mathcal{T})$ ist auch regulär. Jeder reguläre Raum $(X, \mathcal{T})$ erfüllt $(T2)$.*

Beweis. Es reicht festzustellen, dass einpunktige Mengen in X abgeschlossen sind. □

Lemma 0.2.5. *Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und M ein Unterraum von X. Erfüllt $(X, \mathcal{T})$ eines der Trennungsaxiome $(T1) - (T3)$, so erfüllt auch $(M, \mathcal{T}|_M)$ das entsprechende Axiom. Ist M zusätzlich abgeschlossen, so gilt die Aussage auch für $(T4)$.*

Beweis. Für (T1) und (T2) ist die Aussage klar.
Für den Fall, dass $(X, \mathcal{T})$ das Axiom (T3) erfüllt, sei $x \in M$ und $A \subset M$ eine in M abgeschlossene Menge, die x nicht enthält. Es ist also $A = B \cap M$ für eine abgeschlossene Menge B und $x \notin B$. Also gibt es disjunkte offene Mengen $U', V' \in \mathcal{T}$, sodass $x \in U'$ und $B \subset V'$. Für die offenen Teilmengen $U = U' \cap M$ und $V = V' \cap M$ von M folgt $x \in U$, $A \subset V$ und $U \cap V = \emptyset$.
Im Fall, dass M abgeschlossen und $(X, \mathcal{T})$ das (T4) erfüllt, betrachten wir disjunkte abgeschlossene Teilmengen A, B von M. Da M abgeschlossen ist, sind A und B sogar in X abgeschlossen und daher existieren zwei disjunkte offene Mengen $U', V' \subset X$ mit $A \subset U'$ und $B \subset V'$. Für die in M offenen Mengen $U = M \cap U'$ und $V = M \cap V'$ gilt also

$$A \subset U \quad B \subset V \quad \text{und} \quad U \cap V = \emptyset.$$

□

Als unmittelbare Folgerung aus diesem Lemma erhalten wir zwei Sätze.

Satz 0.2.6. *Ist $(X, \mathcal{T})$ ein regulärer topologischer Raum und $M \subset X$, dann ist auch $(M, \mathcal{T}|_M)$ regulär.* □

Satz 0.2.7. *Ist $(X, \mathcal{T})$ ein normaler topologischer Raum und $M \subset X$ abgeschlossen, dann ist auch $(M, \mathcal{T}|_M)$ normal.* □

Satz 0.2.8. *Ist (X, d) ein metrischer Raum, dann erfüllt dieser (T5).*

Beweis. Setzen wir $f(x) = d(x, A)$ und $g(x) = d(x, B)$, dann sind f und g stetige Funktionen von X nach $[0, +\infty)$; siehe [6, Lemma 15.6.1]. Es gilt außerdem $\overline{A} = f^{-1}\{0\}$ und $\overline{B} = g^{-1}\{0\}$. Für

$$U = \{x \in X : f(x) - g(x) < 0\} \quad \text{und} \quad V = \{x \in X : f(x) - g(x) > 0\},$$

gilt klarerweise $U \cap V = \emptyset$. Aus $x \in A$ folgt, da A und B getrennt sind, $x \notin \overline{B}$ und somit $g(x) > 0$. Also erhalten wir $A \subset U$ und mit ähnlicher Argumentation $B \subset V$. Die Mengen U und V sind offen, da $f(x)-g(x)$ stetig ist. □

Definition 0.2.9. Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum. Wir bezeichnen eine Metrik d als *Metrik auf* X, wenn $\mathcal{T}(d) = \mathcal{T}$.

Bemerkung 0.2.10. In dieser Definition ist ganz wesentlich, dass X bereits mit einer Topologie versehen ist. Andernfalls drückt die Formulierung "d ist eine Metrik auf X"nur aus, dass (X, d) ein metrischer Raum ist.

Definition 0.2.11. Wir bezeichnen zwei Metriken d_1 und d_2 als *äquivalent*, wenn $\mathcal{T}(d_1) = \mathcal{T}(d_2)$ gilt.

Lemma 0.2.12. *Sei X eine Menge. Zwei Metriken $d, \tilde{d}$ auf X sind genau dann äquivalent, wenn d und $\tilde{d}$ die gleiche Konvergenz induzieren, also für jedes $x \in X$ und jede Folge $x_1, x_2, \dots \in X$ die Eigenschaft $\lim\limits_{n\to\infty} d(x, x_n) = 0 \iff \lim\limits_{n\to\infty} \tilde{d}(x, x_n) = 0$ gilt.*

Beweis. Sind die von d und $\tilde{d}$ induzierten Topologien gleich, so konvergieren Folgen in (X, d) genau dann, wenn sie auch in $(X, \tilde{d})$ konvergieren, denn Konvergenz bezüglich einer Metrik ist gleichbedeutend zur Konvergenz bezüglich der durch die Metrik induzierten Topologie.
Für die Rückrichtung stellen wir fest, dass für jede Menge $A \subset X$ die Gleichung

$$\overline{A}^d = \{x \in X : \exists x_1, x_2, \dots \in A : \lim_{n\to\infty} d(x, x_n) = 0\} = \{x \in X : \exists x_1, x_2, \dots \in A : \lim_{n\to\infty} \tilde{d}(x, x_n) = 0\} = \overline{A}^{\tilde{d}}$$

gilt. Insbesondere sind die abgeschlossenen Mengen von (X, d) und jene von $(X, \tilde{d})$ dieselben, also auch die offenen, womit $\mathcal{T}(d) = \mathcal{T}(\tilde{d})$. □

Definition 0.2.13. Ein topologischer Raum $(X, \mathcal{T})$ heißt *separabel*, wenn X eine abzählbare dichte Teilmenge M hat.

Satz 0.2.14. *Lässt sich ein topologischer Raum $(X, \mathcal{T})$ darstellen als abzählbare Vereinigung von separablen Teilräumen $X_i \subset X$, jeweils versehen mit der Spurtopologie $\mathcal{T}|_{X_i}$, so ist auch X separabel.*

Beweis. Sei $x \in X = \bigcup_{i=1}^{\infty} X_i$ beliebig. Dann existiert ein Index $i_0 \in \{1, 2, \dots\}$ mit $x \in X_{i_0}$. Für jedes $i = 1, 2, \dots$ gibt es eine abzählbare dichte Teilmenge $M_i \subset X_i$. Die abzählbare Menge $M = \bigcup_{i=1}^{\infty} M_i$ erfüllt nun $x \in \overline{M_{i_0}}^{X_{i_0}} = \overline{M_{i_0}} \cap X_{i_0} \subset \overline{M_{i_0}} \subset \overline{M}$ und ist somit M dicht in X.

□

Satz 0.2.15. *Ist $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum, der $(ABII)$ erfüllt, also eine abzählbare Basis hat, dann ist $(X, \mathcal{T})$ separabel.*

Beweis. Sei $\mathcal{B} = \{O_n : n \in \mathbb{N}\}$ eine abzählbare Basis von $\mathcal{T}$. Wählen wir zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein $x_n \in O_n$, dann ist $M = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ eine abzählbare, dichte Teilmenge von X. Wäre nämlich die offene Menge $X \setminus \overline{M}$ nichtleer, dann gäbe es ein $m \in \mathbb{N}$, sodass

$$M \ni x_m \in O_m \subset X \setminus \overline{M},$$

was aber nicht sein kann. □

Ist $(X, \mathcal{T})$ ein metrischer Raum, so gilt auch die Umkehrung.

Satz 0.2.16. *Ein metrischer Raum (X, d) erfüllt $(ABII)$ genau dann, wenn X separabel ist.*

Beweis. Für die eine Beweisrichtung verweisen wir auf Satz 0.2.15. Zu zeigen bleibt, dass jeder metrische Raum, der separabel ist, auch (ABII) erfüllt.
Sei also $M = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ eine abzählbare dichte Teilmenge von X. Wir definieren

$$\mathcal{B} := \{U_{\frac{1}{m}}(x_n) : m, n \in \mathbb{N}\}$$

und zeigen, dass $\mathcal{B}$ eine Basis von X ist. Zu jeder nichtleeren offenen Menge $O \subset X$ und beliebigem $x \in O$ gibt es eine natürliche Zahl m, sodass $U_{\frac{2}{m}(x)} \subset O$. Da M dichte Teilmenge von X ist, folgt $U_{\frac{1}{m}}(x) \cap M \neq \emptyset$. Für geeignetes $n \in \mathbb{N}$ gilt also $x_n \in U_{\frac{1}{m}}(x)$ und somit auch $x \in U_{\frac{1}{m}}(x_n)$. Schließlich folgt mit der Dreiecksungleichung

$$x \in U_{\frac{1}{m}}(x_n) \subset U_{\frac{2}{m}}(x) \subset O,$$

wodurch sich $\mathcal{B}$ als Basis herausstellt. □

Satz 0.2.17. *Sei (X, d) ein separabler metrischer Raum und M ein Teilraum von X. Dann ist auch $(M, d|_{M \times M})$ ein separabler metrischer Raum.*

Beweis. Als Teilraum von X erfüllt auch M das Axiom (ABII) und ist deshalb nach Satz 0.2.16 separabel. □

Lemma 0.2.18. *Erfüllt ein topologischer Raum $(X, \mathcal{T})$ das (ABII), hat also eine abzählbare Basis, so besitzt jede Basis $\mathcal{B}$ eine abzählbare Teilmenge $\mathcal{B}_0$, die Basis von $\mathcal{T}$ ist.*

Beweis. Sei $\mathcal{D} = \{V_i\}_{i=1}^{\infty}$ eine abzählbare Basis von $\mathcal{T}$. Definiere für jedes $i = 1, 2, \ldots$ die Mengen

$$\mathcal{B}_i = \{U \in \mathcal{B} : U \subset V_i\}$$

Wir sehen, dass $\mathcal{B}_i$ eine Überdeckung von V_i ist. Da V_i als Teilraum von X ebenfalls eine abzählbare Basis hat, gibt es eine abzählbare Teilüberdeckung $\mathcal{B}_{i,0}$ von $\mathcal{B}_i$ (Siehe [6, Lemma 16.6.2]). Die Menge

$$\mathcal{B}_0 = \bigcup_{i=1}^{\infty} \mathcal{B}_{i,0}$$

ist nun eine abzählbare Basis von $\mathcal{T}$, denn jede nichtleere offene Teilmenge von X kann als Vereinigung von Elementen aus $\mathcal{D}$ dargestellt werden und damit auch als Vereinigung von Elementen aus $\mathcal{B}_0$. □

Definition 0.2.19. Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und U eine Teilmenge von X. Dann bezeichnen wir die Menge $\partial U = \overline{U} \setminus U^\circ$ als den *Rand* von U. Ist M eine Teilmenge von X und $U \subset M$, dann schreiben wir $\partial_M U$ für den Rand von U in M bezüglich der Spurtopologie.

Satz 0.2.20. *Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und $U \subset X$. Dann ist der Rand ∂U von U immer abgeschlossen. Außerdem gilt $\partial U = \emptyset$ genau dann, wenn U clopen, d.h. offen und abgeschlossen ist.*

Beweis. Als Schnitt zweier abgeschlossener Mengen ist ∂U abgeschlossen. Die zweite Aussage lässt sich etwa durch

$$\partial U = \emptyset \quad \Leftrightarrow \quad \overline{U} \setminus U^\circ = \emptyset \quad \Leftrightarrow \quad \overline{U} = U^\circ \quad \Leftrightarrow \quad U \text{ ist clopen}$$

begründen. □

Lemma 0.2.21. *Seien $(X, \mathcal{T}), (Y, \mathcal{O})$ topologische Räume und $U \subset X$, sowie $V \subset Y$ offene Mengen. Dann gilt im Raum $X \times Y$, versehen mit der Produkttopologie, die Beziehung $\partial(U \times V) \subset (\partial U \times Y) \cup (X \times \partial V)$.*

Beweis. Diese Aussage gilt wegen

$$\partial(U \times V) = (\overline{U} \times \overline{V}) \setminus (U^\circ \times V^\circ) = (\overline{U} \times \overline{V}) \cap [((U^\circ)^c \times Y) \cup (X \times (V^\circ)^c)] \subset (\partial U \times Y) \cup (X \times \partial V).$$

□

Kapitel 1

Die kleine und große induktive Dimension

1.1 Die kleine induktive Dimension

Wir können nun die sogenannte kleine induktive Dimension für reguläre topologische Räume definieren. Um die Resultate und Beweise ein wenig leserlicher zu machen, werden wir von nun an für einen topologischen Raum anstelle von $(X, \mathcal{T})$ meistens nur X schreiben. In analoger Weise verfahren wir mit metrischen Räumen. Falls wir von einem Teilraum sprechen, welcher nicht explizit mit einer Topologie versehen ist, kann davon ausgegangen werden, dass dieser die Spurtopologie trägt.

Definition 1.1.1. Sei X ein regulärer topologischer Raum. Die *kleine induktive Dimension* von X, geschrieben als $\mathbf{ind}\, X$, ist eine Zahl aus $\{-1, 0, 1, \dots\} \cup \{\infty\}$, wobei

(KID1) $\mathbf{ind}\, X = -1$ genau dann, wenn $X = \emptyset$,

(KID2) $\mathbf{ind}\, X \leq n$ für ein $n = 0, 1, \dots$, wenn für jedes $x \in X$ und jede Umgebung V von x eine offene Umgebung U von x existiert, sodass

$$x \in U \subset V \text{ und } \mathbf{ind}\, \partial U \leq n - 1,$$

(KID3) $\mathbf{ind}\, X = n$, wenn $\mathbf{ind}\, X \leq n$ und $\mathbf{ind}\, X > n - 1$, das heißt $\mathbf{ind}\, X \nleq k$ für $k = 0, 1, \dots, n - 1$,

(KID4) $\mathbf{ind}\, X = \infty$, wenn $\mathbf{ind}\, X \nleq n$ für alle $n = -1, 0, 1, \dots$

Da nach Satz 0.2.6 der Unterraum ∂U von X mit der Spurtopologie wieder ein regulärer Raum ist, macht es Sinn von $\mathbf{ind}\, \partial U$ zu sprechen. Der zweite Punkt (KID2) lässt sich offensichtlich durch die Forderung

(KID2') $\mathbf{ind}\, X \leq n$ für ein $n = 0, 1, \dots$, wenn X eine Basis $\mathcal{B}$ hat, sodass alle $U \in \mathcal{B}$ die Ungleichung $\mathbf{ind}\, \partial U \leq n - 1$ erfüllen.

ersetzen. Insbesonder reicht es in $(KID2)$ nur offene Umgebungen V von x zu betrachten, was wir später in Beweisen auch oft tun werden.
Um verstehen zu können, wie Räume der Dimension n aussehen, müssen wir also wissen, wie Räume kleinerer Dimensionen beschaffen sind. Neben der leeren Menge, dem einzigen Raum mit Dimension -1, bilden die Räume der Dimension 0 die Grundlage für das weitere Verständnis. Zuerst werden wir aber einige allgemeine Eigenschaften der kleinen induktiven Dimension feststellen.

Satz 1.1.2. *Sind X und Y homöomorphe topologische Räume, so gilt $\mathbf{ind} X = \mathbf{ind} Y$.*

Beweis. Der Beweis verwendet Induktion nach $n = \textbf{ind}\, X$. Im Falle $n = -1$ muss $X = \emptyset = Y$, also auch $\textbf{ind}\, Y = 0$.
Ist $n \geq 0$ und $T : X \to Y$ ein Homöomorphismus und wissen wir bereits, dass für $M \subset X$ die Äquivalenz $\textbf{ind}\, M \leq n - 1 \Leftrightarrow \textbf{ind}\, T(M) \leq n - 1$ gilt, so folgt sofort $\textbf{ind}\, M \leq n \Leftrightarrow \textbf{ind}\, T(M) \leq n$, wenn wir beachten, dass $T(\partial U) = \partial T(U)$ für alle Umgebungen U. Für jedes $n = 0, 1, \ldots$ gilt also $\textbf{ind}\, X \leq n$ genau dann, wenn $\textbf{ind}\, Y \leq n$. Damit ist der Satz bewiesen. □

Satz 1.1.3. *Sei X ein regulärer topologischer Raum und M Unterraum von X. Dann gilt $\textbf{ind}\, M \leq \textbf{ind}\, X$.*

Beweis. Für $\textbf{ind}\, X = \infty$ ist nichts zu zeigen. Wir können also $\textbf{ind}\, X < \infty$ annehmen und werden den Satz mit Induktion nach $n = \textbf{ind}\, X$ beweisen.
Für $n = -1$ ist $X = \emptyset$ und damit auch $M = \emptyset$. Wir nehmen nun an, die Aussage stimmt für $n - 1 \geq -1$. Sei $x \in M$ und V eine Umgebung von x in M. Dann gibt es eine Umgebung V' von x in X, sodass $V = V' \cap M$. Da $\textbf{ind}\, X \leq n$, gibt es eine offene Umgebung U' von x, mit

$$x \in U' \subset V' \text{ und } \textbf{ind}\, U' \leq n - 1.$$

Die Menge $U = U' \cap M$ ist eine offene Menge in M und erfüllt $x \in U \subset V$. Außerdem gilt für den Rand $\partial_M U$ von U in M

$$\begin{aligned}
\partial_M U &= \overline{U}^M \setminus U = \overline{U}^M \cap (M \setminus U) \\
&= (M \cap \overline{U}) \cap (M \setminus U) = M \cap \overline{(M \cap U')} \cap (M \setminus U') \\
&\subset \overline{U'} \cap \overline{(X \setminus U')} = \partial U'.
\end{aligned}$$

Mit der Induktionsvorraussetzung folgt $\textbf{ind}\, \partial_M U \leq n - 1$ und damit $\textbf{ind}\, M \leq n$. □

Definition 1.1.4. Sei X ein topologischer Raum und A, B disjunkte Teilmengen von X. Eine Menge $L \subset X$ bezeichnen wir als *Partition* zwischen A *und* B, wenn es offene Mengen $U, V \subset X$ gibt, sodass

$$A \subset U, \qquad B \subset V, \qquad U \cap V = \emptyset, \qquad X \setminus L = U \cup V. \tag{1.1}$$

Jede Partition L ist also insbesondere abgeschlossen.

Satz 1.1.5. *Ein regulärer topologischer Raum X erfüllt die Ungleichung $\textbf{ind}\, X \leq n$ für ein $n \geq 0$ genau dann, wenn für jedes $x \in X$ und jede abgeschlossene Menge $B \subset X$, die x nicht enthält, eine Partition L zwischen $\{x\}$ und B existiert, sodass $\textbf{ind}\, L \leq n - 1$.*

Beweis. Wir nehmen $\textbf{ind}\, X \leq n$ an. Sei $x \in X$, die Menge B abgeschlossen und $x \notin B$. Da X regulär ist, gibt es eine Umgebung W von x, die $x \in W \subset \overline{W} \subset X \setminus B$ erfüllt. Nach Definition der kleinen induktiven Dimension, gibt es eine offene Menge U mit

$$x \in U \subset W \text{ und } \textbf{ind}\, \partial U \leq n - 1.$$

Die Menge $L = \partial U$ ist die gesuchte Partition zwischen $\{x\}$ und B; mit $V = X \setminus \overline{U} \supset X \setminus W \supset B$ erfüllt L nämlich (1.1).
Für die umgekehrte Richtung betrachten wir ein Element $x \in X$ und eine beliebige Umgebung V von x. Wie schon bemerkt, können wir V als offen voraussetzen. Zu $B = X \setminus V$ und $\{x\}$ gibt es nun eine Partition L, die $\textbf{ind}\, L \leq n - 1$ erfüllt. Sind nun U, W offene Mengen mit (1.1), d.h.

$$\{x\} \subset U, \qquad B \subset W, \qquad U \cap W = \emptyset, \qquad X \setminus L = U \cup W,$$

so folgt

$$x \in U \subset X \setminus W \subset X \setminus B = V.$$

Da $X \setminus W$ eine abgeschlossene Obermenge von U ist, gilt zudem

$$\partial U \subset (X \setminus U) \cap (X \setminus W) = X \setminus (U \cup W) = L.$$

Aus Satz 1.1.3 erhalten wir $\textbf{ind}\, \partial U \leq n - 1$ und somit auch $\textbf{ind}\, X \leq n$. □

Im Fall von separablen metrischen Räumen, lässt sich die Forderung (KID2') noch weiter verschärfen.

Satz 1.1.6. *Ein separabler metrischer Raum X erfüllt $\textbf{ind}\,X \leq n$ für ein $n = 0, 1 \ldots,$ genau dann, wenn X eine abzählbare Basis $\mathcal{B}$ besitzt, sodass für alle $U \in \mathcal{B}$ die Ungleichung $\textbf{ind}\,\partial U \leq n-1$ gilt.*

Beweis. Aus $\textbf{ind}\,X \leq n$ folgt mit (KID2') die Existenz einer nicht notwendigerweise abzählbaren Basis mit gewünschter Eigenschaft. Diese hat aber wegen Lemma 0.2.18 eine abzählbare Teilfamilie, die wieder Basis ist. Die Umkehrung ist klar. □

1.2 Räume der Dimension Null

Definition 1.2.1. Wir bezeichnen einen regulären topologischen Raum X als *nulldimensional*, wenn dieser $\textbf{ind}\,X = 0$ erfüllt.

Satz 1.2.2. *Ein regulärer Raum X ist nulldimensional genau dann, wenn $X \neq \emptyset$ und für jedes $x \in X$ und jede Umgebung $V \subset X$ von x eine Menge $U \subset X$ existiert, sodass $x \in U \subset V$ und U clopen, d.h. offen und abgeschlossen, ist.*

Beweis. Es gilt

$$\textbf{ind}\,\partial U = -1 \Leftrightarrow \partial U = \emptyset \Leftrightarrow U \text{ ist clopen.}$$

□

Wenden wir die Sätze 1.1.3, 1.1.5 und 1.1.6 aus dem vorigen Abschnitt auf den Spezialfall von nulldimensionalen Räumen an, so erhalten folgende Charakterisierungen.

Korollar 1.2.3. *Eine Teilmenge M eines nulldimensionalen regulären Raumes X erfüllt $\textbf{ind}\,M = 0$ genau dann, wenn $M \neq \emptyset$.* □

Korollar 1.2.4. *Ein regulärer Raum X ist nulldimensional genau dann, wenn für jedes $x \in X$ und jede abgeschlossene Menge $B \subset X$, sodass $x \notin B$, die leere Menge eine Partition zwischen $\{x\}$ und B ist.* □

Korollar 1.2.5. *Ein separabler metrischer Raum X ist genau dann nulldimensional, wenn X nichtleer ist und eine abzählbare Basis bestehend aus clopen Mengen hat.* □

Beispiel 1.2.6. Sowohl die Menge der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$, als auch die Menge der irrationalen Zahlen $\mathbb{I} = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sind nulldimensional. Die Menge

$$\mathcal{B} = \{(x - \frac{\sqrt{2}}{n}, x + \frac{\sqrt{2}}{n}) \cap \mathbb{Q} : x \in \mathbb{Q}, n \in \mathbb{N}\}$$

bildet nämlich eine abzählbare Basis von $\mathbb{Q}$ aus clopen Mengen. Für die irrationalen Zahlen bildet

$$\mathcal{D} = \{(a, b) \cap \mathbb{I} : a, b \in \mathbb{Q}\}$$

eine abzählbare Basis aus clopen Mengen.

Satz 1.2.7. *Für einen separablen metrischen Raum X mit $\textbf{ind}\,X = 0$ und je zwei disjunkte abgeschlossene Mengen $A, B \subset X$ ist die leere Menge eine Partition zwischen A und B. Es gibt also eine clopen Menge $U \subset X$, sodass $A \subset U$ und $B \subset X \setminus U$.*

Beweis. Wir wissen aus Satz 1.2.5, dass X eine abzählbare Basis $\mathcal{B}$, bestehend aus clopen Mengen hat. Also gibt es zu jedem $x \in X = (X \setminus A) \cup (X \setminus B)$ eine clopen Menge $W_x \in \mathcal{B}$, sodass entweder

$$x \in W_x \subset X \setminus A \quad \text{oder} \quad x \in W_x \subset X \setminus B,$$

also entweder

$$W_x \cap A = \emptyset \quad \text{oder} \quad W_x \cap B = \emptyset.$$

Die Basis $\mathcal{B}$ ist abzählbar, womit $\{W_x : x \in X\} =: \{W_i : i = 1, 2, \dots\}$. Definieren wir für jedes $j = 1, 2, \dots$

$$U_j = W_j \setminus \bigcup_{i=1}^{j-1} W_i,$$

so sind die Mengen U_j paarweise disjunkt und bilden eine clopen Überdeckung von X. Die Mengen

$$U = \bigcup \{U_j : U_j \cap A \neq \emptyset\} \quad \text{und} \quad W = \bigcup \{U_j : U_j \cap A = \emptyset\}$$

sind offen, disjunkt und wegen $X = U \cup W$ sogar clopen. Es gilt außerdem $W \cap A = \emptyset$ und somit $A \subset U$. Für jedes $x \in B$ liegt die Menge W_x ganz in $X \setminus A$. Es gibt also für jedes $x \in B$ einen Index $j \in \mathbb{N}$, sodass $x \in U_j$ und $U_j \cap A = \emptyset$. Daraus folgt $B \subset W = X \setminus U$. □

Lemma 1.2.8. *Sei M ein Teilraum eines metrischen Raumes X und $A, B \subset X$ disjunkte abgeschlossene Teilmengen von X. Sind $V_1, V_2 \subset X$ offen, erfüllen $A \subset V_1, B \subset V_2$ und $\overline{V_1} \cap \overline{V_2} = \emptyset$ und ist L' eine Partition in M zwischen $M \cap \overline{V_1}$ und $M \cap \overline{V_2}$, so gibt es eine Partition L in X zwischen A und B mit $M \cap L \subset L'$.*
Ist M ein abgeschlossener Teilraum von X und sind A, B disjunkte Teilmengen von X, so gibt es zu jeder Partition L' in M zwischen $M \cap A$ und $M \cap B$ eine Partition L in X zwischen A und B, sodass $M \cap L \subset L'$.

Beweis. Ist L' Partition in M zwischen $M \cap \overline{V_1}$ und $M \cap \overline{V_2}$, so gibt es in M offene Mengen $U', W' \subset M$, die

$$M \cap \overline{V_1} \subset U', \quad M \cap \overline{V_2} \subset W', \quad U' \cap W' = \emptyset \quad \text{und} \quad L = X \setminus (U' \cup W')$$

erfüllen. Aus $V_1 \cap W' = M \cap V_1 \cap W' \subset U' \cap W' = \emptyset$ folgt, da V_1 offen ist, $V_1 \cap \overline{W'} = \emptyset$. Aus Gründen der Symmetrie gilt auch $V_2 \cap \overline{U'} = \emptyset$, womit

$$A \cap \overline{W'} = \emptyset \quad \text{und} \quad B \cap \overline{U'} = \emptyset. \tag{1.2}$$

Die Mengen U' und W' sind als disjunkte und offene Mengen in M getrennt, also

$$\overline{U'} \cap W' = \emptyset = U' \cap \overline{W'}. \tag{1.3}$$

Aus den Gleichungen (1.2) und (1.3) folgt, dass $A \cup U'$ und $B \cup W'$ getrennt sind. Nach Satz 0.2.8 gibt es offene Mengen $U, W \subset X$, sodass

$$A \cup U' \subset U, \quad B \cup W' \subset W \quad \text{und} \quad U \cap W = \emptyset.$$

Die Menge $L = X \setminus (U \cup W)$ ist eine Partition zwischen A und B. Wegen

$$M \cap L = M \cap X \setminus (U \cup W) \subset M \setminus (U' \cup W') = L'$$

ist der erste Teil des Lemmas bewiesen.
Für Beweis des zweiten Teils beginnen wir mit offenen Teilmengen U_1, W_1 von M, sodass

$$M \cap A \subset U_1, \quad M \cap B \subset W_1, \quad U_1 \cap W_1 = \emptyset \quad \text{und} \quad L' = M \setminus (U_1 \cup W_1).$$

Wir werden jetzt mehrmals verwenden, dass X normal ist. Wegen $A \cap B = \emptyset$ gibt es disjunkte offene Mengen $U_A, U_B \subset X$ mit $A \subset U_A$ und $B \subset U_B$. Aus $B \cap M \setminus W_1 = \emptyset$ folgt die Existenz einer in X offenen Menge V_2, sodass

$$B \subset V_2 \subset \overline{V_2} \subset X \setminus (M \setminus W_1).$$

Indem wir, falls nötig V_2 durch $V_2 \cap U_B$ ersetzen, können wir sogar $A \cap (\overline{V_2} \cup (M \setminus U_1)) = \emptyset$ fordern. Somit gibt es eine Menge $V_1 \subset X$, mit

$$A \subset V_1 \subset \overline{V_1} \subset X \setminus (M \setminus U_1) \quad \text{und} \quad \overline{V_1} \cap \overline{V_2} = \emptyset.$$

Wegen $M \cap \overline{V_1} \subset U_1$ und $M \cap \overline{V_2} \subset W_1$, bildet L' eine Partition in M zwischen $M \cap \overline{V_1}$ und $M \cap \overline{V_2}$. Der erste Teil des Lemmas liefert nun eine Partition L in X zwischen A und B mit $M \cap L \subset L'$. □

Lemma 1.2.9. *Sei X ein normaler topologischer Raum und $A, B \subset X$ abgeschlossen und disjunkt. Dann gibt es offene Mengen U_A und U_B, sodass*

$$A \subset U_A, \quad B \subset U_B \quad \textit{und} \quad \overline{U_A} \cap \overline{U_B} = \emptyset.$$

Beweis. Da X normal ist, gibt es disjunkte offene Mengen $O_A, O_B \subset X$, mit

$$A \subset O_A, \quad B \subset O_B \quad \text{und} \quad O_A \cap O_B = \emptyset.$$

Also gilt $A \cap X \setminus O_A = \emptyset$, womit eine offene Menge U_A existiert, die $A \subset U_A \subset \overline{U_A} \subset O_A$ erfüllt. Somit sind U_A und $U_B = O_B$ Mengen mit den geforderten Eigenschaften

$$A \subset U_A, \quad B \subset U_B \quad \text{und} \quad \overline{U_A} \cap \overline{U_B} \subset O_A \cap X \setminus O_A = \emptyset.$$

□

Satz 1.2.10. *Sei X ein metrischer Raum und Z ein nulldimensionaler separabler Teilraum von X. Dann gibt es zu je zwei disjunkten abgeschlossenen Mengen $A, B \subset X$ eine Partition L zwischen A und B, sodass $L \cap Z = \emptyset$.*

Beweis. Wegen Lemma 1.2.9 gibt es offene Mengen $V_1, V_2 \subset X$ mit $A \subset V_1$, $B \subset V_2$ und $\overline{V_1} \cap \overline{V_2} = \emptyset$. Nach Satz 1.2.7 ist $L' = \emptyset$ eine Partition in Z zwischen $Z \cap \overline{V_1}$ und $Z \cap \overline{V_2}$. Die Anwendung des ersten Teiles von Lemma 1.2.8 liefert eine Partition L zwischen A und B mit $L \cap Z = \emptyset$. □

Mit dem vorigen Satz erhalten wir folgende Charakterisierung von nulldimensionalen Teilräumen.

Satz 1.2.11. *Für einen separablen Unterraum M eines metrischen Raumes X sind äquivalent:*

i) $\textbf{\textit{ind}}\, M = 0$,

ii) *$M \neq \emptyset$ und für jeden Punkt $x \in X$ und jede Umgebung V von x in X gibt es eine offene Teilmenge $U \subset X$, sodass $x \in U \subset V$ und $\partial U \cap M = \emptyset$,*

iii) *$M \neq \emptyset$ und für jeden Punkt $x \in M$ und jede Umgebung V von x in X gibt es eine offene Teilmenge $U \subset X$, sodass $x \in U \subset V$ und $\partial U \cap M = \emptyset$.*

Beweis.

i) $\Rightarrow$ *ii)* Sei $x \in X$ und V eine Umgebung von x. Wir können annehmen, dass V offen ist. Die abgeschlossenen Mengen $\{x\}$ und $X \setminus V$ sind disjunkt. Also können wir Satz 1.2.10 anwenden und erhalten eine Partition L in X zwischen $\{x\}$ und $X \setminus V$ mit $M \cap L = \emptyset$. Es gibt also offene Mengen U, W, sodass

$$x \in U, \quad X \setminus V \subset W, \quad U \cap W = \emptyset \quad \text{und} \quad L = X \setminus (U \cup W).$$

Wegen $U \subset X \setminus W$ folgt weiter

$$\overline{U} \subset X \setminus W \subset V \quad \text{und} \quad \partial U \subset \overline{U} \cap (X \setminus U) \subset (X \setminus W) \cap (X \setminus U) = L.$$

Aus der letzten Ungleichung erhalten wir insbesondere $\partial U \cap M = \emptyset$.

$ii) \Rightarrow iii)$ Das ist klar.

$iii) \Rightarrow i)$ Die Umgebungen von x in M sind genau die Mengen der Form $V \cap M$ für Umgebungen V von x in X. Deshalb reicht es festzustellen, dass

$$\partial_M(U \cap M) = M \cap \overline{(M \cap U)} \cap \overline{(M \setminus U)} \subset M \cap \partial U,$$

für offene Umgebungen $U \subset V$ von x. Mit Satz 1.2.2 erhalten wir $\mathbf{ind}\, M = 0$.

□

Satz 1.2.12. *Ein Unterraum M eines separablen metrischen Raumes X erfüllt genau dann $\mathbf{ind} M \leq 0$, wenn X eine abzählbare Basis $\mathcal{B}$ hat, sodass für alle U in $\mathcal{B}$ die Gleichung $M \cap \partial U = \emptyset$ gilt.*

Beweis. Nach Satz 0.2.17 ist auch M separabel, und wir können Satz 1.2.11 anwenden. Ist $\mathbf{ind}\, M = 0$ so folgt die Existenz einer Basis $\mathcal{B}'$ mit $M \cap \partial U = \emptyset$ für alle $U \in \mathcal{B}'$. Wegen Satz 0.2.18 gibt es eine abzählbare Teilmenge $\mathcal{B}$ von $\mathcal{B}'$, die ebenfalls Basis von X ist. Die Umkehrung folgt direkt aus Satz 1.2.11. □

Satz 1.2.13. *Ist X ein separabler metrischer Raum und sind $F_i \subset X$ für $i \in \mathbb{N}$ abgeschlossene Unterräume mit $\mathbf{ind} F_i = 0$, deren Vereinigung ganz X ergibt, so gilt auch $\mathbf{ind} X = 0$.*

Beweis. Es reicht zu zeigen, dass es zu je zwei disjunkten abgeschlossenen Mengen $A, B \subset X$ offene Mengen $U, W \subset X$ gibt mit

$$A \subset U, \quad B \subset W, \quad U \cap W = \emptyset \quad \text{und} \quad X = U \cup W. \tag{1.4}$$

Dann ist nämlich die leere Menge eine Partition zwischen A und B und aus Satz 1.2.4 folgt $\mathbf{ind}\, X = 0$. Nach Lemma 1.2.9 gibt es offene Mengen $U_0, W_0 \subset X$, sodass

$$A \subset U_0, \quad B \subset W_0 \quad \text{und} \quad \overline{U_0} \cap \overline{W_0} = \emptyset. \tag{1.5}$$

Wir wollen nun induktiv zwei Folgen $U_0, U_1, \dots$ und $W_0, W_1, \dots$ von offenen Mengen definieren, die für jedes $i \in \mathbb{N}$

$$U_{i-1} \subset U_i, \quad W_{i-1} \subset W_i, \quad \overline{U_i} \cap \overline{W_i} = \emptyset \quad \text{und} \quad F_i \subset U_i \cup W_i \tag{1.6}$$

erfüllen. Setzen wir $F_0 = \emptyset$, so gelten die letzten beiden Aussagen, $\overline{U_i} \cap \overline{W_i} = \emptyset$ und $F_i \subset U_i \cup W_i$, bereits für $i = 0$. Wir nehmen an, die Eigenschaften in (1.6) sind für jedes $i < k$ erfüllt. Die Mengen $\overline{U_{k-1}} \cap F_k$ und $\overline{W_{k-1}} \cap F_k$ sind disjunkte abgeschlossene Mengen. F_k ist nulldimensional, also gibt es nach Satz 1.2.7 eine in F_k clopen Menge $V \subset F_k$, sodass

$$\overline{U_{k-1}} \cap F_k \subset V \quad \text{und} \quad \overline{W_{k-1}} \cap F_k \subset F_k \setminus V.$$

Daraus folgt weiter

$$(\overline{U_{k-1}} \cup V) \cap (\overline{W_{k-1}} \cup F_k \setminus V) = (\overline{U_{k-1}} \cap F_k \setminus V) \cup (\overline{W_{k-1}} \cap V) = \emptyset.$$

Weil F_k abgeschlossen in X ist, sind auch V und $F_k \setminus V$ abgeschlossen in X. Damit sind $\overline{U_{k-1}} \cup V$ und $\overline{W_{k-1}} \cup F_k \setminus V$ disjunkt und abgeschlossen. Nach Lemma 1.2.9 gibt es offene Mengen U_k und W_k, sodass

$$\overline{U_{k-1}} \cup V \subset U_k, \quad \overline{W_{k-1}} \cup F_k \setminus V \subset W_k \quad \text{und} \quad \overline{U_k} \cap \overline{W_k} = \emptyset.$$

Diese Mengen erfüllen (1.6) für $i = k$. Also gibt es die gewünschten Folgen $U_0, U_1, \dots$ und $W_0, W_1, \dots$ tatsächlich. Die Vereinigungen $U = \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i$ und $W = \bigcup_{i=1}^{\infty} W_i$ erfüllen wegen (1.5) und (1.6) die Eigenschaften in (1.4), $A \subset U, B \subset W$ und $X = U \cup W$ sind klar, denn $A \subset U_0, B \subset W_0$ und $F_i \subset U_i \cup W_i$. Aus $x \in U \cap W$ würde wegen der Monotonie der Folgen U_i und W_i die Existenz eines Index i_0 mit $x \in U_{i_0} \cap W_{i_0}$ folgen, was aber nicht sein kann. □

Für den nachfolgenden Satz wollen wir bemerken, dass auch das abzählbare Produkt $X = \prod_{i=1}^{\infty} X_i$ von regulären Räumen X_i wieder regulär ist; siehe [2, 2.3.11]. Deshalb macht es Sinn von $\mathbf{ind}\, X$ zu sprechen.

Satz 1.2.14. *Das Produkt $X = \prod_{i=1}^{\infty} X_i$ von abzählbar vielen regulären Räumen $X_1, X_2, \ldots$ erfüllt $\mathbf{ind} X = 0$ genau dann, wenn $\mathbf{ind} X_i = 0$ für alle $i \in \mathbb{N}$.*

Beweis. Nehmen wir $\mathbf{ind}\, X = 0$ an, so gilt $X \neq \emptyset$ und somit auch $X_i \neq \emptyset$ für alle $i \in \mathbb{N}$. Für jedes $i \in \mathbb{N}$ wähle ein Element $x_i \in X_i$. Da X_j homöomorph zum nichtleeren Unterraum $\prod_{i=1}^{j-1}\{x_i\} \times X_j \times \prod_{i=j+1}^{\infty}\{x_i\} \subset X$ ist, folgt $\mathbf{ind}\, X_j = 0$; vgl. Satz 1.1.2 und Satz 1.1.3. Sind umgekehrt alle Räume X_i für $i \in \mathbb{N}$ nulldimensional, so hat ein jeder von diesen wegen Satz 1.2.2 eine Basis $\mathcal{B}_i$ bestehend aus clopen Mengen hat. Die Mengen der Form

$$B = \prod_{i=1}^{\infty} O_i,$$

wobei $O_i \in \mathcal{B}_i \cup \{X_i\}$ für alle $i \in \mathbb{N}$ und $O_i = X_i$ für alle, bis auf endlich viele $i \in \mathbb{N}$, bilden eine Basis von X, bestehend aus clopen Mengen. Also folgt $\mathbf{ind}\, X = 0$, wieder wegen Satz 1.2.2. □

Beispiel 1.2.15. Aus Satz 1.2.14 und Beispiel 1.2.6 folgt unmittelbar, dass für jedes $n > 0$ die Mengen $\mathbb{Q}^n$ und $\mathbb{I}^n$ Dimension null haben. Wir können sogar zeigen, dass für jedes $k = 0, \ldots, n$ die Menge $Q_k^n \subset \mathbb{R}^n$ der n-Tupel mit genau k rationalen Koordinaten nulldimensionall ist. Dazu wählen wir für $j = 1, \ldots, k$ paarweise verschiedene Indizes $i_j \in \{1, \ldots, n\}$ und beliebige rationale Zahlen r_j aus. Die Menge

$$\prod_{i=1}^{n} R_i, \quad \text{wobei } R_i = \begin{cases} \{r_j\}, & \text{falls } i = i_j \text{ für ein } j \in \{1, \ldots, k\}, \\ \mathbb{R} & \text{sonst,} \end{cases}$$

ist abgeschlossen in $\mathbb{R}^n$. Also ist $(\prod_{i=1}^{n} R_i) \cap Q_k^n$ in Q_k^n abgeschlossen. Außerdem ist $(\prod_{i=1}^{n} R_i) \cap Q_k^n$ homöomorph zu $\mathbb{I}^{n-k}$ und deshalb nulldimensional. Der Raum Q_k^n lässt sich aber als abzählbare Vereinigung von Mengen der Form $\prod_{i=1}^{n} R_i \cap Q_k^n$ darstellen und erfüllt deshalb und wegen Satz 1.2.13 die Gleichung $\mathbf{ind}\, Q_k^n = 0$.

1.3 Räume höherer Dimensionen

Mit den Resultaten aus dem vorigen Abschnitt können wir nun Räume mit höherer Dimension beschreiben.

Satz 1.3.1. *Sei X ein regulärer topologischer Raum mit $\mathbf{ind} X = n \geq 1$. Dann gibt es für jedes $k = 0, 1, \ldots, n-1$ einen abgeschlossenen Unterraum M von X mit $\mathbf{ind} M = k$.*

Beweis. Wenn wir zeigen können, dass es einen abgeschlossenen Unterraum $M \subset X$ gibt, sodass $\mathbf{ind}\, M = n - 1$, ist der Satz bewiesen. Um das zu zeigen, schließen wir aus $\mathbf{ind}\, X > n - 1$, dass es ein $x \in X$ und eine Umgebung V von x gibt, sodass für alle offenen Umgebungen U von x, die zusätzlich $U \subset V$ erfüllen, $\mathbf{ind}\, \partial U > n - 2$ gilt. Aus $\mathbf{ind}\, X \leq n$ hingegen folgt die Existenz einer solchen offenen Umgebung U von x mit $\mathbf{ind}\, \partial U \leq n - 1$. Insgesamt liefert das $\mathbf{ind}\, \partial U = n - 1$. □

Lemma 1.3.2. *Ist X ein separabler metrischer Raum und gibt es Unterräume Y und Z von X, die $\mathbf{ind} Y \leq n - 1$, $\mathbf{ind} Z \leq 0$ und $X = Y \cup Z$ erfüllen, so folgt $\mathbf{ind} X \leq n$.*

Beweis. Sei $x \in X$ ein beliebiger Punkt und V eine offene Umgebung von x. Da $\{x\}$ und $X \setminus V$ abgeschlossen und disjunkt sind, gibt es nach Satz 1.2.10 disjunkte offene Mengen $U, W \subset X$, die

$$\{x\} \subset U, \quad X \setminus V \subset W \quad \text{und} \quad (X \setminus (U \cup W)) \cap Z = \emptyset$$

erfüllen. Wir erhalten $x \in U \subset V$ und $\partial U \subset X \setminus (U \cup W) \subset X \setminus Z \subset Y$, womit $\mathbf{ind}\, \partial U \leq n - 1$ folgt; vgl. Satz 1.1.3. Somit gilt $\mathbf{ind}\, X \leq n$. □

Satz 1.3.3. *Ist X ein separabler metrischer Raum und kann X dargestellt werden als Vereinigung $X = \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i$ von abzählbar vielen abgeschlossenen Unterräumen $F_1, F_2, \ldots$ mit $\mathbf{ind}\, F_i \leq n$ für $i \in \mathbb{N}$, dann folgt $\mathbf{ind}\, X \leq n$.*

Beweis. Wir beweisen die Aussage mit Induktion nach n. Der Fall $n = 0$ entspricht genau Satz 1.2.13. Nehmen wir nun für ein beliebiges $n \geq 1$ an, die Aussage stimmt für alle $k < n$. Mit X sind nach Satz 0.2.17 auch alle Teilräume M von X separabel und metrisch. Wegen Satz 1.1.6 gibt es für jedes $i \in \mathbb{N}$ eine abzählbare Basis $\mathcal{B}_i$ von F_i, sodass $\mathbf{ind}\, \partial_{F_i} U \leq n - 1$ für jede Basismenge $U \in \mathcal{B}_i$ gilt. Mit der Induktionsvoraussetzung erhalten wir für die Vereinigung

$$Y = \bigcup_{U \in \bigcup_{i=1}^{\infty} \mathcal{B}_i} \partial_{F_i} U \quad \text{sofort} \quad \mathbf{ind}\, Y \leq n - 1.$$

Für jedes $i \in \mathbb{N}$ erhalten wir mit Satz 1.2.12, angewandt auf den Raum F_i und dessen Basis $\mathcal{B}_i$, dass der Unterraum $F_i \setminus Y$ von F_i die Ungleichung $\mathbf{ind}\,(F_i \setminus Y) \leq 0$ erfüllt. Aus 1.2.13 folgt für die Menge

$$Z = \bigcup_{i=1}^{\infty} (F_i \setminus Y) = X \setminus Y \quad \text{sofort} \quad \mathbf{ind}\, Z \leq 0,$$

wenn wir beachten, dass die Mengen $F_i \setminus Y = F_i \cap Z$ in Z abgeschlossen sind. Lemma 1.3.2 liefert schließlich $\mathbf{ind}\, X \leq n$. $\square$

Satz 1.3.4. *Ein separabler metrischer Raum X erfüllt die Ungleichung $\mathbf{ind}\, X \leq n$ für ein $n \geq 0$ genau dann, wenn X als Vereinigung von zwei Teilräumen Y, Z von X dargestellt werden kann, sodass $\mathbf{ind}\, Y \leq n - 1$ und $\mathbf{ind}\, Z \leq 0$.*

Beweis. Im Falle $\mathbf{ind}\, X \leq n$ folgt aus Satz 1.1.6, dass X eine abzählbare Basis $\mathcal{B}$ hat, sodass $\mathbf{ind}\, \partial U \leq n - 1$ für alle $U \in \mathcal{B}$. Die Menge

$$Y = \bigcup_{U \in \mathcal{B}} \partial U$$

erfüllt nach Satz 1.3.3 die Ungleichung $\mathbf{ind}\, Y \leq n - 1$. Wegen Satz 1.2.12 gilt für den Raum $Z = X \setminus Y$ außerdem $\mathbf{ind}\, Z \leq 0$ und klarerweise $X = Y \cup Z$. Die Umkehrung ist genau Lemma 1.3.2. $\square$

Wiederholtes Anwenden dieses Satzes liefert folgendes Resultat.

Satz 1.3.5. *Ein separabler metrischer Raum X erfüllt die Ungleichung $\mathbf{ind}\, X \leq n$ für ein $n \geq 0$ genau dann, wenn X als Vereinigung von $n + 1$ vielen Räumen $Z_1, \ldots, Z_{n+1}$ dargestellt werden kann, wobei $\mathbf{ind}\, Z_i \leq 0$ für jedes $i = 1, \ldots, n + 1$.*

Beweis. Für $n = 0$ ist die Aussage natürlich richtig. Nehmen wir an, der Satz ist für $k = n - 1$ bewiesen, und X erfüllt $\mathbf{ind}\, X \leq n$. Nach Satz 1.3.4 lässt sich X als Vereinigung von Mengen X' und Z_{n+1} darstellen, wobei $\mathbf{ind}\, X' \leq n - 1$ und $\mathbf{ind}\, Z_{n+1} \leq 0$. Die Induktionsvoraussetzung liefert nun Teilräume $Z_1 \ldots Z_n$ mit $X' = Z_1 \cup \cdots \cup Z_n$ und $\mathbf{ind}\, Z_i \leq 0$ für $i = 1, \ldots, n$. Gemeinsam mit Z_{n+1} bilden sie also das gesuchte System $Z_1, \ldots Z_{n+1}$.
Die Umkehrung lässt sich mit mehrmaliger Anwendung von Lemma 1.3.2 beweisen. Ist $X = Z_1 \cup \cdots \cup Z_{n+1}$ ein separabler metrischer Raum, so folgt schrittweise für jedes $k = 1, \ldots, n$ die Ungleichung $\mathbf{ind}\,((Z_1 \cup \cdots \cup Z_k) \cup Z_{k+1}) \leq k$. Für $k = n$ ergibt das $\mathbf{ind}\, X \leq n$. $\square$

Beispiel 1.3.6. Mit Satz 1.3.5 und Beispiel 1.2.15 lässt sich leicht zeigen, dass $\mathbf{ind}\, \mathbb{R}^n \leq n$. Das ist ein erster Schritt, um beweisen zu können, dass $\mathbf{ind}\, \mathbb{R}^n = n$, was wir uns ja intuitiv von einem Dimensionsbegriff erwarten. Definieren wir (vgl. Beispiel 1.2.15)

$$N_k^n = Q_0^n \cup \cdots \cup Q_k^n \quad \text{und} \quad L_k^n = Q_k^n \cup \cdots \cup Q_n^n,$$

dann sind N_k^n und L_k^n Unterräume von $\mathbb{R}^n$, wobei N_k^n nur aus Punkten mit maximal k rationalen Koordinaten und L_k^n nur aus Punkten mit mindestens k rationalen Koordinaten besteht. Wegen Satz 1.3.5 und Beispiel 1.2.15 gilt $\mathbf{ind}\, N_k^n \leq k$ und $\mathbf{ind}\, N_k^n \leq n-k$. Insbesondere erhalten wir wegen

$$\mathbb{R}^n = Q_0^n \cup \cdots \cup Q_n^n = N_n^n$$

$\mathbf{ind}\, \mathbb{R}^n \leq n$.

Satz 1.3.7. *Sind X, Y separable Unterräume eines metrischen Raumes, so gilt*

$$\boldsymbol{ind}(X \cup Y) \leq \boldsymbol{ind} X + \boldsymbol{ind} Y + 1.$$

Beweis. Für $\mathbf{ind}\, X = \infty$ oder $\mathbf{ind}\, Y = \infty$ ist die Ungleichung klarerweise erfüllt. Sind $n = \mathbf{ind}\, X$ und $m = \mathbf{ind}\, Y$ beide endlich, so gibt es nach Satz 1.3.5 nulldimensionale Teilräume $X_1, \dots X_{n+1}$ von X und $Y_1, \dots, Y_{m+1}$ von Y, sodass $X = X_1 \cup \dots X_{n+1}$ und $Y = Y_1 \cup \cdots \cup Y_{m+1}$. Der gleiche Satz besagt aber auch, dass die Vereinigung $X \cup Y = X_1 \cup \dots X_{n+1} \cup Y_1 \cup \cdots \cup Y_{m+1}$ von $m+n+2$ nulldimensionalen Räumen

$$\mathbf{ind}\,(X \cup Y) \leq m+n+1 = \mathbf{ind}\, X + \mathbf{ind}\, Y + 1$$

erfüllt, denn nach Satz 0.2.14 ist auch $X \cup Y$ separabel. □

Satz 1.3.8. *Ist X ein beliebiger metrischer Raum und M ein separabler Unterraum von X mit $\boldsymbol{ind} M \leq n$ für ein $n \geq 0$, dann gibt es zu je zwei disjunkten Teilmengen A, B von X eine Partition L in X zwischen A und B, die $\boldsymbol{ind}(M \cap L) \leq n-1$ erfüllt.*

Beweis. Nach Satz 1.3.4 kann M als Vereinigung von zwei Teilräumen Y und Z dargestellt werden, die $\mathbf{ind}\, Y \leq n-1$ und $\mathbf{ind}\, Z \leq 0$ erfüllen. Wegen Satz 1.2.10 gibt es eine Partition L zwischen A und B mit $L \cap Z = \emptyset$, womit $M \cap L \subset M \setminus Z \subset Y$ und daher $\mathbf{ind}\, M \cap L \leq \mathbf{ind}\, Y \leq n-1$; vgl. Satz 1.1.3. □

Als unmittelbare Folgerung des vorigen Satzes erhalten wir für den Spezialfall $M = X$ ein Korollar.

Korollar 1.3.9. *Ist X ein separabler metrischer Raum mit $\boldsymbol{ind} X \leq n$ für ein $n \geq 0$, dann gibt es zu je zwei abgeschlossenen disjunkten Teilmengen A, B von X eine Partition L zwischen A und B mit $\boldsymbol{ind} L \leq n-1$.* □

Satz 1.3.10. *Sind X und Y separable metrische Räume mit $X \neq \emptyset$ oder $Y \neq \emptyset$, dann gilt*

$$\boldsymbol{ind}(X \times Y) \leq \boldsymbol{ind} X + \boldsymbol{ind} Y.$$

Beweis. Im Falle $\mathbf{ind}\, X = \infty$ oder $\mathbf{ind}\, Y = \infty$ ist die Ungleichung natürlich erfüllt, womit wir beide Dimensionen als endlich voraussetzen können. Wir führen den Beweis durch Induktion nach $k_{X,Y} = \mathbf{ind}\, X + \mathbf{ind}\, Y$. Für $k_{X,Y} = -1$ muss entweder $X = \emptyset$ oder $Y = \emptyset$ sein und damit auch $\mathbf{ind}\,(X \times Y) = -1$.
Wir setzen nun voraus, dass die Ungleichung für alle Räume X, Y mit $\mathbf{ind}\, X + \mathbf{ind}\, Y < k$ für ein $k \geq 0$ stimmt. Weiters seien X, Y Räume, sodass $\mathbf{ind}\, X = n$, $\mathbf{ind}\, Y = m$ und $m + n = k$. Wir können dabei $m, n \geq 0$, also $X \neq \emptyset$ und $Y \neq \emptyset$ annehmen, denn andernfalls wäre die Ungleichung wegen $X \times Y = \emptyset$ ohnehin klar. Der Raum X hat also eine Basis $\mathcal{B}_X$ mit $\mathbf{ind}\, \partial U \leq n-1$ für alle $U \in \mathcal{B}_X$ und Y eine Basis $\mathcal{B}_Y$ mit $\mathbf{ind}\, \partial V \leq m-1$. Mengen der Form $U \times V$ für $U \in \mathcal{B}_X$ und $V \in \mathcal{B}_Y$ bilden eine Basis von $X \times Y$ und wegen

$$\partial(U \times V) \subset (X \times \partial V) \cup (\partial U \times Y),$$

vgl. Lemma 0.2.21, erhalten wir mit Satz 1.3.3 und der Induktionsvoraussetzung

$$\mathbf{ind}\, \partial(U \times V) \leq \mathbf{ind}\,((X \times \partial V) \cup (\partial U \times Y)) \leq \max\{\mathbf{ind}\,(X \times \partial V), \mathbf{ind}\,(\partial U \times Y)\} \leq m+n-1 = k-1.$$

Daraus folgt schließlich $\mathbf{ind}\,(X \times Y) \leq k$. □

1.4 Die große induktive Dimension

Ist X sogar ein normaler topologischer Raum, so steht uns eine weitere Möglichkeit zur Verfügung, um einen Dimensionsbegriff zu formulieren. Die Definition der sogenannten großen induktiven Dimension ähnelt jener, der kleinen induktiven Dimension sehr stark. Auf separablen metrischen Räumen stimmen die beiden Begriffe überein.

Definition 1.4.1. Sei X ein normaler topologischer Raum. Die *große induktive Dimension* von X, geschrieben als $\mathbf{Ind}\, X$, ist eine Zahl aus $\{-1, 0, 1, \dots\} \cup \{\infty\}$, wobei

(GID1) $\mathbf{Ind}\, X = -1$ genau dann, wenn $X = \emptyset$,

(GID2) $\mathbf{Ind}\, X \leq n$ für ein $n = 0, 1, \dots$, wenn für jede abgeschlossene Menge $A \subset X$ und jede offene Menge $V \subset X$, mit $A \subset V$ eine offene Menge $U \subset X$ existiert, sodass

$$A \subset U \subset V \text{ und } \mathbf{Ind}\, \partial U \leq n - 1,$$

(GID3) $\mathbf{Ind}\, X = n$, wenn $\mathbf{Ind}\, X \leq n$ und $\mathbf{Ind}\, X > n - 1$, das heißt $\mathbf{Ind}\, X \nleq k$ für $k = 0, 1, \dots, n - 1$,

(GID4) $\mathbf{Ind}\, X = \infty$, wenn $\mathbf{Ind}\, X \nleq n$ für alle $n = -1, 0, 1, \dots$

Dabei ist zu beachten, dass ∂U für jede Menge $U \subset X$ abgeschlossen und somit nach Satz 0.2.7 wieder normal ist. Mit der gleichen Argumentation wie im Beweis von Satz 1.1.2 bzw. Satz 1.1.5 beweist man für die große Induktive Dimension folgende Aussagen.

Satz 1.4.2. *Sind X und Y homöomorphe topologische Räume, so gilt $\mathbf{Ind} X = \mathbf{Ind} Y$.* □

Satz 1.4.3. *Ein normaler topologischer Raum X erfüllt die Ungleichung $\mathbf{Ind} X \leq n$ genau dann, wenn es für je zwei disjunkte abgeschlossene Mengen $A, B \subset X$ eine Partition L zwischen A und B gibt, sodass $\mathbf{Ind} L \leq n - 1$.* □

Satz 1.4.4. *Für jeden normalen topologischen Raum X gilt die Ungleichung $\mathbf{ind} X \leq \mathbf{Ind} X$.*

Beweis. Wir zeigen mit Induktion nach n, dass aus $\mathbf{Ind}\, X \leq n$ auch $\mathbf{ind}\, X \leq n$ folgt. Der Fall $n = -1$ ist klar. Nehmen wir an, die Aussage ist für alle $k < n$ bewiesen und es gilt $\mathbf{Ind}\, X \leq n$. Dann gilt (GID2) für alle abgeschlossenen Mengen $A \subset X$, also insbesondere für alle einpunktigen Mengen $\{x\} \subset X$. Es gibt also für jeden Punkt $x \in X$ und jede offene Umgebung V von x eine Menge U mit

$$x \in U \subset V \quad \text{und} \quad \mathbf{Ind}\, \partial U \leq n - 1.$$

Nach Induktionsvoraussetzung gilt nun auch $\mathbf{ind}\, \partial U \leq n - 1$ und es folgt $\mathbf{ind}\, X \leq n$. □

Satz 1.4.5. *Für jeden separablen metrischen Raum X gilt die Gleichheit $\mathbf{ind} X = \mathbf{Ind} X$.*

Beweis. Die Ungleichung $\mathbf{ind}\, X \leq \mathbf{Ind}\, X$ haben wir in 1.4.4 bewiesen.
Für den Beweis der umgekehrten Richtung können wir $\mathbf{ind}\, X < \infty$ voraussetzen. Wir werden die Aussage mittels Induktion nach $n = \mathbf{ind}\, X$ zeigen. Für den Fall $n = -1$ ist $X = \emptyset$, womit $\mathbf{ind}\, X = \mathbf{Ind}\, X$.
Nehmen wir nun an, die Ungleichung ist für $n - 1$ erfüllt. Zu je zwei disjunkten abgeschlossenen Mengen $A, B \subset X$ gibt es nach Korollar 1.3.9 eine Partition L zwischen A und B, sodass $\mathbf{ind}\, L \leq n - 1$ Dank Induktionsvoraussetzung gilt $\mathbf{Ind}\, L \leq n - 1$. Mit Satz 1.4.3 folgt schließlich $\mathbf{Ind}\, X \leq n = \mathbf{ind}\, X$. □

Kapitel 2

Die Überdeckungsdimension

2.1 Vorbereitung und Definition

Auf normalen topologischen Räumen wollen wir im Folgenden die sogenannte Überdeckungsdimension definieren. Dazu benötigen wir einige Begriffe.

Bemerkung 2.1.1. Sei X eine Menge. Wir bezeichnen sowohl Mengen der Form $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$, als auch Abbildungen $\mathcal{B} : S \to \mathcal{P}(X)$, wobei S eine Indexmenge ist, als Familien von Teilmengen von X. Eine Abbildung $\mathcal{B} : S \to \mathcal{P}(X)$ wird auch *induzierte* Familie genannt und wir schreiben meist $\mathcal{B} = (B_s)_{s \in S}$ oder im Fall $S = \{1, \ldots, k\}$ auch $\mathcal{B} = (B_s)_{s=1}^k$. Wir werden die Notation $B \in \mathcal{B}$ als Abkürzung für $B \in \mathcal{B}(S)$ verwenden und mit Elementen aus $\mathcal{B}$ sind jene von $\mathcal{B}(S)$ gemeint.
Jede Familie $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ kann als induzierte Familie $\mathcal{A}' = (A)_{A \in \mathcal{A}}$ aufgefasst werden, indem man jedem Element aus $\mathcal{A}$ sich selbst als Index zuordnet. Ist in diesem Abschnitt die Rede von einer Familie $\mathcal{A}$ ohne, dass spezifiziert wird, ob diese als Teilmenge der Potenzmenge oder als induzierte Familie aufzufassen ist, kann $\mathcal{A}$ deshalb als induzierte Familie gedacht werden.

Definition 2.1.2. Sei X ein topologischer Raum. Wir bezeichnen eine Familie $\mathcal{A}$ von Teilmengen von X als *Überdeckung* von X, falls

$$X \subset \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A.$$

Definition 2.1.3. Seien $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ Überdeckungen von X. Wir nennen $\mathcal{B}$ eine *Verfeinerung* von $\mathcal{A}$, wenn für jede Menge $B \in \mathcal{B}$ eine Menge $A \in \mathcal{A}$ existiert, sodass $B \subset A$.

Definition 2.1.4. Sei $(A_s)_{s \in S}$ eine Überdeckung eines topologischen Raumes X. Dann bezeichnen wir eine Überdeckung $(B_s)_{s \in S}$ von X als *Schrumpfung* von $(A_s)_{s \in S}$, wenn für jedes $s \in S$ die Beziehung $B_s \subset A_s$ gilt.

Bemerkung 2.1.5. An dieser Stelle soll bemerkt sein, dass der Begriff der Schrumpfung in der Theorie nicht einheitlich verwendet wird. Statt der Bedingung $B_s \subset A_s$, wird teils sogar die stärkere Ungleichung $\overline{B_s} \subset A_s$ gefordert.

Definition 2.1.6. Für eine beliebige Menge X und eine nichtleere induzierte Familie $\mathcal{A} = (A_s)_{s \in S}$ von Teilmengen von X bezeichnen wir mit der *Ordnung* von $\mathcal{A}$, geschrieben als $\mathbf{ord}\,\mathcal{A}$, die kleinste ganze Zahl $n \geq -1$, sodass für je $n+2$ verschiedene Indizes $s_1, \ldots, s_{n+2} \in S$ der Schnitt $A_{s_1} \cap \cdots \cap A_{s_{n+2}}$ leer ist. Falls es keine solche Zahl gibt, setzen wir $\mathbf{ord}\,\mathcal{A} = \infty$. Die Ordnung einer Familie $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ definieren wir als die Ordnung der entsprechenden induzierten Familie $\mathcal{A}'$; vgl. Bemerkung 2.1.1.

Um ein besseres Verständnis für diese Definitionen zu erhalten, wollen wir einige Eigenschaften aufzählen.

Bemerkung 2.1.7. Sei $\mathcal{A} = (A_s)_{s\in S}$ eine Familie von Teilmengen eines Topologischen Raumes X, dann sind folgende Tatsachen leicht einsehbar.

i) Es gilt immer $|S| \geq \mathbf{ord}\,\mathcal{A} + 1$, denn aus $\mathbf{ord}\,A = n$ folgt die Existenz von $n+1$ verschiedenen Indizes $s_1, \ldots, s_{n+1} \in S$ mit $A_{s_1} \cap \cdots \cap A_{s_{n+1}} \neq \emptyset$.

ii) Die Ordnung eine Familie ist nicht nur von den Elementen, sondern auch von der Induzierung abhängig. Mit $X = \{1,2,3\}, A_1 = \{1,2\}, A_2 = A_3 = \{3\}$ gilt etwa $\mathbf{ord}\,(A_i)_{i=1}^2 = 0$ aber $\mathbf{ord}\,(A_i)_{i=1}^3 = 1$.

iii) Es gilt $\mathbf{ord}\,\mathcal{A} = -1$ genau dann, wenn $\mathcal{A}$ nur die leere Menge enthält.

iv) Es gilt $\mathbf{ord}\,\mathcal{A} = 0$ genau dann, wenn $\mathcal{A}$ aus paarweise disjunkten Mengen besteht, die nicht alle leer sind, wobei alle nichtleeren Elemente von $\mathcal{A}$ nur einmal getroffen werden dürfen; vgl. ii).

v) Ist $\mathcal{A}$ eine Überdeckung von X, dann ist jede Schrumpfung $\mathcal{B} = (B_s)_{s\in S}$ von $\mathcal{A} = (A_s)_{s\in S}$ auch eine Verfeinerung von $\mathcal{A}$. Dabei gilt $\mathbf{ord}\,\mathcal{B} \leq \mathbf{ord}\,A$, denn

$$B_{s_1} \cap \cdots \cap B_{s_{n+2}} \subset A_{s_1} \cap \cdots \cap A_{s_{n+2}}$$

für beliebige $s_1, \ldots, s_{n+2} \in S$.

Definition 2.1.8. Eine Familie $\mathcal{A}$ von Teilmengen eines topologischen Raumes bezeichnen wir als *offen* (oder *abgeschossen*), wenn alle Elemente aus $\mathcal{A}$ offen (oder abgeschlossen) sind.

Definition 2.1.9. Eine Familie $(A_s)_{s\in S}$ von Teilmengen einer Menge X nennen wir *endlich*, wenn die Indexmenge S endlich ist.

Für die folgende Definition der Überdeckungsdimension wäre es nicht notwendig, sich auf normale Räume zu beschränken. Für eine weiterführende Theorie hingegen werden sich normale Räume allerdings als praktikabel erweisen, weswegen wir uns hier auf diese einschränken wollen.

Definition 2.1.10. Sei X ein normaler topologischer Raum. Die *Überdeckungsdimension* von X, geschrieben als $\mathbf{dim}\,X$, ist eine Zahl aus $\{-1,0,1,\ldots\} \cup \{\infty\}$, wobei

(DIM1) $\mathbf{dim}\,X \leq n$ für ein $n = -1,0,1,\ldots$, wenn es für jede endliche offene Überdeckung $\mathcal{A}$ von X eine endliche offene Verfeinerung $\mathcal{B}$ von $\mathcal{A}$ gibt, mit $\mathbf{ord}\,\mathcal{B} \leq n$,

(DIM2) $\mathbf{dim}\,X = n$, wenn $\mathbf{dim}\,X \leq n$ und $\mathbf{dim}\,X > n-1$, das heißt $\mathbf{dim}\,X \nleq k$ für $k = -1,0,\ldots,n-1$,

(DIM3) $\mathbf{dim}\,X = \infty$, wenn $\mathbf{dim}\,X \nleq n$ für alle $n = -1,0,1,\ldots$

Satz 2.1.11. *Sind X und Y homöomorphe topologische Räume, so gilt $\boldsymbol{dim}X = \boldsymbol{dim}Y$.*

Beweis. Ist $T : X \to Y$ ein Homöomorphismus, so bildet T die offenen Überdeckungen von X bijektiv auf die offenen Überdeckungen von Y ab. Dabei ist $\mathcal{B}$ genau dann eine Verfeinerung von $\mathcal{A}$, wenn $T(\mathcal{B})$ eine Verfeinerung von $T(\mathcal{A})$ ist, wobei $T(\mathcal{C})$ für eine induzierte Familie $\mathcal{C} = (C_s)_{s\in S}$ die Komposition $T \circ \mathcal{C}$ bezeichnen soll. Außerdem gilt $\mathbf{ord}\,\mathcal{B} = \mathbf{ord}\,T(\mathcal{B})$ für jede Überdeckung $\mathcal{B}$. □

Satz 2.1.12. *Ein normaler topologischer Raum X erfüllt die Gleichung $\boldsymbol{dim}X = -1$ genau dann, wenn $X = \emptyset$.*

Beweis. Die Gleichung $\mathbf{dim}\,X = -1$ bedeutet, dass jede offene Überdeckung $\mathcal{A}$ von X eine offene Verfeinerung $\mathcal{B}$ hat, sodass $\mathbf{ord}\,\mathcal{B} = -1$. Daraus folgt aber $\bigcup_{B\in\mathcal{B}} B = \emptyset$ und da $\mathcal{B}$ eine Überdeckung von X ist, auch $X = \emptyset$. Für $X = \emptyset$ gilt klarerweise $\mathbf{dim}\,X = -1$. □

Satz 2.1.13. *Ist X ein normaler topologischer Raum und $n \geq -1$ eine ganze Zahl, dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

i) *Der Raum X erfüllt die Ungleichung $\mathbf{dim}\, X \leq n$.*

ii) *Jede endliche offene Überdeckung $\mathcal{A}$ von X hat eine offene Verfeinerung $\mathcal{B}$ mit $\mathbf{ord}\,\mathcal{B} \leq n$.*

iii) *Jede endliche offene Überdeckung $\mathcal{A}$ von X hat eine offene Schrumpfung $\mathcal{B}$ mit $\mathbf{ord}\,\mathcal{B} \leq n$.*

Beweis.

i) $\Rightarrow$ *ii)* Das ist klar.

ii) $\Rightarrow$ *iii)* Sei $\mathcal{A} = (A_i)_{i=1}^k$ eine offene Überdeckung von X und $\mathcal{V}$ eine offene Verfeinerung von $\mathcal{A}$ mit $\mathbf{ord}\,\mathcal{V} \leq n$. Wir können hier $\mathcal{V}$ als injektiv voraussetzen oder sogar als Teilmenge der Potenzmenge denken. Ordnen wir jedem $V \in \mathcal{V}$ einen Index $i(V) \in \{1, \ldots, k\}$ zu, sodass $V \subset A_{i(V)}$, dann ist für jedes $i = 1, \ldots, k$ die Menge

$$B_i = \bigcup_{\substack{V \in \mathcal{V} \\ i(V)=i}} V \subset A_i$$

offen und damit $\mathcal{B} = (B_i)_{i=1}^k$ die gesuchte offene Schrumpfung von $\mathcal{A}$. Angenommen es gäbe paarweise verschiedene Indizes $i_1, \ldots, i_{n+2}$ mit $x \in B_{i_1} \cap \cdots \cap B_{i_{n+2}} \neq \emptyset$, so hätten wir für geeignete, paarweise verschiedene Mengen $V_1, \ldots, V_{n+2} \in \mathcal{V}$ mit jeweils $i(V_j) = i_j$ auch $x \in V_1 \cap \cdots \cap V_{n+2}$ im Widerspruch zu $\mathbf{ord}\,\mathcal{V} \leq n$.

iii) $\Rightarrow$ *i)* Das ist klar, denn jede Schrumpfung einer endlichen offenen Überdeckung $\mathcal{A}$ ist auch eine endliche Verfeinerung von $\mathcal{A}$.

□

Satz 2.1.14. *Ein normaler topologischer Raum X erfüllt die Ungleichung $\mathbf{dim}\, X \leq n$ für ein $n = -1, 0, \ldots$ genau dann, wenn jede offene Überdeckung $\mathcal{A} = (A_i)_{i=1}^{n+2}$ mit $n+2$-elementiger Indexmenge eine offene Schrumpfung $\mathcal{B} = (B_i)_{i=1}^{n+2}$ hat, sodass $\bigcap_{i=1}^{n+2} B_i = \emptyset$.*

Beweis. Ist $\mathbf{dim}\, X \leq n$ und $\mathcal{A} = (A_i)_{i=1}^{n+2}$ eine offene Überdeckung von X, dann gibt es dank Satz 2.1.13 eine Schrumpfung $\mathcal{B}$ von $\mathcal{A}$ mit der geforderten Eigenschaft.
Für die Rückrichtung zeigen wir die Kontraposition der Aussage. Wir wollen also zeigen, dass zu jedem normalen topologischen Raum X mit $\mathbf{dim}\, X > n$ eine $n+2$-elementige Überdeckung $\mathcal{A} = (A_i)_{i=1}^{n+2}$ existiert, sodass alle Schrumpfungen $\mathcal{B} = (B_i)_{i=1}^{n+2}$ von $\mathcal{A}$ die Eigenschaft $\bigcap_{i=1}^{n+2} B_i \neq \emptyset$ erfüllen.
Mit Satz 2.1.13 folgt aus $\mathbf{dim}\, X > n$, dass es eine endliche Überdeckung $\mathcal{V} = (V_i)_{i=1}^k$ von X gibt, die keine Schrumpfung $\mathcal{V}'$ mit $\mathbf{ord}\,\mathcal{V}' \leq n$ hat. Wegen $\mathbf{ord}\,\mathcal{V} > n$ muss dabei $k \geq n+2$.
Angenommen es existiert zu einer beliebigen Teilmenge $\{i_1, \ldots, i_m\}$ von $\{1, \ldots, k\}$ eine Schrumpfung $\mathcal{V}' = (V_i')_{i=1}^k$ von $\mathcal{V}$, sodass zwar

$$V_{i_1}' \cap \cdots \cap V_{i_m}' = \emptyset \quad \text{aber} \quad V_{i_1} \cap \cdots \cap V_{i_m} \neq \emptyset,$$

so ersetzen wir $\mathcal{V}$ durch $\mathcal{V}'$. Da $\{1, \ldots, k\}$ nur endlich viele Teilmengen besitzt, erhalten wir so nach endlich vielen Schritten eine endliche Überdeckung $\mathcal{V}$ mit $\mathbf{ord}\,\mathcal{V} > n$ und der Eigenschaft, dass

$$V_{i_1} \cap \cdots \cap V_{i_m} \neq \emptyset \quad \Rightarrow \quad V_{i_1}' \cap \cdots \cap V_{i_m}' \neq \emptyset \tag{2.1}$$

für jede Schrumpfung $\mathcal{V}'$ von $\mathcal{V}$ und jede beliebige Teilmenge $\{i_1, \ldots, i_m\}$ von $\{1, \ldots, k\}$. Indem wir die Elemente von $\mathcal{V}$ umsortieren, können wir wegen $\mathbf{ord}\,\mathcal{V} > n$ annehmen, dass

$$\bigcap_{i=1}^{n+2} V_i \neq \emptyset. \tag{2.2}$$

Setzen wir nun $A_i = V_i$ für $i = 1, \dots, n+1$ und $A_{n+2} = \bigcup_{i=n+2}^{k} V_i$, so ist die Menge $\mathcal{A} = (A_i)_{i=1}^{n+2}$ die gesuchte offene Überdeckung von X. Tatsächlich ist für jede offene Schrumpfung $(B_i)_{i=1}^{n+2}$ von $\mathcal{A}$ die Familie $(C_i)_{i=1}^{k}$ mit

$$C_i = B_i \text{ für } i = 1, \dots, n+1 \quad \text{und} \quad C_i = V_i \cap B_{n+2} \text{ für } i = n+2, \dots, k$$

eine Schrumpfung von $\mathcal{V}$ und $(B_i)_{i=1}^{n+2}$ erfüllt somit wegen (2.2) und (2.1) mit $\{i_1, \dots, i_m\} = \{1, \dots, n+2\}$ die Beziehung

$$\bigcap_{i=1}^{n+2} B_i \supset \bigcap_{i=1}^{n+2} C_i \neq \emptyset.$$

□

Satz 2.1.15. *Ist X ein normaler topologischer Raum, so gilt $\boldsymbol{dim}\, X = 0$ genau dann, wenn $\boldsymbol{Ind}\, X = 0$.*

Beweis. Offensichtlich ist $\mathbf{dim}\, X \neq -1$ gleichbedeutend mit $\mathbf{Ind}\, X \neq -1$. Wegen Satz 2.1.14 gilt $\mathbf{dim}\, X \leq 0$ genau dann, wenn es zu je zwei offenen Mengen $U, V \subset X$ mit $X = U \cup V$ disjunkte offene Mengen $U' \subset U$ und $V' \subset V$ gibt, die X immer noch überdecken, also $X = U' \cup V'$ erfüllen. Diese Aussage ist äquivalent dazu, dass die leere Menge eine Partition zwischen den disjunkten abgeschlossenen Mengen $A = X \setminus U$ und $B = X \setminus V$ bildet. Beachten wir, dass zu je zwei disjunkten abgeschlossenen Teilmengen A, B von X die Mengen $U = X \setminus A$ und $V = X \setminus B$ eine offene Überdeckung von X bilden, so folgt mit Satz 1.4.3, dass $\mathbf{dim}\, X \leq 0$ genau dann gilt, wenn $\mathbf{Ind}\, X \leq 0$. □

Definition 2.1.16. Sei (X, d) ein metrischer Raum, A eine Teilmenge von X und $\mathcal{A}$ eine Familie von Teilmengen von X. Wir definieren den *Durchmesser* $d(A)$ von A als

$$d(A) = \sup\{d(x, y) : x, y \in A\}$$

und *mesh* $\mathcal{A}$ als

$$mesh\, \mathcal{A} = \sup\{d(A) : A \in \mathcal{A}\}.$$

Beides sind Zahlen aus $[0, +\infty]$.

Lemma 2.1.17 (Lebesguezahl)**.** *Sei X ein kompakter metrischer Raum und $\mathcal{A}$ eine offene Überdeckung von X. Dann gibt es eine Zahl $\epsilon > 0$, eine sogenannte Lebesguezahl von $\mathcal{A}$, sodass $(U_{\epsilon_x}(x))_{x \in X}$ eine Verfeinerung von $\mathcal{A}$ ist.*

Beweis. Da $\mathcal{A}$ eine offene Überdeckung von X ist, gibt es zu jedem $x \in X$ eine positive zahl ϵ_x, sodass $U_{2\epsilon_x}(x) \subset A$ für ein $A \in \mathcal{A}$. Da X kompakt ist, hat die offene Überdeckung $(U_{\epsilon_x}(x))_{x \in X}$ eine endliche Teilüberdeckung, d.h.

$$X \subset U_{\epsilon_{x_1}}(x_1) \cup \dots \cup U_{\epsilon_{x_n}}(x_n)$$

für ein $n \in \mathbb{N}$ und geeignete $x_1, \dots, x_n \in X$. Setzen wir $\epsilon = \min\{\epsilon_{x_1}, \dots \epsilon_{x_n}\}$, so gibt es für jedes $x \in X$ einen Index $i \in \{1, \dots, n\}$, sodass $x \in U_{\epsilon_{x_i}}(x_i)$, womit

$$U_\epsilon(x) \subset U_{2\epsilon_{x_i}}(x_i) \subset A$$

für ein geeignetes $A \in \mathcal{A}$. □

Satz 2.1.18. *Sei X ein komptakter metrischer Raum. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

i) *Der Raum X erfüllt die Ungleichung $\boldsymbol{dim}\, X \leq n$.*

ii) *Für jede Metrik d auf X und jede Zahl $\epsilon > 0$ existiert eine endliche offene Überdeckung $\mathcal{A}$ von X, sodass $mesh\, \mathcal{A} < \epsilon$ und $\boldsymbol{ord}\, \mathcal{A} \leq n$.*

iii) *Es existiert eine Metrik d auf X, mit der Eigenschaft, dass für jede Zahl $\epsilon > 0$ eine endliche offene Überdeckung $\mathcal{A}$ von X existiert, sodass $mesh\, \mathcal{A} < \epsilon$ und $\boldsymbol{ord}\, \mathcal{A} \leq n$.*

Beweis.

i) $\Rightarrow$ ii) Sei d eine beliebige Metrik auf X und $\epsilon > 0$. Da X kompakt ist, hat die Überdeckung

$$\mathcal{V} = (U_{\frac{\epsilon}{3}}(x))_{x \in X}$$

eine endliche Teilüberdeckung, welche wegen $\mathbf{dim}\, X \leq n$ und Satz 2.1.13 eine offene Schrumpfung $\mathcal{A}$ mit $\mathbf{ord}\, \mathcal{A} \leq n$ besitzt. Als Verfeinerung von $\mathcal{V}$ erfüllt $\mathcal{A}$ insbesondere auch $mesh\, A < \epsilon$.

ii) $\Rightarrow$ iii) Das ist klar.

iii) $\Rightarrow$ i) Sei $\mathcal{V}$ eine endliche offene Überdeckung von X. Dann gibt es nach Lemma 2.1.17 ein $\epsilon > 0$, sodass $(U_{2\epsilon}(x))_{x \in X}$ eine Verfeinerung von $\mathcal{V}$ ist. Die durch die Annahme *iii)* gewährleistete Überdeckung $\mathcal{A}$ ist wegen $mesh\, \mathcal{A} < \epsilon$ wiederum eine Verfeinerung von $(U_{2\epsilon}(x))_{x \in X}$, damit auch von $\mathcal{V}$, und hat Ordnung $\mathbf{ord}\, \mathcal{A} \leq n$.

□

2.2 Kompaktifizierungssatz und Übereinstimmung

Bevor wir den Kompaktifizierungssatz beweisen können, werden wir einiges an Notation einführen.

Definition 2.2.1. Sind $\mathcal{A}_i = (A_j^{(i)})_{j \in S_i}$ für $i = 1, \ldots, k$ Überdeckungen eines topologischen Raumes X, dann definieren wir

$$\mathcal{A}_1 \wedge \cdots \wedge \mathcal{A}_k := (A_{j_1}^{(1)} \cap \cdots \cap A_{j_k}^{(k)})_{(j_1, \ldots, j_k) \in \prod_{i=1}^k S_i}$$

Offensichtlich ist $\mathcal{A}_1 \wedge \cdots \wedge \mathcal{A}_k$ eine Verfeinerung von $\mathcal{A}_i$ für jedes $i = 1, \ldots, k$ und offen (bzw. abgeschlossen), wenn alle $\mathcal{A}_i$ offen (abgeschlossen) sind.

Definition 2.2.2. Sind X, Y topologische Räume, $\mathcal{A} = (A_s)_{s \in S}$ eine Überdeckung von Y und $f : X \to Y$ eine stetige Funktion, dann definieren wir

$$f^{-1}(\mathcal{A}) := (f^{-1}(A_s))_{s \in S}.$$

Klarerweise ist $f^{-1}(\mathcal{A})$ eine Überdeckung von X. Diese ist offen (bzw. abgeschlossen), wenn $\mathcal{A}$ offen (bzw. abgeschlossen) ist.
Für den Spezialfall, dass $M = X$ ein Unterraum von Y und f die Einbettungsabbildung $\iota : M \to Y$ ist, bezeichnen wir $f^{-1}(\mathcal{A}) = (M \cap A_s)_{s \in S}$ auch als $\mathcal{A}|_M$.

Definition 2.2.3. Ein metrischer Raum X heißt *total beschränkt*, wenn es zu jedem $\epsilon > 0$ eine Überdeckung $\mathcal{U}$ von X mit $mesh \mathcal{U} < \epsilon$ gibt.

Lemma 2.2.4. *Seien (X, d) ein total beschränkter metrischer Raum mit $\boldsymbol{dim}\, X \leq n$ und $f_1, \ldots, f_k : X \to [0, 1]$ stetige Funktionen. Dann gibt es zu jedem $\epsilon > 0$ eine endliche offene Überdeckung $\mathcal{U}$ von X, sodass*

$$mesh \mathcal{U} < \epsilon, \quad \boldsymbol{ord} \mathcal{U} \leq n \quad \text{und} \quad x, y \in U \Rightarrow |f_i(x) - f_i(y)| < \epsilon \quad \text{für alle } i = 1, \ldots, k \text{ und } U \in \mathcal{U}.$$

Beweis. Da X total beschränkt ist, gibt es eine endliche offene Überdeckung $\mathcal{V}$ von X mit $mesh\,\mathcal{V} < \epsilon$. Ist $\mathcal{W}$ eine endliche offene Überdeckung von $[0,1]$ mit $mesh\,\mathcal{W} < \epsilon$, so hat die endliche offene Überdeckung

$$\mathcal{V} \wedge f_1^{-1}(\mathcal{W}) \wedge \cdots \wedge f_k^{-1}(\mathcal{W})$$

von X wegen $\mathbf{dim}\,X \leq n$ eine endliche offene Verfeinerung $\mathcal{U}$ mit $\mathbf{ord}\,U \leq n$. Diese erfüllt klarerweise $mesh\,U < \epsilon$. Für jedes $U \in \mathcal{U}$ und $x, y \in U$ folgt für beliebiges $i = 1, \dots, k$ sofort $f_i(x), f_i(y) \in W$ für ein $W \in \mathcal{W}$ und wegen $mesh\,\mathcal{W} < \epsilon$ auch $|f_i(x) - f_i(y)| < \epsilon$. □

Definition 2.2.5. Seien X, Y topologische Räume, Y kompakt und $\iota : X \to Y$ eine Abbildung, sodass $\iota : X \to \iota(X)$ ein Homöomorphismus ist. Wir nennen Y eine *Kompaktifizierung* von X, wenn $\iota(X)$ dicht in Y liegt.

Satz 2.2.6. *Sei (X, d) ein total beschränkter metrischer Raum. Dann existiert auf X eine zu d äquivalente Metrik $\tilde{d}$, d.h. eine Metrik $\tilde{d}$ mit $\mathcal{T}(d) = \mathcal{T}(\tilde{d})$, sodass $d(x,y) \leq \tilde{d}(x,y)$ für alle $x, y \in X$, und sodass die Vervollständigung $\tilde{X}$ von $(X, \tilde{d})$ eine Kompaktifizierung von X mit $\boldsymbol{dim}\,\tilde{X} \leq \boldsymbol{dim}\,X$ ist.*

Beweis. Im Fall $\mathbf{dim}\,X = \infty$ können wir $\tilde{d} = d$ setzen. Jede Vervollständigung $\tilde{X}$ von (X, d), deren Existenz etwa durch [3, Satz 1.1.4] gewährleistet wird, ist dann als total beschränkter und vollständiger Raum kompakt, siehe [5, Satz 12.14.3]. Weil diese Vervollständigung eine homöomorphe Kopie von X dicht enthält, ist sie sogar eine Kompaktifizierung von X. Die geforderte Ungleichung gilt trivialerweise.
Wir nehmen nun $\mathbf{dim}\,X = n < \infty$ an, und werden zeigen, dass für jedes $m = 1, 2, \dots$ eine endliche offene Überdeckung $\mathcal{U}_m = (U_{m,j})_{j=1}^{k_m}$ existiert, sodass

$$mesh\,\mathcal{U}_m < \frac{1}{2^m}, \quad \mathbf{ord}\,\mathcal{U}_m \leq n \quad \text{und} \quad x, y \in U_{m,j} \Rightarrow |f_{i,j}(x) - f_{i,j}(y)| < \frac{1}{2^m} \tag{2.3}$$

für $i < m$ und $j = 1, 2, \dots, k_i$, wobei die Funktionen $f_{i,j} : X :\to [0,1]$ gegeben sind durch

$$f_{i,j}(x) = \frac{d(x, X \setminus U_{i,j})}{\sum_{l=1}^{k_i} d(x, X \setminus U_{i,l})}. \tag{2.4}$$

Indem wir, falls nötig, d durch ein Vielfaches λd für ein $\lambda > 0$ ersetzen, können wir $d(X) > 1$ voraussetzen. Die unten konstruierten Mengen $U_{m,k}$ sind wegen $mesh\,\mathcal{U}_m < \frac{1}{2^m}$ für jedes $m = 1, 2, \dots$ und $k = 1, \dots, k_m$ echte Teilmengen von X. Aus

$$\bigcap_{l=1}^{k_i} (X \setminus U_{i,l}) = X \setminus \bigcup_{l=1}^{k_i} U_{i,l} = \emptyset,$$

folgt außerdem $\sum_{l=1}^{k_i} d(x, X \setminus U_{i,l}) \neq 0$. Die durch (2.4) definierten Funktionen sind also wohldefiniert und stetig.
Als total beschränkter metrischer Raum hat X eine endliche offene Überdeckung $\mathcal{U}$ mit $mesh\,\mathcal{U} < \frac{1}{2}$. Wegen $\mathbf{dim}\,X \leq n$ gibt es eine endliche offene Verfeinerung $\mathcal{U}_1$ von $\mathcal{U}$ mit $\mathbf{ord}\,\mathcal{U}_1 \leq n$. Sind $\mathcal{U}_1, \dots, \mathcal{U}_{m-1}$ offene Überdeckungen, die (2.3) erfüllen, so liefert Lemma 2.2.4 für $\epsilon = \frac{1}{2^m}$ eine geeignete Überdeckung $\mathcal{U}_m$.
Wir wollen nun die Metrik $\tilde{d}$ definieren und zeigen, dass sie zu d äquivalent ist. Dazu sei $n(i,j)$ für $i = 1, 2 \dots$ und $j = 1, \dots, k_i$ der Platz von (i,j) in der Folge

$$(1,1), \dots, (1, k_1), (2,1), \dots, (2, k_2), (3,1), \dots,$$

also $n(i,j) = j + \sum_{l=1}^{i-1} k_l$. Die so festgelegte Abbildung $n : \{(i,j) : i = 1, 2, \dots; j = 1, \dots, k_i\} \to \mathbb{N}$ ist klarerweise eine Bijektion. Wegen $|f_{i,j}(x) - f_{i,j}(y)| \leq 1$ ist

$$\tilde{d}(x,y) := d(x,y) + \sum_{n(i,j)=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n(i,j)}} |f_{i,j}(x) - f_{i,j}(y)| \tag{2.5}$$

für alle $x, y \in X$ wohldefiniert. Offensichtlich gilt $d(x,y) \leq \tilde{d}(x,y)$, womit $\tilde{d}(x,y) \geq 0$ für alle $x, y \in X$ und $\tilde{d}(x,y) = 0 \Leftrightarrow (x,y) = (0,0)$. Symmetrie und Dreiecksungleichung von $\tilde{d}$ sind unmittelbare Konsequenz der Symmetrie und Dreiecksungleichung von d und der Betragsfunktion. Somit ist $\tilde{d}$ eine Metrik.
Aufgrund der Stetigkeit der Funktionen $f_{i,j}$ und jener der Betragsfunktion, ist für festes $x \in X$ auch die Abbildung $\phi_x : X \to [0, \infty)$, definiert durch

$$\phi_x(y) = \sum_{n(i,j)=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n(i,j)}} |f_{i,j}(x) - f_{i,j}(y)|,$$

stetig, da diese Reihe absolut als Funktionenreihe konvergiert.

Aus der Ungleichung $d(x,y) \leq \tilde{d}(x,y)$ und aus der Stetigkeit der Funktion ϕ_x folgt, dass

$$\lim_{n\to\infty} d(x, x_n) = 0 \iff \lim_{n\to\infty} \tilde{d}(x, x_n) = 0$$

für jeden Punkt x und jede Folge $x_1, x_2, \ldots$ aus X. Wegen Lemma 0.2.12 sind die Metriken d und $\tilde{d}$ äquivalent, also $(X, \mathcal{T}(d))$ und $(X, \mathcal{T}(\tilde{d}))$ homöomorph.
Im nächsten Schritt werden wir beweisen, dass $(X, \tilde{d})$ total beschränkt ist. Dazu setzen wir

$$mesh_{\tilde{d}}(\mathcal{U}) = \sup\{\tilde{d}(U) : U \in \mathcal{U}\}$$

für Überdeckungen $\mathcal{U}$ von X und zeigen, dass $mesh_{\tilde{d}}(\mathcal{U}_m) \overset{m\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Zu $\epsilon > 0$ sei $N \in \mathbb{N}$ so groß, dass $\frac{1}{2^N} < \frac{\epsilon}{3}$. Wähle $M \in \mathbb{N}$ mit $M \geq N$ und

$$\frac{1}{2^M} \sum_{l=1}^{N} \frac{1}{2^l} < \frac{\epsilon}{3}$$

sowie $M > i$ für alle (i,j) mit $n(i,j) \leq N$. Mit (2.3) und (2.5) folgt für $m \geq M$, $U \in \mathcal{U}_m$ und $x, y \in U$

$$\begin{aligned}
\tilde{d}(x,y) =& d(x,y) + \sum_{n(i,j)=1}^{N} \frac{1}{2^{n(i,j)}} |f_{i,j}(x) - f_{i,j}(y)| + \sum_{n(i,j)=N+1}^{\infty} \frac{1}{2^{n(i,j)}} |f_{i,j}(x) - f_{i,j}(y)| \\
<& mesh(\mathcal{U}_m) + \frac{1}{2^m} \sum_{l=1}^{N} \frac{1}{2^l} + \sum_{l=N+1}^{\infty} \frac{1}{2^l} < \frac{1}{2^m} + \frac{1}{2^M} \sum_{l=1}^{N} \frac{1}{2^l} + \frac{1}{2^N}.
\end{aligned}$$

Da diese Abschätzung unabhängig von U und den Elementen $x, y \in U$ ist, gilt sogar

$$mesh_{\tilde{d}}(\mathcal{U}_m) \leq \frac{1}{2^N} + \frac{1}{2^M} \sum_{l=1}^{N} \frac{1}{2^l} + \frac{1}{2^N} < \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon.$$

Damit haben wir $mesh_{\tilde{d}}(\mathcal{U}_m) \overset{m\to\infty}{\longrightarrow} 0$ bewiesen, womit $(X, \tilde{d})$ total beschränkt ist. Die Vervollständigung $\tilde{X}$ von $(X, \tilde{d})$ ist dann eine Kompaktifizierung von $(X, \mathcal{T}(d))$.
Im letzten Schritt werden wir beweisen, dass $\mathbf{dim}\, \tilde{X} \leq \mathbf{dim}\, X$. Dazu wollen wir Satz 2.1.13 anwenden und entsprechende Überdeckungen konstruieren. Wegen

$$|f_{i,j}(x) - f_{i,j}(y)| \leq 2^{n(i,j)} \tilde{d}(x,y)$$

sind die Funktionen $f_{i,j}$ für $i = 1, 2 \ldots$ und $j = 1, \ldots, k_i$ sogar gleichmäßig stetig in $(X, \tilde{d})$ und können zu stetigen Funktionen $\tilde{f}_{i,j} : \tilde{X} \to [0,1]$ fortgesetzt werden ;siehe [3, Satz 1.1.1]. Aus der Definition (2.4) folgt unmittelbar, dass $\sum_{j=1}^{k_i} \tilde{f}_{i,j}(x) = 1$ für jedes $i = 1, 2, \ldots$ und $x \in X$. Da X dicht in $\tilde{X}$ liegt, erhalten wir sogar

$$\sum_{j=1}^{k_i} \tilde{f}_{i,j}(x) = 1, \tag{2.6}$$

für jedes $x \in \tilde{X}$, denn die Fortsetzung in [3, Satz 1.1.1] ist eindeutig. Setzen wir jetzt

$$\tilde{U}_{m,j} = \tilde{f}_{m,j}^{-1}((0,1]),$$

für jedes $m = 1, 2, \ldots$ und $j = 1, \ldots, k_m$, so bilden die Familien $\tilde{\mathcal{U}}_m = (\tilde{U}_{m,j})_{j=1}^{k_m}$ wegen (2.6) offene Überdeckungen von $\tilde{X}$. Wir stellen außerdem fest, dass

$$U_{m,j} = f_{m,j}^{-1}((0,1]) = X \cap \tilde{U}_{m,j}. \tag{2.7}$$

Für beliebiges $m \geq 1$ und $n+2$ Indizes $j_1, \ldots j_{n+2}$ würde aus $\tilde{U}_{m,j_1} \cap \cdots \cap \tilde{U}_{m,j_{n+2}} \neq \emptyset$ wegen der Dichtheit von X in $\tilde{X}$ sofort

$$U_{m,j_1} \cap \cdots \cap U_{m,j_{n+2}} = X \cap (\tilde{U}_{m,j_1} \cap \cdots \cap \tilde{U}_{m,j_{n+2}}) \neq \emptyset$$

folgen, was ein Widerspruch zu $\mathbf{ord}\,\mathcal{U}_m \leq n$ wäre. Also gilt $\mathbf{ord}\,\tilde{\mathcal{U}}_m \leq n$. Weil X dicht in $\tilde{X}$ liegt, folgt wegen (2.7) aus $mesh_{\tilde{d}}(\mathcal{U}_m) \overset{m\to\infty}{\longrightarrow} 0$ auch $mesh\,\tilde{\mathcal{U}}_m \overset{m\to\infty}{\longrightarrow} 0$ im Raum $\tilde{X}$. Aus Satz 2.1.18 erhalten wir schließlich $\mathbf{dim}\,\tilde{X} \leq n = \mathbf{dim}\,X$. □

Für den Beweis des Kompaktifizierungssatzes benötigen wir noch einen allgemeinen topologischen Satz. Der Beweis kann etwa in [2, 4.3.6] nachgelesen werden.

Satz 2.2.7. *Für einen topologischer Raum X gibt es genau dann eine Metrik d auf X, die X zu einem total beschränkten Raum macht, wenn X regulär ist und (ABII) erfüllt.* □

Satz 2.2.8 (Kompaktifizierungssatz)**.** *Sei X ein separabler metrischer Raum. Dann existiert eine Kompaktifizierung $\tilde{X}$ von X mit $\boldsymbol{dim}\,\tilde{X} \leq \boldsymbol{dim}\,X$.*

Beweis. Als separabler metrischer Raum, erfüllt X wegen Satz 0.2.16 das zweite Abzählbarkeitsaxiom (ABII) und ist klarerweise regulär. Daraus folgt aus Satz 2.2.7 die Existenz einer Metrik d auf X, die X zu einem total beschränkten metrischen Raum macht. Wir können also Satz 2.2.6 anwenden und erhalten so die gewünschte Kompaktifikation $\tilde{X}$ von X. □

Lemma 2.2.9. *Sei (X,d) ein metrischer Raum und M ein Unterraum von X. Dann gibt es zu paarweise disjunkten, abgeschlossenen Teilmengen $F_1, \ldots, F_k$ von M paarweise disjunkte, offene Teilmengen $W_1, \ldots, W_k$ von X, sodass jeweils $F_i \subset W_i$ für jedes $i = 1, \ldots, k$ gilt.*

Beweis. Wir definieren für jedes $i = 1, \ldots, k$ die ob der Stetigkeit von $x \to d(x, F_j)$ offenen Mengen

$$W_i = \bigcap_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{k} \{x \in X : d(x, F_i) < d(x, F_j)\}.$$

Für beliebige i, j mit $i \neq j$ und ein $x \in F_i$ folgt $d(x, F_i) = 0$ und, da F_j abgeschlossen in M ist und x nicht enthält, $0 < d|_{M \times M}(x, F_j) = d(x, F_j)$, womit $x \in W_i$. Also gilt $F_i \subset W_i$. Schließlich kann nicht gleichzeitig $d(x, F_i) < d(x, F_j)$ und $d(x, F_i) > d(x, F_j)$ gelten, wodurch die Mengen W_i paarweise disjunkt sind. □

Lemma 2.2.10. *Ist X ein separabler metrischer Raum, dann gilt $\mathbf{dim}\,X \leq \mathbf{ind}\,X$.*

Beweis. Es reicht, den Fall $\mathbf{ind}\,X < \infty$ zu betrachten. Für $\mathbf{ind}\,X = -1$ gilt $X = \emptyset$ und infolge $\mathbf{dim}\,X = -1$. Nehmen wir nun $\mathbf{ind}\,X = 0$ an, und sei $\mathcal{U} = (U_i)_{i=1}^k$ eine endliche offene Überdeckung von X. Da X wegen Satz 1.2.5 eine abzählbare Basis aus clopen Mengen hat, existiert eine abzählbare, aus clopen Mengen bestehende Verfeinerung $(V_i)_{i\in\mathbb{N}}$ von $\mathcal{U}$. Setzen wir für $i = 1, 2, \ldots$

$$W_i = V_i \setminus (\bigcup_{j=1}^{i-1} W_j),$$

so bilden die paarweise disjunkten clopen Mengen W_i eine Verfeinerung von $\mathcal{U}$. Wegen Bemerkung 2.1.7 und Satz 2.1.13 folgt $\mathbf{dim}\,X \leq 0$.
Für den allgemeinen Fall $\mathbf{ind}\,X = n > 0$ betrachten wir wieder eine endliche offene Überdeckung $\mathcal{U} = (U_i)_{i=1}^k$ von X. Nach Satz 1.3.5 lässt sich X darstellen als Vereinigung

$$X = Z_1 \cup \cdots \cup Z_{n+1}$$

von Unterräumen Z_j, wobei $\mathbf{ind}\,Z_j \leq 0$ für jedes $j = 1, \ldots, n+1$. Die Räume Z_j erfüllen nach dem eben gezeigten Spezialfall auch $\mathbf{dim}\,Z_j \leq 0$. Somit gibt es eine Schrumpfung $(F_{j,i})_{i=1}^k$ von $\mathcal{U}|_{Z_j}$, bestehend aus paarweise disjunkten offenen Teilmengen von Z_j. Da diese eine endliche Überdeckung von Z_j bilden, sind sie auch abgeschlossen in Z_j. Wenden wir Lemma 2.2.9 an, so erhalten wir für jedes $j = 1, \ldots n+1$ jeweils paarweise disjunkte, offene Mengen $W_{j,1}, \ldots, W_{j,k} \subset X$ mit $F_{j,i} \subset W_{j,i}$ für jedes $i = 1, \ldots k$. Der Schnitt von $n+2$ Mengen aus $\mathcal{W} = (W_{j,i})_{(j,i)\in\{1,\ldots,n+2\}\times\{1,\ldots,k\}}$ ist immer leer, denn zwei der $n+2$ Mengen müssten denselben Index j und damit bereits leeren Schnitt haben. Also gilt $\mathbf{ord}\,\mathcal{W} \leq n$. Die Mengen

$$V_{j,i} = W_{j,i} \cap U_i$$

bilden nun eine endliche, offene Verfeinerung von $\mathcal{U}$, die als Schrumpfung von $\mathcal{W}$ auch $\mathbf{ord}\,V \leq n$ erfüllt. Somit gilt $\mathbf{dim}\,X \leq n$. □

Lemma 2.2.11. *Ist X ein kompakter metrischer Raum, so gilt $\mathbf{ind}\,X \leq \mathbf{dim}\,X$.*

Beweis. Wir können $\mathbf{dim}\,X < \infty$ voraussetzen und werden die Aussage mit Induktion nach $\mathbf{dim}\,X$ beweisen. Der Fall $n = -1$ ist klar, denn dann ist $X = \emptyset$, womit $\mathbf{ind}\,X = -1$.
Angenommen, die Ungleichung stimmt für alle kompakten metrischen Räume Y mit $\mathbf{dim}\,Y \leq n-1$ für ein $n \geq 0$. Sei X metrisch und kompakt mit $\mathbf{dim}\,X = n$. Wir wollen nun für ein beliebiges $x \in X$ und eine abgeschlossene Menge B, die x nicht enthält, eine Partition L mit $\mathbf{ind}\,L \leq n-1$ zwischen x und B finden. Dann folgt nämlich mit Satz 1.1.5 die Ungleichung $\mathbf{ind}\,X \leq n$. Aufgrund der Induktionsvoraussetzung reicht es, offene Mengen $K, M \subset X$ zu finden, sodass

$$x \in K, \quad B \subset M, \quad K \cap M = \emptyset \quad \text{und} \quad \mathbf{dim}\,L \leq n-1, \tag{2.8}$$

wobei $L = X \setminus (K \cup M)$.
Wir konstruieren dazu zwei Folgen von abgeschlossenen Mengen $K_0, K_1, K_2, \ldots$ und $M_0, M_1, M_2, \ldots$, die für $i = 1, 2, \ldots$ die Eigenschaften

$$x \in K_{i-1} \subset K_i^\circ, \quad B \subset M_{i-1} \subset M_i^\circ \quad \text{und} \quad K_i \cap M_i = \emptyset \tag{2.9}$$

haben. Außerdem soll auf der Menge $L_i = X \setminus (K_i \cup M_i)$ jeweils eine endliche offene Überdeckung $\mathcal{W}_i$ existieren, sodass

$$mesh\,\mathcal{W}_i < \frac{1}{i} \quad \text{und} \quad \mathbf{ord}\,\mathcal{W}_i \leq n-1. \tag{2.10}$$

Wir definieren $K_0 = \{x\}$ und $M_0 = B$ und setzen voraus, dass Mengen $K_0, \ldots, K_{j-1}$ und $M_0, \ldots, M_{j-1}$ existieren, die (2.9) und (2.10) für $0 < i < j$ erfüllen. Als abgeschlossene Teilmenge des kompakten metrischen

Raumes X sind K_{j-1} und M_{j-1} ebenfalls kompakt, womit $d(K_{j-1}, M_{j-1}) > 0$ folgt; siehe [6, 15.6.1]. Wegen Satz 2.1.18 gibt es eine endliche offene Überdeckung $\mathcal{U}_j = (U_s)_{s \in S_j}$ von X, sodass $mesh\mathcal{U}_j < \min\{\frac{1}{j}, d(K_{j-1}, M_{j-1})\}$ und $\mathbf{ord}\,\mathcal{U}_j \leq n$. Wir definieren nun die beiden Mengen

$$G_j = \bigcup\{U \in \mathcal{U}_j : \overline{U} \cap M_{j-1} = \emptyset\} \quad \text{und} \quad H_j = \bigcup\{U \in \mathcal{U}_j : \overline{U} \cap M_{j-1} \neq \emptyset\}. \tag{2.11}$$

Angenommen es gäbe eine Menge $U \in \mathcal{U}_j$, sodass sowohl $\overline{U} \cap M_{j-1} \neq \emptyset$ als auch $\overline{U} \cap K_{j-1} \neq \emptyset$, dann folgte $d(U) = d(\overline{U}) \geq d(K_{j-1}, M_{j-1})$ im Widerspruch zu $mesh\mathcal{U}_j < d(K_{j-1}, M_{j-1})$. Beachten wir, dass $\mathcal{U}_j$ eine endliche Überdeckung und damit die Vereinigungen in (2.11) endlich sind, so erhalten wir

$$\overline{H_j} \cap K_{j-1} = \emptyset, \quad \overline{G_j} \cap M_{j-1} = \emptyset \quad \text{und} \quad G_j \cup H_j = X.$$

Für die Mengen $K_j = X \setminus H_j$ und $M_j = X \setminus G_j$ folgt daraus

$$K_{j-1} \subset X \setminus \overline{H_j} = K_j^\circ, \quad M_{j-1} \subset X \setminus \overline{G_j} = M_j^\circ \quad \text{und} \quad K_j \cap M_j = \emptyset.$$

Die Mengen K_j und M_j erfüllen also (2.9) für $i = j$. Die Familie

$$\mathcal{W}_j = (U_s \cap L_j)_{s \in S'_j} \quad \text{mit} \quad S'_j = \{s \in S_j : \overline{U_s} \cap M_{j-1} \neq \emptyset\}$$

ist eine endliche offene Überdeckung von $L_j = X \setminus (K_j \cup M_j) = G_j \cap H_j$ und erfüllt klarerweise $mesh\,\mathcal{W}_j < \frac{1}{j}$. Wären $s_1, \dots s_{n+1} \in S'_j$ verschiedene Indizes, sodass es ein Element x im Durchschnitt der Mengen $(U_{s_1} \cap L_j), \dots, (U_{s_{n+1}} \cap L_j)$ gibt, dann existierte wegen $x \in L_j \subset G_j$ eine Menge $U \in \mathcal{U}_j$ mit $x \in U$ und $\overline{U} \cap M_{j-1} = \emptyset$. Insbesondere gilt $U \neq U_{s_1}, \dots, U_{s_{n+1}}$ und $x \in U \cap U_{s_1} \cap \dots \cap U_{s_{n+1}}$, was ein Widerspruch zu $\mathbf{ord}\,\mathcal{U}_j \leq n$ ist. Also folgt $\mathbf{ord}\,\mathcal{W}_j \leq n-1$, womit $\mathcal{W}_j$ die Eigenschaft (2.10) erfüllt.
Die Mengen

$$K = \bigcup_{i=0}^{\infty} K_i \quad \text{und} \quad M = \bigcup_{i=0}^{\infty} M_i$$

sind wegen (2.9) offen, disjunkt und enthalten x bzw. B. Für die abgeschlossene und damit auch kompakte Menge

$$L = X \setminus (K \cup M) = \bigcap_{i=1}^{\infty} L_i$$

folgt mit Satz 2.1.18 aus (2.10) die Ungleichung $\mathbf{dim}\,L \leq n$.

□

Satz 2.2.12. *Für jeden separablen metrischen Raum X gilt*

$$\boldsymbol{ind}\,X = \boldsymbol{Ind}\,X = \boldsymbol{dim}\,X.$$

Beweis. Wegen Satz 1.4.5 reicht es $\mathbf{ind}\,X = \mathbf{dim}\,X$ zu beweisen. Ist $\tilde{X}$ eine Kompaktifizierung von X mit $\mathbf{dim}\,\tilde{X} \leq \mathbf{dim}\,X$, wie in Satz 2.2.8, so folgt mit Lemma 2.2.10, Satz 1.1.3 und Lemma 2.2.11 die Ungleichungskette

$$\mathbf{dim}\,X \leq \mathbf{ind}\,X \leq \mathbf{ind}\,\tilde{X} \leq \mathbf{dim}\,\tilde{X} \leq \mathbf{dim}\,X.$$

Es muss also überall Gleichheit gelten. □

2.3 Der Fundamentalsatz

Im letzten Abschnitt dieser Arbeit wollen wir noch die Gleichung $\mathbf{ind}\,\mathbb{R}^n = n$ für jedes $n \in \mathbb{N}$, die Aussage des sogenannten Fundamentalsatzes, beweisen. Wir beginnen mit einem allgemeinen topologischen Satz.

Satz 2.3.1. *Sei X ein normaler topologischer Raum, dann hat jede endliche offene Überdeckung $(U_i)_{i=1}^k$ eine abgeschlossene Schrumpfung $(F_i)_{i=1}^k$.*

Beweis. Wir beweisen die Aussage mit Induktion nach k und starteten mit $k = 2$. Ist (U_1, U_2) eine Überdeckung von X, so lassen sich die disjunkten abgeschlossenen Mengen $X \setminus U_1$ und $X \setminus U_2$ durch offene Mengen trennen, d.h. es gibt disjunkte offene Mengen V_1, V_2, sodass $X \setminus U_1 \subset V_1$ und $X \setminus U_2 \subset V_2$. Die Mengen $F_1 = X \setminus V_1$ und $F_2 = X \setminus V_2$ bilden nun eine geeignete Schrumpfung.
Wir nehmen an, der Satz stimmt für alle natürlichen zahlen $k < m$ für ein $m \geq 3$. Ist dann $(U_i)_{i=1}^m$ eine offene Überdeckung von X, so definieren wir

$$U_i' = U_i \text{ für } i = 1, \ldots, m-2 \quad \text{und} \quad U_{m-1}' = U_{m-1} \cup U_m.$$

Nach Induktionsvoraussetzung gibt eine abgeschlossene Schrumpfung $(F_i')_{i=1}^{m-1}$ von $(U_i')_{i=1}^{m-1}$. Wie in Satz 0.2.7 bewiesen, ist auch der abgeschlossene Unterraum F_{m-1}' von X normal. Wir können die Induktionsvoraussetzung auf die Überdeckung $(F_{m-1}' \cap U_{m-1}, F_{m-1}' \cap U_m)$ von F_{m-1}' anwenden und bekommen eine abgeschlossene Schrumpfung (F_{m-1}, F_m). Es gilt also $F_{m-1} \subset U_{m-1}$ und $F_m \subset U_m$. Da F_{m-1}' abgeschlossen ist, sind F_{m-1} und F_m sogar in X abgeschlossen und bilden gemeinsam mit $F_i = F_i'$ für $i = 1, \ldots, m-2$ die gesuchte Schrumpfung $(F_i)_{i=1}^m$. □

Satz 2.3.2. *Ist X ein separabler metrischer Raum, so erfüllt X die Ungleichung $\mathbf{ind}\,X \leq n$ für ein $n \geq 0$ genau dann, wenn für je $n+1$ Paare $(A_1, B_1), \ldots, (A_{n+1}, B_{n+1})$ von disjunkten abgeschlossenen Teilmengen von X abgeschlossene Mengen $L_1, \ldots, L_{n+1}$ existieren, sodass für $i = 1, \ldots, n+1$ jeweils L_i eine Partition zwischen A_i und B_i ist und $\bigcap_{i=1}^{n+1} L_i = \emptyset$.*

Beweis. Gilt $0 \leq \mathbf{ind}\,X \leq n$, so liefert mehrmaliges Anwenden von Satz 1.3.8 mit $M = L_1 \cap \cdots \cap L_{i-1}$ und $A = A_i$ und $B = B_i$ für $i = 1, \ldots, n+1$ nacheinander Partitionen $L_1, \ldots, L_{n+1}$, sodass $\mathbf{ind}\,(L_1 \cap \cdots \cap L_i) \leq n - i$, womit insbesondere $\bigcap_{i=1}^{n+1} L_i = \emptyset$.
Für die Rückrichtung werden wir $\mathbf{dim}\,X \leq n$ zeigen, woraus dann mit Satz 2.2.12 die Ungleichung $\mathbf{ind}\,X \leq n$ folgt. Dazu betrachten wir eine beliebige offene Überdeckung $(U_i)_{i=1}^{n+2}$ von X. Nach Satz 2.3.1 hat $(U_i)_{i=1}^{n+2}$ eine abgeschlossene Schrumpfung $(B_i)_{i=1}^{n+2}$. Setzen wir $A_i = X \setminus U_i$ für $i = 1, \ldots, n+1$, so gibt es zur Folge $(A_1, B_1), \ldots, (A_{n+1}, B_{n+1})$ von $n+1$ disjunkten Paaren von abgeschlossenen Mengen jeweils Partitionen $L_1, \ldots, L_{n+1}$ mit $\bigcap_{i=1}^{n+1} L_i = \emptyset$. Es existieren somit offene und disjunkte Mengen V_i, W_i, sodass

$$A_i \subset V_i, \quad B_i \subset W_i \quad \text{und} \quad L_i = X \setminus (V_i \cup W_i) \tag{2.12}$$

für $i = 1, \ldots, n+1$. Wegen

$$\bigcup_{i=1}^{n+1} V_i \cup \bigcup_{i=1}^{n+1} W_i = \bigcup_{i=1}^{n+1} (V_i \cup W_i) = \bigcup_{i=1} X \setminus L_i = X \setminus \bigcap_{i=1}^{n+1} L_i = X$$

und $B_{n+2} \subset U_{n+2}$, folgt mit (2.12) weiter

$$\bigcup_{i=1}^{n+1} W_i \cup (U_{n+2} \cap \bigcup_{i=1}^{n+1} V_i) = (\bigcup_{i=1}^{n+1} W_i \cup U_{n+2}) \cap (\bigcup_{i=1}^{n+1} W_i \cup \bigcup_{i=1}^{n+1} V_i) \supset \bigcup_{i=1}^{n+2} B_i = X.$$

Definieren wir $W_{n+2} = U_{n+2} \cap \bigcup_{i=1}^{n+1} V_i$, so ist die Familie $(W_i)_{i=1}^{n+2}$ eine offene Überdeckung von X. Wegen $W_i \cap A_i = \emptyset$ folgt $W_i \subset U_i$ für $i = 1, \ldots, n+1$. Somit ist $(W_i)_{i=1}^{n+2}$ eine offene Schrumpfung von $(U_i)_{i=1}^{n+2}$. Abschließend stellen wir mit (2.12) die Tatsache

$$\bigcap_{i=1}^{n+2} W_i = \bigcap_{i=1}^{n+1} W_i \cap (U_{n+2} \cap \bigcup_{i=1}^{n+1} V_i) \subset \bigcap_{i=1}^{n+1} W_i \cap \bigcup_{i=1}^{n+1} V_i = \emptyset$$

fest und folgern daraus mit Satz 2.1.14 die Ungleichung $\mathbf{dim}\,X \leq n$. □

Wir werden nun noch den Fixpunktsatz von Brouwer formulieren, den Beweis hier aber nicht führen und stattdessen etwa auf [6, 16.4.4] verweisen. Dieser Satz wird ganz wesentlich in den Beweis von $\mathbf{ind}\,\mathbb{R}^n = n$ einfließen.

Satz 2.3.3 (Fixpunktsatz von Brouwer)**.** *Sei $\emptyset \neq E \subset \mathbb{R}^n$ eine kompakte und konvexe Menge, wobei $n \geq 1$. Dann hat jede stetige Funktion $f : E \to E$ einen Fixpunkt in E, d.h. es gibt einen Punkt $x \in E$ mit $f(x) = x$.* □

Satz 2.3.4. *Sind A_i und B_i für $i = 1, \dots, n$ gegeben durch*

$$A_i = \{x \in [0,1]^n : x_i = 0\} \quad \text{und} \quad B_i = \{x \in [0,1]^n : x_i = 1\},$$

die Mengen A_i und B_i sind also jeweils gegenüberliegende Flächen des n-dimensionalen Würfels $[0,1]^n$, so gilt für beliebige abgeschlossene Teilmengen $L_1, \dots, L_n$ von $[0,1]^n$, sodass jeweils L_i eine Partition zwischen A_i und B_i ist, $\bigcap_{i=1}^n L_i \neq \emptyset$.

Beweis. Seien U_i, W_i für $i = 1, \dots, n$ offene Mengen, sodass

$$A_i \subset U_i, \quad B_i \subset W_i, \quad U_i \cap W_i = \emptyset \quad \text{und} \quad L_i = [0,1]^n \setminus (U_i \cup W_i).$$

Dann gilt insbesondere $([0,1]^n \setminus W_i) \cap ([0,1]^n \setminus U_i) = L_i$. Wegen $L_i \cap A_i = \emptyset = L_i \cap B_i$ gelten für alle $x \in [0,1]^n$ die Ungleichungen $d(x, L_i) + d(x, A_i) > 0$ und $d(x, L_i) + d(x, B_i) > 0$. Also werden durch

$$f_i(x) = \begin{cases} \frac{d(x,L_i)}{2(d(x,L_i)+d(x,A_i))} + \frac{1}{2} & \text{für } x \in [0,1]^n \setminus W_i, \\ \\ \frac{-d(x,L_i)}{2(d(x,L_i)+d(x,B_i))} + \frac{1}{2} & \text{für } x \in [0,1]^n \setminus U_i \end{cases}$$

für $i = 1, \dots, n$ stetige Funktionen $f_i : [0,1]^n \to [0,1]$ definiert, welche offenbar

$$f_i^{-1}(\{\frac{1}{2}\}) = L_i, \quad f_i(A_i) = \{1\} \quad \text{und} \quad f_i(B_i) = \{0\} \tag{2.13}$$

erfüllen. Setzen wir nun $\bigcap_{i=1}^n L_i = \emptyset$ voraus und bezeichnet $f : [0,1]^n \to [0,1]^n$ die Funktion $x \mapsto (f_1(x), \dots, f_n(x))$, so folgt für $a = (\frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2})$ wegen (2.13) die Gleichung $f^{-1}(\{a\}) = \bigcap_{i=1}^n L_i = \emptyset$, d.h. der Wert a wird von f nicht angenommen. Für den Rand $B = \bigcup_{i=1}^n (A_i \cup B_i)$ von $[0,1]^n$ in $\mathbb{R}^n$ ist die Funktion $h : [0,1]^n \setminus \{a\} \to B$, definiert durch

$$h(x) = x + (x - a)\frac{1 - \max\{|x_i - \frac{1}{2}| : i = 1, \dots, n\} \cdot 2}{\max\{|x_i - \frac{1}{2}| : i = 1, \dots, n\} \cdot 2},$$

stetig, sodass $h(x) = x$ für alle $x \in B$, denn für $x \in B$ ist $\max\{|x_i - \frac{1}{2}| : i = 1, \dots, n\} = \frac{1}{2}$. Ist $x \in [0,1]^n \setminus \{a\}$ und $j \in \{1, \dots, n\}$, sodass $|x_j - \frac{1}{2}|$ maximal ist, so gilt

$$h_j(x) = x_j + (x_j - \frac{1}{2})\frac{1 - |x_j - \frac{1}{2}| \cdot 2}{|x_j - \frac{1}{2}| \cdot 2} = \frac{1}{2} + \frac{(x_j - \frac{1}{2})}{|x_j - \frac{1}{2}|} \in \{0, 1\}$$

für den j-ten Eintrag von $h(x)$, womit $h(x)$ in B liegt. Die Zusammensetzung $g = h \circ f : [0,1]^n \to B$ von h mit f ist stetig und hat wegen (2.13) die Eigenschaften

$$g(A_i) = h(f(A_i)) \subset h(B_i) = B_i \quad \text{und} \quad g(B_i) = h(f(B_i)) \subset h(A_i) = A_i$$

für $i = 1, \dots, n$. Damit folgt aber $g(x) \neq x$ für alle $x \in [0,1]^n$ im Widerspruch zum Fixpunktsatz von Brouwer, Satz 2.3.3. Also muss $\bigcap_{i=1}^n L_i \neq \emptyset$ gelten. □

Satz 2.3.5. *Für jede ganze Zahl $n \geq 1$ gilt*

$$\boldsymbol{ind}\,[0,1]^n = \boldsymbol{Ind}\,[0,1]^n = \boldsymbol{dim}\,[0,1]^n = n.$$

Beweis. Wir haben in Beispiel 1.3.6 bereits $\mathbf{ind}\,\mathbb{R}^n \leq n$ für beliebiges $n \geq 1$ gezeigt. Als Unterraum von $\mathbb{R}^n$ gilt wegen Satz 1.1.3 natürlich auch für $[0,1]^n$ die Ungleichung $\mathbf{ind}\,[0,1]^n \leq n$. Aus Satz 2.3.2 und Satz 2.3.4 folgt $\mathbf{ind}\,[0,1]^n \nleq n-1$. Damit gilt $\mathbf{ind}\,[0,1]^n = n$, und mit Satz 2.2.12 erhalten wir die Behauptung. □

Satz 2.3.6 (Fundamentalsatz)**.** *Für jede ganze Zahl $n \geq 1$ gilt*

$$\boldsymbol{ind}\mathbb{R}^n = \boldsymbol{Ind}\mathbb{R}^n = \boldsymbol{dim}\mathbb{R}^n = n.$$

Beweis. Beispiel 1.3.6 zeigt $\mathbf{ind}\,\mathbb{R}^n \leq n$. Da der Teilraum $[0,1]^n$ von $\mathbb{R}^n$ nach Satz 2.3.5 bereits Dimension n hat, muss sogar $\mathbf{ind}\,\mathbb{R}^n = n$ gelten. Die drei Zahlen $\mathbf{ind}\,\mathbb{R}^n$,$\mathbf{Ind}\,\mathbb{R}^n$ und $\mathbf{dim}\,\mathbb{R}^n$ stimmen wegen Satz 2.2.12 überein. □

Satz 2.3.7. *Ist $n \geq 1$ und $k \in \{0,1,\dots,n\}$, dann gelten für N_k^n, den Teilraum von $\mathbb{R}^n$, sodass jeder Punkt daraus höchstens k rationale Koordinaten hat und für L_k^n, den Teilraum von $\mathbb{R}^n$, sodass jeder Punkt daraus mindestens k rationale Koordinaten hat, die Gleichungen*

$$\boldsymbol{ind}\,N_k^n = k \quad \textit{und} \quad \boldsymbol{ind}\,L_k^n = n-k.$$

Beweis. In Beispiel 1.3.6 haben wir $\mathbf{ind}\,N_k^n \leq k$ und $\mathbf{ind}\,L_k^n \leq n-k$ gezeigt. Wegen $\mathbb{R}^n = N_k^n \cup L_{k+1}^n = N_{k-1}^n \cup L_k^n$, dem Fundamentalsatz und Satz 1.3.7 folgt dann sogar Gleichheit. □

Abschließend werden wir noch eine Charakterisierung der n-dimensionalen Teilmengen von $\mathbb{R}^n$ geben. Dazu starten wir mit einem Lemma.

Lemma 2.3.8. *Sei $C \subset \mathbb{R}^n$ eine dichte Teilmenge mit leerem Inneren. Dann hat jede zu C homöomorphe Menge $D \subset \mathbb{R}^n$ leeres Inneres.*

Beweis. Im Falle $D^\circ \neq \emptyset$ gibt es eine beschränkte offene Menge $\emptyset \neq V \subset D$, sodass $\overline{V} \subset D$. Die Menge $\overline{V}$ ist insbesondere kompakt. Sei nun $f : D \to C$ ein Homöomorphismus. Dann ist $f(V)$ offene Teilmenge von C und $f(\overline{V})$ als kompakte Menge sogar in $\mathbb{R}^n$ abgeschlossen, wobei $f(\overline{V}) = \overline{f(V)}$. Ist U eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}^n$, sodass $f(V) = C \cap U$, dann erhalten wir wegen $\overline{C} = \mathbb{R}^n$

$$\emptyset \neq U \subset \overline{U} \subset \overline{U \cap C} \subset \overline{f(V)} = f(\overline{V}) \subset C.$$

Das ist ein Widerspruch zur Voraussetzung, dass C leeres Inneres hat. □

Lemma 2.3.9. *Sei A eine echte Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ und $a \in \mathbb{R}^n \setminus A$. Dann gibt es für jede reelle Zahl $r > 0$ eine Funktion $f : A \to \mathbb{R}^n$, sodass $f : A \to f(A)$ ein Homöomorphismus ist, welcher*

$$d(x, f(x)) \leq r, \quad d(x,y) \leq d(f(x), f(y)), \quad U_r(a) \cap f(A) = \emptyset \tag{2.14}$$

für alle $x, y \in A$ erfüllt, wobei wir d als von einem Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$ induziert, wie es etwa die euklidsche Metrik ist, voraussetzen.

Beweis. Sei $\langle .,. \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ein Skalarprodukt und $\|.\| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ die davon induzierte Norm, sodass $d(x,y) = \|x-y\| = \sqrt{\langle x-y, x-y \rangle}$ für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$ gilt. Dann gilt $d(x,y) = d(x-y, 0)$ und $d(\lambda x, 0) = |\lambda| d(x,0)$ für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$ und $\lambda \in \mathbb{R}$. Wir definieren f durch

$$f(x) = a + (x-a)\frac{d(x,a)+r}{d(x,a)}.$$

Diese Abbildung ist offensichtlich stetig und erfüllt $d(a, f(x)) = d(a,x) + r$ für alle $x \in A$. Daraus folgt $U_r(a) \cap f(A) = \emptyset$ und wegen

$$f(x) = x + (x-a)\frac{r}{d(x,a)}$$

auch $d(x, f(x)) \leq r$. Für $a, b, \alpha, \beta \geq 0$ und $t \in [-1, 1]$ gilt die Abschätzung

$$\begin{aligned}((1+\alpha)a)^2 + ((1+\beta)b)^2 - &2(1+\alpha)a(1+\beta)bt - a^2 - b^2 + 2abt \\ &= (\alpha^2 + 2\alpha)a^2 + (\beta^2 + 2\beta)b^2 - 2\alpha a\beta bt \\ &\geq (\alpha^2 + 2\alpha)a^2 + (\beta^2 + 2\beta)b^2 - 2\alpha a\beta b \\ &\geq (\alpha^2 + 2\alpha)a^2 + (\beta^2 + 2\beta)b^2 - 2(\sqrt{\alpha^2 + 2\alpha})a(\sqrt{\beta^2 + 2\beta})b \geq 0.\end{aligned}$$

Verwenden wir nun den Kosinussatz (siehe etwa [4]), so folgt aus obiger Abschätzung mit $t = \cos(\angle(x - a, y - a)) = \cos(\angle(f(x) - a, f(y) - a))$, $\alpha = \frac{r}{d(x-a,0)}$ und $\beta = \frac{r}{d(y-a,0)}$

$$\begin{aligned}d(x, y)^2 &= \|x - y\|^2 = \|x - a\|^2 + \|y - a\|^2 - 2\|x - a\|\|y - a\| \cos(\angle(x - a, y - a)) \\ &\leq \|f(x) - a\|^2 + \|f(y) - a\|^2 - 2\|f(x) - a\|\|f(y) - a\| \cos(\angle((f(x) - a, f(y) - a)) \\ &= \|f(x) - f(y)\|^2 = d(f(x), f(y))^2\end{aligned}$$

für alle $x, y \in A$. Eine leichte Rechnung zeigt, dass durch

$$g(y) = a + (y - a)\frac{d(y, a) - r}{d(y, a)}$$

die Umkehrabbildung von f gegeben ist. Diese ist ebenfalls stetig und f damit ein Homöomorphismus, der (2.14) erfüllt. $\square$

Satz 2.3.10. *Sei C eine Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ mit leerem Inneren. Dann gibt es eine zu C homöomorphe Menge $D \subset \mathbb{R}^n$ mit $\overline{D} \subset N^n_{n-1}$.*

Beweis. Ist C nicht dicht in $\mathbb{R}^n$, so können wir C zu einer dichten Menge C' mit leerem Inneren erweitern, indem wir beispielsweise $C' = C \cup ((X \setminus \overline{C}) \cap \mathbb{Q}^n)$ setzen. Weil $\mathbb{Q}^n$ dicht in $\mathbb{R}^n$ liegt, gilt $\overline{C'} = \overline{C} \cup \overline{(X \setminus \overline{C})} = X$. Hätte C' nichtleeres Inneres, so gäbe es eine nichtleere, offene Menge $U \subset C'$. Dabei muss $U \cap (X \setminus \overline{C}) = \emptyset$ gelten, da $\mathbb{Q}^n$ nichtleeres Inneres hat. Damit folgt der Widerspruch.
Da es für den Beweis des Satzes reicht, die Aussage für eine beliebige Obermenge von C zu zeigen, können wir also C als dicht in $\mathbb{R}^n$ voraussetzen.
Sei $\{a_i : i = 1, 2, \dots\} = \mathbb{Q}^n = \mathbb{R}^n \setminus N^n_{n-1}$. Wir werden eine Folge von Mengen $C_0, C_1, \dots \in \mathbb{R}^n$ und Abbildungen $f_0, f_1, \dots$ konstruieren, sodass jeweils $f_i : C_i \to C_{i+1}$ ein Homöomorphismus ist und

$$d(x, f_i(x)) \leq \frac{1}{3^{i+1}} \quad \text{für } x \in C_i, \tag{2.15}$$

$$d(x, y) \leq d(f_i(x), f_i(y)) \quad \text{für } x, y \in C_i, \tag{2.16}$$

$$U_{\frac{1}{4 \cdot 3^i}}(a_i) \cap C_{i+1} = \emptyset \quad \text{für } i \geq 1 \tag{2.17}$$

gilt. Setzen wir $C_0 = C_1 = C$ und $f_0 = id_C$, so ist (2.15),(2.16) für $i = 0$ erfüllt. Seien $C_0, \dots, C_k$ Mengen und $f_0, \dots, f_{k-1}$ Funktionen, sodass diese (2.15-2.17) für $0 \leq i < k$ erfüllen. Die Menge C_k ist homöomorph zu C, hat also nach Lemma 2.3.8 leeres Inneres. Damit gibt es einen Punkt $a \in U_{\frac{1}{4 \cdot 3^{k+1}}}(a_k) \setminus C_k$. Wenden wir nun Lemma 2.3.9 auf den Punkt a, die Menge $A = C_k$ und $r = \frac{1}{3^{k+1}}$ an, so erhalten wir einen Homöomorphismus $f_k : C_k \to f(C_k)$, sodass mit der Menge $C_{k+1} = f_k(C_k)$ die Eigenschaften (2.15-2.16) für $i = k$ erfüllt sind. Für beliebiges $y \in C_{k+1}$ folgt

$$d(a_k, y) \geq d(a, y) - d(a, a_k) \geq \frac{1}{3^{k+1}} - \frac{1}{4 \cdot 3^k} = \frac{1}{4 \cdot 3^{k+1}}$$

und somit auch (2.17) für $i = k$.
Betrachten wir für jedes $i = 1, 2, \dots$ die Abbildung $h_i = f_{i-1} \circ \dots \circ f_1 \circ f_0$, so gilt für jedes $k \geq 1$ wegen

(2.15) für beliebiges $x \in C$

$$\begin{aligned} d(h_i(x), h_{i+k}(x)) \leq & d(h_i(x), h_{i+1}(x)) + d(h_{i+1}(x), h_{i+2}(x)) + \cdots + d(h_{i+k-1}(x), h_{i+k}(x)) \\ \leq & \frac{1}{3^{i+1}} + \frac{1}{3^{i+2}} + \cdots + \frac{1}{3^{i+k}} < \frac{1}{3^{i+1}} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{1}{2 \cdot 3^i}. \end{aligned}$$

Damit ist die Folge $h_1(x), h_2(x), \ldots$ eine Cauchyfolge und konvergiert in $\mathbb{R}^n$. Wir können eine Abbildung $h : C \to \mathbb{R}^n$ durch $h(x) = \lim_{i\to\infty} h_i(x)$ definieren und sehen, dass wegen

$$d(h_i(x), h(x)) = \lim_{k\to\infty} d(h_i(x), h_{i+k}(x)) \leq \frac{1}{2 \cdot 3^i} \tag{2.18}$$

die Funktionenfolge $h_1, h_2, \ldots$ gleichmäßig gegen h konvergiert. Daraus folgt die Stetigkeit von h. Aus (2.16) erhalten wir

$$d(x, y) \leq \lim_{i\to\infty} d(h_i(x), h_i(x)) = d(h(x), h(x)).$$

Damit ist $h : C \to h(C)$ eine Bijektion und die Inverse h^{-1} stetig, h also Homöomorphismus auf sein Bild $D := h(C)$. Sei nun $a_i \in \mathbb{R}^n \setminus N^n_{n-1}$ und $z \in D$. Für $x = h^{-1}(z)$ gilt wegen (2.17)

$$d(a_i, h_{i+1}(x)) \geq \frac{1}{4 \cdot 3^i}.$$

Gemeinsam mit (2.18) folgt weiter

$$d(a_i, z) \geq d(a_i, h_{i+1}(x)) - d(h_{i+1}(x), z) \geq \frac{1}{4 \cdot 3^i} - \frac{1}{2 \cdot 3^{i+1}} = \frac{1}{4 \cdot 3^{i+1}}.$$

Also gilt $d(a_i, D) \geq \frac{1}{4\cdot 3^{i+1}}$, und damit $a_i \notin \overline{D}$. Wir haben also $\overline{D} \subset N^n_{n-1}$ bewiesen. □

Satz 2.3.11. *Für einen Unterraum M von $\mathbb{R}^n$ gilt* $\mathbf{ind}\, M = n$ *genau dann, wenn M nichtleeres Inneres hat.*

Beweis. Als Unterraum von $\mathbb{R}$ erfüllt M wegen Satz 1.1.3 klarerweise die Ungleichung $\mathbf{ind}\, M \leq n$. Hat M nichtleeres Inneres, so enthält M eine zu $[0,1]^n$ homöomorphe Teilmenge. Aus $\mathbf{ind}\,[0,1]^n = n$ folgt dann $\mathbf{ind}\, M = n$.
Hat M hingegen leeres Inneres, so ist M nach Satz 2.3.10 homöomorph zu einer Teilmenge von N^n_{n-1}. Satz 2.3.7 liefert $\mathbf{ind}\, N^n_{n-1} \leq n-1$, und wir erhalten $\mathbf{ind}\, M \leq n-1$. □

Literaturverzeichnis

[1] Ryszard Engelking. *Dimension theory.* North-Holland Publishing Company Amsterdam, 1978.

[2] Ryszard Engelking. *General topology, Sigma series in pure mathematics, vol. 6.* Heldermann Verlag, Berlin, 1989.

[3] Martin Blümlinger Harald Woracek, Michael Kaltenbäck. *Funktionalanalysis 1, Februar 2018.*

[4] Hans Havlicek. *Lineare Algebra für Technische Mathematiker*. Heldermann, 2006.

[5] Michael Kaltenbäck. *Analysis 2, Vorlesungsskript SS2014/2015.*

[6] Michael Kaltenbäck. *Analysis 3, Vorlesungsskript WS2015/2016.*