Seminararbeit

Punktweise Grenzwerte Analytischer Funktionen

Markus Tempelmayr

1. Februar 2017

1 Einleitung

1.1 Definition. Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ offen. Eine Funktion $f : G \to \mathbb{C}$ heißt *analytisch* auf G, falls sie an jedem Punkt in G stetig komplex differenzierbar ist. Die Menge aller auf G analytischen Funktionen bezeichnen wir mit $H(G)$.

Die Stetigkeit der Ableitung muss dabei nicht vorausgesetzt werden sondern ist im Fall der komplexen Differenzierbarkeit automatisch erfüllt, wie z.B. in [A2, Satz 11.9.2] gezeigt wird.

1.2 Definition. Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ und $f : G \to \mathbb{C}$. Eine Folge von Funktionen $f_n : G \to \mathbb{C}, n \in \mathbb{N}$, konvergiert *lokal gleichmäßig* gegen f, wenn für jede kompakte Teilmenge $K \subseteq G$ die Folge $(f_n|_K)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen $f|_K$ konvergiert.

1.3 Lemma. *Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ offen und $f_n : G \to \mathbb{C}, n \in \mathbb{N}$, eine Folge analytischer Funktionen, die lokal gleichmäßig gegen eine Funktion $f : G \to \mathbb{C}$ konvergiert. Dann ist auch f analytisch.*

Beweis. Siehe [A2, Lemma 11.8.13]. ❑

Dass punktweise Konvergenz i.A. nicht ausreicht um Analytizität einer Funktionenfolge zu erhalten, sondern lokal gleichmäßige Konvergenz der Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tatsächlich notwendig ist, soll folgendes Beispiel verdeutlichen:

1.4 Beispiel. Ziel ist es, eine Funktionenfolge $F_n : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, n \in \mathbb{N}$, analytischer Funktionen zu konstruieren, die punktweise gegen eine nicht analytische Funktion $F : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ konvergiert.
Für jedes $a > 0$ sei $H_a := \{z \in \mathbb{C} : \Re(z) > a, |\Im(z)| < \pi\}$,$\gamma_a := \partial H_a$ und $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto \exp(\exp(z))$.

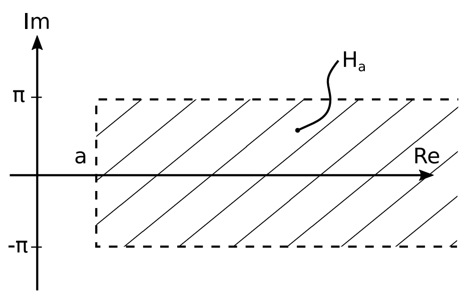

Abbildung 1: H_a

Wegen

$$f(x \pm i\pi) = \exp(\exp(x \pm i\pi)) = \exp(\exp(x)\exp(\pm i\pi)) = \exp(-\exp(x)) = \frac{1}{f(x)} \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

gilt für $z \notin \gamma_a$ und damit $d(\gamma_a, z) > 0$

$$\int_{\gamma_a} \left|\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\right| d\zeta = \int_{\{a\}\times(-\pi,\pi)} \left|\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\right| d\zeta + \int_{(a,+\infty)\times\{\pi\}} \left|\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\right| d\zeta + \int_{(a,+\infty)\times\{-\pi\}} \left|\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\right| d\zeta \leq$$

$$\frac{1}{d(\gamma_a, z)} \left(\int_{(-\pi,\pi)} |f(a + i\zeta)|\, d\zeta + \int_{(a,+\infty)} |f(\zeta + i\pi)|\, d\zeta + \int_{(a,+\infty)} |f(\zeta - i\pi)|\, d\zeta \right) =$$

$$\frac{1}{d(\gamma_a, z)} \left(\int_{(-\pi,\pi)} |f(a + i\zeta)|\, d\zeta + 2\int_{(a,+\infty)} \left|\frac{1}{f(\zeta)}\right| d\zeta \right) < +\infty.$$

Deshalb ist eine Funktion $I_a : \mathbb{C} \setminus \gamma_a \to \mathbb{C}$ wohldefiniert durch

$$I_a(z) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_a} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$

Die Funktion I_a ist nach [A3, Lemma 15.2.9] analytisch auf $(\gamma_a)^c$ und wegen $|I_a(z)| \leq \frac{C}{d(\gamma_a, z)}$ gilt

$$I_a(tz) \overset{t\to\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \text{für } z \notin \mathbb{R}^+ \quad \text{und} \quad |I_a(tz)| < \widetilde{C} \quad \text{für } t \geq 0,\ z \in \mathbb{R}^+. \tag{1}$$

Für $a < b$ und $z \notin \gamma_a \cup \gamma_b$ gilt außerdem

$$I_b(z) - I_a(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial(H_a \cap H_b^c)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = f(z) \mathbb{1}_{H_a \cap H_b^c}(z), \tag{2}$$

denn für $z \in H_a \cap H_b^c$ gilt die Cauchy'sche Integralformel, siehe [A2, Satz 11.8.9], und für $z \notin H_a \cap H_b^c$ wird über den Rand eines einfach zusammenhängenden Gebietes integriert, und damit verschwindet das Integral, siehe [A2, Korollar 11.8.7].
Für $a < b$ stimmen I_a und I_b auf H_a^c überein, und weiters gilt $\bigcup_{a>0} H_a^c = \mathbb{C}$. Damit können wir folgende Funktion definieren: $I : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, z \mapsto I_a(z)$ auf H_a^c. Mit (1) und

$$\forall x \in H_a \cap \mathbb{R}^+, a < x < b : I(x) \overset{\text{Def.}}{=} I_b(x) \overset{(2)}{=} \underbrace{I_a(x)}_{\substack{\text{beschr.} \\ \text{wegen (1)}}} + f(x) \overset{x\to\infty}{\longrightarrow} \infty,$$

gilt nun für die Funktion $F : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, z \mapsto \exp(-I(z))$ folgendes Grenzwertverhalten:

$$F(tz) \overset{t\to\infty}{\longrightarrow} \begin{cases} 0 & , z \in \mathbb{R}^+ \\ 1 & , \text{sonst.} \end{cases}$$

Definiert man nun die Funktionenfolge $F_n : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, z \mapsto F(nz), n \in \mathbb{N}$, so ist jedes Folgenglied als Komposition analytischer Funktionen wieder analytisch und konvergiert gegen die nicht einmal stetige Grenzfunktion

$$z \mapsto \begin{cases} 0 & , z \in \mathbb{R}^+ \\ 1 & , \text{sonst.} \end{cases}$$

//

2 Positive Resultate

Ziel dieses Abschnittes ist es zu zeigen, dass bei punktweiser Konvergenz einer analytischen Funktionenfolge die Analytizität zumindest auf einer dichten Teilmenge des Definitionsbereiches erhalten bleibt. Dafür benötigen wir einige aus der Analysis bekannte Definitionen und eine Variante des Satzes von Arzela-Ascoli.

2.1 Definition. Sei $\mathcal{F}$ eine Familie von Funktionen auf einer Menge G. Dann heißt $\mathcal{F}$

- *punktweise beschränkt*, wenn gilt: $\forall z \in G : \sup\left\{|f(z)| \,:\, f \in \mathcal{F}\right\} < \infty$,
- *gleichgradig stetig bei* $w \in G$, wenn gilt:

$$\forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0\ (\forall f \in \mathcal{F}\ \forall z \in G : |z - w| < \delta \Longrightarrow |f(z) - f(w)| < \epsilon),$$

- *lokal beschränkt*, wenn gilt: $\forall z_0 \in G\ \exists \delta > 0 : \sup\big\{|f(z)| \,:\, f \in \mathcal{F}, z \in U_\delta(z_0)\big\} < \infty$.

2.2 Satz (von Arzela-Ascoli)**.** *Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ offen und $\mathcal{F} \subseteq C(G, \mathbb{C})$. Weiters sei $\mathcal{F}$ punktweise beschränkt und gleichgradig stetig bei jedem $w \in G$. Dann hat jede Folge in $\mathcal{F}$ eine lokal gleichmäßig konvergente Teilfolge.*

Beweis. Sei $\{x_1, x_2, \dots\}$ eine abzählbare und dichte Teilmenge von G. Als solche Menge kann beispielsweise die Menge aller Punkte aus G mit rationalem Real- und Imaginärteil gewählt werden. Für jedes $z \in G$ definiere $X(z) := \overline{\big\{f(z) \,:\, f \in \mathcal{F}\big\}}$. Weil $\mathcal{F}$ punktweise beschränkt ist, ist die Menge $X(z) \subseteq \mathbb{C}$ kompakt. Aus dem Satz von Tychonoff [F, Satz 1.3.1] folgt dass auch die Menge $Y := \prod_{i=1}^{\infty} X(x_i)$ kompakt ist.
Sei nun $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beliebige Folge aus $\mathcal{F}$. Dann ist $((f_n(x_i))_{i\in\mathbb{N}})_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in Y und weil Y kompakt ist, existiert eine konvergente Teilfolge $((f_{n_k}(x_i))_{i\in\mathbb{N}})_{k\in\mathbb{N}}$.
Sei $K \subseteq G$ kompakt und $\epsilon > 0$, wir zeigen nun dass die Folge $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ auf K gleichmäßig konvergiet. Wähle eine kompakte Menge $K_N \subseteq G$ mit $K \subseteq K_N^\circ$, z.B. $K_n = K_n(0) \cap \big\{z \in G \,:\, d(z, G^c) \geq \frac{1}{n}\big\}$ mit geeignetem $n \in \mathbb{N}$. Da $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ nach Voraussetzung auch auf K_N° gleichgradig stetig ist, wähle $\delta > 0$ sodass

$$\forall z, w \in K_N^\circ\ \forall k \in \mathbb{N} : |z - w| < \delta \Rightarrow |f_{n_k}(z) - f_{n_k}(w)| < \epsilon.$$

Da K_N° offen und $\big\{x_i \,:\, i \in \mathbb{N}\big\}$ dicht in G ist existiert zu jedem $y \in K$ ein $\delta > 0$ mit $x_{i(y)} \in K_N^\circ$ und $y \in U_\delta(x_{i(y)})$. Diese Kugeln überdecken K, also gibt es endlich viele Kugeln $U_\delta(x_{i_j})$ mit $x_{i_j} \in K_N^\circ, j = 1 \dots n$, die K überdecken. Nachdem $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ an den Punkten $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ konvergiert, wähle $M \in \mathbb{N}$ sodass

$$\forall k, l \geq M, j = 1 \dots n : |f_{n_k}(x_{i_j}) - f_{n_l}(x_{i_j})| < \epsilon.$$

Sei nun $x \in K$ beliebig. Wähle j sodass $x \in U_\delta(x_{i_j})$, dann gilt für $k, l \geq M$

$$|f_{n_k}(x) - f_{n_l}(x)| \leq |f_{n_k}(x) - f_{n_k}(x_{i_j})| + |f_{n_k}(x_{i_j}) - f_{n_l}(x_{i_j})| + |f_{n_l}(x_{i_j}) - f_{n_l}(x)| < 3\epsilon.$$

Damit ist $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ eine gleichmäßig konvergente Folge, d.h. $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hat eine lokal gleichmäßig konvergente Teilfolge. ❑

2.3 Satz (von Montel)**.** *Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ offen und $\mathcal{F} \subseteq H(G)$. Weiters sei $\mathcal{F}$ lokal beschränkt. Dann hat jede Folge in $\mathcal{F}$ eine lokal gleichmäßig konvergente Teilfolge.*

2.4 Bemerkung. Der Satz von Montel ist das Analogon zum Satz von Arzela-Ascoli für analytische Funktionen. Man beachte, dass die etwas stärkere Bedingung der lokalen Beschränktheit gefordert wird, dafür die Forderung der gleichgradigen Stetigkeit fallen gelassen werden kann.

Beweis. Wir zeigen dass beide Voraussetzung aus Satz 2.2 erfüllt sind. Aus lokaler Beschränktheit folgt sicherlich punktweise Beschränktheit, bleibt also noch die gleichgradige Stetigkeit zu zeigen.
Sei $w \in G, r > 0$ sodass $K_r(w) \subseteq G$ und $z_1, z_2 \in U_{\frac{r}{2}}(w)$. Dann gilt nach der Cauchy'schen

Integralformel [A2, Satz 11.8.9]

$$\begin{aligned}|f(z_1)-f(z_2)| \;&=\; \frac{1}{2\pi}\left|\int_{\partial U_r(w)}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z_1}d\zeta-\int_{\partial U_r(w)}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z_2}d\zeta\right| \\ =\; \frac{1}{2\pi}\left|\int_{\partial U_r(w)}\frac{f(\zeta)(z_1-z_2)}{(\zeta-z_1)(\zeta-z_2)}d\zeta\right| \;&\leq\; \frac{1}{2\pi}\int_{\partial U_r(w)}\left|\frac{f(\zeta)(z_1-z_2)}{\underbrace{(\zeta-z_1)}_{\geq\frac{r}{2}}\underbrace{(\zeta-z_2)}_{\geq\frac{r}{2}}}\right|d\zeta \\ \leq\; \frac{1}{2\pi}\frac{4}{r^2}\;|z_1-z_2|\int_{\partial U_r(w)}|f(\zeta)|d\zeta \;&\leq\; \frac{1}{2\pi}\frac{4}{r^2}\;|z_1-z_2|\;2\pi r\max_{\zeta\in\partial U_r(w)}|f(\zeta)| \\ =\; \frac{4}{r}\;|z_1-z_2|\max_{\zeta\in\partial U_r(w)}|f(\zeta)| \;&\leq\; \frac{4M}{r}\;|z_1-z_2|\end{aligned}$$

mit $M := \sup\big\{|f(\zeta)| \,:\, \zeta\in\partial U_r(w), f\in\mathcal{F}\big\}$. Für r klein genug ist M wegen der Voraussetzung an $\mathcal{F}$ endlich, und $\mathcal{F}$ daher gleichgradig stetig bei $w\in G$. ❑

Für das nächste Resultat benötigen wir den Satz von Baire in einer Variante, die in den Analysis bzw. Funktionalanalysis Vorlesungen nicht behandelt wurde. Deshalb ist nachfolgend der Satz inkl. Beweis angeführt.

2.5 Satz (von Baire)**.** *Sei $(X,\mathcal{T})$ ein lokalkompakter Hausdorff Raum, und seien $V_n, n\in\mathbb{N}$, offene und dichte Teilmengen von X. Dann ist auch $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} V_n$ dicht in X.*

Beweis. Sei $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beliebige Folge von offenen, dichten Teilmengen von X. Wir zeigen, dass der Schnitt einer beliebigen nicht leeren offenen Menge U mit $V := \bigcap_{n\in\mathbb{N}} V_n$ nicht leer ist. Dazu konstruieren wir induktiv eine Folge $(U_n)_{n=0}^{\infty}$ von nicht leeren, offenen Teilmengen von X mit der Eigenschaft, dass für alle $n\in\mathbb{N}_0$ gilt

$$\overline{U_{j+1}} \subseteq V_{j+1}\cap U_j \text{ für } 0\leq j\leq n,\; \overline{U_j} \text{ kompakt für } 1\leq j\leq n. \tag{3}$$

Für $n=0$ ist mit $U_0 := U$ die Forderung (3) erfüllt. Seien nun für ein $n\in\mathbb{N}_0$ nicht leere offene Mengen $U_0,\dots,U_n\subseteq X$ so konstruiert, dass (3) erfüllt ist. Da V_{n+1} in X dicht ist gibt es einen Punkt $x_n\in U_n\cap V_{n+1}$. Da X lokalkompakt ist und $U_n\cap V_{n+1}$ eine Umgebung von x_n ist, gibt es eine kompakte Umgebung K von x_n mit $K\subseteq U_n\cap V_{n+1}$. Dann ist $U_{n+1} := K^\circ$ offen, nicht leer und es gilt (3). Setzen wir nun $A := \bigcap_{n\in\mathbb{N}}\overline{U_n}$ so folgt wegen der Kompaktheit der $\overline{U_n}$ aus der endlichen Durchschnittseigenschaft kompakter Mengen [A2, Proposition 12.11.2] dass $A\neq\emptyset$. Nach Konstruktion gilt

$$\emptyset\neq A\subseteq\bigcap_{n\in\mathbb{N}}(V_n\cap U) = V\cap U.$$

❑

Insbesondere gilt unter den Voraussetzungen aus Satz 2.5 dass $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} V_n \neq \emptyset$. Geht man nun zu den Komplementen über erhält man folgendes Resultat.

2.6 Korollar. *Sei $(X,\mathcal{T})$ ein lokalkompakter Hausdorff Raum, und seien $A_n, n\in\mathbb{N}$, abgeschlossene Teilmengen von X mit leerem Inneren. Dann hat auch $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ leeres Inneres.*

Beweis. Aus [A2, Fakta 12.2.12] folgt $(A_n^\circ)^c = \overline{A_n^c}$. Als Komplemente abgeschlossener

Mengen sind alle A_n^c offen, und wegen $X = (A_n^\circ)^c = \overline{A_n^c}$ sind auch alle A_n^c dicht in X. Aus Satz 2.5 folgt dass $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n^c$ dicht in X ist. Also gilt

$$X = \overline{\Big(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n^c\Big)} = \overline{\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big)^c} = \Big(\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big)^\circ\Big)^c,$$

und somit $(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n)^\circ = \emptyset$. ❑

2.7 Lemma. *Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ offen und $\mathcal{F} \subseteq C(G,\mathbb{C})$ punktweise beschränkt. Dann existiert eine maximale, offene, dichte Menge $\widehat{G} \subseteq G$ sodass $\mathcal{F}|_{\widehat{G}}$ lokal beschränkt ist.*[1]

Beweis. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei $K_n := \big\{z \in G \,:\, \sup_{f\in\mathcal{F}} |f(z)| \le n\big\}$ und $\widehat{G} := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n^\circ$. Wir zeigen nun dass $\widehat{G}$ die gewünschten Eigenschaften besitzt.
Als Vereinigung offener Mengen ist $\widehat{G}$ offen. Außerdem ist $\mathcal{F}|_{\widehat{G}}$ lokal beschränkt. Um dies einzusehen wähle $z \in \widehat{G}$. Nach Konstruktion existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit $z \in K_N^\circ$, und wir haben

$$\sup\big\{|f(w)| \,:\, w \in K_N^\circ, f \in \mathcal{F}\big\} \le N.$$

$\widehat{G}$ ist auch größtmöglich. Denn ist $\widetilde{G}$ eine weitere offene Teilmenge von G, sodass $\mathcal{F}|_{\widetilde{G}}$ lokal beschränkt ist und $z \in \widetilde{G}$, dann existiert eine offene Menge O und ein $N \in \mathbb{N}$ sodass $\sup\big\{|f(w)| \,:\, w \in O, f \in \mathcal{F}\big\} \le N$ und damit $z \in O \subseteq K_N^\circ$, d.h. $\widetilde{G} \subseteq \widehat{G}$.
Um zu zeigen dass $\widehat{G}$ in G dicht ist, sei $U \subseteq G$ offen und nicht leer. Da alle Funktionen $f \in \mathcal{F}$ stetig sind ist jedes K_n abgeschlossen bzgl. der Spurtopologie in G. Weil $\mathcal{F}$ punktweise beschränkt ist gilt auch $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n = G$. Deshalb ist $K_n \cap U$ abgeschlossen bzgl. der Spurtopologie in U und $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}(K_n \cap U) = U$. Da die Menge U offen ist, hat sie nicht leeres Inneres. Aus Korollar 2.6, angewandt auf den Raum $(U, \mathcal{E}|_U)$ und die Mengen $K_n \cap U$, folgt dass es ein $N \in \mathbb{N}$ mit $(K_N \cap U)^\circ \ne \emptyset$ gibt, wobei das Innere bzgl. der Spurtopologie in U zu verstehen ist. Also gibt es eine offene und nicht leere Menge $O \subseteq K_N \cap U$ und weil O offen ist, gilt auch $O \subseteq K_N^\circ \cap U$. Insbesondere gilt

$$\emptyset \ne O \subseteq K_N^\circ \cap U \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n^\circ \cap U = \widehat{G} \cap U,$$

womit $\widehat{G}$ dicht in G ist. ❑

2.8 Korollar (Satz von Osgood)**.** *Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ offen und $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge analytischer Funktionen auf G, die punktweise gegen eine Funktion $f : G \to \mathbb{C}$ konvergiert. Dann existiert eine offene und in G dichte Teilmenge $\widehat{G}$ auf der die Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lokal gleichmäßig gegen f konvergiert. Insbesondere gilt $f \in H(\widehat{G})$.*

Beweis. Die Menge $\mathcal{F} := \big\{f_n \,:\, n \in \mathbb{N}\big\}$ ist punktweise beschränkt, da $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ punktweise gegen f konvergiert. Nach Lemma 2.7 existiert eine offene und in G dichte Menge $\widehat{G}$ sodass $\mathcal{F}|_{\widehat{G}}$ lokal beschränkt ist. Aus dem Satz von Montel, Satz 2.3, folgt dass eine lokal gleichmäßig konvergente Teilfolge $(f_{n_k}|_{\widehat{G}})_{k\in\mathbb{N}}$ existiert. Wegen der punktweisen Konvergenz muss der Grenzwert dieser Teilfolge gleich $f|_{\widehat{G}}$ sein. Als lokal gleichmäßiger Grenzwert ist wegen Lemma 1.3 auch die Grenzfunktion $f|_{\widehat{G}}$ analytisch. Würde die Folge $(f_n|_{\widehat{G}})_{n\in\mathbb{N}}$ nicht lokal gleichmäßig konvergieren, gäbe es eine kompakte Menge $K \subseteq \widehat{G}$, ein $\epsilon > 0$, eine Teilfolge $(f_{n_m})_{m\in\mathbb{N}}$ und Punkte $z_m \in K$ sodass $|f_{n_m}(z_m) - f(z_m)| \ge \epsilon$ für $m \ge 1$. Dann kann aber keine Teilfolge von $(f_{n_m})_{m\in\mathbb{N}}$ auf K gleichmäßig gegen f konvergieren, ein Widerspruch. ❑

[1] $\mathcal{F}|_{\widehat{G}} := \{f|_{\widehat{G}} \,:\, f \in \mathcal{F}\}$

3 Lavrientiev's Resultate

Im folgenden Abschnitt möchten wir darauf eingehen, ob bei gegebener punktweise konvergenten Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf einer offenen Menge $G \subseteq \mathbb{C}$ eine dichte Teilmenge $\widehat{G}$ jene größtmögliche Menge sein kann, auf der $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lokal gleichmäßig konvergiert. Eine notwendige und hinreichende Bedingung an die Menge $\widehat{G}$ hat M. A. Lavrientiev in [L] gegeben. Allerdings sind diese Bedingungen sehr unhandlich, weshalb wir nicht näher darauf eingehen, sondern zwei einfachere (und unserer Meinung nach schönere) Resultate vorstellen möchten.
Dafür benötigen wir ein Maximumprinzip für analytische Funktionen.

3.1 Satz (Maximumprinzip)**.** *Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ offen und $f \in H(G)$. Dann gilt:*

(i) Sei zusätzlich G zusammenhängend. Existiert ein Punkt $a \in G$ mit $|f(a)| \geq |f(z)|$, $z \in G$, so ist f konstant.

(ii) Sei G beschränkt und f stetig bis zum Rand, d.h. $f \in H(G) \cap C(\overline{G})$. Dann gilt

$$\sup_{z\in G} |f(z)| = \max_{z\in\partial G} |f(z)|.$$

Beweis.

(i) Sei angenommen f nicht konstant und $a \in G$. Wegen dem Satz von der offenen Abbildung [K, Proposition 5.2.1 (iv)] enthält $f(G)$ eine ganze Umgebung von $f(a)$, also sicher auch Punkte mit größerem Betrag.

(ii) Da f stetig ist und $\overline{G}$ kompakt gibt es eine Stelle $a \in G$ mit $|f(a)| = \max_{z\in\overline{G}} |f(z)|$. Angenommen $a \in G$, dann ist wegen *(i)* die Funktion f auf der Zusammenhangskomponente $\hat{G}$ von G welche a enthält konstant. Nun ist $\partial\hat{G} \subseteq \partial G$ da $\mathbb{C}$ lokal zusammenhängend ist, und wir schließen dass es einen Punkt $\hat{a} \in \partial G$ gibt mit $|f(\hat{a})| = |f(a)|$. Es folgt dass $|f|$ sein Maximum sicher auch am Rand annimmt, also

$$\sup_{z\in G} |f(z)| \leq \max_{z\in\partial G} |f(z)|.$$

Die umgekehrte Ungleichung gilt wegen der Stetigkeit von f.

❑

Beim ersten Resultat handelt es sich um eine Aussage über das *Sierpinski Dreieck*.

3.2 Beispiel. Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ offen. Wir konstruieren nun ein sogenanntes *Sierpinski Dreieck*. Dazu wähle in einer offenen Kugel in G drei Punkte a, b und c welche die Eckpunkte eines gleichseitigen Dreiecks bilden. Sei D_0 der Rand dieses Dreiecks. Nun sei c' der Mittelpunkt der Strecke $\overline{ab}$, b' der Mittelpunkt der Strecke $\overline{ac}$ und a' Mittelpunkt der Strecke $\overline{bc}$. Sei D_1 der Rand des Dreiecks mit den Eckpunkten a', b' und c'. Damit ergeben sich vier gleichseitige Dreiecke, deren Rand $D_0 \cup D_1$ ist. Nun wiederhole dieses Verfahren in den äußeren drei Dreiecken und fahre immer weiter so fort. Das Sierpinski Dreieck D ist die kompakte Menge $\overline{D_0 \cup D_1 \cup \cdots}$.

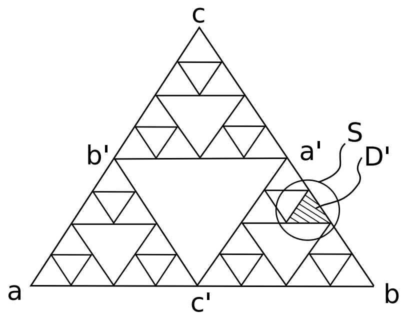

Abbildung 2: Ersten Konstruktionsschritte eines Sierpinski Dreiecks

Nach Konstruktion ist $\widehat{G} := G \setminus D$ offen und dicht in G. //

Nun kann man sich folgende Frage stellen: Gibt es eine analytische Funktionenfolge auf G die punktweise konvergiert und für die $\widehat{G}$ die größtmögliche offene und dichte Menge ist, auf der die Folge lokal gleichmäßig konvergiert? Wie wir sehen werden lässt sich solch eine Funktionenfolge nicht finden.

3.3 Lemma. *Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ offen, $\widehat{G}$ und das Sierpinski Dreieck D wie in Beispiel 3.2. Dann existiert keine Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ analytischer Funktionen die auf G punktweise gegen eine Grenzfunktion f konvergiert und für die $\widehat{G}$ die größtmögliche offene und dichte Menge ist, auf der $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lokal gleichmäßig gegen f konvergiert.*

Beweis. Angenommen $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und f existieren. Für $z \in G$ sei

$$c_n(z) := \sup\left\{|f_n(z) - f_m(z)| \,:\, m \geq n\right\}(\in \mathbb{R}),\ \ U_n := \left\{z \in G \,:\, c_n(z) > 1\right\}(\subseteq G).$$

Die Mengen U_n sind offen für jedes $n \in \mathbb{N}$ denn entweder gilt $U_n = \emptyset$ oder es existiert ein Punkt $z_0 \in U_n$ sodass $|f_n(z_0) - f_m(z_0)| > 1$ für ein $m \geq n$. Weil aber f_n und f_m insbesondere stetig sind gilt für hinreichend kleines $\delta > 0$ auch

$$|f_n(z) - f_m(z)| > 1 \quad \forall z \in U_\delta(z_0).$$

Also gilt $U_\delta(z_0) \subseteq U_n$ womit U_n offen ist.
Da $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ als konvergente Folge in $\mathbb{C}$ eine Cauchyfolge ist gilt $c_n(z) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ für jedes $z \in G$. Also ist $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n = \emptyset$. Aus dem Satz von Baire für vollständig metrische Räume, [F, Satz 4.1.1], angewandt auf den Raum (D, d_2) und die in der Spurtopologie von D offenen Mengen $U_n \cap D$ folgt dass für mindestens einen Index $N \in \mathbb{N}$ die Menge $U_N \cap D$ nicht dicht in D sein kann. Also existiert eine nicht leere und in D offene Menge $V \subseteq D$ mit $V \cap U_N = \emptyset$, d.h. es existiert eine offene Kugel $S \subseteq \mathbb{C}$ mit $S \cap D \neq \emptyset$ und

$$\forall z \in S \cap D: \quad \sup\left\{|f_N(z) - f_m(z)| \,:\, m \geq N\right\} \leq 1.$$

Da f_N als stetige Funktion auf dem Kompaktum D beschränkt ist, ist $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig beschränkt auf $S \cap D$. Wählt man nun ein in S liegendes dreieckiges Gebiet D' so, dass $\partial D'$ ein gewisses bei der Konstruktion von D vorkommendes D_i ist, so gilt $\partial D' \subseteq S \cap D$. Daher ist $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auch auf $\partial D'$ gleichmäßig beschränkt und nach dem Maximumprinzip für analytische Funktionen, Satz 3.1, auch auf $\overline{D'}$. Sei $(f_{n_k}|_{D'})_{k\in\mathbb{N}}$ eine Teilfolge von $(f_n|_{D'})_{n\in\mathbb{N}}$. Aus dem Satz von Montel, Satz 2.3, folgt die Existenz einer lokal gleichmäßig konvergenten Teilfolge $(f_{n_{k_l}}|_{D'})_{l\in\mathbb{N}}$. Nachdem die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ punktweise gegen f konvergiert, muss der Grenzwert von $(f_{n_{k_l}}|_{D'})_{l\in\mathbb{N}}$ mit $f|_{D'}$ übereinstimmen. Also konvergiert $(f_n|_{D'})_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $f|_{D'}$. Weil $\widehat{G}$ maximal ist muss gelten

$$D' \subseteq \widehat{G} = G \setminus D.$$

Das kann aber nicht sein, denn es liegen Punkte in D' welche auch in D liegen. ❑

Auch das zweite und letzte Resultat ist dem Vorigen sehr ähnlich.

3.4 Lemma. *Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet. Weiters sei $C \subseteq G$ eine bzgl. G abgeschlossene, nicht leere und nirgends dichte Teilmenge sodass $\widehat{G} := G \setminus C$ eine dichte und offene Teilmenge von G ist die sich als disjunkte Vereinigung offener Kugeln schreiben lässt, d.h. $\widehat{G} = \bigcup_{i=1}^{\infty} U_{\epsilon_i}(x_i)$. Dann existiert keine Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ analytischer Funktionen die auf G punktweise gegen eine Grenzfunktion f konvergiert und für die $\widehat{G}$ die größtmögliche offene und dichte Menge ist, auf der $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lokal gleichmäßig gegen f konvergiert.*

Beweis. Angenommen $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und f existieren. Bezeichne die Kugeln $U_{\epsilon_i}(x_i)$ mit S_i. Da $f_n|_C$ punktweise gegen $f|_C$ konvergiert ist $\{f_n|_C : n \in \mathbb{N}\}$ punktweise beschränkt. Nach Lemma 2.7 existiert eine bzgl. der Spurtopologie auf C offene und dichte Teilmenge $\widehat{C} \subseteq C$ sodass $\{f_n|_{\widehat{C}} : n \in \mathbb{N}\}$ lokal beschränkt ist. Daher gibt es ein $z_0 \in C$, $r > 0$ und $M > 0$ sodass

$$|f_n(z)| \leq M \quad \forall n \in \mathbb{N},\ \forall z \in U_r(z_0) \cap C. \tag{4}$$

Setze $U := U_{\frac{r}{2}}(z_0)$. Um jeden Punkt $z \in C$, insbesondere z_0, findet man nach Voraussetzung eine beliebig kleine Kugel S_j. Also existiert ein $j \in \mathbb{N}$ sodass $S_j \cap U \neq \emptyset$ und S_j einen Radius kleinergleich $\frac{r}{4}$ hat.

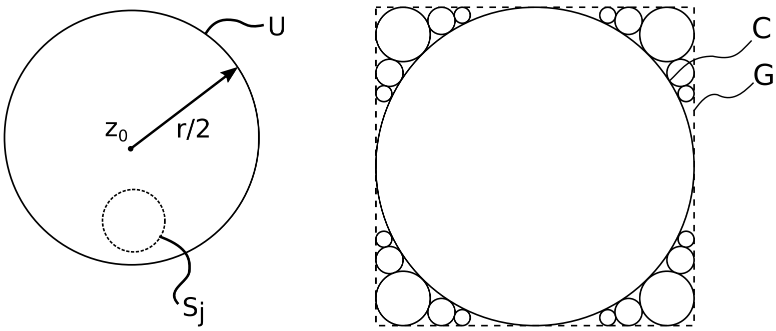

Abbildung 3: Links: U und S_j. Rechts: Veranschaulichung einer möglichen Wahl von G und C, wobei von C nur endlich viele Kreise dargestellt sind.

Es kann aber nur endlich viele Kugeln $S_{i_1}, \ldots, S_{i_m}$ geben die U schneiden und einen Radius größer als $\frac{r}{4}$ haben. Setze $R := U \setminus \{S_{i_1} \dot\cup \ldots \dot\cup S_{i_m}\}$. Weil mindestens eine Kugel mit Radius kleinergleich $\frac{r}{4}$ die Kugel U schneidet und alle S_i paarweise disjunkt sind gilt $R \neq \emptyset$ und sogar $R^\circ \neq \emptyset$. Nun zeigen wir dass für $z \in R$ gilt

$$|f_n(z)| \leq M \quad \forall n \in \mathbb{N}, \tag{5}$$

denn für $z \in R$ tritt genau einer der folgenden beiden Fälle ein:

- $z \in U \cap S_j$ und S_j hat Radius kleinergleich $\frac{r}{4}$: Dann gilt $\partial S_j \subseteq U_r(z_0) \cap C$. Aus (4) folgt

$$|f_n(w)| \leq M \quad \forall n \in \mathbb{N},\ w \in \partial S_j.$$

Aus dem Maximumprinzip, Satz 3.1, folgt nun sogar

$$|f_n(w)| \leq M \quad \forall n \in \mathbb{N},\ w \in S_j,$$

also insbesondere (5).

- $z \in U \cap C$: Wegen $U \cap C \subseteq U_r(z_0) \cap C$ folgt (5) wieder aus (4).

Insbesondere haben wir gezeigt dass $\sup \left\{ |f_n(z)| \ : \ n \in \mathbb{N},\ z \in R \right\} < \infty$. Aus dem Satz von Montel, Satz 2.3, folgt dass eine auf R gegen f lokal gleichmäßig konvergente Teilfolge $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ existiert. Wie im Beweis von Korollar 2.8 zeigt man dass dann auch $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf R lokal gleichmäßig konvergiert. Weil $\widehat{G}$ maximal ist muss gelten

$$R^\circ \subseteq \widehat{G},$$

was geometrisch aber nicht möglich ist. Denn $\widehat{G}$ ist eine Vereinigung disjunkter Kugeln, also müsste sich R° als Vereinigung disjunkter Kugeln schreiben lassen, R° ist aber eine Kugel geschnitten mit Komplementen endlich vieler Kugeln. ❑

Literatur

[A1] Michael Kaltenbäck: *Analysis 1*, Vorlesungsskriptum Version WS 2014/2015

[A2] Michael Kaltenbäck: *Analysis 2*, Vorlesungsskriptum Version SS 2015

[A3] Michael Kaltenbäck: *Analysis 3*, Vorlesungsskriptum Version WS 2015/2016

[F] Harald Woracek, Michael Kaltenbäck und Martin Blümlinger: *Funktionalanalysis*, Vorlesungsskriptum, 10. Auflage, Februar 2015

[K] Harald Woracek: *Komplexe Analysis*, Vorlesungsskriptum Version SS 2015

[L] M.A. Lavrientiev: *Sur les fonctioins d'une variable complexes representables par des series de polynomes*, Hermann & Cie, Paris 1936

[D] K.R. Davidson: *Pointwise Limits of Analytic Functions*, Amer. Math. Monthly, Vol. 90, 391-394

[P] M.J. Pelling: *Letters to the Editor*, Amer. Math. Monthly, Vol. 95, 535-536

[BM] A.F. Beardon, D. Minda: *On the Pointwise Limit of Complex Analytic Functions*, Amer. Math. Monthly, Vol. 110, 289-297

[A] Ernst Albrecht: *Topologie*, Vorlesungsskriptum SS 2007, `www.math.uni-sb.de/ag/albrecht/ss07/top/files/TKap5.pdf`, Stand 09.01.2017