Kreinräume und Kreinoperatoren

Baumann Phillip

25.02.2016

Betreuung: Ao.Univ.Prof. Dipl.-Ing. Dr.techn. Harald Woracek

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Diese Seminararbeit handelt von geordneten Banachräumen mit einer durch die Ordnungsstruktur festgelegten Menge, dem positiven Cone. Unter gewissen Vorraussetzungen an diesen kann man Operatoren definieren, die anschaulich gesprochen den Cone zusammenziehen. Also nach einer endlichen Anzahl von Iterationen in sein Inneres abbilden. Solche Operatoren haben interessante Eigenschaften: Zum einen besitzen sie maximal einen positiven Eigenwert, der alle anderen Eigenwerte betragsmäßig von oben beschränkt und zum anderen ist ihr Spektralradius strikt positiv.

2 Kreinräume und Kreinoperatoren

Definition 2.1 (Cone). *Sei $\mathcal{V}$ ein Vektorraum. $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{V}$ heißt Cone falls gilt:*

1. $\mathcal{K} + \mathcal{K} \subseteq \mathcal{K}$
2. $\alpha\mathcal{K} \subseteq \mathcal{K}, \qquad \alpha \geq 0$
3. $\mathcal{K} \cap (-\mathcal{K}) = \{0\}$

Bemerkung 2.2. *Sei $\mathcal{V}$ ein Vektorraum und $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{V}$ ein Cone. Dann ist die als*

$$x \geq y :\Longleftrightarrow x - y \in \mathcal{K}, \qquad x, y \in \mathcal{V}$$

definierte Relation eine Ordnung auf $\mathcal{V}$.
Umgekehrt ist für eine Ordnung "$\leq$" auf einem Vektorraum $\mathcal{V}$ die Menge

$$\mathcal{K} = \{x \in \mathcal{V} : x \geq 0\}$$

ein Cone. Man bezeichnet $\mathcal{K}$ häufig auch mit $\mathcal{V}_+$ und nennt ihn den positiven Cone der Ordnung "$\leq$".

Definition 2.3 (generating). *Sei $\mathcal{V}$ ein Vektorraum und $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{V}$ ein Cone.*
$\mathcal{K}$ heißt generating, wenn $\mathcal{V} = \mathcal{K} - \mathcal{K}$.

Definition 2.4 (archimedisch)**.** *Sei $\mathcal{V}$ ein Vektorraum, $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{V}$ ein Cone und $\geq$ die durch $\mathcal{K}$ induzierte Ordnung. $\mathcal{K}$ heißt archimedisch, wenn für $x \in \mathcal{K}$ und $y \in \mathcal{V}$ mit $ny \leq x$, $n \in \mathbb{N}$ folgt, dass $y \leq 0$.*

Definition 2.5 (order unit)**.** *Sei $\mathcal{V}$ ein Vektorraum und $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{V}$ ein Cone. Außerdem bezeichne $\geq$ die durch $\mathcal{K}$ induzierte Ordnung. Dann heißt $u \in \mathcal{K}$ order unit wenn gilt:*

$$\forall x \in \mathcal{V} \, \exists \lambda \geq 0 : \lambda u \geq x$$

Definition 2.6 (Kreinraum)**.** *Ein Banachraum $(\mathcal{L}, \|\cdot\|)$ zusammen mit einer Ordnungsrelation " $\leq$ " heißt Kreinraum , wenn gilt:*

1. *$\mathcal{L}_+$ ist abgeschlossen bezüglich der Normtopologie.*
2. *$\exists$ order unit*

Satz 2.7 (Eigenschaften von Kreinräumen)**.** *Sei $\mathcal{L}$ ein Kreinraum. Dann gilt:*

1. *$\mathcal{L}_+$ ist generating*
2. *$\mathcal{L}_+$ ist archimedisch*
3. *Die order units sind genau die inneren Punkte von $\mathcal{L}$*

Beweis.
ad 1: Sei $x \in \mathcal{L}$ beliebig und $u \in \mathcal{L}_+$ eine order unit. Letzteres existiert nach Definition eines Kreinraums. Daher $\exists \lambda > 0 : x \leq \lambda u \iff \lambda u - x \in \mathcal{L}_+$ bzw $x - \lambda u \in (-\mathcal{L}_+)$. Also erhalten wir $x = \lambda u + (x - \lambda u) \in \mathcal{L}_+ + (-\mathcal{L}_+)$ und da $x \in \mathcal{L}$ beliebig war:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_+ + (-\mathcal{L}_+)$$

ad 2: Sei $y \in \mathcal{L}$ und $x \in \mathcal{L}_+$ beliebig mit $ny \leq x, \quad n \in \mathbb{N}. \implies 0 \leq \frac{1}{n}x - y$ bzw $\frac{1}{n}x - y \in \mathcal{L}_+$. Da in einem normierten Vektorraum Addition und Multiplikation mit Skalaren stetig sind, konvergiert $\frac{1}{n}x - y \xrightarrow{\|\cdot\|} -y$. Außerdem ist nach Definition eines Kreinraums der Cone $\mathcal{L}_+$ abgeschlossen und daher gilt $-y \in \mathcal{L}_+$ bzw $-y \geq 0 \iff y \leq 0$.

ad 3: Sei $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{L}_+$ die Menge aller order units aus $\mathcal{L}_+$ und $\mathcal{L}_+^\circ$ das Innere des positiven Cones. Wir beginnen den Beweis mit der Inklusion "$\subseteq$ ". Sei dazu $u \in \mathcal{U}$ eine order unit. $\implies \mathcal{L} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} n[-u, u]$. Außerdem erhalten wir aus der Abgeschlossenheit von $\mathcal{L}_+$, dass $[-u, u] = (-u + \mathcal{L}_+) \cap (u - \mathcal{L}_+)$ und damit auch $n[-u, u]$ abgeschlossen ist für $n \in \mathbb{N}$. Also ist $\mathcal{L}$ die abzählbare Vereinigung von abgeschlossenen Mengen und hat außerdem nichtleeres Inneres. Somit erhalten wir mittels der Kontraposition vom Satz von

Baire: $\exists n \in \mathbb{N} : n[-u,u]$ hat nichtleeres Inneres $\Longrightarrow [-u,u]$ hat nichtleeres Inneres. Sei also v ein innerer Punkt von $[-u,u]$ und V eine kreisförmige offene Nullumgebung mit $v+V \subseteq [-u,u]$. Für $x \in V$ gilt:

$$\begin{aligned} u+x \geq v+x \geq -u, &\qquad x \in V \\ 2u+x \geq 0, &\qquad x \in V \\ u+\tfrac{1}{2}x \geq 0, &\qquad x \in V \end{aligned}$$

Daher folgt $u+\frac{1}{2}V \subseteq \mathcal{L}_+$ und somit ist $u \in \mathcal{L}_+^\circ$, was zu zeigen war.
Für die Umkehrung sei $u \in \mathcal{L}_+^\circ$ beliebig. Wähle eine kreisförmige Nullumgebung V mit $u+V \subseteq \mathcal{L}_+ \Longrightarrow u \pm x \in \mathcal{L}_+, \quad x \in V$. Also gilt $-u \leq x \leq u \Longleftrightarrow x \in [-u,u]$. Damit erhalten wir $V \subseteq [-u,u]$ bzw $[-u,u] \in \mathcal{U}(0)$. Da Nullumgebungen absorbierende Mengen sind $\Longrightarrow \forall x \in \mathcal{L} \quad \exists \lambda_x > 0$ mit $\lambda_x x \in [-u,u]$ bzw $x \leq \frac{1}{\lambda_x}u$, woraus folgt, dass u eine order unit ist. $\square$

Beispiel 2.8. *Der $\mathbb{R}^2$ versehen mit der euklidischen Norm ist bekanntlich ein Banachraum. Betrachte darauf den in der Normtopologie abgeschlossenen Cone $\mathcal{K} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0 \wedge y \geq 0\}$ und die zugehörige Ordnungsrelation " $\leq$ ". Wie man leicht einsieht, ist $(1,1) \in \mathcal{K}$ eine order unit bezüglich $\mathcal{K}$ und damit $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|)$ ein Kreinraum.*

Definition 2.9 (Kreinoperator)**.** *Sei $\mathcal{L}$ ein Kreinraum. Ein positiver Operator $\mathcal{T} : \mathcal{L} \to \mathcal{L}$ heißt Kreinoperator, wenn gilt:*

$$\forall x \in \mathcal{L}_+ \setminus \{0\}\ \exists n \in \mathbb{N} \textit{ mit } \mathcal{T}^n x \textit{ ist eine order unit.}$$

Beispiel 2.10. *Sei $\mathcal{L}$ der Kreinraum aus Beispiel 1.8 und $\mathcal{T} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Dann ist $\mathcal{T}$ ein Kreinoperator, denn aus $\mathcal{T}^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \mathcal{T}^2 x \in \mathcal{L}_+^\circ, \qquad x > 0.$*

Lemma 2.11. *Sei $(\mathcal{L}, \tau)$ ein vollständig metrisierbarer geordneter topologischer Vektorraum, sodass $\mathcal{L}_+$ abgeschlossen und generating ist. Weiters sei $\{U_n : n \in \mathbb{N}\}$ eine abzählbare Nullumgebungsbasis bestehend aus abgeschlossenen kreisförmigen Mengen mit*

$$U_{n+1} + U_{n+1} \subseteq U_n, \qquad n \in \mathbb{N}$$

Dann bilden die Mengen $V_n := U_n \cap \mathcal{L}_+ - U_n \cap \mathcal{L}_+$ ebenfalls eine Nullumgebungsbasis mit

$$V_{n+1} + V_{n+1} \subseteq V_n, \qquad n \in \mathbb{N}$$

Beweis. Siehe [1], Seite 66 ff. $\square$

Lemma 2.12. *Sei* $(\mathcal{L}, \tau)$ *wie im vorigen Lemma und* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *mit* $x_n \to 0$*. Dann existiert eine Teilfolge* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *von* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *und* $u \in \mathcal{L}_+$*, sodass gilt:*

$$-\tfrac{1}{n}u \leq u_n \leq \tfrac{1}{n}u, \qquad n \in \mathbb{N}$$

Beweis. Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beliebige Folge in $\mathcal{L}$ mit $x_n \to 0$ und $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine abzählbare Nullumgebungsbasis bestehend aus abgeschlossenen kreisförmigen Mengen mit

$$U_{n+1} + U_{n+1} \subseteq U_n, \qquad n \in \mathbb{N}$$

Dann bilden die Mengen $V_n := U_n \cap \mathcal{L}_+ - U_n \cap \mathcal{L}_+$ nach Lemma 1.11 ebenfalls eine Nullumgebungsbasis. $\Longrightarrow \exists$ Teilfolge $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ für die gilt:

$$u_n \in \tfrac{1}{n}V_n \text{ bzw } nu_n \in V_n.$$

Nach der Konstruktion der Mengen V_n $\exists y_n, z_n \in U_n \cap \mathcal{L}_+$, sodass

$$nu_n = y_n - z_n, \qquad n \in \mathbb{N}$$

Setze nun $w_n := \sum_{j=1}^{n} y_j$ bzw $v_n := \sum_{j=1}^{n} z_j \Longrightarrow$

$$w_{n+p} - w_n \in U_{n+1} + U_{n+2} + \cdots + U_{n+p} \subseteq U_n.$$

Damit ist $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge und konvergiert wegen der Vollständigkeit von $\mathcal{L}$ gegen ein $w \in \mathcal{L}$. Da $w_n \in \mathcal{L}_+$ für $n \in \mathbb{N}$ und $\mathcal{L}_+$ nach Vorraussetzung abgeschlossen ist, liegt auch $w \in \mathcal{L}_+$. Außerdem folgt aus $w_{n+p} - w_n \in \mathcal{L}_+$:

$$w - w_n \in \mathcal{L}_+ \text{ bzw } w \geq w_n \geq y_n, \qquad n \in \mathbb{N}$$

Analog folgt für $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

$$\exists v \in \mathcal{L}_+ \text{ mit } v_n \to v \text{ und } v \geq v_n \geq z_n, \qquad n \in \mathbb{N}$$

Damit gilt für $u := w + v \in \mathcal{L}_+$:

$$-u = -w - v \leq -v \leq -z_n \leq y_n - z_n = nu_n \leq y_n \leq w_n \leq u, \qquad n \in \mathbb{N}$$

bzw

$$-\tfrac{1}{n}u \leq u_n \leq \tfrac{1}{n}u, \qquad n \in \mathbb{N}$$

□

Satz 2.13. *Sei $\mathcal{T} : \mathcal{L} \to \mathcal{L}$ ein Kreinoperator. Dann gilt:*

1. *$\mathcal{T}$ ist stetig.*
2. *$\mathcal{T}$ bildet order units auf order units ab.*
3. *$\mathcal{T}^n$ ist ein Kreinoperator für $n \in \mathbb{N}$.*

Beweis. ad 1: Sei $\mathcal{T}$ ein Kreinoperator auf einem Kreinraum $\mathcal{L}$. Um die Stetigkeit von $\mathcal{T}$ zu zeigen, wollen wir den Satz vom abgeschlossenen Graphen anwenden. Sei dazu $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathcal{L}$ so, dass $x_n \to 0$ und $\mathcal{T}x_n \to y$. Wir müssen nun zeigen, dass y=0.
Nach Lemma 1.12 existiert eine Teilfolge $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und ein $u \in \mathcal{L}_+$ mit

$$-\tfrac{1}{n}u \leq u_n \leq \tfrac{1}{n}u, \qquad n \in \mathbb{N}$$

Da $\mathcal{T}$ positiv ist $\Longrightarrow$

$$-\tfrac{1}{n}\mathcal{T}u \leq \mathcal{T}u_n \leq \tfrac{1}{n}\mathcal{T}u, \qquad n \in \mathbb{N}$$

Aus der Abgeschlossenheit von $\mathcal{L}_+$ erhalten wir nun durch den Grenzübergang $n \to \infty$

$$0 \leq y \leq 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad y = 0$$

Aufgrund der Linearität von $\mathcal{T}$ ist somit der Graph abgeschlossen und da $\mathcal{L}$ ein Banachraum ist, folgt die Stetigkeit aus dem Satz vom abgeschlossenen Graphen.
ad 2: Sei $u \in \mathcal{L}$ eine order unit und $k \in \mathbb{N}$ so, dass $\mathcal{T}^k u$ eine order unit ist. (So ein k existiert nach der Definition eines Kreinoperators).
Da u eine order unit ist $\exists \alpha > 0$ mit

$$\mathcal{T}^{k-1}u \leq \alpha u$$

Aus der Positivität von $\mathcal{T}$ $\Longrightarrow$

$$\mathcal{T}^k u \leq \alpha \mathcal{T} u$$

und da $\mathcal{T}^k u$ eine order unit ist $\Longrightarrow$ $\mathcal{T}u$ ist eine order unit.
ad 3: Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig und $x \in \mathcal{L}_+$. Da $\mathcal{T}$ ein Kreinoperator ist $\Longrightarrow$ $\mathcal{T}^n$ ist positiv und $\exists k \in \mathbb{N}$, sodass $\mathcal{T}^k x$ eine order unit ist. Mit 2) folgt nun, dass $(\mathcal{T}^n)^k x$ auch eine order unit und damit $\mathcal{T}^n$ ein Kreinoperator ist. $\square$

3 Eigenwerte von Kreinoperatoren und deren Konjugierten

Satz 3.1. *Sei* $\mathcal{T} : \mathcal{L} \to \mathcal{L}$ *ein Kreinoperator,* $x_0 > 0$ *ein Eigenvektor mit zugehörigem Eigenwert* λ_0*. Dann gilt:*

1. $\lambda_0 > 0$
2. x_0 *ist eine order unit*
3. *Der Eigenraum bezüglich* λ_0 *ist eindimensional*

Beweis. ad 1: Da $\mathcal{T}$ positiv ist, folgt für einen Eigenvektor $x_0 > 0$:

$$0 \leq \mathcal{T}x_0 = \lambda_0 x_0$$

Im Fall $\mathcal{T}x_0 = 0$ folgt jedoch für $n \in \mathbb{N} : \mathcal{T}^n x_0 = 0$ und das widerspricht der Eigenschaft von Kreinoperatoren, jedes nichtnegative Elemente nach einer endlichen Anzahl an Iterationen ins Innere des Cones abzubilden. Also erhalten wir:

$$0 < \mathcal{T}x_0 = \lambda_0 x_0 \Longrightarrow \lambda_0 > 0$$

ad 2: Da $\mathcal{T}$ ein Kreinoperator ist $\exists k \in \mathbb{N}$, sodass $\mathcal{T}^k x_0 = \lambda_0^k x_0$ eine order unit ist. Damit ist aber auch x_0 eine order unit.
ad 3: Sei x_0 wie im Satz beschrieben und x ein weiterer Eigenvektor bezüglich λ_0. Wähle $\alpha \in \mathbb{R}$ so, dass $x_0 + \alpha x \in \partial\mathcal{L}_+$.
Nun gilt $\alpha \neq 0$, da andernfalls

$$x_0 + \alpha x = x_0 \in \partial\mathcal{L}_+$$

was ein Widerspruch zu der Annahme ist, dass x_0 eine order unit ist, welches nach Satz 1.7.3 im Inneren des Cones liegt. Weiters erhalten wir mit der Annahme $x_0 + \alpha x > 0$

$$0 < \mathcal{T}(x_0 + \alpha x) = \lambda_0(x_0 + \alpha x) \overset{2)}{\Longrightarrow} x_0 + \alpha x \text{ ist order unit, also } x_0 + \alpha x \in Int(\mathcal{L}_+)$$

also wieder einen Widerspruch.
Damit folgt $x_0 + \alpha x = 0$ bzw $x = -\frac{1}{\alpha} x_0$ bzw $x \in [\{x_0\}]$. Also ist der Eigenraum eindimensional. □

Satz 3.2. *Ein Kreinoperator* $\mathcal{T}$ *hat (neben skalaren Vielfachen) maximal einen positiven Eigenvektor. Falls* $x_0 > 0$ *der positive Eigenvektor zu dem Eigenwert* λ_0 *ist* $\Longrightarrow \lambda_0 > 0$ *und* $|\lambda| \leq \lambda_0$ *für alle reelen Eigenwerte.*

Beweis. Sei x_0 Eigenvektor bezüglich $\lambda_0 \overset{2.1}{\Longrightarrow} \lambda_0 > 0,\ x_0$ ist eine order unit und bis auf skalare Vielfache der einzige Eigenvektor zu λ_0.

Angenommen $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ Eigenwert mit

$$|\lambda| > \lambda_0 \iff |\tfrac{\lambda}{\lambda_0}| > 1$$

und sei x ein zugehöriger Eigenvektor. Da x_0 eine order unit ist $\exists \alpha \in \mathbb{R}$, sodass

$$\pm x \leq \alpha x_0$$

Da $\mathcal{T}$ positiv ist, folgt

$$\begin{aligned} \mathcal{T}^n(\pm x) &\leq \alpha \mathcal{T}^n(x_0) \Longrightarrow \\ \lambda^n(\pm x) &\leq \alpha \lambda_0^n x_0 \Longrightarrow \\ |\tfrac{\lambda}{\lambda_0}|^n(\pm x) &\leq \alpha x_0. \end{aligned}$$

Da nach Annahme $|\frac{\lambda}{\lambda_0}| > 1$ und $\mathcal{L}_+$ archimedisch ist $\Longrightarrow (\pm x) \leq 0$ und damit $x = 0$. Das ist ein Widerspruch zur Annahme, dass x ein Eigenvektor ist. Somit erhalten wir $|\lambda| \leq \lambda_0$.
Angenommen $x_1 > 0$ ist ein Eigenvektor bezüglich λ_1. Dann erhalten wir mit dem soeben Bewiesenen:

$$\lambda_1 \leq \lambda_0 \text{ und } \lambda_0 \leq \lambda_1$$

Also gilt $\lambda_1 = \lambda_0$ und der Satz ist bewiesen. □

Satz 3.3. *Der konjugierte Operator eines positiven Operators auf einem Kreinraum $\mathcal{L}$ besitzt einen positiven Eigenvektor bezüglich einem nichtnegativen Eigenwert.*

Beweis. Sei $\mathcal{T}$ ein positiver Operator und $u \in \mathcal{L}$ eine order unit. Wähle $r > 0$ so, dass

$$\|x\| \leq r \Longrightarrow u \pm x \in \mathcal{L}_+$$

Damit gilt für $\|x\| \leq 1$ und $f \in \mathcal{L}_+$

$$f(u \pm rx) \geq 0 \text{ bzw } |f(x)| \leq \tfrac{f(u)}{r}$$

Also folgt $\|f\| \leq \frac{f(u)}{r}, \quad f \in \mathcal{L}'_+$.
Defniere nun die Menge $\mathcal{C} := \{f \in \mathcal{L}'_+ : f(u) = 1\} = \mathcal{L}'_+ \cap j_u^{-1}(\{1\})$, wobei j_u das Punktauswertungsfunktional an der Stelle u bezeichnet. $\mathcal{C}$ ist eine nichtleere (wende das algebraic seperating hyperplane theorem auf die disjunkten Mengen $\{0\}$ und $\mathcal{L}_+ \setminus \{0\}$ an) und konvexe Teilmenge von $\mathcal{L}'_+$. Da $\mathcal{L}'_+ = \bigcap_{x \in \mathcal{L}_+} j_x^{-1}([0,\infty))$ als Durchschnitt von ω^*-abgeschlossenen Mengen ω^*-abgeschlossen ist, ist auch $\mathcal{C}$ ω^*-abgeschlossen. Außerdem gilt $\|f\| \leq \frac{1}{r}, \quad f \in \mathcal{C}$. Damit ist $\mathcal{C}$ nach dem Satz von Banach - Alaoglu eine ω^*-kompakte Menge.
Auf dieser Menge defnieren wir die Abbildung $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$ durch

$$F(f) = \tfrac{f + \mathcal{T}' f}{[f + \mathcal{T}' f](u)} = \tfrac{f + \mathcal{T}' f}{1 + \mathcal{T}' f(u)}$$

Wir zeigen nun die Stetigkeit von F bezüglich der ω^*-Topologie. Sei dazu $(f_i)_{i \in \mathcal{I}}$ ein Netz aus $\mathcal{C}$ und $f \in \mathcal{C}$ mit

$$f_i \xrightarrow{\omega^*} f \iff f_i(x) \longrightarrow f(x), \qquad x \in \mathcal{L}$$

Dadurch erhalten wir

$$\lim_{i\in\mathcal{I}} F(f_i)(x) = \lim_{i\in\mathcal{I}} \frac{f_i(x)+\mathcal{T}' f_i(x)}{[f_i+\mathcal{T}' f_i](u)} = \lim_{i\in\mathcal{I}} \frac{f_i(x)+f_i(\mathcal{T}x)}{[f_i+\mathcal{T}' f_i](u)} = \frac{f(x)+\mathcal{T}' f(x)}{[f+\mathcal{T}' f](u)} = F(f)(x), \qquad x \in \mathcal{L}$$

Damit gilt $\lim_{i\in\mathcal{I}} F(f_i) = F(f)$ und die Stetigkeit von F ist gezeigt.
Nach dem Fixpunktsatz von Tychonoff $\exists \phi \in \mathcal{C}$ mit $F(\phi) = \phi$. Für dieses ϕ gilt:

$$\phi + \mathcal{T}'\phi = [1 + \mathcal{T}'\phi(u)]\phi \Longleftrightarrow \mathcal{T}'\phi = [\mathcal{T}'\phi(u)]\phi$$

Also ist $0 < \phi \in \mathcal{L}'_+$ ein Eigenvektor bezüglich $\lambda := \mathcal{T}'\phi(u) \geq 0$. □

Definition 3.4. *Sei $\mathcal{V}$ ein Vektorraum und $\mathcal{T} : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ ein stetiger Operator. Ein Untervektorraum $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{V}$ heißt $\mathcal{T}$- hyperinvariant* $:\Longleftrightarrow$

$$\mathcal{S}(\mathcal{U}) \subseteq \mathcal{U},$$

für alle stetigen Operatoren $\mathcal{S} : \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{V}$, die mit $\mathcal{T}$ kommutieren.

Satz 3.5. *Sei $\mathcal{L}$ ein Kreinraum und $\mathcal{T} : \mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{L}$ ein positiver Operator, der kein Vielfaches der Identität ist. Dann existiert ein nichttrivialer, $\mathcal{T}$- hyperinvarianter, abgeschlossener Unterraum $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{L}$.*

Beweis. Seien $\mathcal{T}$ und $\mathcal{L}$ wie im Satz beschrieben. Nach Satz 2.3 $\exists\, \lambda \geq 0, 0 < \phi \in \mathcal{L}'$ mit $\mathcal{T}'\phi = \lambda\phi$. Definiere den Operator

$$\mathcal{R} := \mathcal{T} - \lambda\mathcal{I}$$

Damit gilt

$$\mathcal{R}'\phi = 0 \text{ bzw } \phi(\mathcal{R}x) = 0, \qquad x \in \mathcal{L}$$

Da $\phi \neq 0 \Longrightarrow \mathcal{U} := \overline{\mathcal{R}(\mathcal{L})} \neq \mathcal{L}$. Denn andernfalls $\exists y \in \mathcal{L}$, sodass $\phi(y) \neq 0$ und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\mathcal{R}x_n \to y$. Aus der Stetigkeit von ϕ erhalten wir:

$$\phi(y) = \phi(\lim_{n\to\infty} \mathcal{R}x_n) = \lim_{n\to\infty} \phi(\mathcal{R}x_n) = \lim_{n\to\infty} \mathcal{R}'\phi(x_n) = 0$$

was ein Widerspruch zur Annahme $\phi(y) \neq 0$ ist. Weil $\mathcal{T}$ kein Vielfaches der Identität ist $\Longrightarrow \mathcal{U} \neq \{0\}$.
Außerdem ist $\mathcal{U}$ abgeschlossen. Bleibt also nur noch zu zeigen, dass $\mathcal{S}(\mathcal{U}) \subseteq \mathcal{S}$, für alle stetigen, mit $\mathcal{T}$ kommutierenden Operatoren gilt. Sei dazu $\mathcal{S}$ stetig mit $\mathcal{S}\mathcal{T} = \mathcal{T}\mathcal{S}$. Dann gilt:

$$\mathcal{S}(\mathcal{U}) = \mathcal{S}(\overline{\mathcal{R}(\mathcal{L})} \subseteq \overline{\mathcal{S}(\mathcal{R}(\mathcal{L})} = \overline{\mathcal{R}(\mathcal{S}(\mathcal{L})} \subseteq \overline{\mathcal{R}(\mathcal{L})} = \mathcal{U}$$

Also ist $\mathcal{U}$ ein nichttrivialer, abgeschlossener $\mathcal{T}$ - hyperinvarianter Unterraum von $\mathcal{L}$. □

Bemerkung 3.6. *Die Vorraussetzungen des vorigen Satzes sind für jeden Kreinoperator erfüllt, da diese kein Vielfaches der Identität sein können.*

Satz 3.7. *Jeder Kreinoperator hat positives Spektralmaß.*

Beweis. Sei $\mathcal{T} : \mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{L}$ ein Kreinoperator. Nach Satz 2.3 $\exists\, \lambda \geq 0, 0 < \phi \in \mathcal{L}'$ mit $\mathcal{T}'\phi = \lambda\phi$. Angenommen $\lambda = 0$ und sei $x > 0$, $n \in \mathbb{N}$ so, dass $\mathcal{T}^n x$ eine order unit ist. dann gilt:

$$0 < [\phi, \mathcal{T}^n x] = [\mathcal{T}'\phi, \mathcal{T}^{n-1}x] = \lambda[\phi, \mathcal{T}^{n-1}x] = 0$$

Die strikte Ungleichung gilt hier, da im Fall $\phi(\mathcal{T}^n x) = 0$ wegen der Positivität von $\phi \Longrightarrow \phi(y) = 0, \quad y \in \mathcal{L}_+$. Da $\mathcal{L}_+$ generating ist, ist das gleichbedeutend mit $\phi(y) = 0, \quad y \in \mathcal{L}$. Das steht jedoch im Widerspruch zu $\phi > 0$. Also gilt $\lambda > 0$. Da $r(\mathcal{T}) = \lim\limits_{n\to\infty} \|\mathcal{T}^n\|^{\frac{1}{n}}$ und $\|\mathcal{T}\| = \|\mathcal{T}'\|$ gilt:

$$r(\mathcal{T}) = r(\mathcal{T}') > 0$$

□

Satz 3.8. *Sei* $\{\mathcal{T}_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$ *eine Familie von paarweise kommutierenden positiven Operatoren auf einem Kreinraum* $\mathcal{L}$.
Dann hat die Familie der konjugierten Operatoren $\{\mathcal{T}_\alpha'\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$ *einen gemeinsamen positiven Eigenvektor bezüglich einer Famile von nichtnegativen Eigenwerten. Also* $\exists \phi \in \mathcal{L}_+'$ *und* $\{\lambda_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}} \in \mathbb{R}^+$, *sodass*

$$\mathcal{T}_\alpha'\phi = \lambda_\alpha\phi, \qquad \alpha \in \mathcal{A}$$

Beweis. Sei $u \in \mathcal{L}$ eine order unit und $\mathcal{C} := \{f \in \mathcal{L}_+' : f(u) = 1\}$. Wie bereits gezeigt ist $\mathcal{C}$ eine nichtleere, konvexe und ω^*-kompakte Menge.
Für jedes α betrachte die stetige Abbildung $F_\alpha : (\mathcal{C}, \omega^*) \longrightarrow (\mathcal{C}, \omega^*)$ definiert durch

$$F_\alpha(f) := \tfrac{f+\mathcal{T}_\alpha' f}{[f+\mathcal{T}_\alpha' f](u)} = \tfrac{f+\mathcal{T}_\alpha' f}{1+\mathcal{T}_\alpha' f(u)}$$

Sei $\mathcal{D}_\alpha$ die Menge aller Fixpunkte von $\mathcal{T}_\alpha$

$$\mathcal{D}_\alpha = \{f \in \mathcal{C} : F_\alpha(f) = f\} = [F_\alpha - id]^{-1}(\{0\})$$

Nach Satz 2.3 ist $\mathcal{D}_\alpha$ nichtleer und abgeschlosssen in der ω^*-Topologie und damit als Teilmenge einer kompakten Menge selbst kompakt.
Wir wollen nun zeigen, dass $\bigcap_{\alpha\in\mathcal{A}} \neq \emptyset$ bzw äquivalent dazu, dass $\{\mathcal{D}_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$ die endliche Durchschnittseigenschaft hat. Denn aus der Kompaktheit von $\mathcal{C}$ folgt dann die Aussage.
Der Beweis hierfür läuft über vollständige Induktion:
Da $\mathcal{D}_\alpha \neq \emptyset, \quad \alpha \in \mathcal{A}$ stimmt der Induktionsanfang trivialerweise. Nehmen wir nun an für jede n-elementige Indexmenge gilt:

$$\textstyle\bigcap_{i=1}^n \mathcal{D}_{\alpha_i} \neq \emptyset$$

Seien nun $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n, \alpha_{n+1}$ gegeben. Wr müssen nun zeigen, dass

$$\textstyle\bigcap_{i=1}^{n+1} \mathcal{D}_{\alpha_i} \neq \emptyset$$

Nach unserer Induktionsannahme existiert ein $0 < \phi \in \mathcal{D}_{\alpha_1} \cap \cdots \cap \mathcal{D}_{\alpha_n}$. Setze

$$\lambda_i = \mathcal{T}_{\alpha_i}'\phi(u) \text{ und } \mathcal{C}_i = \{f \in \mathcal{C} : \mathcal{T}_{\alpha_i}' f = \lambda_i f\}, \qquad i \in \{1 \ldots n\}$$

Die Mengen $\mathcal{C}_i$ sind konvex und nichtleer, da $\phi \in \mathcal{C}_i, \quad i \in \{1 \ldots n\}$. Außerdem sieht man analog zum Beweis der Mengen $\mathcal{D}_\alpha$, dass $\mathcal{C}_i$ kompakt ist. Weiters gilt für ein beliebiges $f \in \mathcal{C}_i$:

$$\begin{aligned}\mathcal{T}'_{\alpha_i}(F_{\alpha_{n+1}} f) &= \mathcal{T}'_{\alpha_i}\left(\frac{f+\mathcal{T}'_{\alpha_{n+1}} f}{1+\mathcal{T}'_{\alpha_{n+1}} f(u)}\right) = \frac{\mathcal{T}'_{\alpha_i} f+\mathcal{T}'_{\alpha_i}\mathcal{T}'_{\alpha_{n+1}} f}{1+\mathcal{T}'_{\alpha_{n+1}} f(u)} = \frac{\mathcal{T}'_{\alpha_i} f+\mathcal{T}'_{\alpha_{n+1}}\mathcal{T}'_{\alpha_i} f}{1+\mathcal{T}'_{\alpha_{n+1}} f(u)} \\ &= \frac{\lambda_i f+\lambda_i\mathcal{T}'_{\alpha_{n+1}} f}{1+\mathcal{T}'_{\alpha_{n+1}} f(u)} = \lambda_i\left(\frac{f+\mathcal{T}'_{\alpha_{n+1}} f}{1+\mathcal{T}'_{\alpha_{n+1}} f(u)}\right) = \lambda_i(F_{\alpha_{n+1}} f)\end{aligned}$$

Daraus folgt $F_{\alpha_{n+1}}(\mathcal{C}_i) \subseteq \mathcal{C}_i$. Daher ist $\mathcal{G} := \bigcap_{i=1}^n \mathcal{C}_i$ ebenfalls eine konvexe, ω^*-kompakte, nichtleere ($\phi \in \mathcal{G}$) Menge mit $F_{\alpha_{n+1}}(\mathcal{G}) \subseteq \mathcal{G}$. Nach dem Fixpunktsatz von Tychonoff existiert $0 < \psi \in \mathcal{G}$ mit $F_{\alpha_{n+1}}(\psi) = \psi$. Da $\psi \in \mathcal{C}_i, \quad i \in \{1 \ldots n\}$ gilt:

$$F_{\alpha_i}(\psi) = \psi, \qquad i \in \{1 \ldots n+1\} \Longleftrightarrow \psi \in \bigcap_{i=1}^{n+1} \mathcal{D}_{\alpha_i}$$

Also hat die Famile $\{\mathcal{D}_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ die endliche Durchschnittseigenschaft und wegen der Kompaktheit von $\mathcal{C}$ nichtleeren Durchschnitt. $\square$

Literatur

[1] Charalambos D. Aliprantis & Rabee Tourky: *Cones and Duality*, American Mathematical Society, Juni 2007.

[2] Harald Woracek & Michael Kaltenbäck & Martin Blümlinger: *Funktionalanalysis*, Vorlesungsunterlagen, Februar 2015.