# W*-ALGEBREN ALS VOLLSTÄNDIGE AXIOMATISIERUNG DER VON-NEUMANN-ALGEBREN

2

<u>Heute</u>: Von-Neumann- und W*-Algebren

Anwendung von C*-Algebren in der Operatortheorie: Spektralsatz für normale Operatoren

Sei: $T \in L_b(H)$, $T^*T = TT^*$. Dann gibt es ein eindeutiges Spektralmaß $E$ auf $\sigma(T)$ mit $T = \int_{\sigma(T)} t \, dE(t)$.

Borelmengen auf $\sigma(T)$

<u>Spektralmaß</u>: Eine Funktion $E : \mathcal{L} \to L_b(H)$

mit
- für alle $\Delta \in \mathcal{L}$ ist $E(\Delta)$ eine Orthogonalprojektion
- $E(\emptyset) = 0$, $E(\sigma(T)) = I$
- $\forall \Delta_1, \Delta_2 \in \mathcal{L} : E(\Delta_1 \cap \Delta_2) = E(\Delta_1) E(\Delta_2)$
- $\forall (\Delta_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{L}^{\mathbb{N}}$ pw. disj. : $E(\bigcup \Delta_n) = \sum_n E(\Delta_n)$ bzgl. der starken Operatortopologie, d.h. für alle $x \in H$ gilt

$$E(\bigcup \Delta_n)x = \sum_n E(\Delta_n)x \quad \text{... GW in } H$$

Wesentlicher Beweisschritt des Spektralsatzes:
Übergang zu $C^*_{L_b(H)}(T)$ ... kommutativ!
und Anwendung der Theorie kommutativer
$C^*$-Algebren.

Etwas unbefriedigend ist, dass man diese
$C^*$-Unteralgebra wieder verlassen muss,
um $E(\Delta)$ zu konstruieren.

Indes: $E(\bigcup \Delta_n) = \sum E(\Delta_n)$ bzgl. der <u>starken</u>
Operatortopologie.
Die Reihe kann nicht bzgl. $\|.\|$ konvergieren:
Wegen $\Delta_n \cap \Delta_m = \emptyset$ für $n \neq m$ ist $\sum_{n=1}^{N} E(\Delta_n)$ eine
Orthogonalprojektion. Außerdem ist
$E(\bigcup \Delta_n) - \sum_{n=1}^{N} E(\Delta_n)$ eine solche. Aber
Orthogonalprojektionen haben Abbildungsnorm
0 oder 1
$\rightsquigarrow$ die Reihe müsste eigentlich eine
endliche Summe sein!

Tatsächlich ist $E(\Delta)$ zwar im Allgemeinen
nicht in $C^*_{L_b(H)}(T)$ enthalten, aber im
Abschluss davon bzgl. der starken Operator-
topologie. In diesem Abschluss sind außerdem
enthalten:
- die Orthogonalprojektion auf ran $T$
- <u>der</u> unitäre Operator aus der Polarzerlegung:
  $T = UB$ mit $B \geq 0$ und $U$ unitär.
  $B$ liegt bereits in $C^*_{L_b(H)}(T)$, $U$ erst im Abschluss.

Daher definiert man:

**Def.**: Eine $C^*$-Unteralgebra von $L_b(H)$ heißt Von-Neumann-Algebra, wenn sie bzgl. der starken Operatortopologie abgeschlossen ist.

Man kann äquivalent auch die schwache Operatortopologie verwenden (punktweise schwache Konvergenz), siehe unten.

Also: Die Abgeschlossenheit in der Normtopologie wird ersetzt durch die Abgeschlossenheit in der starken (bzw. schwachen) Operatortopologie

Kann man die Von-Neumann-Algebren auch vollständig axiomatisieren???

Als Annäherung: Etwas Operatortheorie und noch eine Topologie auf $L_b(H)$

~~Skizze~~

**Def.**: Sei $E$ eine Orthonormalbasis von $H$. Ein Operator $S \in L_b(H)$ heißt Spurklasseoperator, wenn

$$\sum_{e \in E} (\underbrace{|S|}_{:=(S^*S)^{1/2}} e, e) < +\infty \qquad (+)$$

Es gilt (ohne Beweis): Die Aussage (+) ist von der gewählten Orthonormalbasis unabhängig!

Die Menge aller Spurklasseoperatoren bezeichne ich mit $\boxed{L^1(H)}$.

**Satz:**

(i) $L^1(H)$ ist ein Unterraum von $L_b(H)$

(ii) $\|S\|_1 := \sum_{e \in E} (|S|e, e)$ ist eine ~~vollständige~~ Norm auf $L^1(H)$, d.h. $(L^1(H), \|.\|_1)$ ist ein BR

(iii) Es gibt einen isometrischen Isomorphismus

$$\Theta : L_b(H) \longrightarrow L^1(H)'$$

Damit ~~kann~~ man eine weitere Topologie auf $L_b(H)$ definieren:

$L^1(H)'$ trägt die schwach-*-Topologie $\sigma(L^1(H)', L^1(H))$, die man mit $\Theta$ auf $L_b(H)$ zurückziehen kann.

**Def.:** Die <u>ultraschwache Operatortopologie</u> ist $\mathcal{T}_{uw} := \{\Theta^{-1}(O) : O \in \sigma(L^1(H)', L^1(H))\}$ (1)

**Vorsicht:** Die ultraschwache Operatortopologie ist feiner (= stärker) als die schwache Operatortopologie! (ohne Beweis)

**Notation:** $\mathcal{T}_s$ ... starke Operatortopologie

$\mathcal{T}_w$ ... schwache Operatortopologie

(1) Per Definition ist $\Theta : (L_b(H), \mathcal{T}_{uw}) \to (L^1(H)', \sigma(L^1(H)', L^1(H)))$ ein Homöomorphismus.

Entscheidend ist das folgende Resultat:

**Satz**: Für eine $*$-Unteralgebra $A$ von $L_b(H)$ sind äquivalent:

(i) $A$ ist $\mathcal{T}_s$-abgeschlossen

(ii) $A$ ist $\mathcal{T}_w$-abgeschlossen

(iii) $A$ ist $\mathcal{T}_{uw}$-abgeschlossen

Das heißt: Man kann Von-Neumann-Algebren auch durch $\mathcal{T}_{uw}$ definieren.

Der Vorteil für die Axiomatisierung: Betrachtet man die Abbildung $\Theta$ als Blackbox, dann braucht man keine Auswertung von Operatoren mehr, um Von-Neumann-Algebren zu definieren.

Der Nachteil: Wir brauchen den Grundraum $L_b(H)$, der die Von-Neumann-Algebra umfasst.

---

Sei $A \leq L_b(H)$ eine Von-Neumann-Algebra, also $\mathcal{T}_{uw}$-abgeschlossen.

Betrachte $\Theta : (L_b(H), \mathcal{T}_{uw}) \to (L^1(H)', \sigma(L^1(H)', L^1(H)))$.

Die Menge $\Theta(A)$ ist schwach-$*$-abgeschlossen.

$\Rightarrow$ Der Linksannihilator

$$M := {}^{\perp}(\Theta(A)) = \{ S \in L^1(H) : \forall T \in A : \langle S, \Theta(T) \rangle = 0 \}$$

ist $\sigma(L^1(H), L^1(H)')$-abgeschlossen, also $\|\cdot\|_1$-abgeschlossen

FANA 1: $J : \begin{cases} (L^1(H)/M)' \longrightarrow M^\perp \\ f \longmapsto f \circ \pi \end{cases}$ ist ein

isometrischer Isomorphismus, wobei $\pi : L^1(H) \to L^1(H)/M$ die Faktorisierungsabbildung bezeichnet und der Dualraum $(L^1(H)/M)'$ bezüglich der Faktorraum-Norm gebildet wird.

$$M^\perp = ({}^\perp(\Theta(A)))^\perp \overset{\text{FANA 1}}{=} \overline{\operatorname{span}\Theta(A)}^{\sigma(L^1(H)', L^1(H))}$$

$$= \Theta(A)$$

Also: $J : (L^1(H)/M)' \longrightarrow \Theta(A)$ isometrischer Isomorphismus

$\Rightarrow J^{-1} \circ \Theta : A \longrightarrow (L^1(H)/M)'$ isom. Iso.

<u>Also</u>: Von-Neumann-Algebren sind bis auf isometrische Isomorphie der Dualraum eines Banachraums!

Dies ist das gesuchte Zusatzaxiom:

<u>Def.</u>: Eine <u>$W^*$-Algebra</u> ist eine $C^*$-Algebra $A$, für die es einen Banachraum $PD(A)$ und einen isometrischen Isomorphismus $j : A \longrightarrow PD(A)'$ gibt.

$PD(A)$ ist ein <u>Prädualraum</u>.

Wie bei der ultraschwachen Operator-topologie definiert man:

Def: Die Topologie

$$J_{w^*} := \{ j^{-1}(O) : O \in \sigma(PD(A)', PD(A)) \}$$

nennt man die schwach-*-Topologie auf A.

Problem: Es kann mehrere Prädualräume und mehrere isometrische Isomorphismen geben!

Aber: Hier ist der Prädualraum bis auf isometrische Isomorphie eindeutig, und zwar so, dass die schwach-*-Topologie eindeutig ist.

Nach Konstruktion gibt es einen isometrischen Isomorphismus, der ein Homöomorphismus zwischen der schwach-*-Topologie auf A und einer „gewöhnlichen" schwach-*-Topologie ist. Somit kann man Sätze aus der Theorie von z.B. Banachräumen mit der schwach-*-Topologie benutzen.

Zum Beispiel:

Satz (Banach-Dieudonné): Sei $(X, \|.\|)$ ein Banachraum. Ein Unterraum $Y \leq X'$ ist genau dann $\sigma(X', X)$-abgeschlossen, wenn $Y \cap \underbrace{K_1^{\|.\|}(0)}_{=:S}$ abgeschlossen bzgl. $\sigma(X', X)$ ist.

**Korollar**: Sei $(X, \|.\|)$ ein Banachraum.
Ein lineares Funktional $f$ auf $X'$ ist genau dann $\sigma(X', X)$-stetig, wenn $f|_S$ stetig bzgl. (der Spurtopologie von) $\sigma(X', X)$ ist.

**Bew.**:

$f$ $\sigma(X', X)$-stetig

$\Leftrightarrow$ $\ker f$ $\sigma(X', X)$-abgeschlossen

$\overset{B-D}{\Leftrightarrow}$ $\underbrace{\ker f \cap S}_{=(f|_S)^{-1}(\{0\})}$ $\sigma(X', X)$-abgeschlossen

$\overset{S \text{ abg.}}{\Leftrightarrow}$ $(f|_S)^{-1}(\{0\})$ $\sigma(X', X)|_S$-abgeschlossen

Daraus folgt $f|_S$ stetig $\Rightarrow$ $f$ stetig; die Umkehrung ist klar. $\square$

Kurzer Einschub:

**Lemma**: Sei $(X, \|.\|)$ ein Banachraum. Eine Projektion $P: X \to X$ ist genau dann beschränkt, wenn $\ker P$ und $\operatorname{ran} P$ beide abgeschlossen ~~...~~ bzgl. $\|.\|$ ist.

**Bew.**: Für $P$ beschränkt sind $\ker P$ und $\operatorname{ran} P = \ker(I-P)$ abgeschlossen.
Die Umkehrung verwendet den Satz vom abgeschlossenen Graphen: Sei $(x_n, Px_n) \to (x, y)$.
Zu zeigen ist $y = Px$. Es gilt $y = \lim_{n\to\infty} Px_n \in \operatorname{ran} P$ und $x - y = \lim_{n\to\infty} x_n - Px_n \in \ker P$

$\Rightarrow$ $x = y + (x-y)$ ist die Zerlegung in $\operatorname{ran} P$, $\ker P$

$\Rightarrow$ $y = Px$ ✓ $\square$

Wesentliches Instrument für $W^*$-Algebren ist die folgende Variante für die schwach-*-Topologie:

**Lemma**: Sei $(X, \|\cdot\|)$ ein Banachraum. Eine Projektion $P: X' \to X'$ ist genau dann $\sigma(X',X)$-stetig, wenn $\ker P$ und $\operatorname{ran} P$ beide $\sigma(X',X)$-abgeschlossen sind.

**Bew. Skizze**: Da $\sigma(X',X)$ die initiale Topologie bzgl. $\{\iota(x) : x \in X\}$ ist, kann man auf $\iota(x) \circ P$ reduzieren. Nach dem Korollar zu Banach-Dieudonné genügt die Einschränkung $\iota(x) \circ P|_S$, also reicht $P|_S$.
Entscheidend: $S$ ist kompakt! (Banach-Alaoglu)

Es ist dann auch $P(S)$ in einer kompakten Menge enthalten (ohne Beweis), also genügt es für $\underbrace{Px_i}_{\in P(S)} \xrightarrow{i \in I} Px$, dass $Px$ der einzige Häufungspunkt des Netzes ist.
Man nimmt $Px_{i(j)} \xrightarrow{j \in J} y$ an und zeigt $Px = y$ wie im letzten Beweis.

$\square$

**Bemerkung**: Was hier passiert: Ersetze Vollständigkeit durch Kompaktheit!

Die Resultate zu $\sigma(X',X)$ gelten auch für reelle Vektorräume $X$.

Damit kann man unter anderem die folgenden Stetigkeitsaussagen beweisen:

·) Die Operation $\cdot^*$ ist schwach-*-stetig.

·) Die Translationen $x \mapsto ax$ und $x \mapsto xa$ sind für festes $a \in A$ schwach-*-stetig. ✳

Die Multiplikation $(x,y) \mapsto xy$ ist NICHT stetig!

Satz: Die Operation $\cdot^* : A \to A$ ist schwach-*-stetig.

Bew.: Zeige zunächst, dass Re stetig ist.

Es gilt $A = A_{sa} + i A_{sa}$. Betrachtet man $A$ als reellen Vektorraum, so liegt eine Summe von Unterräumen vor. Diese Summe ist sogar direkt: Sei $a = ib$ mit $a, b \in A_{sa}$. Dann gilt $a = a^* = (ib)^* = -ib = -a$, also $a = 0$.

Die Funktion Re ist genau die Projektion auf die erste Komponente dieser Zerlegung. Nach dem Lemma sind also $\operatorname{ran} Re = A_{sa}$ und $\ker Re = iA_{sa}$ als abgeschlossen nachzuweisen

$\rightsquigarrow$ muss zeigen, dass $A_{sa}$ schwach-*-abgeschlossen ist.

Siehe nächstes Resultat!

Wegen $x^* = 2\,Re(x) - x$ folgt aus der Stetigkeit von Re die Stetigkeit von $\cdot^*$ $\square$

✳ Außerdem kann man zeigen, dass $W^*$-Algebren stets ein Einselement haben.

**Lemma:** $A_{sa}$ ist schwach-*-abgeschlossen in $A$.

Bew.: Nach dem Satz von Banach-Dieudonné genügt es, die Abgeschlossenheit von $A_{sa} \cap S$ zu zeigen.
Angenommen, dies ist nicht der Fall. Dann gibt es ein Netz $(x_j)_{j\in I}$ aus $A_{sa} \cap S$, das gegen $x \notin A_{sa} \cap S$ konvergiert. Die Menge $S$ ist kompakt (Banach-Alaoglu), daher abgeschlossen. Also gilt $x \notin A_{sa}$.
Schreibe $x = a + ib$ mit $a, b \in A_{sa}$. Es gilt $b \neq 0$ bzw. $r(b) > 0$.
$\Rightarrow$ es gibt $\lambda \in \sigma(b)$ mit $\lambda \neq 0$.
Da $b$ ~~selbstadjungiert~~ ist, gilt $\lambda \in \mathbb{R}$.
Indem man ggf. zu $(-x_j)_{j\in I}$ und $-x$ übergeht, kann man $\lambda > 0$ annehmen (vgl. Spektralabbildungssatz: $\sigma(-b) = -\sigma(b)$)
Für hinreichend großes $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$1 + n^2 < \lambda^2 + 2\lambda n + n^2 = (\lambda + n)^2,$$

also $(1+n^2)^{1/2} < \lambda + n$.
Daraus folgt für alle $j \in I$

$$\|x_j + in\| = \|\underbrace{(x_j + in)^*}_{= x_j - in}(x_j + in)\|^{1/2} = \|x_j^2 + n^2\|^{1/2}$$

$$\leq (\underbrace{\|x_j^2\|}_{\leq \|x_j\|^2 \leq 1} + n^2)^{1/2} \leq (1 + n^2)^{1/2}$$

$$< \underbrace{\lambda + n}_{\in \sigma(b+n)} \leq r(b+n) = \|b+n\| \leq \|a + ib + in\|$$

$\|\mathrm{Im}(x)\| \leq \|x\|$

Bew. (Lemma, Forts.):

Insgesamt gilt also
$$\|x_j + in\| \leq (1+n^2)^{1/2} < \|a+ib+in\|$$
für ein gewisses $n \in \mathbb{N}$.

$\Rightarrow$ das Netz $(x_j + in)_{j \in I}$ ist in $(1+n^2)^{1/2} S$ enthalten

Diese Menge ist kompakt, insbesondere abgeschlossen, also muss auch der Grenzwert $a+ib+in$ in $(1+n^2)^{1/2} S$ enthalten sein $\lightning$

$\square$

Große Teile des Beweises, dass $x \longmapsto ax$ und $x \longmapsto xa$ stetig sind, funktionieren ähnlich (nur wesentlich aufwendiger).

~~Überblick über den Beweisgang:~~

~~1) $A = pAp \dotplus ((1-p)Ap + A(1-p))$, wobei die direkten Summanden schwach-*-abgeschlossen sind (dazu: Banach-Dieudonné)~~

~~2) $x \longmapsto pxp$ ist~~

Ein wesentliches Konzept im Beweis (und nicht nur dort) ist das einer Projektion in einer $C^*$- (oder $W^*$-) Algebra:

Def.: Ein Element $p \in A$ ist eine Projektion, wenn $p = p^*$ und $p^2 = p$.

Achtung: Es gibt zwei Arten von Projektionen: $\boxed{\text{Elemente}}$ $p \in A$ und $\boxed{\text{Abbildungen}}$ $P: A \to A$ !

Beispiel: Für $A = L_b(H)$ sind die Projektionen in $A$ genau die Orthogonalprojektionen auf $H$.

Überblick über den Beweisgang:

Im Folgenden sei $p$ immer eine Projektion in $A$.

1) $A = pAp \dot{+} \left((1-p)Ap + A(1-p)\right)$, wobei die direkten Summanden schwach-$*$-abgeschlossen sind (dazu: Banach-Dieudonné)

2) $x \longmapsto pxp$ ist die Projektion auf die erste Komponente der Zerlegung aus 1) und daher schwach-$*$-stetig

3) Wie 1) für $A = pA(1-p) \dot{+} \left((1-p)A + pAp\right)$

4) Wie 2) für $x \longmapsto px(1-p)$ und die Zerlegung aus Schritt 3)

5) Summenbildung: $x \longmapsto px$ ist stetig

6) Lifting auf beliebige $a \in A$ anstatt $p$

$\rightsquigarrow$ $x \longmapsto ax$ ist stetig

7) $x \longmapsto xa = (a^* x^*)^*$ ist stetig

~~Zum Lifting aus Schritt 6):~~
~~Der Weg führt einmal mehr über kommutative Algebren ($C_A^*(\mathrm{Re}\, a)$, $C_A^*(\mathrm{Im}\, a)$ sind kommutativ). Es stellt sich also die Frage, unter welchen Voraussetzungen an $K$ im Raum $C(K)$.~~

Zum Lifting aus Schritt 6):

Man zeigt, dass die lineare Hülle der Projektionen dicht bzgl. $\|\cdot\|$ (!) ist. Der Weg führt einmal mehr über kommutative Algebren ($C_A^*(\mathrm{Re}\, a)$, $C_A^*(\mathrm{Im}\, a)$ sind kommutativ). Es geht also um Projektionen in $C(K)$. Das sind genau jene Funktionen, die nur 0 oder 1 annehmen.

Extrembeispiel: $C[0,1]$, hier gibt es nur zwei Projektionen, nämlich 0 und $\mathbb{1}$, da $f([0,1]) \subseteq \{0,1\}$ zusammenhängend sein muss.

$\leadsto$ die lineare Hülle der Projektionen besteht aus den konstanten Funktionen.

Allgemeiner: Wenn die lineare Hülle der Projektionen dicht sein soll, dann muss $K$ total unzusammenhängend sein.

Untersucht man die Frage genauer, so stößt man auf den folgenden Begriff:

Def.: Ein topologischer Raum heißt extremal unzusammenhängend, wenn der Abschluss jeder offenen Menge wieder offen (und damit clopen) ist. Ein extremal unzusammenhängender, kompakter Hausdorffraum heißt stonesch.

Man kann zeigen:

**Satz**: Für einen stoneschen Raum $K$ ist die lineare Hülle der Projektionen von $C(K)$ $\|\cdot\|$-dicht in $C(K)$.

**Satz**: Sei $A$ eine $W^*$-Algebra und $C$ eine maximale kommutative $C^*$-Unteralgebra von $A$. Dann ist ~~die lineare Hülle der~~ der Gelfandraum von $C$ stonesch.

Da Projektionen in $C$ auch Projektionen in $A$ sind, erhält man mit der Zerlegung in Real- und Imaginärteil und dem Lemma von Zorn:

**Satz**: In einer $W^*$-Algebra $A$ ist die lineare Hülle der Projektionen $\|\cdot\|$-dicht.

Zum Abschluss ein Beispiel:

**Beispiel**:

Betrachte $L^\infty[0,1]$ mit den Standardoperationen und der essentiellen Supremumsnorm $\|\cdot\|_\infty$. Man rechnet schnell nach, dass $L^\infty[0,1]$ eine $C^*$-Algebra ist. Tatsächlich ist $L^\infty[0,1]$ sogar eine $W^*$-Algebra, es gilt ja $L^\infty[0,1] \underset{\text{isom.}}{\cong} L^1[0,1]'$!

Beispiel (Forts.)

Hier lässt sich die Dichtheit der linearen Hülle der Projektionen gut illustrieren: Die Projektionen in $L^\infty[0,1]$ sind genau die (Äquivalenzklassen von) messbaren Indikatorfunktionen. Deren lineare Hülle besteht aus den Treppenfunktionen, also bedeutet die Dichtheit genau:
Die messbaren Treppenfunktionen sind $\|.\|_\infty$-dicht in $L^\infty[0,1]$.

Außerdem kann man explizit eine isometrisch isomorphe Von-Neumann-Algebra angeben:
Sei für $f \in L^\infty[0,1]$ der Operator $M_f$ auf $L^2[0,1]$ definiert durch $M_f g := f \cdot g$.
Die Abbildung

$$\Phi : L^\infty[0,1] \longrightarrow L_b(L^2[0,1])$$
$$f \longmapsto M_f$$

ist ein $*$-Homomorphismus, der offensichtlich injektiv ist.
$\Rightarrow$ nach dem Satz vom letzten Mal ist $\Phi$ isometrisch und $\operatorname{ran} \Phi$ eine $C^*$-Unteralgebra von $L_b(L^2[0,1])$.
Tatsächlich ist $\operatorname{ran} \Phi = \{M_f : f \in L^\infty[0,1]\}$ sogar bzgl. der starken Operatortopologie abgeschlossen, also eine Von-Neumann-Algebra.