W*-ALGEBREN ALS VOLLSTÄNDIGE AXIOMATISIERUNG DER VON-NEUMANN-ALGEBREN

3

Heute: Der Satz von Sakai

Zur Erinnerung:

Def: Eine Von-Neumann-Algebra ist eine C^*-Unteralgebra von $L_b(H)$, die zusätzlich bzgl. der starken Operatortopologie abgeschlossen ist.

Äquivalent kann man auch die schwache oder die ultraschwache Operatortopologie verwenden. $\hookrightarrow \Theta : L_b(H) \longrightarrow L^1(H)'$ isom. Iso $\rightsquigarrow \sigma(L^1(H)', L^1(H))$ mittels Θ zurückziehen auf $L_b(H)$

Def: Eine W*-Algebra A ist eine C^*-Algebra, für die es einen Banachraum $PD(A)$ und einen isometrischen Isomorphismus $j : A \rightarrow PD(A)'$ gibt.

Die schwach-*-Topologie auf A ist $\mathcal{T}_{w^*,A} := \{ j^{-1}(O) : O \in \sigma(PD(A)', PD(A)) \}$

Also: $\boxed{\mathcal{T}_{w^*, L_b(H)} = \mathcal{T}_{uw} \,,\quad PD(L_b(H)) = L^1(H)}$

~~Eine Von-Neumann-Algebra $A \le L_b(H)$ ist immer eine W^*-Algebra.~~

~~$\Rightarrow$ zwei kanonische Topologien auf A, nämlich $\mathcal{T}_{w^*,A}$ und $\mathcal{T}_{uw}|_A$.~~

Die Operation * und die multiplikativen Translationen $x \mapsto ax$ und $x \mapsto xa$ sind stetig bzgl. der schwach-$*$-Topologie auf A, außerdem hat A stets ein Einselement.

Eine Von-Neumann-Algebra $A \le L_b(H)$ ist immer eine W^*-Algebra.

$\Rightarrow$ zwei kanonische Topologien auf A, nämlich $\mathcal{T}_{w^*,A}$ und $\mathcal{T}_{uw}|_A$.

Diese stellen sich als gleich heraus! Das gilt aber auch in allgemeinerem Rahmen:

Def: Sei A eine W^*-Algebra. Eine schwach-$*$-abgeschlossene $*$-Unteralgebra $B \le A$ nennt man **W^*-Unteralgebra**.

Wie beim Beweis, dass Von-Neumann-Algebren immer W^*-Algebren sind, zeigt man, dass B für sich eine W^*-Algebra ist.

Lemma: $(\mathcal{T}_{w^*,A})|_B = \mathcal{T}_{w^*,B}$

Es gilt: Die Von-Neumann-Algebren $B \subseteq L_b(H)$ sind genau die W^*-Unteralgebren B von $L_b(H)$.

Der Satz von Sakai besagt, dass jede W^*-Algebra als W^*-Algebra isomorph zu einer Von-Neumann-Algebra ist.

"isomorph als W^*-Algebra": Es gibt einen $*$-Isomorphismus, der isometrisch ist und ein Homöomorphismus bzgl. der schwach-$*$-Topologien.

Der Satz von Gelfand-Naimark ist ~~[illegible]~~ eine analoge Aussage für C^*-Algebren und $\|.\|$-abgeschlossene Unteralgebren von $L_b(H)$.

Zur Erinnerung: Die Beweisschritte im Satz von Gelfand-Naimark waren

1) Reduktion auf die Existenz eines injektiven $*$-Homomorphismus $\Phi: A \to L_b(H)$, also einer treuen Darstellung
[automatische Isometrie]

2) Konstruktion der GNS-Darstellung zu einem positiven Funktional φ:
$\sigma(a,b) := \varphi(b^* a)$ .. pos. semidefinite Sesquilinearform
$\leadsto$ definit machen, vervollständigen zu H_φ
$\Phi_\varphi(a)(b+N_\varphi) := ab + N_\varphi$ + Fortsetzung auf H_φ

3) Verkleben der GNS-Darstellungen für alle positiven Funktionale

[entscheidend: die positiven Funktionale sind (fast) punktetrennend, d.h. für $a \neq 0$ selbstadjungiert gibt es ein positives Funktional φ mit $\varphi(a) \neq 0$]

Der Beweis des Satzes von Sakai folgt einem ähnlichen Plan.

Das Analogon zu Schritt 1) ist der folgende Satz (A ist immer eine W^*-Algebra):

Satz: Sei B

(i) eine weitere W^*-Algebra oder

(ii) $B = L_b(H)$

und sei $\Phi: A \to B$ ein injektiver $*$-Homomorphismus, der

(i) $\mathcal{T}_{w^*,A} \mid \mathcal{T}_{w^*,B}$ - stetig oder

(ii) $\mathcal{T}_{w^*,A} \mid \mathcal{T}_w$ - stetig ← schwache Operatortopologie

ist. Dann ist $\operatorname{ran} \Phi$ eine W^*-Unteralgebra von B, also für $B = L_b(H)$ eine Von-Neumann-Algebra. Außerdem ist $\Phi^{-1}: \operatorname{ran}\Phi \to A$ jedenfalls ein $\mathcal{T}_{w^*,\operatorname{ran}\Phi} \mid \mathcal{T}_{w^*,A}$ - stetiger $*$-Homomorphismus.

Bew. (Satz): Setze $C := \operatorname{ran} \Phi$.

Für die erste Aussage genügt es nach dem Satz von Banach-Dieudonné zu zeigen, dass $C \cap S_B$ abgeschlossen bzgl. $\mathcal{T}_{w^*,B}$ ist.

Nach der automatischen Isometrie aus dem ersten Vortrag ist Φ isometrisch.

$\Rightarrow C \cap S_B = \operatorname{ran} \Phi \cap S_B = \Phi(S_A)$

Gemäß Banach-Alaoglu ist S_A kompakt bzgl. $\mathcal{T}_{w^*,A}$. Im Fall (i) ist $\Phi(S_A)$ als stetiges Bild davon kompakt bzgl. $\mathcal{T}_{w^*,B}$, insbesondere abgeschlossen, und wir sind fertig. Im Fall (ii) folgt analog die Abgeschlossenheit bzgl. $\mathcal{T}_w$, also auch bzgl. der Spurtopologie $(\mathcal{T}_w)|_{S_B}$.

Es gilt $(\mathcal{T}_w)|_{S_B} = (\mathcal{T}_{uw})|_{S_B}$ (ohne Beweis), also ist $\Phi(S_A)$ abgeschlossen bzgl. $(\mathcal{T}_{uw})|_{S_B}$.

Aus der $\mathcal{T}_{uw}$-Abgeschlossenheit von S_B folgt $\overline{\Phi(S_A)}^{\mathcal{T}_{uw}} \subseteq S_B$.

$$\Rightarrow \Phi(S_A) = \overline{\Phi(S_A)}^{(\mathcal{T}_{uw})|_{S_B}} = \overline{\Phi(S_A)}^{\mathcal{T}_{uw}} \cap S_B = \overline{\Phi(S_A)}^{\mathcal{T}_{uw}}$$

Somit ist $\Phi(S_A)$ auch im Fall (ii) abgeschlossen bzgl. $\mathcal{T}_{uw}$.

Bew. (Satz, Forts):

Für die $\mathcal{T}_{w^*,\operatorname{ran}\Phi} / \mathcal{T}_{w^*,A}$ - Stetigkeit von $\Phi^{-1} : \operatorname{ran}\Phi \to A$ nur eine Skizze:

$\mathcal{T}_{w^*,A}$ ist eine initiale Topologie, also kann man auf die Stetigkeit der Verkettungen von Φ^{-1} mit gewissen Funktionalen reduzieren. Die Stetigkeit von Funktionalen ist äquivalent zur $\mathcal{T}_{w^*,C}$-Abgeschlossenheit der Kerne. Nach Banach-Dieudonné genügt ~~die~~ Abgeschlossenheit des Schnitts mit der Einheitskugel in C. Für ein Funktional f gilt

$$\ker(f \circ \Phi^{-1}) \cap S_C = (\Phi^{-1})^{-1}(\ker f) \cap S_C =$$
$$= \Phi(\ker f) \cap S_C = \Phi(\ker f \cap S_A)$$

Die einzusetzenden Funktionale f sind $\mathcal{T}_{w^*,A}$-stetig, also ist ihr Kern abgeschlossen und $\ker f \cap S_A$ kompakt bzgl. $\mathcal{T}_{w^*,A}$.

Wie im ersten Beweisschritt folgt die Abgeschlossenheit von $\Phi(\ker f \cap S_A)$ entweder direkt (Fall (i)) oder mit einem Zwischenargument (Fall (ii)).

$\square$

Im Beweis des Satzes von Gelfand-Naimark spielte der Begriff der Darstellung eine entscheidende Rolle. Diesen Begriff muss man hier um Stetigkeitsbedingungen erweitern. Wegen der Diskrepanz zwischen $\mathcal{T}_{uw}$ und $\mathcal{T}_w$ geschieht das auf zwei Weisen.

Def:

(i) Eine <u>W^*-Darstellung</u> ist ein $*$-Homomorphismus $\Phi : A \to L_b(H)$, der $\mathcal{T}_{W^*,A} \mid \mathcal{T}_{uw}$-stetig ist.

(ii) Eine <u>Von-Neumann-Darstellung</u> ist ein $*$-Homomorphismus $\Phi : A \to L_b(H)$, der $\mathcal{T}_{W^*,A} \mid \mathcal{T}_w$-stetig ist.

Ist Φ injektiv, so heißt die entsprechende Darstellung wieder <u>treu</u>.

Wegen $\mathcal{T}_w \subseteq \mathcal{T}_{uw}$ (ohne Beweis) ist eine W^*-Darstellung automatisch eine Von-Neumann-Darstellung.

Inspiriert vom Beweis des Satzes von Gelfand-Naimark ist es ein natürliches Vorgehen, eine treue W^*-Darstellung Φ zu suchen. Der (einfachere) Fall (i) des Satzes liefert dann, dass $\operatorname{ran}\Phi$ eine zu A als W^*-Algebra isomorphe Von-Neumann-Algebra ist.

Leider ist die $\mathcal{T}_{w^*,A} \mid \mathcal{T}_{w^*,L_b(H)} = \mathcal{T}_{\sigma w}$ - Stetigkeit relativ schwierig zu handhaben, weshalb man Von-Neumann-Darstellungen verwendet. Hier ist dafür die Schlussfolgerung der Isomorphie als W^*-Algebra nicht so klar. Mit einem Trick kann man diese aber trotzdem sehen:

<u>Korollar</u>: Eine $\boxed{\text{treue}}$ Von-Neumann-Darstellung $\Phi : A \to L_b(H)$ ist auch eine treue W^*-Darstellung. In diesem Fall ist $\operatorname{ran}\Phi \subseteq L_b(H)$ eine zu A als W^*-Algebra isomorphe Von-Neumann-Algebra.

<u>Bew.</u>: Nach Fall (ii) des Satzes ist $\operatorname{ran}\Phi$ eine Von-Neumann-Algebra, also für sich eine W^*-Algebra. Außerdem ist $\Phi^{-1} : \operatorname{ran}\Phi \to A$ stetig bzgl. $\mathcal{T}_{w^*,\operatorname{ran}\Phi} \mid \mathcal{T}_{w^*,A}$.

Wende jetzt Fall (i) auf Φ^{-1} an!

- $\operatorname{ran}\Phi^{-1} = A$ ist eine W^*-Algebra ✓
- $\underbrace{(\Phi^{-1})^{-1}}_{=\Phi} : \underbrace{\operatorname{ran}\Phi^{-1}}_{=A} \to \operatorname{ran}\Phi$ ist ein $\mathcal{T}_{w^*,\underbrace{\operatorname{ran}\Phi^{-1}}_{=A}} \mid \mathcal{T}_{w^*,\operatorname{ran}\Phi}$ -stetiger *-Homomorphismus

Also: Φ ist eine (treue) W^*-Darstellung

$\square$

Damit haben wir den Beweis des Satzes von Sakai darauf reduziert, eine treue Von-Neumann-Darstellung zu konstruieren. Dazu verwenden wir natürlich wieder die GNS-Darstellungen zu positiven Funktionalen. Wegen der zusätzlichen topologischen Anforderung muss man sich auf die schwach-$*$-stetigen positiven Funktionale beschränken.

Lemma: Die von einem schwach-$*$-stetigen positiven Funktional φ induzierte GNS-Darstellung ist eine Von-Neumann-Darstellung.

Bew.: $\Phi_\varphi : A \to L_b(H_\varphi)$ ist genau dann $\mathcal{T}_{w^*,A} / \mathcal{T}_w$-stetig, wenn alle Funktionale

$$f_{x,y} : \begin{cases} A \longrightarrow \mathbb{C} \\ a \longmapsto (\Phi_\varphi(a)x, y)_{H_\varphi} \end{cases}$$

für $x, y \in H_\varphi$ schwach-$*$-stetig sind.

Nach dem Korollar zu Banach-Dieudonné genügt die Stetigkeit auf S.

Wenn x, y sogar aus A/N_φ sind, folgt die Stetigkeit aus den Stetigkeitsannahmen zu den Operationen in einer W^*-Algebra:

Schreibe $x = \tilde{x} + N_\varphi$, $y = \tilde{y} + N_\varphi$. Dann gilt

$$f_{x,y}(a) = (\Phi_\varphi(a)(\tilde{x} + N_\varphi), \tilde{y} + N_\varphi)_{H_\varphi} =$$

$$= (a\tilde{x} + N_\varphi, \tilde{y} + N_\varphi)_{H_\varphi} = \varphi((a\tilde{x})^* \tilde{y}) = \varphi(\tilde{x}^* a^* \tilde{y})$$

Bew. (Lemma, Forts.):

Für beliebige $x, y \in H_\varphi$ gibt es Folgen $(\underbrace{\tilde{x}_n + N_\varphi}_{=:x_n})_{n\in\mathbb{N}}$ bzw. $(\underbrace{\tilde{y}_n + N_\varphi}_{=:y_n})_{n\in\mathbb{N}}$ aus A/N_φ, die gegen x bzw. y konvergieren.

Für $a \in S$ gilt

$$|f_{x,y}(a) - f_{x_n,y_n}(a)| =$$

$$= |(\Phi_\varphi(a)(x-x_n), y)_{H_\varphi} + (\Phi_\varphi(a)x_n, y-y_n)_{H_\varphi}|$$

$$\le \|\Phi_\varphi\|\cdot\underbrace{\|a\|}_{\le 1 !}\cdot\|x-x_n\|\cdot\|y\| + \|\Phi_\varphi\|\cdot\underbrace{\|a\|}_{\le 1 !}\cdot\overbrace{\|x_n\|}^{\le C, \text{ da konvergent}}\cdot\|y-y_n\|$$

$$\le \|\Phi_\varphi\|\cdot\|x-x_n\|\cdot\|y\| + C\cdot\|\Phi_\varphi\|\cdot\|y-y_n\|$$

Dieser Ausdruck geht gegen 0, unabhängig von $a \in S$.

$\Rightarrow f_{x_n,y_n}|_S \to f_{x,y}|_S$ gleichmäßig

$\Rightarrow f_{x,y}$ ist auch schwach-*-stetig ✓

□

Diese Von-Neumann-Darstellungen werden wir verkleben. Für die Treue braucht man den folgenden Satz:

Satz: Für $b \neq 0$ selbstadjungiert gibt es ein schwach-*-stetiges positives Funktional φ mit $\varphi(b) \neq 0$.

Damit können wir die gesuchte treue Von-Neumann-Darstellung definieren:

$H := \bigoplus_{\varphi} H_{\varphi}$, wobei φ über alle schwach-*-stetigen positiven Funktionale läuft

$\Phi(a) : (x_{\varphi})_{\varphi} \mapsto (\Phi_{\varphi}(a) x_{\varphi})_{\varphi}$,

wie beim Satz von Gelfand-Naimark

$\rightsquigarrow \Phi : A \to L_b(H)$ ist jedenfalls eine Darstellung

Der Satz von Sakai reduziert sich also auf die folgende Aussage:

Satz (Sakai): Φ ist eine treue Von-Neumann-Darstellung

<u>Bew</u>: Zeige zuerst, dass Φ eine Von-Neumann-Darstellung ist, äquivalent dass

$f_{x,y} : a \mapsto (\Phi(a)x, y)$

für alle $x, y \in H$ schwach-*-stetig ist.

Wie im letzten Beweis genügt es, x und y aus einer dichten Menge zu wählen.

$Y := \{ (x_{\varphi})_{\varphi} \in H : x_{\varphi} = 0 \text{ für fast alle } \varphi \}$

ist dicht, vgl. $c_{00}(\mathbb{N}) \subseteq \ell^2(\mathbb{N})$.

Sind $x, y \in Y$, so gibt es eine endliche Menge F von Funktionalen mit $x_{\varphi} = y_{\varphi} = 0$ für alle $\varphi \notin F$.

$\Rightarrow f_{x,y}(a) = \sum_{\varphi \in F} (\Phi_{\varphi}(a) x_{\varphi}, y_{\varphi})$

Da die Φ_{φ} Von-Neumann-Darstellungen sind, ist jeder Summand und damit auch ihre endliche Summe stetig.

Bew. (Sakai, Forts.):

Der Beweis, dass Φ treu ist, verläuft genauso wie beim Satz von Gelfand-Naimark:
Aus $\Phi(a)=0$ folgt $\Phi_\varphi(a)=0$ für alle schwach-*-stetigen positiven Funktionale φ. Durch Betrachten von a^*a kann man annehmen, dass a selbst schon selbstadjungiert ist.
Es gilt $\varphi(a^4) = \|\Phi_\varphi(a)(a+N_\varphi)\|^2_{H_\varphi} = 0$ für alle φ. Nach einem obigen Satz folgt $a^4=0$ und damit $\|a\|^4 = \|a^4\| = 0$, also $a=0$.

$\square$

Bem.: Die Operatortopologien $\mathcal{T}_s$, $\mathcal{T}_w$, $\mathcal{T}_{uw}$ sind in vielerlei Hinsicht gleichberechtigt (aber alle verschieden). Betrachtet man Von-Neumann-Algebren als W^*-Algebren, so bietet sich die ultraschwache Operatortopologie $\mathcal{T}_{uw}$ als kanonische Topologie an.