Die Hausdorff-Metrik und Limiten von Mengen

Jakob Reiffenstein

Seminararbeit aus Analysis
SS 2017

Inhaltsverzeichnis

Zusammenfassung

Die vorliegende Seminararbeit widmet sich zunächst der Hausdorff-Metrik. Diese lässt sich ausgehend von einem beliebigen kompakten metrischen Raum (X, d) definieren und gibt eine Metrik für den *Hyperraum* $\mathcal{H}(X)$ der abgeschlossenen, nichtleeren Teilmengen von X. Das erlaubt uns, nicht nur den Abstand zweier Punkte aus X zu messen, sondern auch, wie nahe bzw. ähnlich sich zwei Mengen aus $\mathcal{H}(X)$ sind.
Anschließend wird untersucht, wie sich Konvergenz bezüglich der Hausdorff-Metrik charakterisieren lässt. Schließlich lässt sich sogar beweisen, dass der Raum $\mathcal{H}(X)$, auf dem die Hausdorff-Metrik definiert ist, kompakt ist. Dasselbe gilt für den Raum $\mathcal{C}(X)$ der zusammenhängenden Mengen aus $\mathcal{H}(X)$.

1 Die Hausdorff-Metrik

Definition 1.1 *Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum. Der Hyperraum $\mathcal{H}(X)$ ist definiert als die Menge aller abgeschlossenen und nichtleeren Teilmengen von X, d.h.*

$$\mathcal{H}(X) := \{A \subseteq X : A \textit{ ist abgeschlossen und } A \neq \emptyset\}.$$

Für die nun folgende Definition der Hausdorff-Metrik benötigen wir die wesentlich spezifischere Voraussetzung eines kompakten metrischen Raumes (X, d). Beachte, dass in diesem Fall die abgeschlossenen Teilmengen von X genau die kompakten Teilmengen sind.

Definition 1.2 *Sei (X, d) ein kompakter metrischer Raum, A, $B \in \mathcal{H}(X)$ und $\delta > 0$. Bezeichne*

$$N_\delta(A) := \{x \in X : d(x, A) < \delta\},$$

wobei $d(x, A) := \inf_{y \in A} d(x, y) = \min_{y \in A} d(x, y)$. Dann wird die Hausdorff-Metrik definiert durch

$$H_d(A, B) := \inf\{\epsilon > 0 : A \subseteq N_\epsilon(B) \textit{ und } B \subseteq N_\epsilon(A)\}.$$

Bemerkung 1.3. Der Ausdruck $H_d(K, L)$ gibt an, wie stark K und L aneinander gekoppelt sind. Und zwar liegt jedes $x \in K$ nicht weiter als $H_d(K, L)$ von L entfernt. Genauer werden wir folgende Aussage beweisen:

$$\text{Für alle } K, L \in \mathcal{H}(X) \text{ und } x \in K \text{ existiert } y \in L \text{ mit } d(x, y) \leq H_d(K, L). \tag{1}$$

Wir konstruieren ein $y \in L$ mit dieser Eigenschaft. Nach Definition von H_d gilt für alle $n \in \mathbb{N}$ die Inklusion $K \subseteq N_{H_d(K,L)+\frac{1}{n}}(L)$. Daraus folgt die Existenz von $y_n \in L$ mit $d(x, y_n) < H_d(K, L) + \frac{1}{n}$. Weil L kompakt ist, hat $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine konvergente Teilfolge mit Grenzwert $y \in L$. Dieses y erfüllt dann die Beziehung $d(x, y) \leq H_d(K, L)$.

Weiters sei angemerkt, dass die Definition von H_d offensichtlich symmetrisch in A und B ist. Salopp gesagt wird dadurch sichergestellt, dass die Hausdorff-Metrik mit unserer Anschauung zusammenpasst. Wenn nämlich bloß $A \subseteq N_\epsilon(B)$ mit "kleinem" $\epsilon > 0$ gilt, folgt nicht zwingend, dass A ähnlich zu B ist. Ein Gegenbeispiel wären die Kugeln $U_1(0)$ und $U_2(0)$ im $\mathbb{R}^n$: Zwar gilt $U_1(0) \subseteq N_\epsilon(U_2(0))$ für alle $\epsilon > 0$, aber $U_2(0) \subseteq N_\epsilon(U_1(0))$ nur für $\epsilon > 1$. Wir sehen also, dass Mengen A, B mit "kleinem" Abstand $H_d(A, B)$ immer eine ähnliche Größe besitzen.

Lemma 1.4 *Die Funktion H_d definiert eine Metrik auf $\mathcal{H}(X)$.*

Beweis. Symmetrie und Nichtnegativität sind aus der Definition ersichtlich. Ist $H_d(A,B)=0$, dann folgt $A \subseteq N_\epsilon(B)$ und $B \subseteq N_\epsilon(A)$ für alle $\epsilon > 0$. Wir behaupten, dass daraus $A \subseteq B$ sowie $B \subseteq A$ folgt, also $A = B$. Um das einzusehen, wähle o.B.d.A. ein $x \in A \backslash B$. Weil B kompakt ist, gilt $c := d(x,B) > 0$. Setze $\epsilon := \frac{c}{2}$. Wir sehen $x \notin N_\epsilon(B)$ im Widerspruch zur Voraussetzung.
Der wesentliche Aufwand besteht darin, die Gültigkeit der Dreiecksungleichung zu beweisen. Wir verwenden die Hilfsaussage (1). Sind $A, B, C \in \mathcal{H}(X)$ und $a \in A$, dann gibt es aufgrund von (1) ein $b \in B$ mit $d(a,b) \leq H_d(A,B)$. Ausgehend von jenem b existiert wiederum ein $c \in C$ mit $d(b,c) \leq H_d(B,C)$. Es folgt

$$d(a,c) \leq d(a,b) + d(b,c) \leq H_d(A,B) + H_d(B,C).$$

Das bedeutet, dass für beliebiges $\delta > 0$ und mit $z := H_d(A,B) + H_d(B,C)$ die strike Ungleichung $d(a,c) < z + \delta$ gilt. Weil $a \in A$ beliebig war, folgt $A \subseteq N_{z+\delta}(C)$ für jedes $\delta > 0$. Analog beweist man auch $C \subseteq N_{z+\delta}(A)$. Daraus folgt $H_d(A,C) \leq \eta + \delta$ für alle $\delta > 0$. Damit gilt schließlich $H_d(A,C) \leq z = H_d(A,B) + H_d(B,C)$. □

Bemerkung 1.5. Mit der Hausdorff-Metrik erhält man ein Instrument, mit dem man die geometrische Größe zweier Mengen vergleichen kann. Diese Aussage klingt zunächst etwas schwammig, aber man kann ihr auch mathematisch gesehen einen Sinn geben. Und zwar lässt sich beweisen (siehe dazu [N, 4.33]), dass es zu jedem kompakten metrischen Raum (X,d) eine sogenannte "Größenfunktion"$\mu : \mathcal{H}(X) \to [0, +\infty)$ gibt, die folgendes erfüllt:

- μ ist stetig,
- für alle $A, B \in \mathcal{H}(X)$ mit $A \subsetneq B$ gilt $\mu(A) < \mu(B)$ und
- $\mu(\{x\}) = 0$ für alle $x \in X$.

Als nächstes konstruieren wir eine weitere Topologie auf dem Hyperraum $\mathcal{H}(X)$, die *Vietoris-Topologie*. Dazu geben wir eine Basis und eine Subbasis an. Wir benötigen dafür keine Voraussetzungen an den Raum $(X, \mathcal{T})$. Wenn aber (X,d) ein kompakter metrischer Raum ist, stimmt die Vietoris-Topologie mit der von H_d erzeugten Topologie überein.

Definition 1.6 *Für einen topologischen Raum $(X,\mathcal{T})$ und beliebige $U, U_1, ..., U_n \in \mathcal{T}$ definieren wir:*

- $\Gamma(U) := \{A \in \mathcal{H}(X) : A \subseteq U\}$,
- $\Lambda(U) := \{A \in \mathcal{H}(X) : A \cap U \neq \emptyset\}$,
- $\langle U_1, ..., U_n\rangle := \{A \in \mathcal{H}(X) : A \subseteq \bigcup_{i=1}^n U_i \text{ und } A \cap U_i \neq \emptyset, \quad i = 1, ..., n\}$.

Lemma 1.7 *Mit der Notation von Definition* 1.6 *gilt*

1. $\Gamma(U) = \langle U\rangle$ *und* $\Lambda(U) = \langle X, U\rangle$,
2. $\langle U_1, ..., U_n\rangle = \Gamma\big(\bigcup_{i=1}^n U_i\big) \cap \Big(\bigcap_{i=1}^n \Lambda(U_i)\Big)$.

   Mit $U := \bigcup_{i=1}^n U_i$ *sowie* $V := \bigcup_{j=1}^m V_j$ *gilt:*

3. $\langle U_1, ..., U_n\rangle \cap \langle V_1, ..., V_m\rangle = \langle V \cap U_1, ..., V \cap U_n, U \cap V_1, ..., U \cap V_m\rangle$.

Beweis. Die ersten beiden Aussagen sind klar. Um 3. nachzuprüfen, betrachte man zunächst folgende Gleichheit:

$$(\bigcup_{i=1}^{n} U_i) \cap (\bigcup_{j=1}^{m} V_j) = \bigcup_{j=1}^{m}(U \cap V_j) = \bigcup_{i=1}^{n}(V \cap U_i) = \bigcup_{j=1}^{m}(U \cap V_j) \cup \bigcup_{i=1}^{n}(V \cap U_i).$$

Es bleibt zu bemerken, dass $A \cap (V \cap U_i) \neq \emptyset$ impliziert, dass (als Obermenge davon) auch $A \cap U_i \neq \emptyset$. Dasselbe gilt für $U \cap V_j$. Umgekehrt folgt für $A \subseteq V$ gemeinsam mit $A \cap U_i \neq \emptyset$, dass $A \cap (V \cap U_i) = A \cap U_i \neq \emptyset$; dieselbe Aussage gilt für $A \cap (U \cap V_j)$. $\square$

Satz 1.8 *Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und*

$$\mathcal{B} := \{\langle U_1, ..., U_n\rangle : n \in \mathbb{N} \text{ und } U_1, ..., U_n \in \mathcal{T}\}$$
$$\mathcal{P} := \{\Gamma(U) : U \in \mathcal{T}\} \cup \{\Lambda(U) : U \in \mathcal{T}\}$$

Dann ist $\mathcal{B}$ die Basis einer Topologie $\mathcal{T}_V$ auf $\mathcal{H}(X)$, der sogenannten Vietoris-Topologie. $\mathcal{P}$ ist eine Subbasis dieser Topologie.

Beweis. Aus Lemma 1.7, 3. erkennt man, dass $\mathcal{B}$ durchschnittsstabil ist. Wegen $\mathcal{H}(X) = \langle X\rangle$ ist $\mathcal{B}$ Basis von $\mathcal{T}_V := \mathcal{T}(\mathcal{B})$, d.h. von der gröbsten Topologie auf $\mathcal{H}(X)$, die $\mathcal{B}$ enthält; siehe [K, 12.4.8]. Sei $[\mathcal{P}] := \{\bigcap_{i=1}^{n} P_i : n \in \mathbb{N}, P_1, ..., P_n \in \mathcal{P}\}$. Wegen Lemma 1.7, 1. gilt $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{B}$, und infolge auch $[\mathcal{P}] \subseteq \mathcal{B}$, weil $\mathcal{B}$ ja durchschnittsstabil ist. Umgekehrt gilt aufgrund von 2. in Lemma 1.7, dass $\mathcal{B} \subseteq [\mathcal{P}]$. Insgesamt ergibt das $\mathcal{B} = [\mathcal{P}]$, womit $\mathcal{P}$ eine Subbasis von $\mathcal{T}_V$ ist. $\square$

Satz 1.9 *Sei (X, d) ein kompakter metrischer Raum. Bezeichne $\mathcal{T}_H$ die Topologie, die man durch die Hausdorff-Metrik H_d auf $\mathcal{H}(X)$ erhält. Dann gilt $\mathcal{T}_H = \mathcal{T}_V$.*

Beweis. Wir schreiben für $A, B \in \mathcal{H}(X)$ und $\epsilon > 0$:

$$U_\epsilon(A) := \{K \in \mathcal{H}(X) : H_d(A, K) < \epsilon\}$$
$$d(A, B) := \inf\{d(a, b) : a \in A, b \in B\}.$$

Wir beweisen zuerst, dass für $U \in \mathcal{T}$ die Mengen $\Gamma(U)$ und $\Lambda(U)$ immer offen bezüglich H_d sind. Für $U = X$ ist das klar, weil $\Gamma(X) = \Lambda(X) = \mathcal{H}(X)$. Für $U \in \mathcal{T}\backslash\{X\}$, $A \in \Gamma(U)$ sei $\epsilon := d(A, X\backslash U) > 0$. Zu beweisen ist die Inklusion $U_\epsilon(A) \subseteq \Gamma(U)$. Angenommen, $B \in U_\epsilon(A)$ wäre keine Teilmenge von U. Dann gäbe es $z \in B \cap X\backslash U$. Wir erhielten $d(z, A) \geq d(X\backslash U, A) = \epsilon$. Im Widerspruch dazu erhalten wir aus $B \in U_\epsilon(A)$, dass $B \in N_\epsilon(A)$ und damit $d(z, A) < \epsilon$. Also gilt $U_\epsilon(A) \subseteq \Gamma(U)$.
Für $U \in \mathcal{T}\backslash\{X\}$, $A \in \Lambda(U)$ wähle ein $p \in A \cap U$. Setze $\epsilon := d(\{p\}, X\backslash U) > 0$. Wir zeigen $U_\epsilon(A) \subseteq \Lambda(U)$. Für $K \in U_\epsilon(A)$ gilt $p \in A \subseteq N_\epsilon(K)$. Also existiert ein $x \in K$ mit $d(p, x) < \epsilon$. Dieses x liegt wegen $d(x, X\backslash U) \geq d(p, X\backslash U) - d(p, x) = \epsilon - d(p, x) > 0$ auch in U. Damit ist $K \cap U \neq \emptyset$ bzw. $K \in \Lambda(U)$.
Insgesamt erkennt man, dass $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{T}_H$ und als Konsequenz $\mathcal{T}_V \subseteq \mathcal{T}_H$.
Für den Beweis von $\mathcal{T}_H \subseteq \mathcal{T}_V$ genügt es, dass für alle offenen Kugeln $U_{2\epsilon}(A)$ mit $A \in \mathcal{H}(X), \epsilon > 0$ endlich viele Mengen $U_1, ..., U_n \in \mathcal{T}$ existieren, sodass

$$A \in \mathcal{U}_A := \langle U_1, ..., U_n\rangle \subseteq U_{2\epsilon}(A). \tag{2}$$

Aus der Kompaktheit von A folgt, dass A total beschränkt ist. Also lassen sich endlich viele Mengen $U_1, ..., U_n \in \mathcal{T}$ mit Durchmesser jeweils kleiner als ϵ finden, die A überdecken. Ohne

Beschränkung der Allgemeinheit sei auch $A \cap U_i \neq \emptyset$ für alle $i = 1, ..., n$ verlangt. Klarerweise ist dann $A \in \langle U_1, ..., U_n \rangle$. Außerdem folgt für jedes weitere $K \in \langle U_1, ..., U_n \rangle$, dass jedes $x \in K$ in einem gewissen U_i enthalten ist. Da ein $x_i \in A \cap U_i$ existiert und der Durchmesser von U_i kleiner als ϵ ist, erhalten wir $d(x, A) \leq d(x, x_i) < \epsilon$. $x \in K$ war beliebig und das bedeutet $K \subseteq N_\epsilon(A)$. Genauso zeigt man $A \subseteq N_\epsilon(K)$. Also muss $H_d(A, K) \leq \epsilon < 2\epsilon$ gelten, woraus (2) folgt.

□

Korollar 1.10 *Sei $(X, \mathcal{T})$ ein kompakter topologischer Raum und d_1, d_2 zwei Metriken auf X, die beide $\mathcal{T}$ erzeugen (d.h. $\mathcal{T} = \mathcal{T}_{d_1} = \mathcal{T}_{d_2}$). Dann sind die von H_{d_1} und von H_{d_2} auf $\mathcal{H}(X)$ induzierten Topologien ident.*

Beweis. Das ist eine unmittelbare Konsequenz aus Satz 1.9. □

2 Konvergenz in $\mathcal{H}(X)$

Wie dem Leser/der Leserin vielleicht schon bekannt ist, kann man für Mengenfolgen eine Art von Konvergenz definieren, die ohne Metrik und sogar ohne Topologie auskommt. Wir verwenden hier eine Definition, die sehr wohl Rücksicht auf die Topologie von X nimmt, aber auf den ersten Blick nichts mit der Vietoris-Topologie zu tun hat. In diesem Abschnitt wird ein Zusammenhang zwischen diesen beiden Konvergenzarten hergestellt.

Definition 2.1 *Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Teilmengen von X. Wir definieren*

$$\begin{aligned}
\liminf A_n &:= \{x \in X : \textit{Für alle } U \in \mathcal{T} \textit{ mit } x \in U : U \cap A_n \neq \emptyset \textit{ für fast alle } n \in \mathbb{N}\}, \\
\limsup A_n &:= \{x \in X : \textit{Für alle } U \in \mathcal{T} \textit{ mit } x \in U : U \cap A_n \neq \emptyset \textit{ für unendlich viele } n \in \mathbb{N}\}.
\end{aligned}$$

Falls $\liminf A_n = \limsup A_n =: A$ *sagen wir, dass A_n gegen A konvergiert und schreiben* $\lim A_n = A$.

Offensichtlich ist $\liminf A_n$ immer eine Teilmenge von $\limsup A_n$.

Lemma 2.2 *Sei $(X, \mathcal{T})$ ein kompakter topologischer Raum und $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge aus $\mathcal{H}(X)$. Dann gilt auch* $\limsup A_n \in \mathcal{H}(X)$.

Beweis. Wir beweisen folgende Gleichheit:

$$\limsup A_n = \bigcap_{m\in\mathbb{N}} \overline{\bigcup_{n\geq m} A_n}. \tag{3}$$

Dazu halten wir uns vor Augen, was $x \in \limsup A_n$ bedeutet[1]:

$$\begin{aligned}
&x \in \limsup A_n \Leftrightarrow \\
&\forall U \in \mathcal{T} \text{ mit } x \in U, \forall m \in \mathbb{N}\ \exists n \geq m : A_n \cap U \neq \emptyset \Leftrightarrow \\
&\forall U \in \mathcal{T} \text{ mit } x \in U, \forall m \in \mathbb{N} : \left(\bigcup_{n\geq m} A_n\right) \cap U \neq \emptyset \Leftrightarrow \\
&\forall m \in \mathbb{N} : x \in \overline{\bigcup_{n\geq m} A_n} \quad \Leftrightarrow \quad x \in \bigcap_{m\in\mathbb{N}} \overline{\bigcup_{n\geq m} A_n}.
\end{aligned}$$

[1]Für die dritte Äquivalenz benützen wir folgende Aussage: Sind $D \subseteq X, x \in X$ beliebig, so gilt $x \in \overline{D}$ genau dann, wenn jede Umgebung von x nichtleeren Schnitt mit D hat. Siehe dazu [K, 12.2.7].

Mit dieser Schreibweise ist klar, dass $\limsup A_n$ als Schnitt abgeschlossener Mengen abgeschlossen ist. Außerdem ist der Schnitt über endlich viele Mengen der Form $\overline{\bigcup_{n\geq m} A_n}$ nicht leer, weil die Folge $(\overline{\bigcup_{n\geq m} A_n})_{m\in\mathbb{N}}$ monoton fallend bezüglich der Mengeninklusion ist. Die Kompaktheit von X impliziert, dass $\limsup A_n$, also der Durchschnitt über alle Folgenglieder, nicht leer ist. $\square$

Satz 2.3 *Sei $(X,\mathcal{T})$ ein kompakter topologischer Raum und $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge aus $\mathcal{H}(X)$. Existiert $A = \lim A_n$, dann konvergiert A_n auch bezüglich der Topologie $\mathcal{T}_V$ aus Satz 1.9 gegen A. Erfüllt X zusätzlich das Trennungsaxiom (T_2), dann folgt umgekehrt aus der Konvergenz von A_n gegen A bezüglich $\mathcal{T}_V$ auch $\lim A_n = A$.*
In einem kompakten metrischen Raum (X,d) gilt insbesondere $\lim A_n = A$ genau dann, wenn $\lim_{n\to\infty} H_d(A_n, A) = 0$.

Beweis. Wir beweisen zuerst, dass $\lim A_n = A$ die Konvergenz von A_n gegen A bezüglich $\mathcal{T}_V$ nach sich zieht. Wegen Lemma 2.2 gilt $A \in \mathcal{H}(X)$. Seien $U_1,...,U_k$ offene Teilmengen von X mit $A \in \langle U_1,...,U_k\rangle$. Wegen $A\cap U_i \neq \emptyset$ für alle $i=1,...,k$ lassen sich $x_1,...,x_k$ so wählen, dass $x_i \in A\cap U_i \subseteq U_i$. Nachdem ja $\liminf A_n = A \ni x_i$ gilt, gibt es Indizes $N_i \in \mathbb{N}$, $i=1,...,k$ mit

$$A_n \cap U_i \neq \emptyset \quad \text{für alle } n \geq N_i, \quad i=1,...,k. \tag{4}$$

Weiters wollen wir beweisen, dass auch ein $M\in\mathbb{N}$ existiert, sodass

$$A_n \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} U_i \quad \text{für alle } n \geq M. \tag{5}$$

Wir nehmen das Gegenteil an und setzen $K := X\setminus\bigcup_{i=1}^k U_i$. Dann würde eine Teilfolge $A_{j(n)}$ von A_n existieren, sodass für alle $n\in\mathbb{N}$ gilt $A_{j(n)}\cap K \neq \emptyset$ für alle $n\in\mathbb{N}$. Aus jedem dieser Schnitte wähle ein x_n. Die Folge x_n hat dann aufgrund der Kompaktheit von K eine konvergente Teilfolge mit Grenzwert $x\in K$. Für jede Umgebung U von x gibt es also einen Index $\tilde{N}\in\mathbb{N}$, sodass für alle $n\geq\tilde{N}$ gilt $x_n\in U$. Dann ist insbesondere $A_{j(n)}\cap U\neq\emptyset$ und das bedeutet $x\in\limsup A_n = A$. Das ist ein Widerspruch zu $A\cap K=\emptyset$.
Mit (4) und (5) erhalten wir

$$A_n \in \langle U_1,...,U_k\rangle \quad \text{für alle } n \geq N := \max\{M, N_1,...,N_k\},$$

also konvergiert A_n gegen A in $\mathcal{T}_V$.
Für die Rückrichtung sei $A = \lim_{n\to\infty}^{\mathcal{T}_V} A_n$. Wenn wir sowohl $A\subseteq\liminf A_n$ als auch $\limsup A_n \subseteq A$ zeigen können, folgt die Aussage aus

$$A \subseteq \liminf A_n \subseteq \limsup A_n \subseteq A.$$

Zuerst beweisen wir $A\subseteq\liminf A_n$. Sei $p\in A$ beliebig und U eine offene Umgebung von p in X. Dann ist $\Lambda(U)$ eine offene Umgebung von A. Weil A_n bezüglich $\mathcal{T}_V$ gegen A konvergiert, existiert ein $N\in\mathbb{N}$, sodass

$$A_n \in \Lambda(U) \quad \text{für alle } n\geq N.$$

Insbesondere gilt für $n\geq N$, dass $A_n\cap U\neq\emptyset$ und somit $p\in\liminf A_n$. Weil p beliebig war, haben wir $A\subseteq\liminf A_n$ bewiesen. Nur der Beweis von $\limsup A_n\subseteq A$ steht noch aus. Der Fall $A=X$ ist trivial. Andernfalls sei $x\in X\setminus A$. Aufgrund von (T_2) und weil X kompakt ist, erfüllt X auch (T_4); siehe [K, 12.11.10]. Also gibt es $V\in\mathcal{T}$ mit $A\subseteq V$ und $x\notin\overline{V}$. Dann ist

$\Gamma(V)$ eine offene Umgebung von A in $\mathcal{H}(X)$, und infolge gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, sodass $A_n \in \Gamma(V)$ bzw. $A_n \subseteq V$ für alle $n \geq N$. Das impliziert $A_n \cap (X \backslash \overline{V}) = \emptyset$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$. Daher gilt $x \notin \limsup A_n$, denn $X \backslash \overline{V}$ ist eine offene Umgebung von x.

$\square$

Nun stellt sich die Frage, ob man für den Beweis der Rückrichtung in Satz 2.3 wirklich benötigt, dass X Hausdorff ist. Das folgende einfache Beispiel zeigt, dass man diese Voraussetzung nicht weglassen kann.

Beispiel 2.4. Sei $X := \{1, 2\}$ versehen mit der Topologie $\mathcal{T} := \{\emptyset, \{1\}, \{1, 2\}\}$. Man sieht sofort, dass $\mathcal{H}(X) = \{\{2\}, \{1, 2\}\}$. Die Mengen $\langle\{1\}\rangle = \emptyset$, $\langle\{1, 2\}\rangle = \mathcal{H}(X)$ sowie $\langle\{1\}, \{1, 2\}\rangle = \{\{1, 2\}\}$ bilden eine Basis der Topologie $\mathcal{T}_V$ auf $\mathcal{H}(X)$. Betrachte nun die konstante Folge $A_n := \{1, 2\}, \quad n \in \mathbb{N}$. Diese konvergiert offensichtlich bzgl. $\mathcal{T}_V$ gegen $\{1, 2\}$. Allerdings konvergiert sie auch gegen $\{2\}$, weil jede Umgebung von $\{2\}$ auch $\{1, 2\} = A_n$ enthält. Gleichzeitig erkennt man sofort, dass $\lim A_n$, so wie er oben definiert wurde, eindeutig ist, falls er existiert.

In diesem Beispiel haben wir offensichtlich das Problem, dass $\mathcal{H}(X)$ nicht Hausdorff ist und daher Grenzwerte nicht eindeutig sein müssen. Folgendes Lemma ist naheliegend:

Lemma 2.5 *Sei $(X, \mathcal{T})$ ein kompakter (T_2)-Raum. Dann erfüllt $(\mathcal{H}(X), \mathcal{T}_V)$ ebenfalls das Trennungsaxiom (T_2).*

Beweis. Für $A, B \in \mathcal{H}(X)$, $A \neq B$ ist zu zeigen, dass A und B sich durch offene Mengen trennen lassen. O.B.d.A. sei $x \in A \backslash B$. Wegen [K, 12.11.10] erfüllt ist X sogar ein (T_4)-Raum. Wir können also disjunkte $U, V \in \mathcal{T}$ wählen, sodass $\{x\} \subseteq U$ und $B \subseteq V$. Es folgt $B \in \Gamma(V)$, $A \in \Lambda(U)$. Wegen $U \cap V = \emptyset$ gilt auch $\Gamma(V) \cap \Lambda(U) = \emptyset$, womit wir A und B durch offene Mengen getrennt haben. $\square$

Bemerkung 2.6. Falls (X, d) ein kompakter metrischer Raum ist, liefert die Größenfunktion μ aus Bemerkung 1.5 eine weitere Veranschaulichung der Konvergenz in $\mathcal{H}(X)$. Für jede solche Funktion gilt nämlich, dass eine Folge $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ aus $\mathcal{H}(X)$ genau dann gegen ein $A \in \mathcal{H}(X)$ konvergiert, wenn für jedes $\epsilon > 0$ eine natürliche Zahl N existiert, sodass

$$A_n \subseteq N_\epsilon(A) \text{ und } |\mu(A_n) - \mu(A)| < \epsilon$$

für alle $n \geq N$.

3 Kompaktheit in $\mathcal{H}(X)$

Lemma 3.1 (Tukey) [2] *Man sagt, dass eine Familie $\mathcal{F}$ von Mengen* endlichen Charakter *hat, wenn folgende Aussagen äquivalent sind:*

- *$F \in \mathcal{F}$.*
- *Jede endliche Teilmenge von F liegt in $\mathcal{F}$.*

Für ein $\mathcal{F}$ mit dieser Eigenschaft gilt dann, dass für jedes D aus $\mathcal{F}$ ein $F_D \supseteq D$ existiert, das maximal in $\mathcal{F}$ ist.

[2] Das Lemma von Tukey ist äquivalent zum Auswahlaxiom.

Beweis. Siehe [Ke, 0.25]. □

Satz 3.2 (Alexander Subbase Lemma) *Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und $\mathcal{S}$ eine Subbasis von $\mathcal{T}$. Hat jede Überdeckung von X durch Mengen aus $\mathcal{S}$ eine endliche Teilüberdeckung, dann ist X kompakt.*

Beweis. Für diesen Beweis nennen wir eine Familie $\mathcal{C}$ von Teilmengen von X

- *inadäquat*, falls $\mathcal{C}$ nicht ganz X überdeckt
- *endlich inadäquat*, falls keine endliche Teilmenge von $\mathcal{C}$ ganz X überdeckt.

Damit lässt sich die Kompaktheit von X wie folgt formulieren: Jede endlich inadäquate Familie offener Mengen ist inadäquat.
Betrachte nun die Menge der endlich inadäquaten Familien offener Mengen. Man sieht sofort, dass diese endlichen Charakter hat. Lemma 3.1 garantiert die Existenz einer maximalen endlich inadäquaten Familie $\mathcal{A}$. Diese Familie hat dann folgende Eigenschaften: Für jedes $O \in \mathcal{T}, O \notin \mathcal{A}$ gibt es wegen der Maximalität von $\mathcal{A}$ endlich viele $A_1, ..., A_m \in \mathcal{A}$ mit $O \cup A_1 \cup ... \cup A_m = X$. $\mathcal{A}$ kann damit auch keine offene Obermenge von O enthalten.
Für eine weitere nicht in $\mathcal{A}$ enthaltene offene Menge U finden wir genauso $B_1, ..., B_n \in \mathcal{A}$, sodass $U \cup B_1 \cup ... \cup B_n = X$. Dann folgt $(O \cap U) \cup A_1 \cup ... \cup A_m \cup B_1 \cup ... \cup B_n = X$. Auch $O \cap U$ kann also nicht in $\mathcal{A}$ liegen. Induktiv zeigt man, dass auch der Schnitt von endlich vielen offenen Mengen, die nicht in $\mathcal{A}$ liegen, nicht in $\mathcal{A}$ liegt. Das lässt sich umformulieren zu: Wenn für ein $A \in \mathcal{A}$ endlich viele $C_1, ..., C_k \in \mathcal{T}$ mit $\bigcap_{i=1}^k C_i \subseteq A$ existieren, dann liegt mindestens eines der C_i in $\mathcal{A}$.
Nun wählen wir eine endlich inadäquate Familie $\mathcal{D}$ offener Teilmengen von X. Sei $\mathcal{A}$ eine maximale endlich inadäquate Familie, die $\mathcal{D}$ enthält. Dann ist auch $\mathcal{S} \cap \mathcal{A}$ endlich inadäquat. Dieser Schnitt besteht nur aus Elementen von $\mathcal{S}$ und deshalb ist nach Voraussetzung $\mathcal{S} \cap \mathcal{A}$ sogar inadäquat, überdeckt also nicht ganz X.
Sei schlussendlich $A \in \mathcal{A}, x \in A$ beliebig, dann gibt es aufgrund der Subbasiseigenschaft von $\mathcal{S}$ endlich viele Mengen $C_1, ..., C_k \in \mathcal{S}$ mit $x \in \bigcap_{i=1}^k C_i \subseteq A$. Wie oben gezeigt, ist dann $x \in C_i \in \mathcal{A} \cap \mathcal{S}$ für ein $1 \leq i \leq n$. Wir haben damit gezeigt, dass

$$\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A = \bigcup_{A \in \mathcal{S} \cap \mathcal{A}} A \quad \subsetneq X.$$

Also ist auch $\mathcal{A}$ inadäquat. $\mathcal{D}$ ist es als Teilfamilie von $\mathcal{A}$ genauso, womit X kompakt ist. □

Satz 3.3 *Ein beliebiger topologischer Raum $(X, \mathcal{T})$ ist genau dann kompakt, wenn $(\mathcal{H}(X), \mathcal{T}_V)$ kompakt ist.*

Beweis. Wir beweisen zuerst, dass die Kompaktheit von X die von $\mathcal{H}(X)$ impliziert. Sei $\mathcal{P}$ die Subbasis von $\mathcal{T}_V$ aus Satz 1.8. Nach Satz 3.2 genügt es, für jede Überdeckung von $\mathcal{H}(X)$ durch Mengen aus $\mathcal{P}$ eine endliche Teilüberdeckung zu finden. Sei also

$$\mathfrak{L} = \{\Gamma(U_i) : i \in I\} \cup \{\Lambda(V_j) : j \in J\} \tag{6}$$

so eine Überdeckung, d.h. $\bigcup_{L \in \mathfrak{L}} L = \mathcal{H}(X)$. Wir setzen $Y := X \backslash (\bigcup_{j \in J} V_j)$ und unterscheiden zwei Fälle:

1. Fall: $Y = \emptyset$ bzw. $X = \bigcup_{j \in J} V_j$. Aus der Kompaktheit von X erhalten wir endlich viele Indizes $j_1, ..., j_n \in J$ mit $X = \bigcup_{k=1}^{n} V_{j_k}$. Klarerweise impliziert das

$$\mathcal{H}(X) = \bigcup_{k=1}^{n} \Lambda(V_{j_k}).$$

2. Fall: $Y \neq \emptyset$. Nach Definition von Y ist in diesem Fall $Y \in \mathcal{H}(X)$ und $Y \notin \Lambda(V_j)$ für alle $j \in J$. Nachdem $\mathfrak{L}$ ganz $\mathcal{H}(X)$ überdeckt, gibt es ein $i_0 \in I$ mit $Y \in \Gamma(U_{i_0})$. Das bedeutet $Y \subseteq U_{i_0}$ und weiter

$$X \backslash U_{i_0} \subseteq X \backslash Y = \bigcup_{j \in J} V_j.$$

Weil $X \backslash U_{i_0}$ abgeschlossen und daher kompakt ist, gibt es $j_1, ..., j_n \in J$ mit

$$X \backslash U_{i_0} \subseteq \bigcup_{k=1}^{n} V_{j_k}.$$

Jedes $A \in \mathcal{H}(X)$, das nicht in $\Gamma(U_{i_0})$ liegt, besitzt ein Element in $X \backslash U_{i_0}$, woraus zusammen mit dem bereits Gezeigten folgt, dass

$$\mathcal{H}(X) = \Gamma(U_{i_0}) \cup \left(\bigcup_{k=1}^{n} \Lambda(V_{j_k}) \right).$$

Das beweist die Kompaktheit von $\mathcal{H}(X)$.
Für die Rückrichtung sei angenommen, dass $\mathcal{H}(X)$ kompakt ist, und sei $(x_i)_{i \in I}$ ein Netz aus X. Dann ist $(\overline{\{x_i\}})_{i \in I}$ ein Netz in $\mathcal{H}(X)$, zu dem es ein konvergentes Teilnetz $(\overline{\{x_{i(j)}\}})_{j \in J}$ geben muss. Sei $Y \in \mathcal{H}(X)$ der Grenzwert davon und $x \in Y$; wegen $Y \in \mathcal{H}(X)$ ist Y nicht leer. Für eine beliebige offene Umgebung $U \in \mathcal{T}$ von x ist offenbar $\Lambda(U)$ eine offene Umgebung von Y in $\mathcal{H}(X)$. Es gibt daher einen Index $j_0 \in J$, sodass

$$\overline{\{x_{i(j)}\}} \in \Lambda(U) \quad \text{für alle } j \succeq j_0$$

bzw. $\overline{\{x_{i(j)}\}} \cap U \neq \emptyset$ für alle $j \succeq j_0$. Dann folgt auch $\{x_{i(j)}\} \cap U \neq \emptyset$, denn andernfalls wäre $\{x_{i(j)}\} \subseteq U^c$. Wegen der Abgeschlossenheit von U^c erhalten wir $\overline{\{x_{i(j)}\}} \subseteq U^c$ im Widerspruch zur vorigen Aussage. Es folgt die Konvergenz von $x_{i(j)}$ gegen x, denn $\{x_{i(j)}\} \cap U \neq \emptyset$ ist offensichtlich äquivalent zu $x_{i(j)} \in U$. X ist folglich kompakt. $\square$

Bemerkung 3.4. Für einen kompakten metrischen Raum (X, d) und $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{H}(X)$ abgeschlossen folgt aus dem soeben bewiesenen Satz 3.3, dass $\mathcal{A}$ sogar kompakt ist. Weil μ aus Bemerkung 1.5 stetig ist, nimmt μ ein Maximum A auf $\mathcal{A}$ an. Aufgrund der Eigenschaft $\mu(A) < \mu(B)$ für $A \subsetneq B$ ist A dann auch ein maximales Element von $\mathcal{A}$ in dem Sinne, dass jedes $B \in \mathcal{A}$ mit $B \supseteq A$ schon mit A übereinstimmen muss.

Korollar 3.5 *Sei (X, d) ein kompakter metrischer Raum. Dann hat jede Folge in $\mathcal{H}(X)$ eine konvergente Teilfolge. Es gilt sogar, dass jede beliebige Folge $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ nichtleerer Teilmengen von X eine Teilfolge hat, für die $\lim A_{j(n)}$ existiert und in $\mathcal{H}(X)$ liegt.*

Beweis. Die erste Aussage gilt, weil $(\mathcal{H}(X), H_d)$ nach Satz 3.3 ein kompakter metrischer Raum ist. Für die zweite bleibt zu zeigen, dass $\liminf \overline{A_n} = \liminf A_n$ und $\limsup \overline{A_n} = \limsup A_n$. Der

Rest folgt dann aus der soeben bewiesenen ersten Aussage, angewandt auf die Folge $(\overline{A_n})_{n\in\mathbb{N}}$. Aber auch dieser Beweis ist nicht schwierig: Sei $U \in \mathcal{T}$ mit $U \cap \overline{A_n} \neq \emptyset$. Angenommen, es wäre $A_n \subseteq U^c$, dann würde die Abgeschlossenheit von U^c sogar $\overline{A_n} \subseteq U^c$ nach sich ziehen. Wir hatten aber $U \cap \overline{A_n} \neq \emptyset$ vorausgesetzt. Somit gilt $A_n \nsubseteq U^c$ bzw. $U \cap A_n \neq \emptyset$. Also folgt die Aussage aus

$$U \cap A_n \neq \emptyset \Leftrightarrow U \cap \overline{A_n} \neq \emptyset.$$

□

Zum Abschluss dieser Seminararbeit sollen noch die zusammenhängenden Teilmengen von X in Hinblick auf die Hausdorff-Metrik untersucht werden. Zur Erinnerung: Eine Teilmenge Y von X heißt *zusammenhängend*, falls man sie nicht als disjunkte Vereinigung zweier nichtleerer abgeschlossener[3] Mengen schreiben kann.

Definition 3.6 *Ist $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum, so schreiben wir*

$$\mathcal{C}(X) := \{A \in \mathcal{H}(X) : A \textit{ ist zusammenhängend}\}.$$

Definition 3.7 *Sei (X, d) ein metrischer Raum und $\epsilon > 0$. Eine (d, ϵ)-*Kette *ist eine endliche, nichtleere Teilmenge $\{x_1, ..., x_n\}$ von X mit*

$$d(x_i, x_{i+1}) < \epsilon \textit{ für alle } i = 1, ..., n-1.$$

Ist dabei $p = x_1$ und $q = x_n$, dann sagen wir, dass die (d, ϵ)-Kette von p nach q geht bzw. p und q verbindet.
*Eine Teilmenge Z von X nennen wir (d, ϵ)-*verkettet[4]*, wenn für jede Auswahl von zwei Punkten aus Z eine (d, ϵ)-Kette existiert, die beide Punkte verbindet. Ist $Z \subseteq X$ sogar (d, ϵ)-verkettet für jedes $\epsilon > 0$, dann heißt Z d-*stark-verkettet[5].

Lemma 3.8 *Sei (X, d) ein kompakter metrischer Raum. Dann ist jedes $A \in \mathcal{C}(X)$ d-stark-verkettet.*

Beweis. Nach [K, 12.14.3] ist A total beschränkt. Das bedeutet, dass für jedes $\epsilon > 0$ endlich viele $M_1, ..., M_n \subseteq A$ mit Durchmessern jeweils kleiner als ϵ existieren, sodass $A = \bigcup_{i=1}^n M_i$. O.B.d.A. seien $M_1, ..., M_n$ nichtleer und abgeschlossen. Wähle $x \in A$ und sei A_x die Menge aller Punkte in A, die über eine (d, ϵ)-Kette mit x verbunden werden können. Wenn A nicht (d, ϵ)-verkettet wäre, dann gäbe es ein $y \in A \backslash A_x$. Wir behaupten, dass dann $d(z, y) \geq \epsilon$ für alle $z \in A_x$ folgt. Um das einzusehen, nehmen wir das Gegenteil an, d.h. $d(z, y) < \epsilon$ für ein $z \in A_x$. Weil z in A_x liegt, existiert eine (d, ϵ)-Kette $\{x = x_1, ..., x_n = z\}$, die x mit z verbindet. Damit wäre aber $\{x = x_1, ..., x_n = z, y\}$ eine (d, ϵ)-Kette von x nach y. Das ist nicht möglich, weil y kein Element von A_x ist. Wir folgern: Für alle $\tilde{x} \in A_x$ und $\tilde{y} \in A \backslash A_x$ ist $d(\tilde{x}, \tilde{y}) \geq \epsilon$. Also enthält jedes M_i, $i = 1, ..., n$, entweder nur Punkte aus A_x oder nur Punkte aus $A \backslash A_x$. Daraus folgt im Widerspruch zum Zusammenhang von A

$$A = \Bigg(\bigcup_{M_i \cap A_x \neq \emptyset} M_i \Bigg) \dot{\cup} \Bigg(\bigcup_{M_j \cap (A \backslash A_x) \neq \emptyset} M_j \Bigg).$$

Beide Mengen sind nämlich abgeschlossen, nichtleer und disjunkt. A_x muss also schon mit A übereinstimmen. □

[3] Abgeschlossen bezüglich der Spurtopologie.
[4] engl. "(d, ϵ)-chained"
[5] engl. "d-well-chained"

Lemma 3.9 *Sei (X,d) ein kompakter metrischer Raum und $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge aus $\mathcal{H}(X)$, die gegen ein $A \in \mathcal{H}(X)$ konvergiert. Sei $(\epsilon_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq (0,+\infty)$ mit $\lim_{n\to\infty} \epsilon_n = 0$ und A_n für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine (d,ϵ_n)-verkettete Menge. Dann ist A zusammenhängend, also $A \in \mathcal{C}(X)$.*

Beweis. Angenommen, A wäre nicht zusammenhängend. Schreibe $A = K\dot{\cup}L$ mit $K, L \in \mathcal{H}(X)$[6], $K \cap L = \emptyset$. Da K und L kompakt sind, ist

$$0 < \delta := d(K,L) = \inf\{d(x,y) : x \in K, y \in L\}. \tag{7}$$

Wie man unmittelbar nachprüft, sind dann $U := N_{\frac{\delta}{3}}(K)$ und $V := N_{\frac{\delta}{3}}(L)$ offen in X mit $K \subseteq U$ und $L \subseteq V$. Außerdem sind $\overline{U}$ und $\overline{V}$ disjunkt mit $d(\overline{U},\overline{V}) \geq \frac{\delta}{3}$. Es ist $\langle U, V\rangle$ eine offene Umgebung von A in $\mathcal{H}(X)$. Aus der Konvergenz von A_n gegen A sehen wir, dass ein $N \in \mathbb{N}$ existiert, sodass für alle $n \geq N$ gilt $A_n \in \langle U, V\rangle$. Weil $(\epsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist, kann $k \geq N$ mit $\epsilon_k < \frac{\delta}{3}$ gewählt werden. Es gilt dann $A_k \in \langle U, V\rangle$, und das bedeutet, dass sowohl $A_k \cap U \neq \emptyset$ als auch $A_k \cap V \neq \emptyset$. Sei $x_U \in A_k \cap U$ und $x_V \in A_k \cap V$. Weil A_k eine (d,ϵ_k)-verkettete Menge ist, gibt es eine (d,ϵ_k)-Kette $\{x_U = x_1, ..., x_n = x_V\}$ in A_k. Wähle $i \in \{1, ..., n-1\}$ als die kleinste Zahl, für die $x_i \in U, x_{i+1} \in V$ gilt. Wir erhalten den Widerspruch $d(\overline{U},\overline{V}) \leq d(x_i, x_{i+1}) \leq \epsilon_k$. □

Satz 3.10 *Sei (X,d) ein kompakter metrischer Raum. Dann ist $\mathcal{C}(X)$ kompakt in $\mathcal{H}(X)$.*

Beweis. Nach Satz 3.3 müssen wir nur zeigen, dass $\mathcal{C}(X)$ abgeschlossen in $\mathcal{H}(X)$ ist. Sei $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge aus $\mathcal{C}(X)$, die gegen ein $A \in \mathcal{H}(X)$ konvergiert. Nach Lemma 3.8 ist dann jedes A_n d-stark-verkettet. Es lässt sich also Lemma 3.9 anwenden, woraus wir $A \in \mathcal{C}(X)$ erhalten. □

Es sei noch angemerkt, dass es zu diesem Thema weitere interessante Resultate gibt, beispielsweise, dass für einen zusammenhängenden und kompakten metrischen Raum auch $\mathcal{C}(X)$ und $\mathcal{H}(X)$ zusammenhängend sind.

[6] Weil A abgeschlossen ist, ist die Abgeschlossenheit bzgl. d äquivalent zur Abgeschlossenheit bzgl. der Spurtopologie auf A

Literatur

[N] Sam B. Nadler Jr.: *Continuum Theory: An Introduction.* Taylor & Francis, 1992.

[K] Michael Kaltenbäck: *Analysis 2. Vorlesungsskript SS 2015*

[Ke] John L. Kelley: *General Topology.* Springer, 1975. (Neuauflage)