TECHNISCHE UNIVERSITÄT WIEN

BACHELORARBEIT

Das Kato Spektrum

ausgeführt am

Institut für
Analysis und Scientific Computing
TU Wien

unter der Anleitung von

Ao.Univ.Prof. Dipl.-Ing. Dr.techn.

Michael Kaltenbäck

durch

Eva Wagner
Matrikelnummer: 1427565
Penzingerstraße 83/10
1140 Wien

Wien, am 22. Februar 2021

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

In dieser Arbeit wollen wir den Begriff des Kato Spektrums behandeln. Dieser basiert auf den japanischen Mathematiker Tosio Kato (†1999). Mithilfe erster Resultate werden wir grundlegende Eigenschaften für das Kato Spektrum erhaten, wie die Abgeschlossenheit oder die Beschränktheit. Wir werden auch erfassen, wie das Kato Spektrum in der komplexen Zahlenebene liegt. Dafür werden auch neue Begriffe, wie das lokale Spektrum oder das surjektive Spektrum vorgestellt. Für normale Operatoren und nicht invertierbare und isometrische Operatoren wird das Kato Spektrum konkret angegeben. Am Ende werden wir einen Spektralabbildungssatz für das Kato Spektrum zeigen.

2 Wiederholung aus höherer Analysis

Im Folgenden wiederholen wir Begriffe und Resultate, die aus Funktionalanalysis I, II, III und komplexer Analysis bekannt sind.

2.1 Quotiententopologie

Satz 2.1. *Sei X eine Menge, seien $(Y_i; \mathcal{T}_i)$, $i \in I$, topologische Räume und $f_i : Y_i \to X$, $i \in I$, Abbildungen. Dann existiert genau eine Topologie $\mathcal{T}$ auf X mit der Eigenschaft:*

- *$\mathcal{T}$ ist die feinste Topologie auf X derart, dass alle Abbildungen $f_i : (Y_i, \mathcal{T}_i) \to (X, \mathcal{T})$, $i \in I$, stetig sind.*

Diese Topologie wird finale Topologie genannt.
Dabei gilt, dass für einen topologischen Raum $(Z, \mathcal{O})$ eine Funktion $f : (X, \mathcal{T}) \to (Z, \mathcal{O})$ genau dann stetig ist, wenn alle Abbildungen $f \circ f_i : (Y_i, \mathcal{T}_i) \to (Z, \mathcal{O})$, $i \in I$ stetig sind.

Beweis. Siehe [2, Satz 1.4.1] $\square$

Beispiel 2.2. Ein Beispiel für eine finale Topologie ist die Quotiententopologie. Dafür sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und $\sim$ eine beliebige Äquivalenzrelation auf X. Betrachte die kanonische Projektion $\pi : X \to X/_\sim$, die jedem x seine Äquivalenzklasse $[x]_\sim := \{y \in X : x \sim y\}$ zuweist. Laut Satz 2.1 ist $\mathcal{T}_\sim$ die feinste Topologie derart, dass π stetig ist. Wir schreiben den topologischen Raum als $(X/_\sim, \mathcal{T}_\sim)$ an.

Bemerkung 2.3. Seien X, Y Vektorräume über denselben Körper $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$. Mithilfe eines linearen Teilraumes U von X können wir die Äquivalenzrelation $x \sim y :\Longleftrightarrow x - y \in U$ definieren. Dadurch bekommen wir den sogenannten Faktorraum X/U, der sich wiederum als Vektorraum herausstellt. Die dazugehörige Äquivalenzklasse wird dann geschrieben als $[x]_U := x + U = \{x + u : u \in U\}$.

In dieser Arbeit werden wir öfters für einen linearen Operator $T : X \to Y$ den Faktorraum $X/\ker T$ betrachten.

Definition 2.4. Sei $T : X \to X$ mit einem Vektorraum X und $Y \subseteq X$ ein T-invarianter, linearer Teilraum von X, also gilt $TY \subseteq Y$. Aufgrund der T-Invarianz von Y ist die Abbildung

$$T/Y : \begin{cases} X/Y \to X/Y \\ x + Y \mapsto Tx + Y. \end{cases}$$

wohldefiniert und linear.

Bemerkung 2.5. Mit den gleichen Voraussetzungen wie in Definition 2.4 ist klarerweise auch $T|_Y$ eine lineare Abbildung von Y nach Y.

Definition 2.6 (Faktornorm)**.** Sei X ein Banachraum und $U \subseteq X$ ein linearer Teilraum von X. Dann wird für den dazugehörigen Faktorraum X/U die sogenannte Faktornorm definiert.

$$\|x - U\|_{X/U} := \inf\{\|x - u\| : u \in U\} = d(x, U)$$

Dieser Ausdruck ist auf jeden Fall eine Seminorm und falls U abgeschlossen ist, sogar eine Norm. In dem Fall ist X/U ein Banachraum (siehe [2, Proposition 2.4.9]).

Bemerkung 2.7. Wenn X ein Banachraum, $Y \subseteq X$ abgeschlossen und $T \in L_b(X)$ mit $T(Y) \subseteq Y$ ist, dann ist $T/Y : X/Y \to X/Y$ nach Satz 2.9 wegen $\pi \circ T = T/Y \circ \pi$ stetig, also $T/Y \in L_b(X/Y)$, wobei X/Y mit $\|.\|_{X/Y}$ versehen ist.

2.2 Satz von der offenen Abbildung

Definition 2.8. Eine Abbildung $T : X \to Y$ zwischen zwei topologischen Räumen wird offen genannt, wenn für jede offene Menge O von X auch $f(O)$ in Y offen ist.

Satz 2.9 (Satz von der offenen Abbildung)**.** *Sei $T \in L_b(X, Y)$ surjektiv mit zwei Banachräumen X und Y. Dann ist T offen.*

Beweis. Siehe [2, Satz 4.3.1] □

Korollar 2.10. *Ist $T \in L_b(X, Y)$ eine zwischen zwei Banachräumen X und Y surjektive Abbildung, so gilt*

$$\exists c > 0 : \ \forall y \in Y \ \exists x \in X : Tx = y \textit{ und } \|x\| \leq c \|y\| .$$

Beweis. Aus Satz 2.9 folgt die Offenheit von T. Betrachte die lineare Abbildung $\widetilde{T} : (X/\ker T) \to Y$, definiert durch $\widetilde{T}([x]_{\ker T}) = Tx$. Da T auch geschrieben werden kann als $T = \widetilde{T} \circ \pi$ ist $\widetilde{T}$ wegen Satz 2.1 stetig. Laut Konstruktion ist $\widetilde{T}$ auch bijektiv. Aus dem Satz von der offenen Abbildung folgt, dass $\widetilde{T}(\mathcal{O}) = (\widetilde{T}^{-1})^{-1}(\mathcal{O})$ offen für offene $\mathcal{O}$ ist. Also ist $\widetilde{T}^{-1}$ stetig und folglich beschränkt, woraus die gesuchte Ungleichung folgt. □

2.3 Adjungierte Operatoren in Banachräumen

Satz 2.11. *Sei $T \in L_b(X, Y)$ eine Abbildung mit zwei Banachräumen X, Y. Dann gibt es genau einen Operator $T' \in L_b(Y', X')$ für den*

$$\langle Tx, y' \rangle = \langle x, T'y' \rangle \ \textit{ für alle } x \in X, \ y' \in Y',$$

gilt. Diesen nennen wir den adjungierten Operator von T.

Beweis. Siehe [2, Satz 6.1.2]. □

Satz 2.12 (vom abgeschlossenen Bild)**.** *Sei $T \in L_b(X,Y)$ mit zwei Banachräumen X, Y. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) TX ist abgeschlossen in Y bzgl. der Normtopologie.

(ii) $T'Y'$ ist abgeschlossen in X' bzgl. der Normtopologie.

(iii) $T'Y'$ ist abgeschlossen in X' bzgl. der w^*-Topologie $\sigma(X',X)$.

Beweis. Siehe [2, Satz 6.2.1] □

Definition 2.13. Für einen Banachraum X und seinen Dualraum X' seien $M \subseteq X$ und $N \subseteq X'$. Wir nennen

$$M^\perp := \{\phi \in X' : \phi(x) = 0,\ x \in M\} \quad \text{und} \quad {}^\perp N := \{x \in X : \phi(x) = 0,\ \phi \in N\}$$

den Annihilator von M bzw. N.

Satz 2.14 (Bipolarsatz)**.** *Für einen Banachraum X seinen Dualraum X', $M \subseteq X$ und $N \subseteq X'$ gilt*

$$^\perp(M^\perp) = \overline{span\, M}^{\sigma(X,X')} = \overline{span\, M}^{\|\cdot\|}, \quad (^\perp N)^\perp = \overline{span\, N}^{\sigma(X',X)}.$$

Beweis. Siehe [2, Satz 5.4.7]. □

Proposition 2.15. *Sei $T \in L_b(X,Y)$ mit zwei normierten Räumen X, Y. Dann gilt*

$$ker T = {}^\perp(T'Y') \text{ und } ker T' = (TX)^\perp.$$

Beweis. Siehe [2, Proposition 6.1.7]. □

Bemerkung 2.16. Mit den gleichen Voraussetzungen wie in Proposition 2.15 folgt für T mit abgeschlossenem Bild in Y bzgl. der Normtopologie, dass

$$TX = {}^\perp(\ker T') \text{ und } T'Y' = (\ker T)^\perp.$$

Dies ist erkennbar mithilfe des Bipolarsatzes und des Satzes vom abgeschlossenen Bild.

2.4 Analytische Funktionen

Definition 2.17 (Fréchet-Raum)**.** Ein Fréchet-Raum ist ein hausdorffscher, lokalkonvexer und vollständiger topologischer Vektorraum mit einer abzählbaren Nullumgebungsbasis.

Der Besitz einer abzählbaren Nullumgebungsbasis ist für einen hausdorffschen, lokalkonvexen topologischen Vektorraum äquivalent zur Metrisierbarkeit. Es gibt dabei aber keine ausgezeichnete Metrik.

Definition 2.18. Sei X ein Banachraum und $f : U \to X$ eine Funktion auf einer offenen Teilmenge U von $\mathbb{C}$. Dann heißt f analytisch, wenn es für jeden Punkt $\lambda_0 \in U$ eine Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(\lambda - \lambda_0)^n$ mit Konvergenzradius $R > 0$ und einen Radius $r \in (0, R]$ mit $U_r(\lambda_0) \subseteq U$ derart gibt, dass

$$f(\lambda) = \sum\nolimits_{n=0}^{\infty} a_n(\lambda - \lambda_0)^n, \ \lambda \in U_r(\lambda_0).$$

Der Raum $H(U, X)$ bezeichnet die Menge aller analytischen Funktionen von U nach X.

Definition 2.19. Sei $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge kompakter Teilmengen von einer offenen Menge $U \subseteq \mathbb{C}$ derart, dass $K_n \subseteq K_{n+1}^\circ$ und dass die Vereinigung aller K_n ganz U ergibt. Die Existenz einer Folge dieser Art ist durch [4, Lemma 4.1.3] gesichert. Bezeichne mit d_∞ die Supremumsmetrik. Dann ist durch

$$\rho(f, g) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{d_\infty(f|_{K_n}, g|_{K_n})}{1 + d_\infty(f|_{K_n}, g|_{K_n})}$$

eine Metrik auf $H(U, X)$ definiert.

Bemerkung 2.20. $H(U, X)$ versehen mit der von ρ induzierten Topologie $\mathcal{T}_\rho$ bildet einen Fréchet-Raum. Siehe [4, Satz 4.2.1].

Definition 2.21. Für einen geschlossenen, stetigen und stückweise stetigen differenzierbaren Weg $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ und für $z \in \mathbb{C} \setminus \gamma([a, b])$ heißt

$$n(\gamma, z) := \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{1}{\zeta - z} \, d\zeta$$

die Umlaufzahl des Weges γ um den Punkt z.

Definition 2.22. Sei A eine komplexe Banachalgebra mit Einselement, $a \in A$ und $f \in H(U, \mathbb{C})$ mit $\sigma(a) \subseteq U$. Sei $\Gamma = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$ ein Tupel von stetigen und stückweise stetig differenzierbaren, in $U \setminus \sigma(a)$ verlaufenden Wegen derart, dass

$$n(\Gamma, z) := \sum_{i=1}^{n} n(\alpha_i, z) = \begin{cases} 1, \text{ falls } z \in \sigma(a) \\ 0, \text{ falls } z \in \mathbb{C} \setminus U. \end{cases}$$

Wir definieren nun $f(a) \in A$ durch

$$f(a) := \frac{1}{2\pi i} \sum_{i=1}^{n} \int_{\alpha_i} f(\zeta)(\zeta e - a)^{-1} \, d\zeta.$$

Beachte dabei, dass wegen [6, Satz 2.2.1] und [6, Satz 2.3.2] solche Tupel immer existieren und $f(a)$ unabhängig von diesen ist.

Satz 2.23 (Spektralabbildungssatz für analytische Funktionen)**.** *Sei A eine komplexe Banachalgebra mit Einselement. Dann gilt für jedes $a \in A$ und jede analytische Funktion $f \in H(U, \mathbb{C})$ mit $\sigma(a) \subseteq U$ die Gleichheit*

$$\sigma(f(a)) = f(\sigma(a)).$$

Beweis. Siehe [6, Satz 2.3.5]. □

Satz 2.24 (Identitätssatz). *Sei $\emptyset \neq G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet, also eine zusammenhängende und offene Teilmenge von $\mathbb{C}$ und sei X ein Banachraum. Für eine analytische Funktion $f \in H(G, X)$ gilt $f \equiv 0$ genau dann, wenn die Menge $\{\lambda \in G : f(\lambda) = 0\}$ einen Häufungspunkt in G besitzt.*

Siehe [4, Satz 3.1.4]. Man beachte dabei, dass der Beweis analog zum Fall $f \in H(G, \mathbb{C})$ verläuft.

Korollar 2.25. *Sei Y ein abgeschlossener, linearer Teilraum eines Banachraumes X und $U \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet mit einer Teilmenge $S \subseteq U$, die Häufungspunkte in U besitzt. Für eine Funktion $f \in H(U, X)$ mit $f(S) \subseteq Y$ gilt dann sogar $f(U) \subseteq Y$.*

Beweis. Betrachte den Annihilator von Y

$$Y^{\perp} = \{\phi \in X' : \phi(x) = 0 \text{ für alle } x \in Y\}.$$

Da $f|_S$ laut Voraussetzung nach Y hinein abbildet, gilt $\phi \circ f|_S \equiv 0$ für alle $\phi \in Y^{\perp}$. Sei $\phi \in Y^{\perp}$ beliebig. Die Menge $S = \{\lambda \in S : \phi(f(\lambda)) = 0\}$ hat laut Voraussetzung einen Häufungspunkt in U, weswegen mithilfe des Identitätsatzes 2.24 folgt, dass $U = \{\lambda \in U : \phi(f(\lambda)) = 0\}$. Da ϕ beliebig war folgt

$$f(U) \subseteq {}^{\perp}(Y^{\perp}) = \overline{Y}^{\|\cdot\|} = Y.$$

□

2.5 Definition der verschiedenen Spektren

Definition 2.26 (Spektrum). Sei T ein linearer und beschränkter Operator mit einem Banachraum X. Dann ist das Spektrum definiert durch

$$\sigma(T) := \{\lambda \in \mathbb{C} : (T - \lambda) \text{ ist nicht invertierbar}\}.$$

Das Spektrum ist für jedes $T \in L_b(X)$ nichtleer und kompakt. Man kann es als disjunkte Vereinigungen $\sigma(T) = \sigma_p(T) \dot\cup \sigma_c(T) \dot\cup \sigma_r(T)$ folgender Mengen verstehen: Dem Punktspektrum

$$\sigma_p(T) := \{\lambda \in \mathbb{C} : \ker(T - \lambda) \neq \{0\}\},$$

dem stetigen Spektrum

$$\sigma_c(T) := \{\lambda \in \mathbb{C} : \ker(T - \lambda) = \{0\},\ \overline{(T - \lambda)X} = X\}$$

und dem Residualspektrum

$$\sigma_r(T) := \{\lambda \in \mathbb{C} : \ker(T - \lambda) = \{0\},\ \overline{(T - \lambda)X} \neq X\}.$$

Siehe [2, Bemerkung 6.4.6].

2.6 Spektralsatz für normale Operatoren

Aus Funktionalanalysis ist der Spektralsatz für selbstadjungierte Operatoren bekannt. Dieser lässt sich auf normale Operatoren ausweiten.

Satz 2.27 (Spektralsatz für normale Operatoren)**.** *Sei $\mathcal{B}(\mathbb{C})$ die Borel'sche σ-Algebra auf dem Körper $\mathbb{C}$ und $T \in L_b(H)$ normal auf einem Hilbertraum H. Dann gibt es ein eindeutiges Spektralmaß E für den Maßraum $\langle \mathbb{C}, \mathcal{B}(\mathbb{C}), H \rangle$ derart, dass $E(\mathbb{C} \setminus K) = 0$ für ein gewisses kompaktes $K \subseteq \mathbb{C}$ gilt und*

$$T = \int_K t \, dE(t).$$

Dabei gelten auch folgende Sachverhalte.

(i) Für $B \in L_b(H)$ gilt $BT = TB$ genau dann, wenn $BE(\Delta) = E(\Delta)B$ für alle $\Delta \in \mathcal{B}(\mathbb{C})$.

(ii) Jedes beliebige kompakte $K \supseteq \sigma(T)$ erfüllt $E(\mathbb{C} \setminus K)$. Insbesonders kann man E als Spektralmaß auf dem Spektrum auffassen.

Beweis. Siehe [5, Satz 2.2.1]. □

Bemerkung 2.28. Seien die Voraussetzungen von Satz 2.27 erfüllt. Für ein $\Delta \in \mathcal{B}(\mathbb{C})$, welches in K enthalten ist, ein $\lambda \notin \overline{\Delta}$ und ein $x \in E(\Delta)H$ gilt

$$(T - \lambda) \cdot \left[\int_K \mathbb{1}_\Delta(t) \frac{1}{t - \lambda} \, dE(t) \right] x = \left[\int_K (t - \lambda) \, dE(t) \right] \cdot \left[\int_K \mathbb{1}_\Delta(t) \frac{1}{t - \lambda} \, dE(t) \right] x = \\ = \left[\int_K \mathbb{1}_\Delta \, dE \right] x = x.$$

Dies bedeutet, dass λ in der Resolventenmenge von $T|_{E(\Delta)H}$ liegt, womit

$$\sigma(T_{E(\Delta)H}) \subseteq \overline{\Delta}.$$

3 Das Kato Spektrum und erste Resultate

Für den Rest dieser Arbeit wollen wir voraussetzen, dass die verwendeten Banachräume mit dem Skalarkörper $\mathbb{C}$ versehen sind.
Wir führen zunächst folgende, erweiternde Begriffe für Spektren ein.

Definition 3.1. Sei $T \in L_b(X)$ ein linearer und beschränkter Operator mit einem Banachraum X. Wir definieren das approximative Spektrum

$$\sigma_{ap}(T) := \{\lambda \in \mathbb{C} : \exists\ (x_n)_{n\in\mathbb{N}} : x_n \in X,\ \|x_n\| = 1 \text{ und } (T-\lambda)x_n \xrightarrow{n\to\infty} 0\},$$

das surjektive Spektrum

$$\sigma_{su}(T) := \{\lambda \in \mathbb{C} : (T-\lambda)X \neq X\}$$

und das Kompressionsspektrum

$$\sigma_{com}(T) := \{\lambda \in \mathbb{C} : (T-\lambda)X \text{ nicht dicht in } X\}$$

von T.

Bemerkung 3.2. Die Vereinigung vom stetigen Spektrum und dem Residualspektrum ist sicherlich im surjektiven Spektrum enthalten; siehe Kapitel 2.5. Offenbar gilt auch $\sigma_{com}(T) \subseteq \sigma_{su}(T) \subseteq \sigma(T)$ sowie $\sigma(T) = \sigma_p(T) \cup \sigma_{su}(T)$.

Definition 3.3. Sei $T \in L_b(X,Y)$ mit Banachräumen X und Y. Dann definieren wir die untere Schranke von T durch

$$\kappa(T) := \inf\Big\{\frac{\|Tx\|}{\|x\|} : x \in X \setminus \{0\}\Big\}.$$

Bemerkung 3.4. Für nicht injektives T gilt $\kappa(T) = 0$. Falls T injektiv ist, gilt $\kappa(T) = \left\|T^{-1}\right\|^{-1}$, wobei $T^{-1} : T(X) \to X$.

Proposition 3.5. *Für $T \in L_b(X)$ mit einem Banachraum $X \neq \{0\}$ und $\lambda \in \mathbb{C}$ sind folgende Aussagen äquivalent.*

(i) $\lambda \notin \sigma_{ap}(T)$.

(ii) $\ker(T-\lambda) = \{0\}$ *und* $(T-\lambda)X$ *ist abgeschlossen.*

(iii) $T-\lambda$ *ist nach unten beschränkt, also* $\kappa(T-\lambda) > 0$.

Das approximative Spektrum $\sigma_{ap}(T)$ ist abgeschlossen und es gilt $\partial\sigma(T) \subseteq \sigma_{ap}(T) \subseteq \sigma(T)$. Insbesonders ist $\sigma_{ap}(T)$ nichtleer.

Beweis. Aussage (iii) ist äquivalent zu

$$\exists c > 0 : \|(T-\lambda)x\| \geq c\,\|x\| \;\forall x \in X. \tag{3.1}$$

Daraus folgt, dass für jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit Norm 1 die Folge $\|(T-\lambda)x_n\|$ nicht gegen 0 konvergieren kann; also gilt (i). Angenommen (iii) gilt nicht. Das bedeutet

$$\forall n \in \mathbb{N}\, \exists x_n \in X : \|(T-\lambda)x_n\| < \frac{1}{n}\,\|x_n\|\,,$$

weshalb insbesonders $x_n \neq 0$. Mit $\widetilde{x}_n := \frac{x_n}{\|x_n\|}$ haben wir somit eine Folge mit Norm 1 in X derart gefunden, dass $\|(T-\lambda)\widetilde{x}_n\| \xrightarrow{n\to\infty} 0$. Damit ist $\lambda \in \sigma_{ap}(T)$ und wir haben den Schluss von (i) auf (iii) nachgewiesen.
Nach dem Satz von der offenen Abbildung 2.9 hat $T-\lambda : X \to (T-\lambda)X$ unter der Voraussetzung (ii) eine beschränkte Inverse, womit (3.1) gilt. Umgekehrt folgt aus (3.1), dass nur 0 den Funktionswert 0 annehmen kann. $(T-\lambda)$ ist somit injektiv. Um zu zeigen, dass $(T-\lambda)X$ auch abgeschlossen ist, wählen wir eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und ein beliebiges $y \in X$ mit $(T-\lambda)x_n \xrightarrow{n\to\infty} y$. Wegen (3.1) ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy Folge und konvergiert somit gegen ein Element $x \in X$. Da $T-\lambda$ stetig ist, folgt $(T-\lambda)x = y$.
Um zu zeigen, dass $\sigma_{ap}(T)$ abgeschlossen ist, wählen wir eine Folge $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit Elementen aus $\sigma_{ap}(T)$, die gegen ein Element $\lambda \in \mathbb{C}$ konvergiert. Da alle λ_n in $\sigma_{ap}(T)$ liegen, können wir eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus X und mit Norm 1 derart wählen, dass $\|(T-\lambda_n)x_n)\| \leq 1/n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Da

$$\|(T-\lambda)x_n\| = \|(T-\lambda_n)x_n + (\lambda_n-\lambda)x_n\| \leq \|(T-\lambda_n)x_n\| + \|\lambda_n-\lambda\|\,\|x_n\| \leq 1/n + |\lambda_n-\lambda|$$

für $n\to\infty$ gegen Null konvergiert, gilt $\lambda \in \sigma_{ap}(T)$.
Zu $\lambda \in \rho(T)\cap\sigma_{ap}(T)$ gibt es eine Folge in X mit Norm 1 derart, dass $\|(T-\lambda)x_n\| \xrightarrow{n\to\infty} 0$. Da die Inverse von $(T-\lambda)$ existiert, bekommen wir den Widerspruch

$$x_n = (T-\lambda)^{-1}(T-\lambda)x_n \xrightarrow{n\to\infty} 0,$$

womit $\sigma_{ap}(T) \subseteq \sigma(T)$.
Für $\lambda \in \partial\sigma(T)$ gibt es $\mu_n \in \rho(T)$ mit $\mu_n \xrightarrow{n\to\infty} \lambda$. Wegen der aus Funktionalanalysis bekannten Ungleichung

$$\left\|(T-\mu)^{-1}\right\| \geq \frac{1}{dist(\mu,\sigma(T))}$$

folgt $\left\|(T-\mu_n)^{-1}\right\| \xrightarrow{n\to\infty} +\infty$. Wir wählen für $n \in \mathbb{N}$ normierte Vektoren $y_n \in X$ derart, dass die Ungleichung

$$c_n := \left\|(T-\mu_n)^{-1}y_n\right\| \geq \left\|(T-\mu_n)^{-1}\right\| - \frac{1}{n}$$

erfüllt ist. Die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Vektoren

$$x_n := c_n^{-1}(T-\mu_n)^{-1}y_n$$

hat Norm 1 und $\|(T-\lambda)x_n\|$ konvergiert gegen Null, da einerseits

$$\lim_{n\to\infty} c_n^{-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\|(T-\mu_n)^{-1}y_n\|} \leq \frac{1}{\|(T-\mu_n)^{-1}\| - 1/n} = 0$$

und andererseits

$$\lim_{n\to\infty} \left\|(T-\lambda)(T-\mu_n)^{-1}y_n\right\| = \lim_{n\to\infty} \|y_n\| = 1.$$

Somit liegt λ im approximativen Spektrum von T. Daraus folgt auch, dass das approximative Spektrum nichtleer ist, da das Spektrum nichtleer, beschränkt und abgeschlossen ist. □

Korollar 3.6. *Für einen Operator $T \in L_b(X)$ mit einem Banachraum X gilt*

$$\sigma(T) = \sigma_{ap}(T) \cup \sigma_{com}(T).$$

Beweis. Die Inklusion $\sigma_{ap}(T) \cup \sigma_{com}(T) \subseteq \sigma(T)$ ist klar. Für $\lambda \in [\sigma_{ap}(T) \cup \sigma_{com}(T)]^c$ folgt aus Proposition 3.5, dass $\ker(T-\lambda) = \{0\}$ und $(T-\lambda)X$ abgeschlossen ist. $\lambda \notin \sigma_{com}(T)$ impliziert $(T-\lambda)X = \overline{(T-\lambda)X} = X$, weshalb λ nicht im Spektrum liegen kann. □

Lemma 3.7. *Für jeden Operator $T \in L_b(X)$ mit einem Banachraum X gilt*

(i) $\sigma_{com}(T) = \sigma_p(T')$,

(ii) $\sigma_{su}(T) = \sigma_{ap}(T')$, $\sigma_{ap}(T) = \sigma_{su}(T')$,

(iii) $\sigma(T) = \sigma(T')$.

Beweis. (i) $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \sigma_{com}(T)$ bedeutet, dass $(T-\lambda)X$ dicht in X ist, was wegen Proposition 2.15 zu $\ker(T'-\lambda) = \{0\}$ und folglich zu $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \sigma_p(T')$ äquivalent ist.
(ii) Für $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \sigma_{su}(T)$ ist $(T-\lambda)X = X$ abgeschlossen. Wegen des Satzes vom abgeschlossenen Bild 2.12 ist auch $(T'-\lambda)X'$ abgeschlossen in X'. Außerdem gilt wegen

$$\ker(T'-\lambda) = [(T-\lambda)X]^\perp = X^\perp = \{0\}$$

und Proposition 3.5, dass $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \sigma_{ap}(T')$. Sei umgekehrt $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \sigma_{ap}(T')$. Dann gilt wieder wegen Proposition 3.5 und Satz 2.12

$$X^\perp = \{0\} = \ker(T'-\lambda) = [(T-\lambda)X]^\perp \text{, und damit } X = (T-\lambda)X,$$

weswegen $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \sigma_{su}(T)$. Für $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \sigma_{su}(T')$ ist $(T'-\lambda)X' = X'$ abgeschlossen. Wegen des Satzes vom abgeschlossennen Bild 2.12 ist auch $(T-\lambda)X$ abgeschlossen in X. Außerdem gilt wegen

$$\ker(T-\lambda) = {}^\perp[(T'-\lambda)X'] = {}^\perp[X'] = \{0\}$$

und Proposition 3.5, dass $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \sigma_{ap}(T)$. Sei umgekehrt $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \sigma_{ap}(T)$. Dann gilt wieder wegen Proposition 3.5 und Satz 2.12, dass

$${}^\perp[X'] = \{0\} = \ker(T-\lambda) = {}^\perp[(T'-\lambda)X'] \text{, und damit } X' = (T'-\lambda)X',$$

weswegen $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \sigma_{su}(T')$.
(iii) Die letzte Aussage folgt aus Kombination von (i), (ii) und Korollar 3.6, da

$$\sigma(T) = \sigma_{ap}(T) \cup \sigma_{com}(T) = \sigma_{su}(T') \cup \sigma_p(T') = \sigma(T').$$

□

Korollar 3.8. *Für jeden Operator $T \in L_b(X)$ mit einem Banachraum X ist das surjektive Spektrum $\sigma_{su}(T)$ abgeschlossen und enthält den Rand vom Spektrum $\sigma(T)$.*

Beweis. Wie wir in Lemma 3.7 bewiesen haben, gilt $\sigma_{su}(T) = \sigma_{ap}(T')$ und $\sigma(T) = \sigma(T')$. Damit folgt aus Propostion 3.5, dass $\sigma_{su}(T)$ abgeschlossen ist und $\partial\sigma(T) \subseteq \sigma_{su}(T)$. $\square$

Lemma 3.9. *Sei $T \in L_b(X)$ ein Operator mit einem Banachraum X. Dann exisitert der Grenzwert*

$$i(T) := \lim_{n\to\infty} \kappa(T^n)^{1/n} = \sup_{n\in\mathbb{N}} \kappa(T^n)^{1/n}.$$

Beweis. Wir wollen zunächst zeigen, dass für eine Folge nichtnegativer, reeller Zahlen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die $a_n a_m \leq a_{n+m}$ für alle $n, m \in \mathbb{N}$ erfüllt,

$$\lim_{n\to\infty} a_n^{1/n} = \sup_{n\in\mathbb{N}}\{a_k^{1/k} : k \in \mathbb{N}\}. \tag{3.2}$$

Offenbar gilt $c := \sup_{n\in\mathbb{N}}\{a_k^{1/k} : k \in \mathbb{N}\} \geq \limsup_{n\to\infty} a_n^{1/n}$. Im Fall $c = 0$ gilt $a_n = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und (3.2) ist infolge richtig. Es kann also $c > 0$ angenommen werden. Für $\epsilon \in \mathbb{R}$ mit $c > \epsilon > 0$ sei $k \in \mathbb{N}$ so gewählt, dass $a_k \geq (c-\epsilon)^k$. Für beliebiges $n \in \mathbb{N}$ schreiben wir $n = kp + r$ mit $0 \leq r < k$ und bekommen folgende Abschätzung

$$a_n^{1/n} = a_{pk+r}^{1/n} \geq a_{pk}^{1/n} a_r^{1/n} \geq (c-\epsilon)^{pk/n} a_1^{r/n},$$

wobei $a_1^r \leq a_r$ durch Induktion aus der Voraussetzung folgt. Wegen $r < k$ gilt $r/n \to 0$ und wegen $1 = kp/n + r/n$ konvergiert kp/n für $n \to \infty$ gegen 1. Damit gilt

$$\liminf_{n\to\infty} a_n^{1/n} \geq c - \epsilon$$

für alle hinreichend kleinen $\epsilon > 0$, wodurch insgesamt

$$\limsup_{n\to\infty} a_n^{1/n} \leq c \leq \liminf_{n\to\infty} a_n^{1/n},$$

also (3.2), bewiesen ist. Es bleibt $\kappa(T^{n+m}) \geq \kappa(T^n)\kappa(T^m)$ zu zeigen.

Ist T nicht injektiv, so sind es auch alle T^n, $n \in \mathbb{N}$, nicht, wodurch $\kappa(T^n) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Ist T injektiv, sind es auch alle T^n, $n \in \mathbb{N}$. Für $n, m \in \mathbb{N}$ und $x \in X \setminus \{0\}$ folgt

$$\frac{\|T^{n+m}x\|}{\|x\|} = \frac{\|T^n(T^m x)\|}{\|T^m x\|} \cdot \frac{\|T^m x\|}{\|x\|} \geq \kappa(T^n)\kappa(T^m),$$

womit $\kappa(T^{n+m}) \geq \kappa(T^n)\kappa(T^m)$. $\square$

Proposition 3.10. *Sei $T \in L_b(X)$ mit einem Banachraum X. Dann ist*

(i) $\sigma_{ap}(T) \subseteq \{\lambda \in \mathbb{C} : i(T) \leq |\lambda| \leq r(T)\}$.

Falls zusätzlich $0 \in \sigma(T)$ erfüllt ist, gilt außerdem *(ii)* $K_{i(T)}(0) \subseteq \sigma(T)$ *und*

(iii) $i(T) = r(T) \Rightarrow \sigma(T) = K_{r(T)}(0)$.

Beweis. (i) Da schon $\sigma_{ap}(T) \subseteq \sigma(T) \subseteq K_{r(T)}(0)$ bekannt ist, muss nur mehr gezeigt werden, dass für beliebiges $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $|\lambda| < i(T)$ folgt, dass $\lambda \notin \sigma_{ap}(T)$. Wähle $c > 0$ und $n \in \mathbb{N}$ derart, dass $|\lambda| < c < i(T)$ und $c^n \leq \kappa(T^n)$. Wegen $c^n \|x\| \leq \|T^n x\|$ für $x \in X$, gilt

$$\|(T^n - \lambda^n)x\| \geq \|T^n x\| - |\lambda|^n \|x\| \geq (c^n - |\lambda^n|) \|x\| .$$

Damit folgt $\lambda^n \notin \sigma_{ap}(T^n)$ aus Proposition 3.5. Wegen

$$\|(T^n - \lambda^n)x_j\| = \left\| \sum_{k=1}^{n} \lambda^{n-k} T^{k-1} (T - \lambda) x_j \right\| \leq \left\| \sum_{k=1}^{n} \lambda^{n-k} T^{k-1} \right\| \|(T - \lambda)x_j\|$$

kann für keine Folge $(x_j)_{j \in \mathbb{N}}$ mit Norm eins $(T - \lambda)x_j$ gegen 0 konvergieren. Infolgedessen gilt auch $\lambda \notin \sigma_{ap}(T)$.
(ii) Angenommen $\lambda \in \rho(T)$ mit $|\lambda| \leq i(T)$. Wegen $0 \in \sigma(T)$ und da die Resolventenmenge offen ist, gibt es ein $t \in [0, 1)$ mit $t\lambda \in \partial\sigma(T) \subseteq \sigma_{ap}(T)$. Wegen $|t\lambda| < i(T)$ bedeutet das einen Widerspruch zu (i). Also haben wir $K_{i(T)}(0) \subseteq \sigma(T)$.

(iii) Im Fall $i(T) = r(T)$ gilt wegen

$$K_{i(T)}(0) \subseteq \sigma(T) \subseteq K_{r(T)}(0)$$

die Gleichung $\sigma(T) = K_{r(T)}(0)$. □

Definition 3.11. Sei $T \in L_b(X)$ mit einem Banachraum X. Dann wird mit $T^\infty X := \bigcap_{n \in \mathbb{N}} T^n X$ der verallgemeinerte Bildbereich von T bezeichnet. Die Kato Resolventenmenge ist gegeben durch

$$\rho_K(T) := \{\lambda \in \mathbb{C} : \ker (T - \lambda) \subseteq (T - \lambda)^\infty X,\ (T - \lambda)X \text{ abgeschlossen}\}$$

und das Kato Spektrum wird als Komplement der Resolventenmenge $\sigma_K(T) := \mathbb{C} \setminus \rho_K(T)$ definiert.

Korollar 3.12. *Für $T \in L_b(X)$ mit einem Banachraum X gilt $\sigma_K(T) \subseteq \sigma_{ap}(T)$.*

Beweis. Sei $\lambda \notin \sigma_{ap}(T)$. Gemäß Proposition 3.5 bedeutet das

$$\ker (T - \lambda) = \{0\} \text{ und } (T - \lambda)X \text{ abgeschlossen.}$$

Da der Operator $T - \lambda$ linear ist, gilt $0 \in (T - \lambda)^n X$ für alle $n \in \mathbb{N}$, womit auch $0 \in (T - \lambda)^\infty X$. Also liegt jedes $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \sigma_{ap}(T)$ auch in der Kato Resolventenmenge, womit $\sigma_K(T) \subseteq \sigma_{ap}(T)$. □

Lemma 3.13. *Habe $T \in L_b(X)$ abgeschlossenes Bild TX und sei Y ein abgeschlossener, linearer Teilraum von X, wobei $\ker T \subseteq Y$. Dann ist auch TY abgeschlossen.*

Beweis. Betrachte den stetigen und bijektiven Operator $\widetilde{T} : X/\ker T \to TX$ definiert durch $\widetilde{T}([x]_{\ker T}) = Tx$. Nach dem Satz von der offenen Abbildung ist auch $\widetilde{T}^{-1} : TX \to X/\ker T$ stetig. Folglich sind Bilder abgeschlossener Mengen unter $\widetilde{T}$ in $X/\ker T$ wieder abgeschlossen bezüglich der Spurtopologie TX. Da wir vorausgesetzt haben, dass $\ker T \subseteq Y$ und Y selber schon abgeschlossen ist, ist $Y/\ker T$ abgeschlossen in $X/\ker T$ und somit $\widetilde{T}(Y/\ker T) = TY$ abgeschlossen in TX. Da TX selbst abgeschlossen ist, ist TY auch in X abgeschlossen. □

Lemma 3.14. *Sei $T \in L_b(X)$ ein Operator mit $\ker T \subseteq T^\infty X$. Dann gilt $T(T^\infty X) = T^\infty X$ und $\ker T^n \subseteq T^\infty X$ für alle $n \in \mathbb{N}$.*

Beweis. Wir wollen als erstes zeigen, dass $T(T^\infty X) = T^\infty X$. Sei $x \in T^\infty X$, also $x \in T^n X$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Der Punkt Tx liegt sicherlich in TX. Wegen $x \in TX$ liegt Tx sicherlich auch in T^2X usw. Es folgt $Tx \in T^n X$ für alle $n \in \mathbb{N}$, womit $T(T^\infty X) \subseteq T^\infty X$. Für die andere Inklusion und $x \in T^\infty X$ wähle eine Folge $x_n \in X$ mit $x = T^n x_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Da für $n \in \mathbb{N}$

$$x_1 - T^n x_{n+1} \in \ker T \subseteq T^\infty X \subseteq T^n X,$$

gilt $x_1 \in T^n X$ für alle $n \in \mathbb{N}$, weshalb $x = Tx_1 \in T(T^\infty X)$.
Laut Voraussetzung gilt $\ker T^n \subseteq T^\infty X$ für $n = 1$. Gilt $\ker T^n \subseteq T^\infty X$ für ein $n \in \mathbb{N}$, so folgt für $x \in \ker T^{n+1}$, dass $Tx \in \ker T^n \subseteq T^\infty X$. Wegen $T(T^\infty X) = T^\infty X$, existiert ein $u \in T^\infty X$ mit $Tx = Tu$, also $x - u \in \ker T \subseteq T^\infty X$, wodurch auch $x = (x-u) + u \in T^\infty X$. □

Aus den gewonnenen Resultaten folgt relativ einfach folgendes Korollar.

Korollar 3.15. *Für $T \in L_b(X)$ und $\lambda \in \rho_K(T)$ folgt, dass*

(i) für jedes $n \in \mathbb{N}$ der Operator $(T-\lambda)^n$ abgeschlossenes Bild hat,

(ii) $(T-\lambda)^\infty X$ abgeschlossen ist und

(iii) $(T-\lambda)(T-\lambda)^\infty X = (T-\lambda)^\infty X$ gilt.

Beweis. Aus (i) folgt unmittelbar (ii) und (iii) folgt wegen $\lambda \in \rho_K(T)$ aus Lemma 3.14. Wir zeigen (i) durch vollständige Induktion nach n. Für $n = 1$ gilt (i) wegen $\lambda \in \rho_K(T)$. Nehmen wir an, dass $(T-\lambda)^n X$ abgeschlossen ist für ein beliebiges $n \in \mathbb{N}$. Wie wir in Lemma 3.14 festgestellt haben, gilt $\ker(T-\lambda)^n \subseteq (T-\lambda)^\infty X \subseteq (T-\lambda)X$ für $n \in \mathbb{N}$. Damit folgt aus der Induktionsvoraussetzung, dass $(T-\lambda)^n X$ abgeschlossen ist, wegen Lemma 3.13 die Abgeschlossenheit von $(T-\lambda)^n(T-\lambda)X = (T-\lambda)^{n+1}X$. □

4 Zusammenhang der Kato Resolventenmenge mit dem lokalen spektralen Teilraum

In diesem Kapitel soll ein Zusammenhang zwischen dem verallgemeinerten Bildbereich und dem lokalen spektralen Teilraum aus Definition 4.4 hergestellt werden. Dafür führen wir folgende Begriffe ein.

Definition 4.1 (lokale Resolventenmenge)**.** Sei $T \in L_b(X)$ und $x \in X$ beliebig. Die lokale Resolventenmenge ist definiert durch

$$\rho_T(x) := \bigcup \{U : U \subseteq \mathbb{C} \text{ offen}, \exists\, f \in H(U,X) : (T-\lambda)f(\lambda) = x \text{ für alle } \lambda \in U\}.$$

Die Menge $\sigma_T(x) := \mathbb{C} \setminus \rho_T(x)$ heißt das lokale Spektrum.

Bemerkung 4.2. Als Vereinigung offener Mengen ist $\rho_T(x)$ auch offen und $\sigma_T(x)$ somit abgeschlossen.

Da für $\lambda \in \rho(T)$ sicherlich $(T-\lambda)(T-\lambda)^{-1}x = x$ gilt und da $\lambda \mapsto (T-\lambda)^{-1}$ und infolge $\lambda \mapsto (T-\lambda)^{-1}x$ holomorph auf $\rho(T)$ ist, erhalten wir $\rho(T) \subseteq \rho_T(x)$ für alle $x \in X$. Somit können die analytischen Funktionen, die in der Definition der lokalen Resolventenmenge vorkommen, als lokale Fortsezung der Funktion $(T-\lambda)^{-1}x$ gesehen werden.

Lemma 4.3. *Sei X ein Banachraum und U eine offene Teilmenge von $\mathbb{C}$. Für einen Operator $T \in L_b(X)$, $x \in X$ und $f \in H(U,X)$ mit $(T-\lambda)f(\lambda) = x$ für alle $\lambda \in U$ gilt $\sigma_T(x) = \sigma_T(f(\lambda))$ für jedes $\lambda \in U$.*

Beweis. Wir verfahren in mehreren Schritten. Sei $\lambda \in U$ beliebig, aber fest und definiere die Funktion $g \in H(U,X)$ durch

$$g(\mu) := \begin{cases} \frac{f(\mu)-f(\lambda)}{\mu-\lambda}, & \mu \in U \setminus \{\lambda\}, \\ f'(\lambda), & \mu = \lambda. \end{cases}$$

Für $\mu \in U$ gilt $(T-\mu)f(\mu) = x$, weswegen für $\mu \neq \lambda$

$$\begin{aligned}(T-\mu)g(\mu) &= \frac{(T-\mu)(f(\mu)-f(\lambda))}{\mu-\lambda} = \\ &= \frac{(T-\mu)(f(\mu)-f(\lambda)) - (\mu-\lambda)f(\lambda) + (\mu-\lambda)f(\lambda)}{\mu-\lambda} = \\ &= \frac{(T-\mu)f(\mu) - (T-\lambda)f(\lambda) + (\mu-\lambda)f(\lambda)}{\mu-\lambda} = \\ &= \frac{x - x + (\mu-\lambda)f(\lambda)}{\mu-\lambda} = \\ &= f(\lambda).\end{aligned} \tag{4.1}$$

Aus Stetigkeitsgründen gilt auch $(T-\lambda)g(\lambda) = f(\lambda)$. Damit haben wir für die offene Teilmenge U von $\mathbb{C}$ eine analytische Funktion g gefunden, welche die Gleichung $(T-\mu)g(\mu) = f(\mu)$, $\mu \in U$, löst, wodurch $U \subseteq \rho_T(f(\lambda))$ gilt.

Um $\rho_T(x) \setminus U \subseteq \rho_T(f(\lambda))$ zu zeigen, was in Kombination mit dem gerade Bewiesenen die Mengeninklusion $\rho_T(x) \subseteq \rho_T(f(\lambda))$ liefert, wählen wir ein beliebiges $w \in \rho_T(x) \setminus U$. Da $\rho_T(x)$ offen ist, finden wir eine offene Umgebung W von w, mit $\lambda \notin W \subseteq \rho_T(x)$. Wegen $w \in \rho_T(x)$, gibt es eine analytische Funktion $h : W' \to X$ mit $W' \subseteq W$, für die $(T-\mu)h(\mu) = x$ für alle $\mu \in W'$ gilt. Wegen $\lambda \notin W'$ ist die Funktion $k : W' \to X$, $k(\mu) := \frac{h(\mu)-f(\lambda)}{\mu-\lambda}$ analytisch und wie in (4.1) zeigt man $(T-\mu)k(\mu) = f(\lambda)$ für alle $\mu \in W'$. Damit liegt w in $\rho_T(f(\lambda))$.

Um $\rho_T(f(\lambda)) \subseteq \rho_T(x)$ zu zeigen, wählen wir $w \in \rho_T(f(\lambda))$ und betrachten eine analytische Funktion $h : W \to X$ auf einer offenen Umgebung W von w mit $(T-\mu)h(\mu) = f(\lambda)$ für alle $\mu \in W$. Wegen

$$(T-\mu)(T-\lambda)h(\mu) = (T-\lambda)(T-\mu)h(\mu) = (T-\lambda)f(\lambda) = x$$

für alle $\mu \in W$ und weil $\mu \mapsto (T-\lambda)h(\mu)$ auf W analytisch ist, liegt dann w in $\rho_T(x)$. $\square$

Definition 4.4 (lokaler spektraler Teilraum)**.** Für $F \subseteq \mathbb{C}$ nennen wir die Menge

$$X_T(F) := \{x \in X : \sigma_T(x) \subseteq F\}$$

den lokalen spektralen Teilraum.

Definition 4.5 (T-hyperinvariant)**.** Ein linearer Teilraum $Y \subseteq X$ heißt T-hyperinvariant, wenn für jeden mit T kommutierenden Operator $S \in L_b(X)$ die Inklusion $SY \subseteq Y$ gilt.

Lemma 4.6. *Sei $T \in L_b(X)$ ein Operator mit einem Banachraum X und $F \subseteq \mathbb{C}$. Dann ist $X_T(F)$ ein T-hyperinvarianter, linearer Teilraum von X.*

Beweis. Wir zeigen zunächst die Teilraumeigenschaft von $X_T(F)$. Wegen $\rho_T(0) = \mathbb{C}$, also $\sigma_T(0) = \emptyset$ gilt $\{0\} \subseteq X_T(F) \neq \emptyset$. Aus der leicht zu zeigenden Inklusion $\rho_T(u) \cap \rho_T(v) \subseteq \rho_T(u+v)$ folgt $\sigma_T(u+v) \subseteq \sigma_T(u) \cup \sigma_T(v)$. Für $u, v \in X_T(F)$ gilt somit $\sigma_T(u+v) \subseteq \sigma_T(u) \cup \sigma_T(v) \subseteq F$. Wegen $\rho_T(\alpha u) = \rho_T(u)$ gilt auch $\sigma_T(\alpha u) = \sigma_T(u) \subseteq F$ für $u \in X_T(F)$ und $\alpha \neq 0$.

Für die T-Hyperinvarianz wähle einen mit T kommutierenden Operator $S \in L_b(X)$, $x \in X$ und $f \in H(U, X)$ mit einer offenen Menge $U \subseteq \mathbb{C}$ derart, dass $(T - \lambda)f(\lambda) = x$ für alle $\lambda \in U$. Daraus folgt

$$(T - \lambda)Sf(\lambda) = S(T - \lambda)f(\lambda) = Sx \quad \text{für alle} \quad \lambda \in U.$$

Da auch $S \circ f$ eine analytische Funktion auf U ist, erhalten wir $\rho_T(x) \subseteq \rho_T(Sx)$ beziehungsweise $\sigma_T(Sx) \subseteq \sigma_T(x)$. Da für einen Punkt $x \in X_T(F)$ deswegen $\sigma_T(Sx) \subseteq \sigma_T(x) \subseteq F$, gilt $Sx \in X_T(F)$. Also bekommen wir die gesuchte Inklusion $SX_T(F) \subseteq X_T(F)$. □

Korollar 4.7. *Für $T \in L_b(X)$ mit einem Banachraum X und $F \subseteq \mathbb{C}$ gilt*

$$(T - \lambda)X_T(F) = X_T(F) \text{ für alle } \lambda \in \mathbb{C} \setminus F.$$

Beweis. Die Inklusion $(T - \lambda)X_T(F) \subseteq X_T(F)$ folgt direkt aus Lemma 4.6, da der Operator $T - \lambda$ linear und beschränkt ist und mit T kommutiert.
Für die andere Inklusion sei zunächst bemerkt, dass für $x \in X_T(F)$ aus $\sigma_T(x) \subseteq F$ sicher $\mathbb{C} \setminus F \subseteq \rho_T(X)$ folgt.
Um für $\lambda \in \mathbb{C} \setminus F$ und $x \in X_T(F)$ zu zeigen, dass $x \in (T - \lambda)X_T(F)$, müssen wir eine Darstellung $(T - \lambda)\widetilde{x} = x$ mit einem $\widetilde{x} \in X$ finden, wobei $\sigma_T(\widetilde{x}) \subseteq F$. Wegen $\mathbb{C} \setminus F \subseteq \rho_T(x)$ gibt es eine analytische Funktion $f \in H(U, X)$ mit $\lambda \in U$ und $(T - \mu)f(\mu) = x$ für alle $\mu \in U$. Für $\widetilde{x} = f(\lambda)$ folgt aus Lemma 4.3, dass $\sigma_T(\widetilde{x}) = \sigma_T(x) \subseteq F$. □

Lemma 4.8. *Sei $T \in L_b(X)$ mit einem Banachraum X. Dann gilt*

(i) $X_T(F) \subseteq X_T(G)$, falls $F \subseteq G \subseteq \mathbb{C}$,

(ii) $x \in X_T(F)$ mit $x \in X$, $\lambda \in F$, falls $(T - \lambda)x \in X_T(F)$,

(iii) ker $(T - \lambda)^n \subseteq X_T(\{\lambda\})$ für $\lambda \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$.

Beweis. (i) Für $x \in X_T(F)$ gilt laut Definition des lokalen spektralen Teilraumes, dass $\sigma_T(x) \subseteq F \subseteq G$, weshalb auch $x \in X_T(G)$.

(ii) Aus $(T - \lambda)x \in X_T(F)$ mit $\lambda \in F$, folgt wegen $\sigma_T((T - \lambda)x) \subseteq F$, dass es für jedes $\omega \in \mathbb{C} \setminus F$ eine analytische Funktion $f : U \to X$ auf einer offenen Umgebung U von ω derart gibt, dass $(T - \mu)f(\mu) = (T - \lambda)x$ für alle $\mu \in U$. Indem wir U kleiner machen, können wir $\lambda \notin U$ annehmen. Die Funktion $g : U \to X$, $g(\mu) := (f(\mu) - x)/(\mu - \lambda)$ für $\mu \in U$ ist analytisch und erfüllt die Gleichung $(T - \mu)g(\mu) = x$ für alle $\mu \in U$, womit $\omega \in \rho_T(x)$. Da $\omega \in \mathbb{C}$ beliebig war, gilt $\sigma_T(x) \subseteq F$ und daher $x \in X_T(F)$.

(iii) Sei $x \in \ker (T - \lambda)^n$. Wegen (ii) folgt aus

$$(T - \lambda)(T - \lambda)^{n-1}x = 0 \in X_T(\{\lambda\}), \text{ dass } (T - \lambda)^{n-1}x \in X_T(\{\lambda\}).$$

$$(T - \lambda)(T - \lambda)^{n-2}x \in X_T(\{\lambda\}) \text{ ergibt } (T - \lambda)^{n-2}x \in X_T(\{\lambda\})$$

$$\text{usw. bis } (T - \lambda)^{n-n}x = x \in X_T(\{\lambda\}).$$

□

Definition 4.9. Sei $F \subseteq \mathbb{C}$ abgeschlossen und $T \in L_b(X)$.

$$\mathcal{X}_T(F) := \{x \in X : \exists\, f \in H(\mathbb{C} \setminus F, X) \text{ mit } (T-\lambda)f(\lambda) = x \text{ für alle } \lambda \in \mathbb{C} \setminus F\}.$$

Diese Menge bildet offenbar einen Unterraum von X und wir nennen sie den globalen, lokalen spektralen Teilraum. Offenbar gilt $\mathcal{X}_T(F) \subseteq X_T(F)$.

Lemma 4.10. *Sei $T \in L_b(X)$ mit einem Banachraum X. Zu $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \sigma_{su}(T)$ gibt es ein $\epsilon > 0$ derart, dass*

$$X = \mathcal{X}_T(\mathbb{C} \setminus U_\epsilon(\lambda)).$$

Beweis. Sei $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \sigma_{su}(T)$ beliebig. Da $T - \lambda$ surjektiv und damit auch offen ist, gilt wegen Korollar 2.10

$$\exists \epsilon > 0 : \ \forall u \in X\ \exists v \in X : (T-\lambda)v = u \text{ und } \epsilon \|v\| \leq \|u\|\,.$$

Wir bauen für ein beliebiges $x \in X$ induktiv eine Folge mit $x_0 := x$ und $x_n \in X$, wobei $(T-\lambda)x_n = x_{n-1}$ und $\epsilon \|x_n\| \leq \|x_{n-1}\|$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Die Reihe

$$f(\mu) := \sum_{n=0}^{\infty} x_{n+1}(\mu-\lambda)^n$$

konvergiert dann lokal gleichmäßig auf der offenen Kugel $U_\epsilon(\lambda)$, da $\|x_n\| \leq \frac{\|x\|}{\epsilon^n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|x_{n+1}(\mu-\lambda)^n\| = \sum_{n=0}^{\infty} |\mu-\lambda|^n \|x_{n+1}\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\mu-\lambda|^n}{\epsilon^{n+1}} \|x\|\,. \tag{4.2}$$

Folglich ist die Funktion $f : U_\epsilon(\lambda) \to X$ auch analytisch. Für $\mu \in U_\epsilon(\lambda)$ gilt

$$\begin{aligned}(T-\mu)f(\mu) &= (T-\lambda)f(\mu) - (\mu-\lambda)f(\mu) = \\ &= (T-\lambda)\sum_{n=0}^{\infty} x_{n+1}(\mu-\lambda)^n - (\mu-\lambda)\sum_{n=0}^{\infty} x_{n+1}(\mu-\lambda)^n = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} x_n(\mu-\lambda)^n - \sum_{n=0}^{\infty} x_{n+1}(\mu-\lambda)^{n+1} = x_0 = x,\end{aligned} \tag{4.3}$$

womit $x \in \mathcal{X}_T(\mathbb{C} \setminus U_\epsilon(\lambda))$. □

Korollar 4.11. *Für einen Operator $T \in L_b(X)$ mit einem Banachraum X gilt*

$$\sigma_{su}(T) = \bigcup\{\sigma_T(x) : x \in X\}.$$

Beweis. Wir zeigen, dass für $\lambda \in \mathbb{C}$

$$T - \lambda \text{ surjektiv} \iff \lambda \in \rho_T(x) \quad \text{für alle } x \in X.$$

Aus der Gültigkeit der rechten Seite folgt nach Definition 4.1 für jedes $x \in X$ die Existenz von $\widetilde{x}$ mit $(T-\lambda)\widetilde{x} = x$, wodurch sich $T - \lambda$ als surjektiv herausstellt.
Für surjektives $T - \lambda$, also $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \sigma_{su}(T)$, gibt es wegen Lemma 4.10 ein $\epsilon > 0$ mit

$$X = \mathcal{X}_T(\mathbb{C} \setminus U_\epsilon(\lambda)) = \{x \in X : \exists f \in H(U_\epsilon(\lambda), X) \text{ mit } (T-\lambda)f(\lambda) = x \text{ für alle } \mu \in U_\epsilon(\lambda)\}$$

Also gibt es für jedes $x \in X$ eine analytische Funktion f auf einer offenen Kugel um λ mit $(T-\lambda)f(\lambda) = x$. Folglich gilt $\lambda \in \rho_T(x)$ für jedes $x \in X$. □

Aus Korollar 4.7 und Korollar 4.11 erhalten wir folgendes Resultat.

Proposition 4.12. *Für $T \in L_b(X)$ und $\lambda \in \rho_K(T)$ gilt*

$$(T-\lambda)^\infty X = X_T(\mathbb{C} \setminus \{\lambda\}).$$

Beweis. Da wegen Korollar 4.7 $(T-\lambda)X_T(\mathbb{C} \setminus \{\lambda\}) = X_T(\mathbb{C} \setminus \{\lambda\})$ gilt, folgt $(T-\lambda)^n X_T(\mathbb{C} \setminus \{\lambda\}) = X_T(\mathbb{C} \setminus \{\lambda\})$ für alle $n \in \mathbb{N}$, womit $X_T(\mathbb{C} \setminus \{\lambda\}) \subseteq (T-\lambda)^\infty X$. Wegen Korollar 3.15 ist für $S := T|_{(T-\lambda)^\infty X}$ der Operator $S-\lambda$ surjektiv als Operator von dem Banachraum $(T-\lambda)^\infty X$ auf sich selbst, womit $\lambda \notin \sigma_{su}(S)$. Wegen Korollar 4.11 folgt für ein beliebiges $x \in (T-\lambda)^\infty X$, dass $\sigma_S(x) \subseteq \sigma_{su}(S) \subseteq \mathbb{C} \setminus \{\lambda\}$. Weil sicherlich auch $\sigma_T(x) \subseteq \sigma_S(x)$ gilt, muss x in $X_T(\mathbb{C} \setminus \{\lambda\})$ liegen. $\square$

5 Abgeschlossenheit mithilfe des lokalen spektralen Teilraumes

Mithilfe der im vorigen Kapitel bewiesenen Resultate und durch die Einführung des Minimum Modulus wollen wir in diesem Kapitel zeigen, dass auch das Kato Spektrum abgeschlossen ist.

Definition 5.1 (Minimum Modulus)**.** Sei $T \in L_b(X)$ mit einem Banachraum X. Wir nennen

$$\gamma(T) := \inf\Big\{ \frac{\|Tx\|}{d(x, \ker T)} : x \in X \setminus \ker T \Big\}$$

den Minimum Modulus von T, wobei $\gamma(T) := +\infty$ im Fall $T = 0$. Für injektives T gilt $\gamma(T) = \kappa(T)$; siehe Definition 3.3.

Bemerkung 5.2. Man zeigt leicht, dass $\gamma(T) = \kappa(\widetilde{T})$, wobei $\widetilde{T} : X/\ker T \to TX$ durch $\widetilde{T}([x]_{\ker T}) = Tx$ definiert ist, siehe Beweis von Korollar 2.10. Nach Bemerkung 3.4 gilt dann $\gamma(T) = \left\|\widetilde{T}^{-1}\right\|^{-1}$. Ist $TX = \widetilde{T}(X/\ker T)$ abgeschlossen, so folgt aus dem Satz von der offenen Abbildung $\left\|\widetilde{T}^{-1}\right\| < +\infty$, also $\gamma(T) > 0$.

Da für $\lambda \in \rho_K(T)$ definitionsgemäß $(T-\lambda)X$ abgeschlossen ist, gilt insbesonders $\gamma(T-\lambda) > 0$. Bis zum Ende dieses Kapitels werden wir $\delta := \gamma(T-\lambda)$ für den Minimum Modulus von $T-\lambda$ schreiben.

Lemma 5.3. *Für $T \in L_b(X)$ mit einem Banachraum X und $\lambda \in \rho_K(T)$ gilt*

(i) $(T-\lambda)^\infty X = X_T(\mathbb{C} \setminus \{\lambda\}) = X_T(\mathbb{C} \setminus U_\delta(\lambda))$,

(ii) $(T-\lambda)^\infty X \subseteq (T-\mu)^\infty X$ *für alle* $\mu \in U_\delta(\lambda)$.

Beweis. Wähle $0 < \epsilon < \delta$. Wir wollen als erstes zeigen, dass

$$\forall v \in (T-\lambda)^\infty X \; \exists u \in (T-\lambda)^\infty X : (T-\lambda)u = v \text{ und } \epsilon \|u\| \leq \|v\|.$$

Wir können $v \neq 0$ annehmen. Wähle gemäß Korollar 3.15 (iii) $w \in (T-\lambda)^\infty X$ mit $(T-\lambda)w = v$. Aus $w \notin \ker(T-\lambda)$ erhalten wir

$$\epsilon\, d(w, \ker(T-\lambda)) < \delta\, d(w, \ker(T-\lambda)) \leq \|(T-\lambda)w\| = \|v\|.$$

Wir schließen auf die Existenz eines $z \in \ker(T-\lambda) \subseteq (T-\lambda)^\infty X$ mit $\epsilon \|w - z\| < \|v\|$, wodurch $u := w - z \in (T-\lambda)^\infty X$ die gewünschte Eigenschaft hat.
Wähle $x \in (T-\lambda)^\infty X$ beliebig. Wir bauen induktiv eine Folge mit $x_0 := x$ und $x_n \in X$ derart,

dass $(T-\lambda)x_n = x_{n-1}$ und $\epsilon \|x_n\| \leq x_{n-1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Im Beweis von Lemma 4.10 haben wir schon gezeigt, dass dann

$$f(\mu) := \sum_{n=0}^{\infty} x_{n+1}(\mu-\lambda)^n$$

eine analytische Funktion von $U_\epsilon(\lambda)$ nach X bildet, wobei

$$(T-\mu)f(\mu) = x \text{ für alle } \mu \in U_\epsilon(\lambda).$$

Wir erhalten $U_\epsilon(\lambda) \subseteq \rho_T(x)$ für beliebiges $0 < \epsilon < \delta$, wodurch $U_\delta(\lambda) \subseteq \rho_T(x)$, siehe Definition 4.1. Damit ist x in der Menge $X_T(\mathbb{C} \setminus U_\delta(\lambda))$ enthalten. Also gilt

$$(T-\lambda)^\infty X \subseteq X_T(\mathbb{C} \setminus U_\delta(\lambda)) \subseteq X_T(\mathbb{C} \setminus \{\lambda\}). \tag{5.1}$$

In Poposition 4.12 haben wir schon bewiesen, dass $(T-\lambda)^\infty X = X_T(\mathbb{C}\setminus\{\lambda\})$, weshalb in (5.1) die Mengen alle gleich sind.
Für $\mu \in U_\delta(\lambda)$ folgt aus Korollar 4.7

$$X_T(\mathbb{C} \setminus U_\delta(\lambda)) = (T-\mu)^n X_T(\mathbb{C} \setminus U_\delta(\lambda)) \text{ für alle } n \in \mathbb{N}.$$

In Kombination mit (5.1) folgt daraus

$$(T-\lambda)^\infty X \subseteq X_T(\mathbb{C} \setminus U_\delta(\lambda)) \subseteq (T-\mu)^\infty X.$$

□

Satz 5.4. *Für $T \in L_b(X)$ mit einem Banachraum X ist $\rho_K(T)$ offen und daher $\sigma_K(T)$ abgeschlossen in $\mathbb{C}$.*

Beweis. Wir zeigen, dass für jedes $\lambda \in \rho_K(T)$ jede Kugel $U_\epsilon(\lambda)$ mit $0 < \epsilon < \delta$ ganz in $\rho_K(T)$ enthalten ist. Wähle $\mu \in U_\epsilon(\lambda)$ mit $\mu \neq \lambda$. Mithilfe von Lemma 4.8 erhalten wir

$$\ker(T-\mu) \subseteq X_T(\{\mu\}) \subseteq X_T(\mathbb{C} \setminus \{\lambda\}) = (T-\lambda)^\infty X \subseteq (T-\mu)^\infty X.$$

Es bleibt zu zeigen, dass $(T-\mu)X$ abgeschlossen ist. Wegen $\lambda \in \rho_K(T)$ ist $Y := (T-\lambda)^\infty X$ abgeschlossen; siehe Korollar 3.15. Folglich ist X/Y versehen mit der Faktornorm, ein Banachraum. Wegen $\lambda \in \rho_K(T)$ gilt auch $\ker(T-\lambda) \subseteq Y$, weshalb

$$\delta \|x - Y\|_{X/Y} \leq \delta\, d(x, \ker(T-\lambda)) \leq \|(T-\lambda)x\| \text{ für alle } x \in X.$$

Wegen Korollar 3.15 gilt $(T-\lambda)Y = Y$. Zu $y \in Y$ gibt es folglich ein $u \in Y$ mit $(T-\lambda)u = y$. Für jedes $x \in X$ gilt

$$\delta \|x - Y\|_{X/Y} = \delta \|x - u - Y\|_{X/Y} \leq \|(T-\lambda)(x-u)\| = \|(T-\lambda)x - y\|.$$

Nehmen wir das Infinum über alle $y \in Y$, so folgt

$$\delta \|x - Y\|_{X/Y} \leq \|(T-\lambda)x - Y\|_{X/Y} \leq \|(T-\mu)x - Y\|_{X/Y} + |\mu-\lambda| \, \|x - Y\|_{X/Y},$$

weshalb

$$(\delta - \epsilon) \|x - Y\|_{X/Y} \leq \|(T - \mu)x - Y\|_{X/Y} \quad \text{für alle} \quad x \in X. \tag{5.2}$$

Wegen $(T-\mu)(Y) = (T-\lambda+(\lambda-\mu)I)(T-\lambda)^\infty X \subseteq (T-\lambda)^\infty X = Y$ ist $((T-\mu)/Y) : X/Y \to X/Y$ definiert und wegen (5.2) nach unten beschränkt; siehe Definition 2.4. Aus Proposition 3.5 folgt, dass das Bild $((T-\mu)/Y)(X/Y)$ abgeschlossen in X/Y ist. Wegen Lemma 5.3 gilt

$$Y \subseteq (T - \mu)^\infty X \subseteq (T - \mu)X,$$

womit $(T - \mu)X = \pi^{-1}((T - \mu)/Y)(X/Y)$, wobei $\pi : X \to X/Y$ die kanonische Projektion bezeichnet. Aus der Stetigkeit von π folgt schließlich die Abgeschlossenheit von $(T - \mu)X$. $\square$

6 Die Sandwich Formel

Um einen besseren Eindruck zu bekommen, wie das Kato Spektrum in der komplexen Zahlenebene liegt, wollen wir die sogenannte Sandwich Formel zeigen.

Definition 6.1 (SVEP)**.** Wir definieren für $T \in L_b(X)$ mit einem Banachraum X den Operator

$$T_U : H(U, X) \to H(U, X),\ (T_U f)(\lambda) := (T - \lambda) f(\lambda).$$

Wir sagen, der Operator T hat die single-valued-extension-property oder kurz SVEP, wenn T_U für jedes offene $U \subseteq \mathbb{C}$ injektiv ist.

Definition 6.2 (Analytisches Residuum)**.** Wir definieren folgende Teilmenge der komplexen Zahlenebene für $T \in L_b(X)$ mit einem Banachraum X.

$$\mathcal{S}(T) := \{\lambda \in \mathbb{C} : \exists\, U \subseteq \mathbb{C} \text{ Gebiet}, f \in H(U, X),\ f \neq 0,\ \lambda \in U \text{ mit } (T - \mu) f(\mu) = 0\ \forall\, \mu \in U\}$$

Bemerkung 6.3. Offenbar gilt

$$T \text{ hat die SVEP Eigenschaft genau dann, wenn } \mathcal{S}(T) = \emptyset.$$

Lemma 6.4. *Sei $T \in L_b(X)$ mit einem Banachraum X. Dann ist das analytische Residuum $\mathcal{S}(T)$ im Inneren $\sigma_p(T)^\circ$ des Punktspektrums enthalten.*

Beweis. Sei $\lambda \in \mathcal{S}(T) \neq \emptyset$. Also gibt es ein Gebiet U und eine nicht verschwindende analytische Funktion $f : U \to X$ mit $\lambda \in U$. Da f nicht identisch verschwindet, hat λ eine endliche Nullstellenvielfachheit $N \geq 0$. Es gibt also eine analytische Funktion $g : G \to X$ mit $g(\lambda) \neq 0$ und $f(\mu) = (\mu - \lambda)^N g(\mu)$ für $\mu \in G$. Da $(T - \mu) g(\mu) = 0$ für $\mu \neq \lambda$ gilt, folgt aus Stetigkeitsgründen auch $(T - \lambda) g(\lambda) = 0$, womit $\lambda \in \sigma_p(T)$. Da $\mathcal{S}(T)$ selbst schon offen ist, gilt sogar $\mathcal{S}(T) \subseteq \sigma_p(T)^\circ$. □

Proposition 6.5. *Sei $T \in L_b(X)$ mit einem Banachraum X. Dann gilt*

$$\rho_K(T) = \rho_K(T') \quad \text{und} \quad \rho_K(T) \cap \sigma(T) \subseteq \mathcal{S}(T) \cup \mathcal{S}(T'). \tag{6.1}$$

Außerdem gilt die sogenannte Sandwich Formel

$$\partial\sigma(T) \subseteq (\sigma_{ap}(T) \cap \sigma_{su}(T)) \setminus (\mathcal{S}(T) \cap \mathcal{S}(T')) \subseteq \sigma_K(T) \subseteq \sigma_{ap}(T) \cap \sigma_{su}(T) \tag{6.2}$$

und die Gleichheit

$$(\sigma_{ap}(T) \cap \sigma_{su}(T)) \setminus (\mathcal{S}(T) \cap \mathcal{S}(T')) = (\sigma_{ap}(T) \setminus \mathcal{S}(T)) \cup (\sigma_{su}(T) \setminus \mathcal{S}(T')). \tag{6.3}$$

Beweis. (i) Für $\lambda \in \rho_K(T)$ ist $(T-\lambda)X$ abgeschlossen und $\ker(T-\lambda) \subseteq (T-\lambda)^\infty X$. Wegen Lemma 3.14 und Korollar 3.15 ist auch $(T-\lambda)^n X$ abgeschlossen und $\ker(T-\lambda)^n \subseteq (T-\lambda)^\infty X \subseteq (T-\lambda)X$ für jedes $n \in \mathbb{N}$. Wegen des Satzes vom abgeschlossenen Bild 2.12 ist damit auch $(T'-\lambda)^n X'$ abgeschlossen und wegen Proposition 2.15

$$\ker(T'-\lambda) = [(T-\lambda)X]^\perp \subseteq [\ker(T-\lambda)^n]^\perp = (T'-\lambda)^n X'$$

für alle $n \in \mathbb{N}$, womit $\lambda \in \rho_K(T')$ und $\rho_K(T) \subseteq \rho_K(T')$.

Für $\lambda \in \rho_K(T')$ ist $(T'-\lambda)X'$ abgeschlossen und $\ker(T'-\lambda) \subseteq (T'-\lambda)^\infty X'$. Wegen Lemma 3.14 und Korollar 3.15 ist auch $(T'-\lambda)^n X'$ abgeschlossen und $\ker(T'-\lambda)^n \subseteq (T'-\lambda)^\infty X' \subseteq (T'-\lambda)X'$ für jedes $n \in \mathbb{N}$. Wegen des Satzes vom abgeschlossenen Bild 2.12 ist damit auch $(T-\lambda)^n X$ abgeschlossen und wegen Proposition 2.15

$$\ker(T-\lambda) = {}^\perp[(T'-\lambda)X'] \subseteq {}^\perp[\ker(T'-\lambda)^n] = (T-\lambda)^n X$$

für alle $n \in \mathbb{N}$, womit $\lambda \in \rho_K(T')$ und die Gleichheit in (6.1) gezeigt ist.
(ii) Wir wollen eingangs zeigen, dass

$$\rho_K(T) \cap \sigma_{ap}(T) \subseteq \mathcal{S}(T). \tag{6.4}$$

Für $\lambda \in \rho_K(T) \cap \sigma_{ap}(T)$ ist $(T-\lambda)X$ abgeschlossen und $\lambda \in \sigma_{ap}(T)$. Wegen Proposition 3.5 gilt $\ker(T-\lambda) \neq \{0\}$, also $\lambda \in \sigma_p(T)$. Für einen Eigenvektor $x \neq 0$ zu λ gilt wegen Lemma 5.3

$$x \in \ker(T-\lambda) \subseteq (T-\lambda)^\infty X = X_T(\mathbb{C} \setminus \{\lambda\}).$$

Also liegt λ in $\rho_T(x)$, weshalb es eine analytische Funktion $f : U \to X$ auf einer offenen Umgebung U von λ derart gibt, dass $(T-\mu)f(\mu) = x$ für alle $\mu \in U$. Für die analytische Funktion

$$g(\mu) := (T-\lambda)f(\mu),\ \mu \in U.$$

gilt

$$g(\lambda) = (T-\lambda)f(\lambda) = x \neq 0.$$

Aufgrund der Stetigkeit verschwindet g sicherlich nicht auf einer offenen Umgebung von λ. Wegen $(T-\mu)g(\mu) = (T-\lambda)(T-\mu)f(\mu) = (T-\lambda)x = 0$ liegt λ in $\mathcal{S}(T)$, womit (6.4) bewiesen ist.
Wegen der Gleichheit in (6.1), (6.4) und $\sigma_{su}(T) = \sigma_{ap}(T')$ folgt

$$\rho_K(T) \cap \sigma_{su}(T) = \rho_K(T') \cap \sigma_{ap}(T') \subseteq \mathcal{S}(T'). \tag{6.5}$$

Vereinigung von (6.5) und (6.4) ergibt nach Bemerkung 3.2 die Mengeninklusion in (6.1).
(iii) In Korollar 3.12 haben wir schon bewiesen, dass $\sigma_K(T) \subseteq \sigma_{ap}(T)$. Für $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \sigma_{su}(T)$ gilt $(T-\lambda)X = X$ und somit $\lambda \in \rho_K(T)$. Also haben wir $\sigma_K(T) \subseteq \sigma_{ap}(T) \cap \sigma_{su}(T)$. Nach Proposition 3.5 und Korollar 3.8 gilt

$$\partial\sigma(T) \subseteq \sigma_{ap}(T) \cap \sigma_{su}(T).$$

Außerdem wissen wir wegen Lemma 6.4, dass

$$\mathcal{S}(T) \cap \mathcal{S}(T') \subseteq \sigma_p(T)^\circ \cap \sigma_p(T')^\circ$$

und damit auch

$$\partial\sigma(T) \subseteq \sigma_{ap}(T) \cap \sigma_{su}(T) \setminus (\mathcal{S}(T) \cap \mathcal{S}(T')).$$

Durch Schneiden von (6.4) und (6.5) erhalten wir

$$\rho_K(T) \cap \sigma_{ap}(T) \cap \sigma_{su}(T) \subseteq \mathcal{S}(T) \cap \mathcal{S}(T'),$$

was nichts anderes bedeutet als

$$(\sigma_{ap}(T) \cap \sigma_{su}(T)) \setminus (\mathcal{S}(T) \cap \mathcal{S}(T')) \subseteq \sigma_K(T).$$

Damit ist die Sandwich Formel (6.2) gezeigt.
(v) Wegen

$$\begin{aligned}(\sigma_{ap}(T) \cap \sigma_{su}(T)) \setminus (\mathcal{S}(T) \cap \mathcal{S}(T')) &= (\sigma_{ap}(T) \cap \sigma_{su}(T)) \setminus \mathcal{S}(T) \cup (\sigma_{ap}(T) \cap \sigma_{su}(T)) \setminus \mathcal{S}(T') \\ &\subseteq (\sigma_{ap}(T) \setminus \mathcal{S}(T)) \cup (\sigma_{su}(T) \setminus \mathcal{S}(T'))\end{aligned}$$

folgt schon die eine Inklusion für (6.3). Gemäß (6.4) und (6.5) gilt auch

$$\sigma_{ap}(T) \setminus \mathcal{S}(T) \subseteq \sigma_K(T) \text{ und } \sigma_{su}(T) \setminus \mathcal{S}(T') \subseteq \sigma_K(T),$$

woraus wir

$$(\sigma_{ap}(T) \setminus \mathcal{S}(T)) \cup (\sigma_{su}(T) \setminus \mathcal{S}(T')) \subseteq \sigma_K(T) \subseteq \sigma_{ap}(T) \cap \sigma_{su}(T)$$

erhalten. Andererseits ist

$$(\sigma_{ap}(T) \cap \mathcal{S}(T)^c) \cup (\sigma_{su}(T) \cap \mathcal{S}(T')^c) \subseteq \mathcal{S}(T)^c \cup \mathcal{S}(T')^c = (\mathcal{S}(T) \cap \mathcal{S}(T'))^c.$$

Wir kommen auf

$$(\sigma_{ap}(T) \setminus \mathcal{S}(T)) \cup (\sigma_{su}(T) \setminus \mathcal{S}(T')) \subseteq (\sigma_{ap}(T) \cap \sigma_{su}(T)) \cap (\mathcal{S}(T) \cap \mathcal{S}(T'))^c$$

und die andere Inklusion von (6.3) ist gezeigt. □

Bemerkung 6.6. Wegen $\partial\sigma(T) \subseteq \sigma_K(T)$ ist das Kato Spektrum sicherlich nichtleer für jeden nichttrivialen Banachraum X und $T \in L_b(X)$, da das Sektrum bekannterweise nichtleer und kompakt ist.

Mithilfe der Sandwich Formel bekommen wir eine konkrete Darstellung des Kato Spektrums von isometrischen und nicht invertierbaren Operatoren.

Korollar 6.7. *Sei $T \in L_b(X)$ ein nicht invertierbarer, isometrischer Operator mit einem Banachraum X. Dann ist das Kato Spektrum gleich der Einheitskreislinie.*

Beweis. Klarerweise ist T^n für jedes $n \in \mathbb{N}$ isometrisch, womit auch

$$\|T^n\| = \kappa(T^n) = 1.$$

Folglich gilt $r(T) = i(T) = 1$. Aus Korollar 3.12 und Proposition 3.10 (i) folgt

$$\sigma_K(T) \subseteq \sigma_{ap}(T) \subseteq \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = 1\} = \mathbb{T}.$$

Für nicht invertierbares T ist 0 im Spektrum enthalten. Damit gilt wegen Proposition 3.10 (iii) $\sigma(T) = K_1(0)$. Nach (6.2) haben wir infolge $\mathbb{T} = \partial\sigma(T) \subseteq \sigma_K(T)$. □

Lemma 6.8. *Falls T die SVEP Eigenschat hat und $\lambda \in \sigma_p(T)$, so gilt $\sigma_T(x) = \{\lambda\}$ für jeden Eigenvektor x von T zu dem Eigenwert λ.*

Beweis. Sei $x \in X \setminus \{0\}$ mit $Tx = \lambda x$. Die analytische Funktion

$$f : \mathbb{C} \setminus \{\lambda\} \to X,\ f(\mu) := (\lambda - \mu)^{-1}x$$

erfüllt $(T - \mu)f(\mu) = x$ für alle $\mu \in \mathbb{C} \setminus \{\lambda\}$. Die Menge $\mathbb{C} \setminus \{\lambda\}$ ist damit in $\rho_T(x)$ enthalten, weswegen auch $\sigma_T(x) \subseteq \{\lambda\}$. Aus $\sigma_T(x) = \emptyset$, also $\lambda \in \rho_T(x)$ folgt die Existenz einer analytischen Funktion $f : U \to X$ auf einer offenen Umgebung $U \subseteq \mathbb{C}$ von λ mit $(T - \mu)f(\mu) = x$ für alle $\mu \in U$. Daraus folgt

$$(T - \mu)(T - \lambda)f(\mu) = (T - \lambda)x = 0$$

für alle $\mu \in U$. Da wir vorausgesetzt haben, dass T die SVEP Eigenschaft hat, erhalten wir $(T - \lambda)f(\mu) = 0$ für alle $\mu \in U$, was für $\mu = \lambda$ die Gleichheit $x = 0$ impliziert. Wir erhalten einen Widerspruch zu unserer am Anfang gemachten Voraussetzung $x \neq 0$. □

Lemma 6.9. *Für einen Operator $T \in L_b(X)$ mit einem Banachraum X gilt*

(i) $\sigma(T) = \sigma_{su}(T)$, falls T die SVEP Eigenschaft hat

(ii) $\sigma(T) = \sigma_{ap}(T)$, falls T' die SVEP Eigenschaft hat.

Beweis. Falls T die SVEP Eigenschaft hat, folgt aus Lemma 6.8, dass $\sigma_p(T) \subseteq \bigcup\{\sigma_T(x) : x \in X\} = \sigma_{su}(T)$; siehe Korollar 4.11. Wegen $\sigma(T) = \sigma_p(T) \cup \sigma_{su}(T)$ folgt $\sigma(T) = \sigma_{su}(T)$. Falls T' die SVEP Eigenschaft hat, gilt $\sigma(T) = \sigma(T') = \sigma_{su}(T') = \sigma_{ap}(T)$, wie aus dem gerade Bewiesenen und Lemma 3.7 folgt. □

Korollar 6.10. *Sei $T \in L_b(X)$ mit einem Banachraum X. Falls T die SVEP Eigenschaft hat, gilt $\sigma_K(T) = \sigma_{ap}(T)$. Wenn T' die SVEP Eigenschaft hat, gilt $\sigma_K(T) = \sigma_{su}(T)$. Insbesonders erhalten wir $\sigma_K(T) = \sigma(T)$, wenn T und T' die SVEP Eigenschaft haben.*

Beweis. Betrachte die Mengeninklusion (6.2) aus Proposition 6.5, genauer

$$(\sigma_{ap}(T) \cap \sigma_{su}(T)) \setminus (\mathcal{S}(T) \cap \mathcal{S}(T')) \subseteq \sigma_K(T) \subseteq \sigma_{ap}(T) \cap \sigma_{su}(T). \tag{6.6}$$

Wenn T die SVEP Eigenschaft hat, gilt wegen Bemerkung 6.3 $\mathcal{S}(T) \cap \mathcal{S}(T') = \emptyset$ und wegen Lemma 6.9 auch $\sigma_{ap}(T) \subseteq \sigma(T) = \sigma_{su}(T)$. Aus (6.6) folgt dann, dass $\sigma_K(T) = \sigma_{ap}(T)$. Falls T' die SVEP Eigenschaft hat, ist wieder $\mathcal{S}(T) \cap \mathcal{S}(T') = \emptyset$ und aus Lemma 6.9 folgt $\sigma_{su}(T) \subseteq \sigma(T) = \sigma_{ap}(T)$, womit wiederum in Kombination mit (6.6) gezeigt wurde, dass $\sigma_K(T) = \sigma_{su}(T)$. Wenn T und T' die SVEP Eigenschaft haben folgt aus dem gerade Bewiesenen und Lemma 6.9, dass $\sigma_K(T) = \sigma_{ap}(T) = \sigma_{su}(T) = \sigma(T)$. □

7 Das Kato Spektrum für normale Operatoren

In diesem Kapitel wollen wir zeigen, dass normale Operatoren die SVEP haben. Damit folgt aus der Sandwich Formel die Gleichheit des Kato Spektrums und des Spektrums.

Definition 7.1. Sei $T \in L_b(X, Y)$ für Banachräume X und Y. Die Räume $H(U, X)$ und $H(U, Y)$ sind jeweils mit der Topologie $\mathcal{T}_\rho$ versehen; siehe Definition 2.18. Wir definieren den Operator

$$T^{\#} : H(U, X) \to H(U, Y) \text{ durch } (T^{\#} f)(\lambda) := Tf(\lambda)$$

für alle $\lambda \in U$ und $f \in H(U, X)$.

Bemerkung 7.2. Der Operator $T^{\#}$ ist linear und bezüglich der Topologien $\mathcal{T}_\rho$ stetig.

Proposition 7.3. *Sei $T \in L_b(X, Y)$ eine surjektive Abbildung mit zwei Banachräumen X und Y. Für jede offene Kreisscheibe $U \subseteq \mathbb{C}$ ist der Operator $T^{\#} : H(U, X) \to H(U, Y)$ surjektiv.*

Beweis. Sei $U = U_r(\lambda_0)$, wobei $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ und $r > 0$. Wir erhalten für jede Funktion $g \in H(U, Y)$ und alle $\lambda \in U$ die Potenzreihenentwicklung

$$g(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (\lambda - \lambda_0)^n$$

mit Konvergenzradius größer oder gleich r. Da T surjektiv ist, folgt aus Korollar 2.10

$$\exists c > 0 : \ \forall y \in Y \ \exists x \in X : Tx = y \text{ und } \|x\| \leq c \|y\| .$$

Insbesonders können wir für $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ein Element $a_n \in X$ so wählen, dass $Ta_n = b_n$ und $\|a_n\| \leq c \|b_n\|$. Wegen

$$\limsup_{n\to\infty} \|a_n\|^{1/n} \leq \limsup_{n\to\infty} c^{1/n} \|b_n\|^{1/n} = \limsup_{n\to\infty} \|b_n\|^{1/n} \leq \frac{1}{r}$$

konvergiert die Potenzreihe

$$f(\lambda) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n (\lambda - \lambda_0)^n$$

für alle $\lambda \in U$ und definiert somit eine Funktion in $H(U, X)$. Weil für alle $\lambda \in U$

$$(T^{\#} f)(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} T(a_n)(\lambda - \lambda_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (\lambda - \lambda_0)^n = g(\lambda)$$

gilt, ist $T^{\#}$ surjektiv. □

Proposition 7.4. *Seien Y und Z abgeschlossene, lineare Teilmengen von einem Banachraum X und sei $U \subseteq \mathbb{C}$ eine offene Kreisscheibe.*

(i) Dann induziert die kanonische Projektion $\pi : X \to X/Y$ einen linearen Isomorphismus $H(U, X/Y) \cong H(U, X)/H(U, Y)$.

(ii) Im Fall $X = Y + Z$ ist der Operator

$$\Phi : \begin{cases} H(U, Y) \times H(U, Z) \to H(U, X) \\ \Phi(f, g)(\lambda) = f(\lambda) + g(\lambda) \end{cases} \tag{7.1}$$

surjektiv.

Beweis. (i) Die kanonische Projektion $\pi : X \to X/Y$ ist surjektiv. Da X/Y ein Banachraum ist, bekommen wir wegen Proposition 7.3 eine surjektive Abbildung $\pi^\#$. Offenbar gilt $\ker \pi^\# = H(U, Y)$, wodurch die Abbildung

$$\widetilde{\pi}^\# : H(U, X)/H(U, Y) \to H(U, X/Y)$$

ein Isomorphismus ist.

(ii) Die Abbildung

$$\Psi : \begin{cases} H(U, Y) \times H(U, Z) \to H(U, Y \times Z) \\ \Psi(f, g)(\lambda) = (f(\lambda), g(\lambda)) \end{cases}$$

ist offenbar bijektiv und wegen $X = Y + Z$ ist

$$T : \begin{cases} Y \times Z \to X \\ T(u, v) = u + v \end{cases}$$

surjektiv. Aus Proposition 7.3 folgt die Surjektivität von $T^\# : H(U, Y \times Z) \to H(U, X)$. Wegen $\Phi = T^\# \circ \Psi$ ist (ii) gezeigt. □

Definition 7.5. Aus Analysis ist bekannt, dass die offene Menge $\rho(T) \neq \emptyset$ als disjunkte Vereinigung von zusammenhängenden Mengen geschrieben werden kann. Wir führen den Begriff des vollen Spektrums ein. Dieses ist definiert durch

$$\sigma_f(T) := \sigma(T) \cup \bigcup \{G \subseteq \rho(T) : G \text{ beschränkt und zusammenhängend}\}.$$

Offenbar gilt $\sigma_f(T) = \sigma(T)$, wenn $\rho(T)$ zusammenhängend ist.

Proposition 7.6. *Sei $T \in L_b(X)$ mit einem Banachraum X und seien Y und Z T-invariante, abgeschlossenen, lineare Teilräume von X mit $X = Y \dot{+} Z$. Dann gilt*

$$\sigma(T/Y) \subseteq \sigma(T) \cup \sigma(T|_Y) \subseteq \sigma_f(T) \quad \text{und} \quad \sigma(T/Z) \subseteq \sigma_f(T|_Y) \subseteq \sigma_f(T).$$

Beweis. Zunächst ist laut Definition 2.4 $(T/Y)\circ\pi = \pi\circ T$. Für $\lambda \in \rho(T)\cap\rho(T|_Y)$ ist $T/Y-\lambda$ surjektiv, da π und $T-\lambda$ surjektiv sind. Außerdem gilt für $x\in X$ mit der Eigenschaft $(T/Y-\lambda)\pi x = 0$, dass $(T-\lambda)x \in Y$ und wegen $TY\subseteq Y$ auch $x\in Y$. Das zeigt die Injektivität von $T/Y-\lambda$ auf X/Y. Also ist $\sigma(T/Y)$ in $\sigma(T)\cup\sigma(T|_Y)$ enthalten. Aus Funktionalanalysis ist die Darstellung

$$(T-\lambda)^{-1} = -\sum_{n=0}^{\infty}\lambda^{-n-1}T^n$$

für alle $\lambda\in\mathbb{C}$ mit $|\lambda| > \|T\|$ bekannt. Aufgrund der T-Invarianz, Linearität und Abgeschlossenheit von Y folgt $(T-\lambda)^{-1}Y\subseteq Y$ für all diese λ. Außerdem ist die Resolvente $(T-\lambda)^{-1}$ holomorph in $\lambda\in\rho(T)$. Folglich ist für beliebiges $x\in Y$ die Abbildung

$$\Phi : \begin{cases} \mathbb{C}\setminus\sigma_f(T) \to X \\ \lambda \mapsto (T-\lambda)^{-1}x \end{cases}$$

holomorph. Das Gebiet $\mathbb{C}\setminus\sigma_f(T)$ enthält das kleinere Gebiet $\mathbb{C}\setminus K_{\|T\|}(0)$ auf dem $\Phi(\mathbb{C}\setminus K_{\|T\|}(0))\subseteq Y$ gilt. Daraus folgt wegen Korollar 2.25 auch $\Phi(\mathbb{C}\setminus\sigma_f(T))\subseteq Y$. Folglich gilt $(T-\lambda)^{-1}Y\subseteq Y$ für alle $\lambda\in\mathbb{C}\setminus\sigma_f(T)$, womit auch $\sigma(T|_Y)\subseteq\sigma_f(T)$. Aus

$$\partial\sigma(T|_Y)\subseteq\sigma_{ap}(T|_Y)\subseteq\sigma_{ap}(T)\subseteq\sigma(T)$$

folgt sogar $\sigma_f(T|_Y)\subseteq\sigma_f(T)$. Die Abbildung

$$R : \begin{cases} Y \to X/Z \\ y \mapsto y+Z \end{cases}$$

ist wegen $X = Y+Z$ surjektiv und aufgrund von $\ker R = Y\cap Z = \{0\}$ auch injektiv. Damit ist R ein linearer, in beide Richtungen stetiger Ismorphismus und es gilt $T/Z = R\circ T|_Y\circ R^{-1}$. Wir erhalten $\sigma(T/Z) = \sigma(T|_Y)\subseteq\sigma_f(T|_Y)\subseteq\sigma_f(T)$. □

Satz 7.7. *Ein normaler Operator $T\in L_b(H)$ auf einem Hilbertraum H hat die SVEP.*

Beweis.
Für offenes $U\subseteq\mathbb{C}$, $f\in H(U,X)$ mit $(T-\lambda)f(\lambda) = 0$ für alle $\lambda\in U$ muss gezeigt werden, dass $f\equiv 0$ auf U. Es reicht für eine beliebige abgeschlossene Kreisscheibe $D\subseteq U$ zu zeigen, dass $f(\lambda) = 0$ für alle $\lambda\in D$. Wegen Satz 2.27 gibt es für den Operator T ein Spektralmaß E derart, dass für $K = \sigma(T)\subseteq\mathbb{C}$

$$T = \int_K \lambda\, dE(\lambda).$$

Sei $U_1\subseteq\mathbb{C}$ eine offene Kreisscheibe mit $D\subseteq U_1\subseteq\overline{U_1}\subseteq U$ und $U_2 := \mathbb{C}\setminus D$. Dann sind U_1 und U_2 offen, wobei $U_1\cup U_2\supseteq K$. $K\setminus U_1 = K\cap U_1^c$ ist kompakt mit $K\setminus U_1\subseteq U_2$. Da metrische Räume normal sind, gibt es eine offene Menge $O\subseteq\mathbb{C}$ derart, dass $K\setminus U_1\subseteq O\subseteq\overline{O}\subseteq U_2$. Folglich gilt

$$K = (K\setminus O)\cup(K\cap\overline{O}),\ K\setminus O\subseteq U_1 \text{ und } K\cap\overline{O}\subseteq U_2. \tag{7.2}$$

Die Borelmengen $\Delta_1 := K \setminus O$ und $\Delta_2 := (K \cap \overline{O}) \setminus \Delta_1$ sind disjunkt und erfüllen wegen (7.2)

$$\Delta_1 \cup \Delta_2 = K,\ \Delta_1 = \overline{\Delta_1} \subseteq U_1 \text{ und } \overline{\Delta_2} \subseteq K \cap \overline{O} \subseteq U_2.$$

Die Teilmengen $Y := E(\Delta_1)H$ und $Z := E(\Delta_2)H$ von X sind T-invariant, abgeschlossen und bilden Unterräume. Außerdem gilt laut Konstruktion $Y \oplus Z = E(K)H = H$. Zudem gilt gemäß Bemerkung 2.28

$$\sigma(T|_Y) \subseteq \overline{\Delta_1} \subseteq U_1 \text{ und } \sigma(T|_Z) \subseteq \overline{\Delta_2} \subseteq U_2. \tag{7.3}$$

Nach Proposition 7.4 (ii) gibt es zwei Funktionen $g \in H(U, Y)$ und $h \in H(U, Z)$ mit

$$f(\lambda) = g(\lambda) + h(\lambda) \text{ für alle } \lambda \in U.$$

Wegen Proposition 7.6 gilt zudem $\sigma(T/Z) \subseteq \sigma_f(T|_Y) \subseteq U_1$. Folglich ist der Operator $T/Z - \lambda$ auf dem Faktorraum X/Z invertierbar für alle $\lambda \in \partial U_1$. Für die kanonische Projektion $\pi : X \to X/Z$ folgt

$$\pi g(\lambda) = \pi f(\lambda) = (T/Z - \lambda)^{-1}(T/Z - \lambda)\pi f(\lambda) = (T/Z - \lambda)^{-1}\pi(T - \lambda)f(\lambda) = 0$$

für alle $\lambda \in \partial U_1$. Nach Satz 2.24 ist πg auf ganz U_1 gleich Null und daher $g(\lambda) \in Z \cap Y = \{0\}$ für alle $\lambda \in U$. Also muss nur mehr gezeigt werden, dass $f = h \equiv 0$ auf D. Wegen $\sigma(T|_Z) \cap D = \emptyset$ gibt es $\widetilde{c} > 0$ mit $\left\|(T|_Z - \lambda)^{-1}\right\| \leq \widetilde{c}$ für alle $\lambda \in D$. Da h nach Z hinein abbildet, folgern wir aus $h = f$

$$\|h(\lambda)\| \leq \widetilde{c}\,\|(T - \lambda)h(\lambda)\| \leq \widetilde{c}\,\|(T - \lambda)f(\lambda)\| = 0$$

für alle $\lambda \in D$.

$\square$

Bemerkung 7.8. Ein Operator $T \in L_b(X)$ mit einem Banachraum X heißt kompostierbar, falls es für je zwei offene Mengen $U, V \subseteq \mathbb{C}$ mit $\mathbb{C} = U \cup V$ zwei abgeschlossene, lineare und T-invariante Teilräume $Y, Z \subseteq X$ gibt mit $X = Y + Z$, sodass

$$\sigma(T|Y) \subseteq U \text{ und } \ \sigma(T|Z) \subseteq V.$$

Es sei angemerkt, dass im Allgemeinen weder U, V disjunkt sind, noch $Y \cap Z = \{0\}$ gilt. Insbesonders haben wir im Beweis von 7.7 gezeigt, dass jeder normale Operator kompostierbar ist.

Korollar 7.9. *Sei $T \in L_b(H)$ ein normaler Operator auf einem Hilbertraum H. Dann gilt*

$$\sigma_K(T) = \sigma(T).$$

Beweis. Da auch T^* normal ist, haben nach Satz 7.7 T und T^* die SVEP. Aus Korolllar 6.10 folgt damit $\sigma_K(T) = \sigma(T)$. $\square$

8 Spektralabbildungsatz für das Kato Spektrum

Wie wir in Funktionalanalysis gesehen haben, ist das Bild unter einem Poynoms p von dem Spektrum eines Operators T das Gleiche, wie das Spektrum des Operators $p(T)$, siehe [2, Satz 6.4.7]. Dies ist auch möglich, wenn man statt Polynome analytische Funktionen verwendet, siehe Satz 2.23. In diesem Kapitel soll gezeigt werden, dass diese Vertauschung auch mit dem Kato Spektrum funktioniert.

Lemma 8.1. *Seien $S, T \in L_b(X)$ kommutierende Operatoren mit einem Banachraum X. Dann folgt aus $0 \in \rho_K(ST)$, dass $0 \in \rho_K(S) \cap \rho_K(T)$.*

Beweis. Da T und S kommutieren, reicht es zu zeigen, dass aus $0 \in \rho_K(ST)$ folgt, dass $0 \in \rho_K(T)$. Wegen $0 \in \rho_K(ST)$ und $TS = ST$ gilt

$$\ker T \subseteq \ker ST \subseteq (ST)^\infty X = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} (ST)^n X = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} T^n S^n X \subseteq \bigcap_{n\in\mathbb{N}} T^n X = T^\infty X.$$

Somit bleibt die Abgeschlossenheit von TX zu zeigen. Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in X, derart, dass $Tx_n \xrightarrow{n\to\infty} y$ mit $y \in X$. Wir erhalten $STx_n \xrightarrow{n\to\infty} Sy$. Da $(ST)X$ abgeschlossen ist, gibt es $u \in X$ mit $Sy = STu$. Wegen

$$y - Tu \in \ker S \subseteq \ker ST \subseteq (ST)^\infty X \subseteq T^\infty X \subseteq TX$$

gilt auch $y = (y - Tu) + Tu \in TX$ womit TX abgeschlossen ist. □

Bemerkung 8.2. Für den Beweis des nächsten Lemmas sei daran erinnert, dass der klassische euklidische Algorithmus den größten gemeinsamen Teiler zweier natürlicher Zahlen berechnet. Die Menge aller komplexen Polynome $\mathbb{C}[\lambda]$ bildet einen euklidischen Ring, womit dieser nicht nur kommutativ ist, man kann sogar mit Rest dividieren. Das ist die uns bekannte Polynomdivision. Die Berechnung des größten gemeinsamen Teilers kann also für Polynome genauso wie für natürliche Zahlen durchgeführt werden.

Lemma 8.3. *Sei $T \in L_b(X)$ ein Operator mit einem Banachraum X und sei $p(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{n_1} ... (\lambda - \lambda_k)^{n_k}$ ein komplexes Polynom mit paarweise verschiedenen Nullstellen $\lambda_1, ..., \lambda_k \in \mathbb{C}$. Dann gilt*

$$ker\, p(T) = ker\,(T - \lambda_1)^{n_1} \dot{+} \; ... \; \dot{+} \, ker\,(T - \lambda_k)^{n_k}, \tag{8.1}$$

$$p(T)X = (T - \lambda_1)^{n_1} X \cap ... \cap (T - \lambda_k)^{n_k} X. \tag{8.2}$$

Beweis. Seien p_1, p_2 zwei komplexe Polynome mit keinen gemeinsamen Nullstellen derart, dass $p = p_1 p_2$. Wegen Bemerkung 8.2 können wir den euklidischen Algorithmus auf unsere Polynome anwenden und wir bekommen die Darstellung

$$1 = p_1(\lambda)q_1(\lambda) + p_2(\lambda)q_2(\lambda).$$

Der sogenannte Einsetzungshomomorphismus

$$\phi_T : \begin{cases} \mathbb{C}[\lambda] \to L_b(X) \\ p(\lambda) \mapsto p(T) \end{cases}$$

ist ein Algebren-Homomorphismus, also linear und mit der Multiplikation verträglich. Insbesonders ist $\phi_T(\mathbb{C}[\lambda])$ eine kommutative Unteralgebra von $L_b(X)$. Somit erhalten wir

$$x = p_1(T)q_1(T)x + p_2(T)q_2(T)x \quad \text{für alle } x \in X. \tag{8.3}$$

Mithilfe dieser Darstellung wollen wir zeigen, dass

$$\ker p(T) = \ker p_1(T) \dot{+} \ker p_2(T). \tag{8.4}$$

Zunächst gilt für $x \in \ker p_1(T) \cap \ker p_2(T)$ wegen (8.3), dass $x = 0$. Ist $x \in \ker p_1(T) + \ker p_2(T)$, mit $x = x_1 + x_2$, $x_j \in \ker p_j(T)$, so folgt

$$\begin{aligned} p(T)x = p_1(T)p_2(T)x &= p_1(T)p_2(T)(x_1 + x_2) = \\ &= p_2(T)p_1(T)x_1 + p_1(T)p_2(T)x_2 = 0, \end{aligned}$$

weshalb $x \in \ker p(T)$. Umgekehrt folgt aus $x \in \ker p(T)$ gemäß (8.3) $x = x_1 + x_2$, wobei $x_1 := p_2(T)q_2(T)x$ und $x_2 := p_1(T)q_1(T)x$. Wegen

$$p_1(T)x_1 = p(T)q_2(T)x = q_2(T)p(T)x = 0 = p_2(T)x_2 = p(T)q_1(T)x = q_1(T)p(T)x$$

gilt $x_1 \in \ker p_1(T)$ und $x_2 \in \ker p_2(T)$. Damit ist Darstellung (8.4) gezeigt. Durch Induktion erhalten wir daraus auch Darstellung (8.1). Des weiteren wollen wir zeigen, dass

$$p(T)X = p_1(T)X \cap p_2(T)X.$$

Für $y \in p(T)X = p_1(T)p_2(T)X = p_2(T)p_1(T)X$ folgt sofort $y \in p_1(T)X \cap p_2(T)X$. Umgekehrt folgt aus $y \in p_1(T)X \cap p_2(T)X$ die Existenz von $x_1, x_2 \in X$ mit

$$p_1(T)x_1 = y \text{ und } p_2(T)x_2 = y.$$

Für $x := q_2(T)x_1 + q_1(T)x_2$ gilt dann

$$\begin{aligned} p(T)x = p(T)q_1(T)x_2 + p(T)q_2(T)x_1 &= p_1(T)q_1(T)p_2(T)x_2 + p_2(T)q_2(T)p_1(T)x_1 = \\ &= p_1(T)q_1(T)y + p_2(T)q_2(T)y = y, \end{aligned}$$

womit $y \in p(T)X$. Wiederum durch Induktion folgt (8.2). $\square$

Satz 8.4 (Spektralabbildungssatz für das Kato Spektrum)**.** *Sei $T \in L_b(X)$ ein Operator mit einem Banachraum X und sei $U \subseteq \mathbb{C}$ eine offene Menge, die das Spektrum $\sigma(T)$ enthält. Dann gilt $f(\sigma_K(T)) = \sigma_K(f(T))$ für jede analytische Funktion $f \in H(U, \mathbb{C})$; siehe Definition 2.22.*

Beweis. Es soll zunächst mithilfe von Lemma 8.1 die Inklusion $f(\sigma_K(T)) \subseteq \sigma_K(f(T))$ gezeigt werden. Dazu erinnern wir uns an die analytische Funktion

$$h(\mu) = \frac{f(\mu) - f(\lambda)}{\mu - \lambda}, \ \mu \in U,$$

mit festem $\lambda \in \mathbb{C}$. Wir wählen $\lambda \in \sigma_K(T)$ und nehmen $f(\lambda) \in \rho_K(f(T))$ an, wodurch $0 \in \rho_K(f(T) - f(\lambda)) = \rho_K((T - \lambda)h(T))$. Da $(T - \lambda)$ und $h(T)$ kommutieren, folgt aus Lemma 8.1, dass $0 \in \rho_K(T - \lambda)$ und daher $\lambda \in \rho_K(T)$. Dies ist aber ein Widerspruch zu unserer ursprünglichen Voraussetzung.

Für die andere Inkluson wollen wir von $\mu \in \mathbb{C} \setminus f(\sigma_K(T))$ auf $\mu \in \rho_K(f(T))$ schließen. Betrachte die Funktion $g(\lambda) := f(\lambda) - \mu$ für $\lambda \in U$. Wenn wir $0 \in \rho_K(g(T))$ zeigen können, dann folgt $\mu \in \rho_K(f(T))$. Wir machen zunächst einige Fallunterscheidungen. Da für $\lambda \in \sigma_K(T)$ sicherlich $f(\lambda) \neq \mu$ gilt, nimmt die analytische Funktion g auf $\sigma_K(T)$ den Wert 0 nicht an. Falls g auch auf dem ganzen Spektrum ungleich Null ist, erkennen wir aus Satz 2.23, dass

$$0 \notin g(\sigma(T)) = \sigma(g(T)), \text{ weshalb } 0 \in \rho(g(T)) \subseteq \rho_K(g(T)). \tag{8.5}$$

Es bleibt der Fall, dass die Funktion g Nullstellen in $\sigma(T) \setminus \sigma_K(T)$ hat, zu behandeln. Die Anzahl dieser Nullstellen ist sogar endlich, denn andernfalls hätte g eine Nullstelle $\lambda \in \sigma(T)$, die auch Häufungspunkt der Menge aller Nullstellen in $\sigma(T)$ ist. Nach Satz 2.24 verschwindet g auf der λ enthaltenden Zusammenhangskomponente G von U. Nun liegt mindestens ein Punkt von G am Rand $\partial\sigma(T)$. Wegen $\partial\sigma(T) \subseteq \sigma_K(T)$ bedeutet dies einen Widerspruch. Zusammengefasst hat die Funktion g nur endlich viele paarweise verschiedene Nullstellen $\lambda_1, ..., \lambda_k \in \rho_K(T) \cap \sigma(T)$ mit Vielfachheit $n_1, ..., n_k \in \mathbb{N}$. Wir schreiben $g(\lambda) = p(\lambda)h(\lambda)$ für alle $\lambda \in U$ mit $h \in H(U, \mathbb{C})$ und $p(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{n_1} ... (\lambda - \lambda_k)^{n_k}$, wobei wir h als nullstellenfrei annehmen können, indem wir $U \supseteq \sigma(T)$ nötigenfalls kleiner machen.

Mit gleicher Argumentation wie in (8.5) erhalten wir $0 \in \rho(h(T)) \subseteq \rho_K(h(T))$. Da $p(T)$ und $h(T)$ beide Elemente in unserer kommutierenden Banachalgebra $L_b(X)$ sind, gilt $g(T) = p(T)h(T) = h(T)p(T)$ und es kann Lemma 8.1 angewendet werden. Da $h(T)$ invertierbar ist, folgt damit $0 \in \rho_K(g(T))$, wenn wir wüssten, dass

$$0 \in \rho_K(p(T)) = \rho_K(g(T)h(T)^{-1}).$$

Es muss also nur mehr gezeigt werden, dass Null in der Kato Resolventenmenge von $p(T)$ enthalten ist, was nichts anderes, wie die Abgeschlossenheit von $p(T)X$ und $\ker p(T) \subseteq p(T)^\infty X$ bedeutet.

Da $p(T)X$ wegen Lemma 8.3 als

$$p(T)X = (T - \lambda_1)^{n_1} X \cap ... \cap (T - \lambda_k)^{n_k} X \tag{8.6}$$

geschrieben werden kann und $(T-\lambda_i)^{n_i}X$ für jedes $\lambda_i \in \rho_K(T)$, $i = 1, ..., k$ wegen Korollar 3.15 abgeschlossen ist, ist $p(T)X$ als Durchschnitt abgeschlossener Mengen wieder abgeschlossen. Wegen der Darstellung

$$\ker p(T) = \ker (T - \lambda_1)^{n_1} \dotplus \ \dots \ \dotplus \ker (T - \lambda_k)^{n_k}$$

aus Lemma 8.3 reicht es für $\ker p(T) \subseteq p(T)^\infty X$ zu zeigen, dass $\ker (T - \lambda_i)^{n_k} \subseteq p(T)^\infty X$, $i = 1, .., k$. Einerseits bekommen wir aus Lemma 3.14 die Inklusion $\ker (T-\lambda_i)^{n_i} \subseteq (T-\lambda_i)^\infty X$ für $i = 1, .., k$. Andererseits folgt aus Lemma 4.8 (i), (iii) und Proposition 4.12 für $i \neq j$, dass

$$\ker (T - \lambda_j)^{n_j} \subseteq X_T(\{\lambda_j\}) \subseteq X_T(\mathbb{C} \setminus \{\lambda_i\}) = (T - \lambda_i)^\infty X.$$

Kombinieren wir diese zwei Aussagen so erhalten wir

$$\dot{\sum_{j=1}^{k}} \ker (T - \lambda_j)^{n_j} \subseteq (T - \lambda_1)^\infty X \cap ... \cap (T - \lambda_k)^\infty X.$$

Gemäß (8.6) ist die rechte Seite in $p(T)^\infty X$ enthalten, womit gezeigt wurde, dass $\ker p(T) \subseteq p(T)^\infty X$. $\square$

Literaturverzeichnis

[1] K.B. Laursen, M.M. Neumann. *An Introduction to local spectral theory.* Oxford University Press Inc., New York, 2000.

[2] H. Woracek, M. Kaltenbäck, M. Blümlinger. *Funktionalanalysis 1.* TU Wien, Juni 2020.
`https://www.asc.tuwien.ac.at/ funkana/skripten/fana2020.pdf`

[3] M. Kaltenbäck. *Fundament Analysis.* TU Wien, 2015.
`https://www.asc.tuwien.ac.at/ funkana/kaltenbaeck/kapiteln_buch_2015/kap12u13.pdf`

[4] H. Woracek. *Komplexe Analysis.* TU Wien 2015
`https://www.asc.tuwien.ac.at/ woracek/homepage/downloads/lva/2019S_Kana/kana.pdf`

[5] M. Kaltenbäck *Funktionalanalysis 2.* TU Wien, Oktober 2019.
`https://www.asc.tuwien.ac.at/ funkana/skripten/main.pdf`

[6] M. Kaltenbäck *Funktionalanalysis 3.* TU Wien, Juni 2017
`https://www.asc.tuwien.ac.at/ funkana/kaltenbaeck/fanaIII/fanaIII.pdf`