Von Skalarprodukten induzierte Normen

Niklas Angleitner

4. Dezember 2011

Sei ein Skalarproduktraum $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ gegeben, daher ein Vektorraum X über $\mathbb{C}$ bzw. $\mathbb{R}$ mit einer positiv definiten Sesquilinearform $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Wie aus der Funktionalanalysis bekannt, kann mit Hilfe der Cauchy-Schwarz-Ungleichung gezeigt werden, dass durch: $\forall x \in X : \quad \|x\| := +\sqrt{\langle x, x \rangle}$ eine Norm auf X definiert wird. Neben dem Satz von Pythagoras und vielen weiteren interessanten Eigenschaften dieser Norm, erweist sich vor allem die sogenannte *Parallelogramm-Regel* als besonders nützlich: $\forall x, y \in X$: $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2 \cdot \|x\|^2 + 2 \cdot \|y\|^2$. Starten wir nämlich mit einem normierten Raum $(X, \|\cdot\|)$, in dem eben diese Parallelogramm-Regel gilt, so lässt sich bereits die Existenz eines Skalarproduktes nachweisen, das die gegebene Norm induziert, d.h.: $\forall x \in X : \quad \|x\|^2 = \langle x, x \rangle$.

Es ist dieser enge Zusammenhang zwischen normierten Vektorräumen und Vektorräumen mit Skalarprodukt das zugrundeliegende Thema dieser Arbeit.

1 Das Jordan/von Neumann-Theorem

1.1 Definition.
Seien $\|\cdot\|$ eine Norm und $\langle\cdot,\cdot\rangle$ ein Skalarprodukt auf einem Vektorraum X. Wir sagen, dass $\|\cdot\|$ von $\langle\cdot,\cdot\rangle$ induziert wird, falls gilt:

$$\forall x \in X : \quad \|x\|^2 = \langle x, x\rangle$$

1.2 Definition.
Sei $(X, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum über $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$. Wir definieren die Parallelogramm-Regel wie folgt:

$$\forall x, y \in X : \quad \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2 \cdot \|x\|^2 + 2 \cdot \|y\|^2$$

1.3 Satz. (Jordan/von Neumann) [JVN35]
Sei $(X, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum über $\mathbb{C}$, in dem die Parallelogramm-Regel aus Definition 1.2 gilt. Dann definiert die Polarformel

$$\begin{aligned}\forall x, y \in X : \quad \langle x, y\rangle &:= \frac{1}{4} \cdot \sum_{k=0}^{3} i^k \cdot \left\|x + i^k \cdot y\right\|^2 \\ &= \frac{1}{4} \cdot \Big((\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2) + i \cdot (\|x + i \cdot y\|^2 - \|x - i \cdot y\|^2) \Big)\end{aligned}$$

ein Skalarprodukt auf X mit: $\quad \forall x \in X : \quad \langle x, x\rangle = \|x\|^2$.
Es wird also jede Norm, die die Parallelogramm-Regel erfüllt, von einem Skalarprodukt induziert.

Beweis.
Schritt 1: $\quad \forall x \in X : \quad \langle x, x\rangle = \|x\|^2$
Wir berechnen:

$$\begin{aligned}4 \cdot \langle x, x\rangle &= \sum_{k=0}^{3} i^k \cdot \left\|x + i^k \cdot x\right\|^2 \\ &= \sum_{k=0}^{3} i^k \cdot |1 + i^k|^2 \cdot \|x\|^2 \\ &= 4 \cdot \|x\|^2\end{aligned}$$

□

Schritt 2: $\quad \forall x \in X : \quad \langle x, x\rangle \geq 0 \quad$ und $\quad \langle x, x\rangle = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0$
Folgt unmittelbar aus Schritt 1. □

Schritt 3: $\quad \forall x, y \in X : \quad \langle y, x\rangle = \overline{\langle x, y\rangle}$
Wir berechnen:

$$\begin{aligned}4 \cdot \overline{\langle x, y\rangle} &= (\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2) - i \cdot (\|x + i \cdot y\|^2 - \|x - i \cdot y\|^2) \\ &= (\|x+y\|^2 - \|(-1) \cdot (x-y)\|^2) - i \cdot (\|(-i) \cdot (x + i \cdot y)\|^2 - \|(+i) \cdot (x - i \cdot y)\|^2) \\ &= (\|y+x\|^2 - \|y-x\|^2) + i \cdot (\|y + i \cdot x\|^2 - \|y - i \cdot x\|^2) \\ &= 4 \cdot \langle y, x\rangle\end{aligned}$$

□

Schritt 4: $\quad \forall x, y, z \in X : \quad \|x+y+z\|^2 = \|x+y\|^2 + \|x+z\|^2 + \|y+z\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2 - \|z\|^2$

Wir berechnen unter mehrfacher Verwendung der Parallelogramm-Regel:

$$\begin{aligned}
\|x+y+z\|^2 &= 2 \cdot \|x+y\|^2 + 2 \cdot \|z\|^2 - \|x+y-z\|^2 \\
&= \|x+y\|^2 + \|z\|^2 + \underbrace{\|x+y\|^2 + \|z\|^2}_{\text{PR.}} - \|x+y-z\|^2 \\
&= \|x+y\|^2 + \|z\|^2 + \frac{1}{2} \cdot \underbrace{\|x+y+z\|^2}_{\text{PR.}} - \frac{1}{2} \cdot \|x+y-z\|^2 \\
&= \|x+y\|^2 + \|z\|^2 + \frac{1}{2} \cdot (2 \cdot \|x+z\|^2 + 2 \cdot \|y\|^2 - \|x-y+z\|^2) - \frac{1}{2} \cdot \|x+y-z\|^2 \\
&= \|x+y\|^2 + \|x+z\|^2 + \|y\|^2 + \|z\|^2 - \frac{1}{2} \cdot (\underbrace{\|x-(y-z)\|^2 + \|x+(y-z)\|^2}_{\text{PR.}}) \\
&= \|x+y\|^2 + \|x+z\|^2 + \underbrace{\|y\|^2 + \|z\|^2}_{\text{PR.}} - \|x\|^2 - \|y-z\|^2 \\
&= \|x+y\|^2 + \|x+z\|^2 + \frac{1}{2} \cdot \|y+z\|^2 + \frac{1}{2} \cdot \|y-z\|^2 - \|x\|^2 - \|y-z\|^2 \\
&= \|x+y\|^2 + \|x+z\|^2 + \frac{1}{2} \cdot \|y+z\|^2 - \|x\|^2 - \frac{1}{2} \cdot \underbrace{\|y-z\|^2}_{\text{PR.}} \\
&= \|x+y\|^2 + \|x+z\|^2 + \frac{1}{2} \cdot \|y+z\|^2 - \|x\|^2 - \frac{1}{2} \cdot (2 \cdot \|y\|^2 + 2 \cdot \|z\|^2 - \|y+z\|^2) \\
&= \|x+y\|^2 + \|x+z\|^2 + \|y+z\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2 - \|z\|^2
\end{aligned}$$

□

Schritt 5: $\quad \forall x, y, z \in X : \quad \langle x+y, z\rangle = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle$

Wir berechnen unter Verwendung der in Schritt 4 gezeigten Formel und $\sum_{k=0}^{3} i^k = 0$:

$$\begin{aligned}
4 \cdot \langle x+y, z\rangle &= \sum_{k=0}^{3} i^k \cdot \left\|x+y+i^k \cdot z\right\|^2 \\
&= \sum_{k=0}^{3} i^k \cdot (\|x+y\|^2 + \left\|x+i^k \cdot z\right\|^2 + \left\|y+i^k \cdot z\right\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2 - 1 \cdot \|z\|^2) \\
&= 0 + \sum_{k=0}^{3} i^k \cdot \left\|x+i^k \cdot z\right\|^2 + \sum_{k=0}^{3} i^k \cdot \left\|y+i^k \cdot z\right\|^2 + 0 + 0 + 0 \\
&= 4 \cdot (\langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle)
\end{aligned}$$

□

Zu zeigen, dass $\langle\cdot,\cdot\rangle$ mit der skalaren Multiplikation verträglich ist, gelingt durch einfaches Umformen leider nicht. Wir wählen daher den folgenden, etwas umständlich anmutenden Weg über komplexe Zahlen mit rationalen Real- und Imaginärteilen: $\quad \mathbb{C}_{\mathbb{Q}} := \{ a + i \cdot b \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$

Schritt 6: $\quad \forall \alpha \in \mathbb{C}_{\mathbb{Q}} : \quad \langle \alpha \cdot x, y\rangle = \alpha \cdot \langle x, y\rangle$

Fall 1: $\alpha \in \{0, 1\}$:
Einsetzen in die Definition von $\langle\cdot,\cdot\rangle$ zeigt die Behauptung.

Fall 2: $\alpha \in \mathbb{N}_{\geq 2}$:
Verwendung von Schritt 5 und vollständiger Induktion zeigt die Behauptung.

Fall 3: $\alpha \in -\mathbb{N}$:
Wegen $\alpha = -|\alpha|$ und $0 \overset{\text{Fall 1}}{=} \langle 0 \cdot x, y\rangle = \langle (|\alpha| - |\alpha|) \cdot x, y\rangle \overset{\text{Schritt 5}}{=} \langle |\alpha| \cdot x, y\rangle + \langle -|\alpha| \cdot x, y\rangle$ erhalten wir $\alpha \cdot \langle x, y\rangle = -|\alpha| \cdot \langle x, y\rangle \overset{\text{Fall 1/2}}{=} -\langle |\alpha| \cdot x, y\rangle = \langle -|\alpha| \cdot x, y\rangle = \langle \alpha \cdot x, y\rangle$

Fall 4: $\alpha = \frac{1}{n}$ für ein $n \in \mathbb{N}$:

Die Gleichheit $\langle x,y\rangle = \left\langle n\cdot\frac{1}{n}\cdot x,y\right\rangle \overset{\text{Fall }1/2}{=} n\cdot\langle\alpha\cdot x,y\rangle$ liefert bei Division durch n die Behauptung.
Fall 5: $\alpha\in\mathbb{Q}$:
Zusammensetzen der Fälle 1 bis 4 liefert die Behauptung.
Fall 6: $\alpha = i\in i\cdot\mathbb{Q}$:

$$\begin{aligned}
4\cdot\langle\alpha\cdot x,y\rangle &= (\|i\cdot x+y\|^2-\|i\cdot x-y\|^2)+i\cdot(\|i\cdot x+i\cdot y\|^2-\|i\cdot x-i\cdot y\|^2)\\
&= (\|(-i)\cdot(i\cdot x+y)\|^2-\|(-i)\cdot(i\cdot x-y)\|^2)+i\cdot(\|(+i)\cdot(x+y)\|^2-\|(+i)\cdot(x-y)\|^2)\\
&= i\cdot\Big((\|x+y\|^2-\|x-y\|^2)+i\cdot(\|x+i\cdot y\|^2-\|x-i\cdot y\|^2)\Big)\\
&= 4\cdot\alpha\cdot\langle x,y\rangle
\end{aligned}$$

Fall 7: $\alpha\in\mathbb{C}_{\mathbb{Q}}$:
Zusammensetzen der Fälle 1 bis 6 liefert die Behauptung.
□

Um die Verträglichkeit von $\langle\cdot,\cdot\rangle$ mit der skalaren Multiplikation von $\mathbb{C}_{\mathbb{Q}}$ auf ganz $\mathbb{C}$ fortzusetzen, werden wir ein Approximations-Argument verwenden, für das wir aber zuerst die Cauchy-Schwarz'sche Ungleichung benötigen. Wir dürfen diese Ungleichung natürlich noch nicht verwenden, da sie ja nur gilt, wenn schon bakannt ist, dass es sich bei $\langle\cdot,\cdot\rangle$ um ein Skalarprodukt handelt. Wir zeigen also:

Schritt 7: $\quad\forall x,y\in X:\quad |\langle x,y\rangle|\leq\|x\|\cdot\|y\|$
Fall 1: $y=0$:
Einsetzen in die Definition liefert die Behauptung.
Fall 2: $y\neq 0$:
Es gilt:

$$\begin{aligned}
\forall\alpha\in\mathbb{C}_{\mathbb{Q}}:\quad 0 &\leq \|x-\alpha\cdot y\|^2\\
&= \langle x-\alpha\cdot y, x-\alpha\cdot y\rangle\\
&= \|x\|^2-2\cdot\mathrm{Re}(\overline{\alpha}\cdot\langle x,y\rangle)+|\alpha|^2\cdot\|y\|^2
\end{aligned}$$

Da $\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}\cong\mathbb{C}_{\mathbb{Q}}$ dicht in $\mathbb{R}\times\mathbb{R}\cong\mathbb{C}$ liegt, gibt es eine Folge $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}\in(\mathbb{C}_{\mathbb{Q}})^{\mathbb{N}}$ mit $\alpha_n\xrightarrow{n\mapsto\infty}\frac{\langle x,y\rangle}{\|y\|^2}$. Gehen wir also in obiger Ungleichung zu den Grenzwerten über, so erhalten wir wegen der Stetigkeit der vorkommenden Ausdrücke:

$$\begin{aligned}
0 &\leq \lim_{n\mapsto\infty}\left(\|x\|^2-2\cdot\mathrm{Re}(\overline{\alpha_n}\cdot\langle x,y\rangle)+|\alpha_n|^2\cdot\|y\|^2\right)\\
&= \|x\|^2-2\cdot\mathrm{Re}\left(\frac{\overline{\langle x,y\rangle}}{\|y\|^2}\cdot\langle x,y\rangle\right)+\left|\frac{\langle x,y\rangle}{\|y\|^2}\right|^2\cdot\|y\|^2\\
&= \|x\|^2-2\cdot\frac{|\langle x,y\rangle|^2}{\|y\|^2}+\frac{|\langle x,y\rangle|^2}{\|y\|^2}
\end{aligned}$$

Umstellen liefert nun die Behauptung. □

Nun haben wir alle Eigenschaften beisammen, um die Verträglichkeit des potentiellen Skalarprodukts mit der skalaren Multiplikation auf dem gesamten Skalarkörper $\mathbb{C}$ nachzuweisen:

Schritt 8: $\quad\forall\alpha\in\mathbb{C}:\quad\langle\alpha\cdot x,y\rangle=\alpha\cdot\langle x,y\rangle$
Sei also $\alpha\in\mathbb{C}$. Wieder wegen der Dichtheit von $\mathbb{C}_{\mathbb{Q}}$ in $\mathbb{C}$ gibt es eine Folge $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}\in(\mathbb{C}_{\mathbb{Q}})^{\mathbb{N}}$ mit $\alpha_n\xrightarrow{n\mapsto\infty}\alpha$.
Wegen

$$\begin{aligned}
0 &\leq |\langle\alpha\cdot x,y\rangle-\alpha_n\cdot\langle x,y\rangle|\\
&\overset{\text{Schritt }5/6}{=} |\langle(\alpha-\alpha_n)\cdot x,y\rangle|\\
&\overset{\text{Schritt }7}{\leq} \underbrace{|\alpha-\alpha_n|}_{\xrightarrow{n\mapsto\infty}0}\cdot\|x\|\cdot\|y\|
\end{aligned}$$

gilt schließlich $\alpha \cdot \langle x, y\rangle = \lim_{n\mapsto\infty}(\alpha_n \cdot \langle x, y\rangle) = \langle \alpha \cdot x, y\rangle$ □

Wir haben also gezeigt, dass die Polarformel ein Skalarprodukt definiert, wenn nur die Gültigkeit der Parallelogramm-Regel aus Definition 1.2 gefordert wird. ■

1.4 Korollar.
Sei $(X, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum über $\mathbb{C}$. Dann sind äquivalent:

- $\|\cdot\| : X \longrightarrow [0, \infty)$ wird von einem Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle : X \times X \longrightarrow \mathbb{C}$ induziert
- $\forall U \leq X$ mit $\dim U = 2$: $\quad \|\cdot\|\,|_U : U \longrightarrow [0, \infty)$ wird von einem Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle_U : U \times U \longrightarrow \mathbb{C}$ induziert

Beweis.
Schritt 1: „$\Downarrow$“
Setze einfach $\langle\cdot,\cdot\rangle_U := \langle\cdot,\cdot\rangle|_U$. □

Schritt 2: „$\Uparrow$“
Wir zeigen unter der gemachten Voraussetzung die Gültigkeit der Parallelogramm-Regel aus Definition 1.2 und verwenden dann Satz 1.3. Sei also $x, y \in X$ beliebig und $U := \operatorname{span}\{x, y\}$.
Fall 1: $\dim U \leq 1$:
Es gilt daher $y = \alpha \cdot x$ für ein $\alpha \in \mathbb{C}$ und wegen $|1+\alpha|^2 + |1-\alpha|^2 = 2 + 2 \cdot |\alpha|^2$ schon $\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = (|1+\alpha|^2 + |1-\alpha|^2) \cdot \|x\|^2 = 2 \cdot \|x\|^2 + 2 \cdot \|y\|^2$.
Fall 2: $\dim U = 2$:
Laut Voraussetzung gibt es also ein Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle_U : U \times U \longrightarrow \mathbb{C}$ mit: $\quad \forall z \in U : \|z\|^2 = \langle z, z\rangle_U$.
Wir berechnen:

$$\begin{aligned}
\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 &= \langle x + y, x + y\rangle_U + \langle x - y, x - y\rangle_U \\
&= \|x\|^2 + \langle x, y\rangle_U + \langle y, x\rangle_U + \|y\|^2 + \|x\|^2 - \langle x, y\rangle_U - \langle y, x\rangle_U + \|y\|^2 \\
&= 2 \cdot \|x\|^2 + 2 \cdot \|y\|^2
\end{aligned}$$

Es gilt also in beiden Fällen die Parallelogramm-Regel. □

■

1.5 Bemerkung.
Es sei hier ohne ausführlichen Beweis erwähnt, dass die Aussage des Jordan/von Neumann-Theorems, Satz 1.3, auch für normierte Vektorräume über dem Skalarkörper $\mathbb{R}$ gilt. Das Skalarprodukt ist in diesem Fall wie folgt zu definieren:

$$\forall x, y \in X : \quad \langle x, y\rangle := \frac{1}{4} \cdot \left(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2 \right)$$

Insbesondere gilt daher auch die Aussage des Korollars 1.4 für normierte Vektorräume über $\mathbb{R}$.

2 Das DeFigueiredo/Karlovitz-Theorem

Wir werden im Beweis des hier vorgestellten Satzes von DeFigueiredo/Karlovitz, Satz 2.6, von folgenden Resultaten Gebrauch machen:

2.1 Lemma. (Kakutani)
Sei $(X, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum über $\mathbb{R}$ mit $\dim X \geq 3$. Falls für jeden 2-dimensionalen Unterraum $U \leq X$ eine lineare Projektion $P : X \longrightarrow U$ mit $\|P\|_{\mathrm{OP}} \leq 1$ existiert, so wird die Norm $\|\cdot\|$ von einem Skalarprodukt induziert.

(Der Beweis dieser Aussage beruht auf Eigenschaften von Ellipsoiden, die weit vom gewählten Thema dieser Arbeit abschweifen und soll daher an dieser Stelle entfallen. [1])

2.2 Lemma.
Sei $(X, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum über $\mathbb{R}$ und $U \leq X$ ein Teilraum mit $\dim U < \infty$. Dann gilt:

$$\forall x \in X : \exists u_0 \in U : \quad \|x - u_0\| = \min_{u \in U} \|x - u\|$$

Beweis.
Sei $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in U^{\mathbb{N}}$ eine Folge mit $\lim\limits_{n\mapsto\infty} \|x - u_n\| = \inf\limits_{u\in U} \|x - u\|$. Wegen der Dreiecksungleichung gilt nun $\|u_n\| \leq \|x\| + \|x - u_n\|$, insbesondere ist die Folge $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ also beschränkt. Da U endlich-dimensional ist, erhalten wir nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß die Konvergenz einer Teilfolge von $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, o.B.d.A. können wir also die Konvergenz der Folge selbst gegen ein $u_0 \in X$ annehmen. Endlich-dimensionale normierte Räume sind, wie aus der Funktionalanalysis bekannt, abgeschlossen, es gilt also sogar $u_0 \in U$. Wegen der Stetigkeit der Norm erhalten wir abschließend:

$$\|x - u_0\| = \left\|x - \lim_{n\mapsto\infty} u_n\right\| = \lim_{n\mapsto\infty} \|x - u_n\| = \inf_{u\in U} \|x - u\| = \min_{u\in U} \|x - u\|$$

■

2.3 Lemma.
Betrachte eine konvexe Funktion $f : [a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ und $f(a) \leq f(t), \forall t \in [a, b)$. Dann ist f monoton steigend.
Analog folgt für $f : (a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}, b \in \mathbb{R}$, konvex, aus $f(b) \leq f(t), \forall t \in (a, b]$, auch bereits monotones Fallen.

Beweis.
Wir zeigen nur den Fall für monotones Steigen. Der zweite folgt dann analog.
Sei $x_1, x_2 \in [a, b)$ mit $a \leq x_1 < x_2 < b$, dann gilt $x_1 = (1 - t_1) \cdot a + t_1 \cdot x_2$ für ein $t_1 \in [0, 1)$. Wegen der Konvexität von f auf $[a, x_2)$ haben wir somit:

$$f(x_1) = f((1 - t_1) \cdot a + t_1 \cdot x_2) \leq (1 - t_1) \cdot f(a) + t_1 \cdot f(x_2) \leq (1 - t_1) \cdot f(x_2) + t_1 \cdot f(x_2) = f(x_2)$$

■

Des Weiteren wird es zweckmäßig sein, die folgende Definition einzuführen:

[1] Der besonders interessierte Leser sei verwiesen an: S. Kakutani, Some characterizations of Euclidean space, Jap. J. Math. 16, (1939), p. 93-97.

2.4 Definition.
Sei $(X, \|\cdot\|)$ ein normierter Vektorraum über $\mathbb{R}$. Wir definieren:

$$X \text{ erfüllt } (P) \quad :\Leftrightarrow \quad \begin{array}{l} \text{für alle } x, y \in X\backslash\{0\} \text{ mit } \|x\| = \|y\| \text{ ist die Funktion} \\ \phi(\cdot, x, y) : \mathbb{R} \longrightarrow [0, \infty) : \lambda \longmapsto \|x - \lambda \cdot y\| \\ \text{auf } (-\infty, -1] \text{ streng monoton fallend und} \\ \text{auf } [1, +\infty) \text{ streng monoton steigend} \end{array}$$

2.5 Bemerkung.
Die Funktion $\phi(\cdot, x, y)$ aus Definition 2.4 ist als Zusammensetzung stetiger Funktionen selbst stetig und weiters auch konvex:

$$\begin{array}{rcl} \forall \lambda_1 \leq \lambda_2 \in \mathbb{R}, \forall t \in [0,1]: & & \\ \phi((1-t) \cdot \lambda_1 + t \cdot \lambda_2, x, y) & = & \|x - ((1-t) \cdot \lambda_1 + t \cdot \lambda_2) \cdot y\| \\ & = & \|(1-t) \cdot x + t \cdot x - ((1-t) \cdot \lambda_1 + t \cdot \lambda_2) \cdot y\| \\ & \leq & \|(1-t) \cdot x - ((1-t) \cdot \lambda_1) \cdot y\| + \|t \cdot x - (t \cdot \lambda_2) \cdot y\| \\ & = & (1-t) \cdot \phi(\lambda_1, x, y) + t \cdot \phi(\lambda_2, x, y) \end{array}$$

2.6 Satz. (DeFigueiredo/Karlovitz) [dFK67]
Sei $(X, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum über $\mathbb{R}$ mit $\dim X \geq 3$. Wir definieren die Abbildung:

$$T : \begin{cases} X & \longrightarrow & X \\ x & \longmapsto & \begin{cases} x & \text{für } \|x\| \leq 1 \\ \frac{x}{\|x\|} & \text{für } \|x\| > 1 \end{cases} \end{cases}$$

Dann sind äquivalent:

- $\|\cdot\|$ wird von einem Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ induziert
- $\forall x, y \in X: \quad \|T(x) - T(y)\| \leq \|x - y\|$, d.h. T ist nicht-expansiv

Beweis.
Schritt 1: X erfüllt $(P) \quad \Leftrightarrow \quad T$ ist nicht-expansiv
Wir beginnen mit der Richtung „$\Rightarrow$“:
Seien also $x, y \in X$, dann können wir drei Fälle unterscheiden:
Fall 1: $\|x\|, \|y\| \leq 1$:
$\|T(x) - T(y)\| = \|x - y\|$
Fall 2: $\|x\| \leq 1 < \|y\|$:
Der Fall $x = 0$ liefert sofort die Behauptung, d.h. wir können $x \neq 0$ annehmen. Die Vektoren x und $\frac{\|x\|}{\|y\|} \cdot y$ sind somit ungleich 0 und haben gleiche Norm. Wir können daher die zugehörige Funktion $\phi(\cdot, x, \frac{\|x\|}{\|y\|} \cdot y)$

laut Definition 2.4 verwenden:

$$
\begin{aligned}
\|T(x) - T(y)\| &= \left\| x - \frac{y}{\|y\|} \right\| \\
&= \phi(\frac{1}{\|x\|}, x, \frac{\|x\|}{\|y\|} \cdot y) \\
&\overset{\substack{\text{Monot. auf} \\ [1,+\infty)}}{\leq} \phi(\frac{\|y\|}{\|x\|}, x, \frac{\|x\|}{\|y\|} \cdot y) \\
&= \|x - y\|
\end{aligned}
$$

Fall 3: $1 \leq \|x\| \leq \|y\|$:
Die Vektoren $\frac{1}{\|x\|} \cdot x$ und $\frac{1}{\|y\|} \cdot y$ sind ungleich 0 und haben gleiche Norm. Wir können also wieder die zugehörige Funktion $\phi(\cdot, \frac{1}{\|x\|} \cdot x, \frac{1}{\|y\|} \cdot y)$ aus Definition 2.4 verwenden:

$$
\begin{aligned}
\|T(x) - T(y)\| &= \left\| \frac{x}{\|x\|} - \frac{y}{\|y\|} \right\| \\
&= \phi(1, \frac{1}{\|x\|} \cdot x, \frac{1}{\|y\|} \cdot y) \\
&\overset{\substack{\text{Monot. auf} \\ [1,+\infty)}}{\leq} \phi(\frac{\|y\|}{\|x\|}, \frac{1}{\|x\|} \cdot x, \frac{1}{\|y\|} \cdot y) \\
&= \frac{1}{\|x\|} \cdot \|x - y\| \\
&\leq \|x - y\|
\end{aligned}
$$

Es folgt also aus der Eigenschaft (P) die Nicht-Expansivität von T.

Nun folgt der Beweis der Rückrichtung „$\Leftarrow$“:
Seien also $x, y \in X \backslash \{0\}$ mit $\|x\| = \|y\|$ und $\phi(\cdot, x, y)$ die zugehörige Funktion laut Definition 2.4. Wegen $|\alpha| \cdot \phi(\cdot, x, y) = \phi(\cdot, \alpha \cdot x, \alpha \cdot y), \forall \alpha \in \mathbb{R}$ hängt das nun zu untersuchende Monotonie-Verhalten von $\phi(\cdot, x, y)$ nicht vom tatsächlichen Wert von $\|x\| = \|y\|$ ab. Wir können daher o.B.d.A. annehmen, dass $\|x\| = \|y\| = 1$.

Laut Lemma 2.3 brauchen wir für die Monotonie von $\phi(\cdot, x, y)$ auf $[1, +\infty)$ nur mehr $\phi(1, x, y) \leq \phi(\lambda, x, y), \forall \lambda \in [1, +\infty)$ zeigen. Dazu verwenden wir die vorausgesetzte Nicht-Expansivität von T:

$$
\begin{aligned}
\forall \lambda \in [1, +\infty): \quad \phi(1, x, y) &= \|x - y\| \\
&\overset{\|y\|=1}{=} \left\| x - \frac{\lambda \cdot y}{\|\lambda \cdot y\|} \right\| \\
&\overset{\|\lambda \cdot y\| = \lambda \geq 1}{=} \|T(x) - T(\lambda \cdot y)\| \\
&\overset{\text{n.exp.}}{\leq} \|x - \lambda \cdot y\| \\
&= \phi(\lambda, x, y)
\end{aligned}
$$

Eine analoge Rechnung zeigt auch, dass $\phi(\cdot, x, y)$ auf $(-\infty, -1]$ monoton fällt.
Zum Abschließen des Beweises benötigen wir nun noch *streng* monotones Steigen auf $[1, +\infty)$ bzw. Fallen auf $(-\infty, -1]$. (Wir zeigen nur streng monotones Steigen auf $[1, +\infty)$, der zweite Teil kann analog bewiesen werden.) Ein Widerspruchs-Beweis führt hier zum Ziel:
Sei also $\lambda_0 \in (1, +\infty)$ mit $\phi(\lambda, x, y) = \phi(1, x, y), \forall \lambda \in [1, \lambda_0]$. (Alle anderen Widerspruchs-Annahmen können wegen der Konvexität von $\phi(\cdot, x, y)$ sofort ausgeschlossen werden.)

Wir betrachten $z(\alpha) := \alpha \cdot x + (1-\alpha) \cdot y, \forall \alpha \in (0,1)$ und berechnen:

$$\begin{aligned}
\phi(1, x, \frac{z(\alpha)}{\|z(\alpha)\|}) &= \left\| x - \frac{z(\alpha)}{\|z(\alpha)\|} \right\| \\
&= \left\| \frac{(\|z(\alpha)\| - \alpha) \cdot x - (1-\alpha) \cdot y}{\|z(\alpha)\|} \right\| \\
&\overset{(*)}{=} \frac{\|z(\alpha)\| - \alpha}{\|z(\alpha)\|} \cdot \left\| x - \frac{1-\alpha}{\|z(\alpha)\| - \alpha} \cdot y \right\| \\
&= \left(1 - \frac{\alpha}{\|z(\alpha)\|}\right) \cdot \phi(\frac{1-\alpha}{\|z(\alpha)\| - \alpha}, x, y) \\
&\overset{(**)}{=} \left(1 - \frac{\alpha}{\|z(\alpha)\|}\right) \cdot \phi(1, x, y)
\end{aligned}$$

$(*)$ Wegen $\lim_{\alpha \mapsto 0} \frac{\|z(\alpha)\| - \alpha}{\|z(\alpha)\|} = 1 > 0$ kann hier für hinreichend kleine α der Betrag weggelassen werden.
$(**)$ Wegen $\lim_{\alpha \mapsto 0} \frac{1-\alpha}{\|z(\alpha)\| - \alpha} = 1$ und der angenommenen Konstantheit von $\phi(\cdot, x, y)$ auf $[1, \lambda_0]$ stimmt diese Gleichheit für alle hinreichend kleinen α.
Wir berechnen weiters für $\delta > 0$:

$$\begin{aligned}
\phi(1+\delta, x, \frac{z(\alpha)}{\|z(\alpha)\|}) &= \left\| x - \frac{(1+\delta) \cdot z(\alpha)}{\|z(\alpha)\|} \right\| \\
&= \left\| \frac{(\|z(\alpha)\| - (1+\delta) \cdot \alpha) \cdot x - (1+\delta) \cdot (1-\alpha) \cdot y}{\|z(\alpha)\|} \right\| \\
&\overset{(***)}{=} \frac{\|z(\alpha)\| - (1+\delta) \cdot \alpha}{\|z(\alpha)\|} \cdot \left\| x - \frac{(1+\delta) \cdot (1-\alpha)}{\|z(\alpha)\| - (1+\delta) \cdot \alpha} \cdot y \right\| \\
&= \left(1 - \frac{(1+\delta) \cdot \alpha}{\|z(\alpha)\|}\right) \cdot \phi(\frac{(1+\delta) \cdot (1-\alpha)}{\|z(\alpha)\| - (1+\delta) \cdot \alpha}, x, y) \\
&\overset{(****)}{=} \left(1 - \frac{(1+\delta) \cdot \alpha}{\|z(\alpha)\|}\right) \cdot \phi(1, x, y)
\end{aligned}$$

$(***)$ Wegen $\lim_{\delta \mapsto 0} \frac{\|z(\alpha)\| - (1+\delta) \cdot \alpha}{\|z(\alpha)\|} = \frac{\|z(\alpha)\| - \alpha}{\|z(\alpha)\|}$ und $(*)$ kann hier für hinreichend kleine α und δ der Betrag weggelassen werden.
$(****)$ Wegen $\lim_{\delta \mapsto 0} \frac{(1+\delta) \cdot (1-\alpha)}{\|z(\alpha)\| - (1+\delta) \cdot \alpha} = \frac{1-\alpha}{\|z(\alpha)\| - \alpha}$ und $(**)$ stimmt diese Gleichheit für alle hinreichend kleinen α und δ.
Zusammensetzen der beiden Gleichungen liefert für hinreichend kleine α und δ:

$$\phi(1+\delta, x, \frac{z(\alpha)}{\|z(\alpha)\|}) = \left(1 - \frac{(1+\delta) \cdot \alpha}{\|z(\alpha)\|}\right) \cdot \phi(1, x, y) < \left(1 - \frac{\alpha}{\|z(\alpha)\|}\right) \cdot \phi(1, x, y) = \phi(1, x, \frac{z(\alpha)}{\|z(\alpha)\|})$$

Seien im Folgenden α und δ derart gewählt, dass obige Ungleichung gilt. Nun können wir aber (genauso, wie wir es schon für $\phi(\cdot, x, y)$ gemacht haben) aus der Nicht-Expansivität von T auf das monotone Steigen von $\phi(\cdot, x, \frac{z(\alpha)}{\|z(\alpha)\|})$ auf $[1, +\infty)$ schließen. Damit ergibt sich der gesuchte Widerspruch. □

Schritt 2: $\|\cdot\|$ wird von einem Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ induziert $\Leftrightarrow$ X erfüllt (P)
Wir beginnen mit der Richtung „$\Rightarrow$“:
Seien also $x, y \in X \backslash \{0\}$ mit $\|x\| = \|y\|$. Wir zeigen, dass die Funktion $\phi(\cdot, x, y)$ aus Definition 2.4 auf $[1, +\infty)$ streng monoton steigt. (Das zu zeigende Monotonie-Verhalten auf $(-\infty, -1]$ sieht man auf ähnliche Weise.)

Für $1 \leq \lambda_1 < \lambda_2$ gilt:

$$\begin{aligned}
\phi(\lambda_2,x,y)^2 - \phi(\lambda_1,x,y)^2 &= \|x-\lambda_2\cdot y\|^2 - \|x-\lambda_1\cdot y\|^2 \\
&= \langle x-\lambda_2\cdot y, x-\lambda_2\cdot y\rangle - \langle x-\lambda_1\cdot y, x-\lambda_1\cdot y\rangle \\
&= \left(\|x\|^2 - 2\cdot\lambda_2\cdot\langle x,y\rangle + \lambda_2^2\cdot\|y\|^2\right) - \left(\|x\|^2 - 2\cdot\lambda_1\cdot\langle x,y\rangle + \lambda_1^2\cdot\|y\|^2\right) \\
&= \|y\|^2\cdot(\lambda_2-\lambda_1)\cdot(\lambda_2+\lambda_1) - 2\cdot(\lambda_2-\lambda_1)\cdot\langle x,y\rangle \\
&= \underbrace{(\lambda_2-\lambda_1)}_{>0}\cdot\underbrace{\left(\|y\|^2\cdot(\lambda_2+\lambda_1) - 2\cdot\langle x,y\rangle\right)}_{(*)} \\
&> 0
\end{aligned}$$

$(*)$ Dieser Ausdruck ist echt positiv, weil: $2\cdot\langle x,y\rangle \leq 2\cdot|\langle x,y\rangle| \leq 2\cdot\|x\|\cdot\|y\| < (\lambda_2+\lambda_1)\cdot\|y\|^2$.

Nun folgt der Beweis der Rückrichtung „$\Leftarrow$“:
Wir werden uns im Rest des Beweises auf den Fall $\dim X = 3$ beschränken. Dass dies schon ausreicht, um die Aussage für Vektorräume beliebiger Dimension gezeigt zu haben, möchten wir kurz erläutern: Sei hierzu $\tilde{X} \leq X$ ein Unterraum mit $\dim \tilde{X} = 3$, dessen Norm $\|\cdot\|_{\tilde{X}} = \|\cdot\|\,|_{\tilde{X}}$ (wie wir ja zeigen werden) von einem Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\tilde{X}}$ induziert wird. Dann erhalten wir Skalarprodukte auf den 2-dimensionalen Unterräumen von $\tilde{X}$, indem wir einfach $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\tilde{X}}$ auf sie einschränken. Da $\tilde{X}$ beliebig war, wird daher die Norm jedes 2-dimensionalen Unterraums von X von einem Skalarprodukt induziert. Wegen Bemerkung 1.5 wird also schon die Norm $\|\cdot\|$ von einem Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle$ induziert und die Behauptung ist bewiesen.

Sei o.B.d.A. $\dim X = 3$. Wir verwenden das Lemma 2.1. Betrachte daher $U \leq X$ mit $\dim U = 2$. Wir konstruieren nun eine lineare Projektion $P : X \longrightarrow U$ mit Operatornorm $\|P\|_{\mathrm{OP}} \leq 1$:
Aus Dimensionsgründen können wir $x_0 \in X\backslash U$ wählen und wegen Lemma 2.2 gilt: $\exists u_0 \in U: \quad \|x_0 - u_0\| = \min_{u\in U}\|x_0-u\| \leq \|x_0-u\| \quad \forall u \in U$. Mit $x_0 \notin U$ gilt sicher auch $(x_0-u_0) \notin U$ und wir können somit jedes $x \in X$ eindeutig auf folgende Weise zerlegen:

$$\forall x \in X : \exists! u \in U : \exists! \alpha \in \mathbb{R} : \quad x = \underbrace{\alpha\cdot(x_0-u_0)}_{\in X\backslash U} + \underbrace{u}_{\in U}$$

Nun definieren wir die Abbildung

$$P : \begin{cases} X & \longrightarrow \quad U \\ x = \alpha\cdot(x_0-u_0)+u & \longmapsto \quad u \end{cases}$$

und zeigen, dass sie die gesuchte Projektion ist: Die Wohldefiniertheit folgt aus der Eindeutigkeit der Zerlegung von x, die Linearität kann einfach nachgerechnet werden. Auch die Projektions-Eigenschaft $P \circ P = P$ folgt aus der Eindeutigkeit der Zerlegung von x. Um schließlich noch eine Abschätzung für die Operator-Norm zu erhalten, betrachten wir nun ein beliebiges $x \in X$ mit der Zerlegung $x = \alpha\cdot(x_0-u_0)+u$:
Fall 1: $u = 0$:
In diesem Fall gilt bereits $\|Px\| = \|0\| = 0 \leq \|x\|$.
Fall 2: $u \neq 0$:
Wegen $x, \frac{\|x\|}{\|u\|}\cdot u \in X\backslash\{0\}$ und $\|x\| = \left\|\frac{\|x\|}{\|u\|}\cdot u\right\|$ können wir das zugehörige $\phi(\cdot, x, \frac{\|x\|}{\|u\|}\cdot u)$ aus Definition 2.4 verwenden. Wir werden nun, vorerst noch unmotiviert, $\phi(\frac{\|u\|}{\|x\|}, x, \frac{\|x\|}{\|u\|}\cdot u) \leq \phi(\lambda, x, \frac{\|x\|}{\|u\|}\cdot u), \forall\lambda \in \mathbb{R}$,

zeigen:

$$
\begin{aligned}
\forall \lambda \in \mathbb{R}: \quad \phi(\frac{\|u\|}{\|x\|}, x, \frac{\|x\|}{\|u\|} \cdot u) \quad &= \quad \left\| x - \frac{\|u\|}{\|x\|} \cdot \frac{\|x\|}{\|u\|} \cdot u \right\| \\
&= \quad \alpha \cdot \|(x_0 - u_0)\| \\
&\overset{\substack{u_0 \\ \text{minimal}}}{\leq} \quad \alpha \cdot \left\| x_0 - \underbrace{\left(u_0 - \frac{1}{\alpha} \cdot u + \frac{\lambda}{\alpha} \cdot \frac{\|x\|}{\|u\|} \cdot u \right)}_{\in U} \right\| \\
&= \quad \left\| x - \lambda \cdot \frac{\|x\|}{\|u\|} \cdot u \right\| \\
&= \quad \phi(\lambda, x, \frac{\|x\|}{\|u\|} \cdot u)
\end{aligned}
$$

Mit dieser Ungleichung haben wir somit gezeigt, dass $\phi(\cdot, x, \frac{\|x\|}{\|u\|} \cdot u)$ bei $\frac{\|u\|}{\|x\|}$ sein Minimum annimmt. Laut Voraussetzung ist aber $\phi(\cdot, x, \frac{\|x\|}{\|u\|} \cdot u)$ außerhalb von $(-1, 1)$ streng monoton steigend, womit schon $\frac{\|u\|}{\|x\|} \in [-1, 1]$ gilt. Anders ausgedrückt:

$$\|Px\| = \|u\| \leq \|x\|$$

Den Beweis der Rückrichtung beschließend haben wir also gezeigt: $\quad \forall x \in X : \quad \|Px\| \leq \|x\| \quad$ bzw. $\|P\|_{\text{OP}} \leq 1$. □

■

Literatur

[dFK67] D. G. de Figueiredo and L. A. Karlovitz. On the radial projection in normed spaces. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 73:364–368, 1967.

[JVN35] P. Jordan and J. Von Neumann. On inner products in linear, metric spaces. *Ann. of Math. (2)*, 36:719–723, 1935.