Aronszajn-Donoghues Theorie eindimensionaler Störungen

Felix Dellinger

29. September 2015

Einleitung

In dieser Arbeit befasse ich mich mit Kapitel 9.1 und 9.2 aus *Unbounded Self-adjoint Operators on Hilbert Space* von Konrad Schmüdgen im Folgenden als [KS] bezeichnet. Darin wird die Frage behandelt, wie sich das Spektrum eines selbstadjungierten Operators verändert, wenn ihm eine eindimensionale Störung widerfährt. Die wesentliche Idee dahinter ist, das Spektrum in Abhängigkeit von der Verteilungsfunktion $\lambda \to E_A\big((-\infty, \lambda]x, x\big)$ in einen diskreten, absolut stetigen und singulär stetigen Anteil zu zerlegen. Es lässt sich zeigen, dass der absolut stetige Anteil unverändert unter eindimensionalen Störungen bleibt, während der diskrete und der singulär stetige Anteil deutlich variieren können.
Im ersten Abschnitt sammle ich ein paar allgemeine Reslutate zu Operatoren auf Hilberträumen aus Kapitel 5 aus [KS].
Die Zerlegung des Spektrums wird genauer in Abschnitt 2 behandelt. Darin zitiere ich im wesentlichen die Ergebnisse aus Kapitel 9.1 aus [KS]. In Anschnitt 3 werden die Werkzeuge entwickelt, die benötigt werden um den Satz von Aronszajin-Donoghue zu formulieren und zu beweisen. Die Resultate aus Abschnitt 3 stammen, so wie auch die aus Abschnitt 4, aus Kapitel 9.2 aus [KS].
Im Anhang zitiere ich einige wenige Ergebnisse aus der komplexen Analysis ohne Beweis. Diese Resultate sind aus [KS, Appendix F] entnommen.

1 Allgemeines zu Operatoren auf Hilberträumen

Im Folgenden werden ein paar Resultate zu Operatoren auf Hilbertäumen gebracht, die im Beweis des Satzes von Aronszajin-Donoghue eingehen. Teilweise sind ähnliche Ergebnisse für beschränkte Operatoren aus Funktionalanalysis 1 bekannt, da sie aber eine so wichtige Rolle im Beweis von Satz 4.1 spielen, führe ich sie in diesem Kapitel nochmal an. Wenn nicht anders festgelegt, sei im Folgenden $\mathcal{H}$ immer ein Hilbertraum, A ein selbstadjungierter Operator auf $\mathcal{H}$ und $\mathcal{D}(A)$ sein Definitionsbereich.

Definition 1.1 Der Unterraum U heißt reduzierender Unterraum des Operators A, wenn Operatoren A_1 auf U und A_2 auf $U^\perp$ existieren, für die gilt: $A = A_1 \oplus A_2$.

Für beschränkte Operatoren sind invariante Unterräume immer reduzierende Unterräume. Diese Definition wird also erst interessant für unbeschränkte Operatoren. Aus Funktionalanalysis 1 ist bereits bekannt, dass ein Unterraum $N \subseteq \mathcal{H}$ genau dann ein invarianter Unterraum des beschränkte Operators A ist, wenn A mit der orthogonalen Projektion P_N auf N kommutiert. Für unbeschränkte Operatoren lässt sich eine ähnliche Aussage zeigen.

Proposition 1.2 Sei N ein abgeschlossener Unterraum von $\mathcal{H}$ und P_N die orthogonale Projektion auf N. Dann ist N ein reduzierender Unterraum für A, genau dann wenn $P_N Ax = AP_N x$ für alle x aus $\mathcal{D}(A)$ und P_N die Menge $\mathcal{D}(A)$ in sich selbst abbildet.

Beweis. Definiere $A_1 := AP_N$ auf $N \cap \mathcal{D}(A)$ und $A_2 := A(I - P_N)$ auf $N^\perp \cap \mathcal{D}(A)$ und identifiziere $\mathcal{H} = N \oplus N^\perp$. Es gilt also $\mathcal{D}(A) = (\mathcal{D}(A) \cap N) \oplus (\mathcal{D}(A) \cap N^\perp) = \mathcal{D}(A_1) \oplus \mathcal{D}(A_2)$. Da A mit P_N kommutiert, bildet A_1 den Raum $N \cap \mathcal{D}(A)$ und A_2 den Raum $N^\perp \cap \mathcal{D}(A)$ in sich selbst ab.
Für $x \in \mathcal{D}(A)$ gilt damit $Ax = A(P_N x \oplus (I - P_N)x) = A(P_N x) \oplus A((I - P_N)x) = A_1(x) \oplus A_2(x)$. Nach Definition 1.1 ist N ein reduzierender Unterraum.

□

Bemerkung 1.3 Bezeichne $\mathfrak{B}(\mathbb{R})$ die Borellmengen auf $\mathbb{R}$. Dann ist die Tatsache, dass die Operatoren A und P_N kommutieren, gleichbedeutend zu $E_A(M)P_N = P_N E_A(M)\ \forall M \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})$. Da die Sigmaalgebra $\mathfrak{B}(\mathbb{R})$ von den Mengen $(-\infty, \lambda]$ erzeugt wird, ist $E_A(M)P_N = P_N E_A(M)\ \forall M \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})$ äquivalent zu $E_A((-\infty, \lambda])P_N = P_N E_A((-\infty, \lambda])\ \forall \lambda \in \mathbb{R}$. Statt $E_A((-\infty, \lambda])$ werden wir im Folgenden $E_A(\lambda)$ schreiben.
Der Beweis folgt direkt aus der Spektraldarstellung selbstadjungierter Operatoren.

Beispiel 1.4 Als Beispiel zur Veranschaulichung, dass reduzierende und invariante Unterräume nicht immer übereinstimmen müssen, betrachte man den Operator $T = -\mathrm{i}\frac{d}{dx}$. Der betrachtete Hilbertraum $\mathcal{H}$ sei $L^2(\mathbb{R})$ und der Unterraum $\mathcal{D}(T)$ sei der Sobolevraum $H^1(\mathbb{R})$. Offensichtlich ist T selbstadjungiert und $N := L^2(0,1)$ ein invarianter Unterraum unter T, da T die Menge $N \cap H^1(\mathbb{R})$ nach N abbildet.
Sei nun $f \in H^1(\mathbb{R})$ mit $f(0) \neq 0$ und P_N die Projektion $\chi_{(0,1)}$ auf N. Dann gilt $P_N(f) \notin \mathcal{D}(T)$, woraus folgt, dass N kein reduzierender Unterraum ist.

Lemma 1.5 Für jede Teilmenge $\mathcal{N}$ von $\mathcal{H}$ ist $\mathcal{H}_{\mathcal{N}} := \overline{\operatorname{span}\{E_A(M)x : M \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}), x \in \mathcal{N}\}}$ der kleinste reduzierende Unterraum für A, der $\mathcal{N}$ enthält. Der Raum $\mathcal{H}_{\mathcal{N}}$ lässt sich auch schreiben als $\overline{\operatorname{span}\{R_z(A)x : x \in \mathcal{N},\ \ z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}\}}$, wobei R_z die Resolvente $(A - zI)^{-1}$ bezeichnet.

Beweis. Als Abschluss einer lineare Hülle ist $\mathcal{H}_{\mathcal{N}}$ sicher ein Unterraum. Sei $P_{\mathcal{N}}$ die orthogonale Projektion auf $\mathcal{H}_{\mathcal{N}}$. Offensichtlich bildet für $M \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})$ die Projektion $E_A(M)$ die Menge $\mathcal{H}_{\mathcal{N}}$ in sich selbst ab. Daraus folgt direkt, dass $P_{\mathcal{N}}$ und $E_A(M)$ kommutieren: $P_{\mathcal{N}}E_A(M)y = P_{\mathcal{N}}y_0 = y_0 = E_A(M)y = E_A(M)P_{\mathcal{N}}y$ für $y \in \mathcal{H}_{\mathcal{N}}$. Da A auf ganz $\mathcal{H}_{\mathcal{N}}$ definiert ist, ist $\mathcal{H}_{\mathcal{N}}$ ein reduzierender Unterraum.
Sei $\mathcal{H}_0$ ein weiterer reduzierender Unterraum für den Operator A, der $\mathcal{N}$ enthält und P_0 die orthogonale Projektion auf $\mathcal{H}_0$. Nach Proposition 1.2 muss $E_A(M)P_0 = P_0E_A(M)\ \ \forall M \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})$.
Da $\mathcal{N}$ eine Teilmenge von $\mathcal{H}_0$ ist, gilt $E_A(M)x = E_A(M)P_0x = P_0E_A(M)x$ für alle $x \in \mathcal{N}$ und $M \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})$. Also gilt $\mathcal{H}_{\mathcal{N}} \subseteq \mathcal{H}_0$.
Um die zweite Aussage zu sehen, erinnere man sich daran, dass sich die Resolvente durch das Spektralmaß ausdrücken lässt mit $R_z(A) = \int (t-z)^{-1} dE_A(t)$. Damit folgt $R_z(A)x \in \mathcal{H}_{\mathcal{N}}$ für $z \in \mathbb{C}/\mathbb{R}$ und $x \in \mathcal{N}$. Durch *Stone's Formel*, siehe Satz 5.1, erhält man auch die Umkehrung, dass sich das Spektralmaß über die Resolvente ausdrücken lässt also

$$E_A(\lambda) = \lim_{\delta \to 0+} \lim_{\epsilon \to 0+} \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_{-\infty}^{\lambda+\delta} (A - (t + \mathrm{i}\epsilon)I)^{-1} - (A - (t - \mathrm{i}\epsilon)I)^{-1} dt. \tag{1}$$

Folglich gilt $E_A(\lambda)x \in \overline{\operatorname{span}\{R_z(A)x : x \in \mathcal{N}, z \in \mathbb{C}/\mathbb{R}\}}$. Somit sind die zwei Schreibweisen für $\mathcal{H}_{\mathcal{N}}$ gleich. □

Definition 1.6 Sei A ein selbstadjungierter Operator auf dem Hilbertraum $\mathcal{H}$. Der Vektor x heißt zyklischer Vektor, wenn die Menge $\operatorname{span}\{E_A(M)x : M \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$ dicht im Hilbertraum $\mathcal{H}$ ist.

Wenn ein Operator einen zyklischen Vektor besitzt, sagt man auch, dass er ein *einfaches Spektrum* hat. Der Grund dafür ist, dass in diesem Fall jeder Eigenwert Vielfachheit 1 hat. Aus der Existenz eines zyklischen Vektors lässt sich aber noch bedeutend mehr herleiten wie wir in Proposition 1.9 zeigen. Diese wird auch ein essentieller Bestandteil im späteren Beweis des Satzes von Aronszajin Donoghue sein.

Proposition 1.7 Sei μ ein positives, reguläres Borelmaß auf $\mathbb{R}$, $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}, \mu)$ und A_t der Multiplikationsoperator definiert durch $A_t f(t) = tf(t)$ für alle $f \in \mathcal{D}(A_t) := \{f : \|tf(t)\|_{L^2} < \infty\}$. Dann gelten folgende Aussagen:

(i) $\lambda \in \mathbb{R}$ ist genau dann ein Eigenwert von A_t, wenn $\mu(\{\lambda\}) \neq 0$.

(ii) Jeder Eigenwert hat Vielfachheit 1.

(iii) Der Operator A_t hat ein einen zyklischen Vektor.

Beweis. Klarerweise ist der einzige Kandidat für einen Eigenvektor zum Eigenwert λ die Indikatorfunktion $\chi_{\{\lambda\}}$. Diese ist aber genau dann ungleich der Nullfunktion, wenn $\{\lambda\}$ keine Nullmenge ist. Daraus ergeben sich (i) und (ii).
Um Punkt (iii) zu sehen, definiere man die Funktion

$$x(t) := \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2^{-|k|} \mu\big([k, k+1)\big)^{-1/2} \chi_{[k,k+1)}$$

Die Projektion $E_{A_t}(M)$ entspricht einer Multiplikation mit der Indikatorfunktion χ_M. Daraus ergibt sich, dass man die Indikatorfunktion jedes endlichen Intervalls $[a, b)$ durch eine Linearkombination von Funktionen $E_{A_t}(M)x$ darstellen kann. Da diese dicht in $L^2(\mathbb{R}, \mu)$ liegen, ist x ein zyklischer Vektor.

□

Bemerkung 1.8 Im Fall, dass μ endlich ist, kann man obigen Beweis auch leichter führen indem man einfach $x(t) \equiv 1$ wählt.

Proposition 1.9 Sei x ein zyklischer Vektor für den Operator A und sei $\mu(\cdot) := \langle E_A(\cdot)x, x\rangle$. Dann ist die Abbildung U von $\mathcal{H}$ nach $L^2(\mathbb{R}, \mu)$ definiert durch $U\big(f(A)x\big) = f(t)$ ein unitärer Operator mit $A = U^{-1}A_t U$ und $U(x) \equiv 1$. Wobei hier A_t der Multiplikationsoperator aus Proposition 1.7 ist.

Beweis. Da der Vektor x zyklisch ist, gibt es zu jedem $y \in \mathcal{H}$ eine Folge von Vektoren der Form $y_k = \sum_{k=1}^{n} c_k E_A(M_k)x$ mit $c_k \in \mathbb{C}$ und $M_k \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})$, die gegen y konvergiert. Das ist aber gleichbedeutend dazu, dass es eine Funktion f gibt mit

$$y = \int f(t)dE_A(t)x = f(A)x \tag{2}$$

$$\|y\|_{\mathcal{H}}^2 = \int |f(t)|^2 d\langle E_A(t)x, x\rangle = \int |f(t)|^2 d\mu < \infty \tag{3}$$

Aus (2) erhält man, dass U auf ganz $\mathcal{H}$ definiert ist und aus (3) erhält man, dass U nach $L^2(\mathbb{R}, \mu)$ abbildet und isometrisch ist. Setzt man $f(\lambda) \equiv 1$ so ergibt sich $Ux(t) \equiv 1$.
Sei nun $g \in L^2(\mathbb{R}, \mu)$. Für den Definitionsbereich des Operators $g(A)$ gilt $\mathcal{D}(g(A)) = \{x \in \mathcal{H} : \int |g(t)|^2 d\langle E_A(t)x, x\rangle < \infty\}$. Unter Berücksichtigung der Tatsache, dass sich der Operator A auch schreiben lässt als $Ax = \int t dE_A(t)$, erhält man $g(A)x \in \mathcal{D}(A)$ genau dann wenn $\int |t|^2 d\langle E_A(t)g(A)x, g(A)x\rangle = \int |t|^2 |g(t)|^2 d\langle E_A(t)x, x\rangle < \infty$. Das ist aber gleichbedeutend mit $Ug(A)x \in \mathcal{D}(A_t)$. Mit der Spektraldarstellung des Operators A ergibt sich $UAg(A)x = U \int tg(t)dE_A(t) = tg(t) = A_t(Ug(A)x)$ also $UA = A_tU$. Da U bijektiv ist, folgt $A = U^{-1}A_tU$. $\square$

2 Zerlegung des Spektrums

Um die Änderungen des Spektrums genau studieren zu können, muss zuerst das Spektrum selbst genauer charakterisiert werden. Als Beispiel betrachte man den Multiplikationsoperator A auf $L^2(\mathbb{R}, \mu)$ mit $(Af)(x) = xf(x)$

Das Spektrum von A ist der Träger von μ. Angenommen, μ ist das Lebesguemaß, dann ist $\operatorname{supp}(\mu) = \mathbb{R}$, aber der Operator A hat keine Eigenwerte. Ist umgekehrt μ ein positives diskretes Maß auf $\mathbb{Q}$, gilt ebenfalls $\operatorname{supp}(\mu) = \mathbb{R}$ und A hat abzählbar viele Eigenwerte. Das Spektrum alleine ist also eine eher grobe Größe zur Beschreibung von Operatoren. Im folgenden Abschnitt werden wir eine genauere Charakterisierung des Spektrums erarbeiten, die auf einer Zerlegung des Hilbertraumes $\mathcal{H}$ in reduzierende Unterräume basiert.

Definition 2.1 $\mathcal{H}_p(A) = \mathcal{H}_p$ sei der Abschluss der linearen Hülle aller Eigenräume von A. Wenn A keinen Eigenwert hat, sei $\mathcal{H}_p = \{0\}$. Weiters sei $\mathcal{H}_c(A) = \mathcal{H}_c$ die Menge aller Vektoren $x \in \mathcal{H}$, für die die Funktion $\lambda \to \langle E_A(\lambda)x, x\rangle$ stetig auf $\mathbb{R}$ ist. Hierbei steht wieder $E_A(\lambda)$ für $E_A((-\infty, \lambda])$.

Proposition 2.2

(i) Ein Vektor $x \in \mathcal{H}$ liegt genau dann in $\mathcal{H}_p$, wenn es eine höchstens abzählbare Menge $N \subseteq \mathbb{R}$ gibt, sodass $E_A(N)x = x$.

(ii) Ein Vektor $x \in \mathcal{H}$ liegt genau dann in $\mathcal{H}_c$, wenn für jede abzählbare Menge $N \subseteq \mathbb{R}$ gilt $E_A(N)x = 0$. Das ist gleichbedeutend zu $E_A(\{\lambda\})x = 0$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}$.

(iii) $\mathcal{H}_p$ und $\mathcal{H}_c$ sind abgeschlossene Unterräume von $\mathcal{H}$ und es gilt $\mathcal{H} = \mathcal{H}_p \oplus \mathcal{H}_c$

Beweis. (i): Sei $x \in \mathcal{H}_p$. Dann ist x der Grenzwert einer Folge (y_k), wobei sich jedes y_k schreiben lässt als $y_k = \sum_{n_k=1_k}^{N_k} x_{n_k}$, wobei $Ax_{n_k} = \lambda_{n_k} x_{n_k}$ mit $\lambda_{n_k} \in \mathbb{R}$. Sei nun $N = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=1}^{N_k} \{\lambda_{n_k}\}$, mit $E_A(\{\lambda_{n_k}\})x_{n_k} = x_{n_k}$ folgt

$$E_A(N)x = E_A(N) \lim_{k\to\infty} y_k = \lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{N_k} E_A(N)x_{n_k} = \lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{N_k} x_{n_k} = \lim_{k\to\infty} y_k = x.$$

Sei umgekehrt N eine abzählbare Menge paarweise verschiedener Elemente λ_n, so dass $E_A(N)x = x$. Setze nun $x_n := E_A(\{\lambda_n\})x$. So folgt mit $Ax_n = \lambda_n x_n$ sofort $x = E_A(N)x = \sum_{n=1}^{\infty} E_A(\{\lambda_n\})x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n$ und damit $x \in \mathcal{H}_p$.

(ii): Die monoton steigende Funktion $\langle E_A(\lambda)x, x\rangle$ ist genau dann stetig, wenn sie keine Sprungstellen hat, also wenn $\langle E_A(\{\lambda\})x, x\rangle = 0$. Das ist gleichbedeutend zu $E_A(\{\lambda\})x =$

$0 \forall\lambda \in \mathbb{R}$, da ja $E_A(\{\lambda\})$ eine orthogonale Projektion ist und somit $\langle E_A(\{\lambda\})x, x\rangle = \langle E_A(\{\lambda\})x, E_A(\{\lambda\})x\rangle$ gilt. Mit der σ-Additivität des Spektralmaßes folgt $E_A(N)x = 0$ für alle abzählbaren Teilmengen $N \subseteq \mathbb{R}$.

(iii): Um den letzten Punkt zu zeigen, zeigt man, dass $\mathcal{H}_c = (\mathcal{H}_p)^\perp$. Dazu sei $x \in (\mathcal{H}_p)^\perp$ und $x_\lambda := E_A(\{\lambda\})x$. Es gilt $x_\lambda \in \ker(A - \lambda I) \subseteq \mathcal{H}_p \ \forall\lambda \in \mathbb{R}$ und damit $0 = \langle x_\lambda, x\rangle = \langle E_A(\{\lambda\})x, x\rangle$. Somit gilt $E_A(\{\lambda\})x = 0 \ \forall\lambda \in \mathbb{R}$. Mit (ii) folgt $x \in \mathcal{H}_c$.

Sei nun $x \in \mathcal{H}_c$. Für jedes beliebige $y \in \mathcal{H}_p$ existiert eine höchstens abzählbare Menge N_y, für die gilt: $E_A(N_y)y = y$ und nach (ii) $E_A(N_y)x = 0$. Da $E_A(N_y)$ selbstadjungiert ist, erhält man $\langle x, y\rangle = \langle x, E_A(N_y)y\rangle = \langle E_A(N_y)x, y\rangle = 0$. Damit ist gezeigt, dass $\mathcal{H}_c$ der Orthogonalraum von $\mathcal{H}_p$ ist und somit selbst ein abgeschlossener Unterraum.

$\square$

Als nächstes betrachten wir eine feinere Zerlegung des Hilbertraumes $\mathcal{H}$.

Definition 2.3 $\mathcal{H}_{ac} = \mathcal{H}_{ac}(A)$ sei die Menge aller Vektoren $x \in \mathcal{H}$, für die das Maß $\mu_x(.) := \langle E_A(.)x, x\rangle$ absolut stetig bezüglich dem Lebesguemaß ist. Also genau jene x für die $E_A(N)x = 0$ für jede Lebesgue-Nullmenge N.

Definition 2.4 Weiters sei $\mathcal{H}_{sing} = \mathcal{H}_{sing}(A)$ (bzw. $\mathcal{H}_{sc} = \mathcal{H}_{sc}(A)$) die Menge aller $x \in \mathcal{H}$ ($x \in \mathcal{H}_c$), für die das Maß μ_x singulär bezüglich dem Lebesguemaß auf $\mathbb{R}$ ist. (Das heißt, es existiert eine Lebesgue-Nullmenge N, so dass $\mu_x(\mathbb{R}\backslash N) = 0$. Das ist gleichbedeutend zu $E_A(\mathbb{R}\backslash N)x = 0$ beziehungsweise $E_A(N)x = x$.

Offensichtlich gilt $\mathcal{H}_{sc} = \mathcal{H}_c \cap \mathcal{H}_{sing}$.

Proposition 2.5 $\mathcal{H}_{ac}, \mathcal{H}_{sing}$ und $\mathcal{H}_{sc}$ sind abgeschlossene Unterräume von $\mathcal{H}$, wobei $\mathcal{H} = \mathcal{H}_{ac} \oplus \mathcal{H}_{sing}$ und $\mathcal{H}_{sing} = \mathcal{H}_p \oplus \mathcal{H}_{sc}$.

Beweis. Zuerst wird gezeigt, dass $\mathcal{H}_{sing}$ ein abgeschlossener Unterraum von $\mathcal{H}$ ist. Dazu sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathcal{H}_{sing}$, die gegen $x \in \mathcal{H}$ konvergiert. Für jedes x_n existiert eine Lebesgue-Nullmenge N_n, so dass $E_A(N_n)x_n = x_n$. Sei nun $N := \bigcup_n N_n$, dann ist N eine Lebesgue-Nullmenge und es gilt $E_A(N)x_n = x_n \ \forall n \in \mathbb{N}$. Mit $n \to \infty$ erhält man $E_A(N)x = x$. $\mathcal{H}_{sing}$ ist also abgeschlossen.
Es bleibt zu zeigen, dass $\mathcal{H}_{sing}$ ein Unterraum ist. Dazu seien $x_1, x_2 \in \mathcal{H}_{sing}$, dann existieren Lebesgue-Nullmengen N_1, N_2, so dass $E_A(N_1)x_1 = x_1$ und $E_A(N_2)x_2 = x_2$. Sei nun $N = N_1 \cup N_2$, dann folgt aus $E_A(N)x_1 = x_1$ und $E_A(N)x_2 = x_2$, dass $E_A(N)(x_1 + \lambda x_2) = x_1 + \lambda x_2$. Das ist gleichbedeutend zu $x_1 + \lambda x_2 \in \mathcal{H}_{sing}$.
Als nächstes wird gezeigt, dass $\mathcal{H}_{ac} = (\mathcal{H}_{sing})^\perp$. Sei $x \in \mathcal{H}_{ac}$, dann existiert zu jedem $y \in \mathcal{H}_{sing}$ eine Lebesgue-Nullmenge N_y, so dass $E_A(N_y)x = 0$ und $E_A(N_y)y = y$. Da

$E_A(N_y)$ selbstadjungiert ist folgt $\langle x, y\rangle = \langle x, E_A(N_y)y\rangle = \langle E_A(N_y)x, y\rangle = \langle 0, y\rangle = 0$ Also ist $x \in (\mathcal{H}_{sing})^{\perp}$.
Sei nun $x \in (\mathcal{H}_{sing})^{\perp}$, und N eine Lebesgue-Nullmenge. Da die Projektion $E_A(N)$ idempotent ist, ist $E_A(N)x$ in $\mathcal{H}_{sing}$. Es gilt also $0 = \langle x, E_A(N)x\rangle = \langle E_A(N)x, E_A(N)x\rangle$, wobei das letzte Gleichheitszeichen wieder aus den Eigenschaften der orthogonalen Projektion $E_A(N)$ folgt. Wir sehen, dass $E_A(N)x = 0$ für jede Lebesgue-Nullemenge N. Also ist x in $\mathcal{H}_{ac}$. Damit ist $\mathcal{H}_{ac} = (\mathcal{H}_{sing})^{\perp}$ gezeigt.
Da jede abzählbare Menge eine Lebesgue-Nullmenge ist, gilt $\mathcal{H}_p \subseteq \mathcal{H}_{sing}$. Mit $\mathcal{H}_{sc} = \mathcal{H}_c \cap \mathcal{H}_{sing}$ und $\mathcal{H} = \mathcal{H}_c \oplus \mathcal{H}_p$ folgt schließlich $\mathcal{H}_{sing} = \mathcal{H}_p \oplus \mathcal{H}_{sc}$.

□

Satz 2.6 Die Unterräumen $\mathcal{H}_p(A), \mathcal{H}_c(A), \mathcal{H}_{ac}(A), \mathcal{H}_{sing}(A)$ und $\mathcal{H}_{sc}(A)$ sind reduzierende Unterräume des Operators A.

Beweis. Bezeichne P den Projektionsoperator von $\mathcal{H}$ auf $\mathcal{H}_{sing}$ (bzw. $\mathcal{H}_p$). Sei $x \in \mathcal{H}_{sing}$ (bzw. $\mathcal{H}_p$), dann existiert eine Lebesgue-Nullmenge (bzw. abzählbare Menge) N, so dass $E_A(N)x = x$. Für jedes $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt $E_A(N)E_A(\lambda)x = E_A(\lambda)E_A(N)x = E_A(\lambda)x$. Daraus folgt, dass $E_A(\lambda)x \in \mathcal{H}_{sing}$ (bzw. $\mathcal{H}_p$) und somit $PE_A(\lambda) = E_A(\lambda) = E_A(\lambda)P$, also dass A mit P kommutiert. Sei nun $\lambda \in \rho(A)$, dann gilt $\mathrm{ran}(A - \lambda) = \mathcal{H}$, $\mathcal{D}(R_\lambda(A)) = \mathcal{H}$ und $\mathrm{ran}R_\lambda(A) = \mathcal{D}(A - \lambda) = \mathcal{D}(A)$. Aus der Spektraldarstellung der Resolvente $R_\lambda(A)$ folgt, dass auch $R_\lambda(A)$ mit P kommutiert. Wir erhalten für alle $x \in \mathcal{D}(A)$ $Px = PR_\lambda(A)(A-\lambda)x = R_\lambda(A)P(A-\lambda)x$. Daraus folgt $Px \in \mathrm{ran}R_\lambda(A) = \mathcal{D}(A)$ und somit $P\mathcal{D}(A) \subseteq \mathcal{D}(A)$. Mit Proposition 1.2 folgt, dass $\mathcal{H}_{sing}$ und $\mathcal{H}_p$ reduzierende Unterräume sind.
Da das Komplement reduzierender Unterräume reduzierend ist, sind $\mathcal{H}_c$ und $\mathcal{H}_{ac}$ reduzierend. Mit $\mathcal{H}_{sing} = \mathcal{H}_p \oplus \mathcal{H}_{sc}$ folgt, dass $\mathcal{H}_{sc}$ ein reduzierender Unterraum ist, da er das Komplement von $\mathcal{H}_p$ im reduzierenden Raum $\mathcal{H}_{sing}$ ist.

□

Entsprechend der Zerlegung des Hilbertraumes $\mathcal{H}$ können nun die Einschränkungen A_p, A_c, A_{ac}, A_{sing} und A_{sc} des Operators A auf die jeweiligen Unterräume betrachtet werden. Man spricht auch von dem *unstetigen, stetigen, absolut stetigen, singulären* und *singulär stetigen Teil* von A. Dementsprechend definiert man das *stetige Spektrum* σ_c, das *singulär stetige Spektrum* σ_{sc}, das *singuläre Spektrum* σ_{sing} und das *absolut stetige Spektrum* σ_{ac}

als die Spektren der jeweiligen Einschränkungen von A. Aus Proposition 2.5 folgt:

$$A = A_p \oplus A_{sc} \oplus A_{ac}, \qquad \sigma(A) = \sigma(A_p) \cup \sigma_{sc}(A) \cup \sigma_{ac}(A), \tag{4}$$

$$A = A_{sing} \oplus A_{ac}, \qquad \sigma(A) = \sigma_{sing}(A) \cup \sigma_{ac}(A) \tag{5}$$

Bemerkung: $\sigma(A_p)$ ist der Abschluss von $\sigma_p(A)$.

Beispiel 2.7 (Multiplikationsoperator) Sei μ ein positives reguläres Borelmaß auf $\mathbb{R}$. Sei A der Multiplikationsoperator auf $L^2(\mathbb{R}, \mu)$ mit $(Af)(x) = xf(x)$. Das Maß μ kann geschrieben werden, als eindeutige Summe aus einem diskreten Maß μ_p, einem singulär stetigen Maß μ_{sc} und einem absolut stetigen Maß μ_{ac}. Dementsprechend gilt $L^2(\mathbb{R}, \mu) = L^2(\mathbb{R}, \mu_{ac}) \oplus L^2(\mathbb{R}, \mu_{sc}) \oplus L^2(\mathbb{R}, \mu_p)$. Nun ist $\mathcal{H}_{ac}(A) = L^2(\mathbb{R}, \mu_{ac})$, $\mathcal{H}_{sc}(A) = L^2(\mathbb{R}, \mu_{sc})$ und $\mathcal{H}_p(A) = L^2(\mathbb{R}, \mu_p)$.

3 Die Funktionen F und G

Für die nächsten zwei Kapitel sei A ein selbstadjungierter Operator auf dem Hilbertraum $\mathcal{H}$, $u \in \mathcal{H}$ fest und $\alpha \in \mathbb{R}$. Der Operator A_α sei definiert als $A_\alpha := A + \alpha\langle \cdot, u\rangle u$.

Definition 3.1 Die Resolventenmenge sei definiert durch $\rho(A_\alpha) := \{\lambda \in \mathbb{C} : (A_\alpha - \lambda) \text{ ist beschränkt invertierbar}\}$. Die Resolvente sei definiert durch $R_z(A_\alpha) := (A_\alpha - z)^{-1}$ für alle $z \in \rho(A_\alpha)$.

Definition 3.2 Sei μ_α das positives Borel-Maß auf $\mathbb{R}$ definiert durch

$$\mu_\alpha(\Delta) := \langle E_{A_\alpha}(\Delta)u, u\rangle,\ \ \Delta \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}). \tag{6}$$

Sei F_α die auf $\rho(A_\alpha)$ definierte Funktion

$$F_\alpha(z) := \langle R_z(A_\alpha)u, u\rangle = \int_{\mathbb{R}} \frac{d\mu_\alpha(\lambda)}{\lambda - z},\ \ z \in \rho(A_\alpha). \tag{7}$$

Statt μ_0, F_0 und A_0 schreibt man auch μ, F und A.

Lemma 3.3 Für $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ und $z \in \mathbb{C}/\mathbb{R}$ gilt $1 + (\alpha - \beta)F_\beta(z) \neq 0$ und

$$F_\alpha(z) = \frac{F_\beta(z)}{1 + (\alpha - \beta)F_\beta(z)}, \quad \mathrm{Im}F_\alpha(z) = \frac{\mathrm{Im}F_\beta(z)}{|1 + (\alpha - \beta)F_\beta(z)|^2}. \tag{8}$$

Beweis. Man überlegt sich leicht, dass $F_\alpha(z) \neq 0$, für $z \in \mathbb{C}/\mathbb{R}$, da für $\mathrm{Im}(z) > 0$ auch $\mathrm{Im}(\frac{1}{\lambda - z}) > 0$ und umgekehrt für $\mathrm{Im}(z) < 0$ auch $\mathrm{Im}(\frac{1}{\lambda - z}) < 0$ gilt. Somit hat das Integral $F_\alpha(z)$ in jedem Fall einen nicht verschwindenden Imaginärteil.
Durch einfache Umformungsschritte zeigt man die Gleichung

$$\begin{aligned} R_z(A_\alpha) - R_z(A_\beta) &= (A_\alpha - z)^{-1}(A_\beta - z)(A_\beta - z)^{-1} - (A_\alpha - z)^{-1}(A_\alpha - z)(A_\beta - z)^{-1} \\ &= R_z(A_\alpha)(A_\beta - A_\alpha)R_z(A_\beta) \\ &= R_z(A_\alpha)((\beta - \alpha)\langle \cdot, u\rangle u)R_z(A_\beta) \\ &= (\beta - \alpha)R_z(A_\alpha)u\langle R_z(A_\beta)(\cdot), u\rangle \end{aligned} \tag{9}$$

Wendet man auf beide Seiten von (9) auf den Vektor u an, erhält man

$$R_z(A_\alpha)u - R_z(A_\beta)u = (\beta - \alpha)F_\beta(z)R_z(A_\alpha)u. \tag{10}$$

Bildet man auf beiden Seiten das Skalarprodukt mit u erhält man schließlich

$$F_\alpha(z) - F_\beta(z) = (\beta - \alpha)F_\beta(z)F_\alpha(z). \tag{11}$$

Daraus folgt direkt $F_\alpha(z)(1 + (\alpha - \beta)F_\beta(z)) = F_\beta(z)$. Da $F_\alpha(z) \neq 0$ und $F_\beta(z) \neq 0$ muss auch $1 + (\alpha - \beta)F_\beta(z) \neq 0$ sein. Damit erhält man die erste Gleichheit von (8). Die zweite Gleichheit ergibt sich direkt aus der ersten. □

Sei nun $\mathcal{H}_\alpha$ definiert als der Abschluss der Menge $\mathcal{D}_\alpha := \operatorname{span}\{R_z(A_\alpha)u : z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}\}$. Aus Lemma 1.5 ergibt sich, dass $\mathcal{H}_\alpha$ der kleinste reduzierende Unterraum von $\mathcal{H}$ ist, der den Vektor u enthält. Aus Formel (10) folgt, dass $\mathcal{D}_\alpha = \mathcal{D}_\beta$. Also muss auch gelten $\mathcal{H}_\alpha = \mathcal{H}_\beta =: \mathcal{H}_0$. Damit ergibt sich folgendes Lemma:

Lemma 3.4 Für jedes $\alpha \in \mathbb{R}$ ist $\mathcal{H}_0$ der kleinste reduzierende Unterraum für A_α, der u enthält. Der Vektor u ist zyklisch für den Operator A, genau dann, wenn er zyklisch für den Operator A_α ist.

Da die Operatoren A und A_α auf $(\mathcal{H}_0)^\perp$ übereinstimmen, kann man sich für das Studium des Spektrums der Operatoren auf den Raum $\mathcal{H}_0$ beschränken.

Als letzte technische Vorbereitung für den Satz von Aronszajn-Donoghue wird ein Lemma über die Funktionen $F = F_0$, die am Beginn dieses Abschnitts definiert wurde, und $G(t) := \int_{\mathbb{R}} \frac{d\mu(\lambda)}{(\lambda - t)^2}$ gezeigt. Lässt man für $G(t)$ auch ∞ als Wert zu, so ist $G(t)$ klarer Weise auf ganz $\mathbb{R}$ definiert. Die Funktion F ist auf ganz $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$ definiert. F lässt sich aber auf $\mathbb{R}$ fortsetzen durch

$$F(t + \mathrm{i}0) := \lim_{\epsilon \to +0} F(t + \mathrm{i}\epsilon).$$

Dieser Limes existiert und ist endlich fast überall auf $\mathbb{R}$; siehe Anhang Satz 5.3.

Lemma 3.5 Sei $t \in \mathbb{R}$ und $G(t) < \infty$. Dann existiert $F(t)$ und

$$F(t) = F(t + \mathrm{i}0), \quad \mathrm{i}G(t) = \lim_{\epsilon \to +0} \epsilon^{-1}(F(t + \mathrm{i}\epsilon) - F(t)). \tag{12}$$

Beweis. Betrachte die Funktion $f(\lambda) := (\lambda - t)^{-1}$. Da laut Voraussetzung $G(t) < \infty$ ist, ist f eine $L^2(\mathbb{R}, \mu)$-Funktion. Da das Maß μ endlich ist, gilt durch die Hölderungleichung auch $f \in L^1(\mathbb{R}, \mu)$, was gleichbedeutend dazu ist, dass $F(t)$ endlich ist.
Um die Gleichheiten zu zeigen seien für $\epsilon > 0$ Funktionen f_ϵ und g_ϵ auf $\mathbb{R}$ definiert durch

$$f_\epsilon(\lambda) := (\lambda - (t + \mathrm{i}\epsilon))^{-1}, \qquad g_\epsilon(\lambda) := \epsilon^{-1}((\lambda - (t + \mathrm{i}\epsilon))^{-1} - (t - \lambda)^{-1}). \tag{13}$$

Es gilt offensichtlich $f_\epsilon \to f$ und $g_\epsilon \to \mathrm{i}f(\lambda)^2$ fast überall für $\epsilon \to +0$. Wir zeigen nun, dass $|f_\epsilon(\lambda)| \leq |f(\lambda)|$ und $|g_\epsilon(\lambda)| \leq |f(\lambda)|^2$. Fast überall auf $\mathbb{R}$ gilt:

$$\begin{aligned} |f_\epsilon(\lambda)| &= \frac{1}{|\lambda - t - \mathrm{i}\epsilon|} = \frac{1}{\sqrt{(\lambda - t)^2 + \epsilon^2}} \leq |f(\lambda)| \\ |g_\epsilon(\lambda)| = \epsilon^{-1}\left|\frac{\mathrm{i}\epsilon}{(\lambda - (t + \mathrm{i}\epsilon))(\lambda - t)}\right| &= \frac{1}{|(\lambda - (t + \mathrm{i}\epsilon))||(\lambda - t)|} \leq |f(\lambda)|^2. \end{aligned}$$

Damit lässt sich der Satz der dominierten Konvergenz anwenden und man erhält

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \to +0} F(t + \mathrm{i}\epsilon) &= \lim_{\epsilon \to +0} \int_{\mathbb{R}} f_\epsilon(\lambda) d\mu(\lambda) = \\ = \int_{\mathbb{R}} \lim_{\epsilon \to +0} f_\epsilon(\lambda) d\mu(\lambda) &= \int_{\mathbb{R}} f(\lambda) d\mu(\lambda) = F(t) \\ \lim_{\epsilon \to +0} \epsilon^{-1}(F(t + \mathrm{i}\epsilon) - F(t)) &= \lim_{\epsilon \to +0} \int_{\mathbb{R}} g_\epsilon(\lambda) d\mu(\lambda) = \\ = \int_{\mathbb{R}} \lim_{\epsilon \to +0} g_\epsilon(\lambda) d\mu(\lambda) &= \int_{\mathbb{R}} \mathrm{i}f(\lambda)^2 d\mu(\lambda) = \mathrm{i}G(t). \end{aligned}$$

□

4 Der Satz von Aronszajn-Donoghue

Da A und A_α auf $\mathcal{H}_0^\perp$ übereinstimmen, genügt es die Einschränkung dieser Operatoren auf $\mathcal{H}_0$ zu studieren. Im folgenden Satz wird daher angenommen, dass u zyklisch ist.

Satz 4.1 Sei u ein zyklischer Vektor für A und seien α, β, β_1, $\beta_2 \in \mathbb{R}$, wobei $\alpha \neq 0$. Dann gilt:

(i) Die Menge aller Eigenwerte von A_α ist gegeben durch:

$$\begin{aligned} P_\alpha &:= \{t \in \mathbb{R} : F(t) = \int_{\mathbb{R}} (\lambda - t)^{-1} d\mu(\lambda) \in \mathbb{R} \text{ existiert}, F(t) = -\alpha^{-1}, G(t) < \infty\} \\ &= \{t \in \mathbb{R} : F(t) = -\alpha^{-1}, G(t) < \infty\} = \{t \in \mathbb{R} : F(t + \mathrm{i}0) = -\alpha^{-1}, G(t) < \infty\}. \end{aligned}$$

Der diskrete Anteil $(\mu_\alpha)_p$ des Maßes μ_α hat als Träger P_α.

(ii) Ist $t \in \mathbb{R}$ ein Eigenwert von A, so gilt $\mu_\alpha(\{t\}) = \langle E_{A_\alpha}(\{t\})u, u\rangle = \alpha^{-2} G(t)^{-1}$.

(iii) Der singulär stetige Teil $(\mu_\alpha)_{sc}$ des Maßes μ_α hat als Träger

$$S_\alpha = \{t \in \mathbb{R} : F(t + \mathrm{i}0) = -\alpha^{-1}, G(t) = \infty\}.$$

(iv) Die singulären Anteile $(\mu_{\beta_1})_{sing}$ und $(\mu_{\beta_2})_{sing}$ sind zueinander singulär, wenn $\beta_1 \neq \beta_2$.

(v) Der absolut stetige Teil $(\mu_\alpha)_{ac}$ des Maßes μ_α hat als Träger

$$L := \{t \in \mathbb{R} : (\mathrm{Im} F)(t + \mathrm{i}0) \neq 0\} = \{t \in \mathbb{R} : (\mathrm{Im} F)(t + \mathrm{i}0) > 0)\}.$$

Hier steht $(\mathrm{Im}F)(t + \mathrm{i}0)$ für den Limes des Imaginärteils von $F(t + \mathrm{i}\epsilon)$ für $\epsilon \to +0$.

(vi) Die absolut stetigen Teile $(A_\alpha)_{ac}$ und A_{ac} der Operatoren A_α beziehungsweise A sind unitär equivalent.

Beweis. (i) : Die Gleichheit der verschiedenen Schreibweisen von P_α folgt direkt aus Lemma 3.5. Da u ein zyklischer Vektor ist, ist A nach Proposition 1.9 unitär äquivalent zum Mulitplikationsoperator $(Af)\lambda = \lambda f(\lambda)$ auf dem Raum $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}, \mu)$ mit $u(\lambda) \equiv 1$.

Sei nun t ein Eigenwert von A_α mit zugehöriger Eigenfunktion f. Dann gilt

$$(A_\alpha f)(\lambda) = \lambda f(\lambda) + \alpha\langle f, u\rangle = t f(\lambda) \quad \mu\text{-fü auf } \mathbb{R}. \tag{14}$$

Zuerst zeigt man, dass $\langle f, u\rangle \neq 0$ und $\mu(\{t\}) = 0$ durch einen Widerspruch. Angenommen $\langle f, u\rangle = 0$, dann folgt aus (14), dass $\lambda f(\lambda) = tf(\lambda)$ also $f(\lambda) = \chi_{\{t\}}$. Das impliziert insbesondere $\mu(\{t\}) \neq 0$. Es folgt der Widerspruch:

$$0 = \langle f, u\rangle = \int_{\mathbb{R}} \chi_{\{t\}} 1 d\mu = \mu(\{t\}) = \|f\|^2 \neq 0.$$

Also muss $\langle f, u\rangle \neq 0$ gelten. Damit ist aber Gleichung (14) für den Singleton $\{t\}$ nicht erfüllt. Da die Gleichheit aber μ-fü gelten muss, ergibt sich $\mu(\{t\}) = 0$.
Die Funktion $f(\lambda)$ lässt sich also explizit aus (14) μ-fü ausdrücken durch $f(\lambda) = -\alpha\langle f, u\rangle(\lambda - t)^{-1}$. Wendet man auf diese Funktion das L^2-Skalarprodukt mit $u \equiv 1$ bzw. $f(\lambda)$ an, erhält man:

$$\langle f, u\rangle = -\alpha\langle f, u\rangle \int_{\mathbb{R}} (\lambda - t)^{-1} d\mu(\lambda)$$
$$\|f\|^2 = \alpha^2 |\langle f, u\rangle|^2 \int_{\mathbb{R}} (\lambda - t)^{-2} d\mu(\lambda) < \infty$$

Da $\langle f, u\rangle \neq 0$ implizieren diese Gleichungen, dass $F(t) = \int_{\mathbb{R}} (\lambda - t)^{-1} d\mu(\lambda)$ existiert, $G(t) = \int_{\mathbb{R}} (\lambda - t)^{-2} d\mu(\lambda) < \infty$ und $F(t) = -\alpha^{-1}$. Also ist t ein Element der Menge P_α.
Für die Rückrichtung sei $t \in P_\alpha$ und $f_t(\lambda) := -\alpha(\lambda - t)^{-1}$. Aus $G(t) < \infty$ folgt, dass f_t eine $L^2(\mathbb{R}, \mu)$-Funktion ist und dass $\mu(\{t\}) = 0$. Aus $F(t) = -\alpha^{-1}$ folgt

$$\langle f_t, u\rangle = -\alpha \int_{\mathbb{R}} (\lambda - t)^{-1} d\mu(\lambda) = 1.$$

Damit ist gezeigt, dass f_t eine Eigenfunktion des Operators A_α ist, denn

$$\lambda f_t(\lambda) + \alpha\langle f_t, u\rangle = \lambda f(\lambda) + \alpha = tf_t(\lambda) \quad \mu\text{-fü auf } \mathbb{R}$$

also $A_\alpha f_t = tf_t$ in $L^2(\mathbb{R}, \mu)$.
Der Träger des diskreten Maßes $(\mu_\alpha)_p$ ist per Definition die Menge aller Atome von μ_α, also genau die Menge P_α der Eigenwerte des Operators A_α.

(ii) : Nach Lemma 3.4 ist u auch ein zyklischer Vektor für A_α und somit hat mit Proposition 1.7 jeder Eigenwert Vielfachheit 1. Deswegen ist $E_{A_\alpha}(\{t\})$ die eindimensionale Projektion $\|f_t\|^{-2}\langle\cdot, f_t\rangle f_t$. Unter Verwendung von $\langle f_t, u\rangle = 1$ erhält man

$$\mu_\alpha\big(\{t\}\big) = \langle E_{A_\alpha}\big(\{t\}\big)u, u\rangle = \|f_t\|^{-2}|\langle f_t, u\rangle|^2 = \alpha^{-2}G(t)^{-1}. \tag{15}$$

(iii) : Wenden wir Punkt (i) aus Satz 5.4 für $(\mu_\alpha)_{sing}$ an, so erhält man dass $(\mu_\alpha)_{sing}$ als

Träger

$$S'_\alpha := \{t \in \mathbb{R} : (\mathrm{Im} F_\alpha)(t + i0) = +\infty\} \tag{16}$$

hat, also ist $(\mu_\alpha)_{\mathrm{sing}}(\mathbb{R}\backslash S'_\alpha) = 0$. Die Elemente der Menge P_α sind Eigenwerte des Operators A_α und somit μ_α-Atome, woraus $(\mu_\alpha)_{\mathrm{sc}}(P_\alpha) = 0$ folgt. Der Träger von $(\mu_\alpha)_{\mathrm{sc}}$ muss also eine Teilmenge von $S'_\alpha\backslash P_\alpha$ sein. Somit reicht es für (iii) $S'_\alpha\backslash P_\alpha \subseteq S_\alpha$ zu zeigen.

Aus Gleichung (8) erhält man

$$F(t + \mathrm{i}\epsilon) + \alpha^{-1} = \frac{F_\alpha(t + \mathrm{i}\epsilon)}{1 - \alpha F_\alpha(t + \mathrm{i}\epsilon)} + \alpha^{-1} = \frac{\alpha^{-1}}{1 - \alpha F_\alpha(t + \mathrm{i}\epsilon)}. \tag{17}$$

Sei nun $t \in S'_\alpha\backslash P_\alpha$, dann gilt $|F_\alpha(t + \mathrm{i}\epsilon)| \to \infty$ und somit $F(t + \mathrm{i}\epsilon) + \alpha^{-1} \to 0$ für $\epsilon \to 0$. Damit ist gezeigt, dass $F(t + \mathrm{i}\epsilon) = -\alpha^{-1}$. Da aber $t \notin P_\alpha$, muss $G(t) = +\infty$ gelten. Damit ist $t \in S_\alpha$. Also gilt $S'_\alpha\backslash P_\alpha \subseteq S_\alpha$ und $(\mu_\alpha)_{ac}$ hat als Träger S_α.

(iv) : Das singuläre Maß $(\mu_\alpha)_{sing}$ lässt sich als Summe aus diskretem Maß und singulär stetigem Maß schreiben: $(\mu_\alpha)_{sing} = (\mu_\alpha)_p + (\mu_\alpha)_{sc}$. Daher ist der Träger von $(\mu_\alpha)_{sing}$ eine Teilmenge von

$$P_\alpha \cup S_\alpha = \left\{t \in \mathbb{R} : F(t + \mathrm{i}0) = -\alpha^{-1}\right\}. \tag{18}$$

Das liefert direkt, dass für $\beta_1 \neq \beta_2$ und $\beta_1 \neq 0$ sowie $\beta_2 \neq 0$ die Maße $(\mu_{\beta_1})_{sing}$ und $(\mu_{\beta_2})_{sing}$ zueinander singulär sind, da sie disjunkte Träger haben.

Für den Fall, dass o.B.d.A. $\beta_1 = 0$ liefert Formel (16), dass $(\mu_0)_{sing}$ als Träger die Menge $S'_0 := \{t \in \mathbb{R} : (\mathrm{Im} F)(t + \mathrm{i}0) = +\infty\}$ hat, welche aufgrund von Gleichung (18) sicherlich disjunkt zum Träger von $(\mu_{\beta_2})_{sing}$ ist.

(v) : Aus Punkt (ii) des Satzes 5.4 aus dem Anhang folgt, dass der absolut stetige Anteil $(\mu_\beta)_{ac}$ von μ_β gegeben ist durch

$$d(\mu_\beta)_{ac}(\lambda) = h_\beta(\lambda)d\lambda, \quad \text{wobei } h_\beta(\lambda) := \pi^{-1}(\mathrm{Im} F_\beta)(\lambda + \mathrm{i}0). \tag{19}$$

Setze $L_\beta := \{\lambda \in \mathbb{R} : h_\beta(\lambda) \neq 0\}$. Die zweite Gleichung von (8) und Satz 5.3 liefern, dass L_β und $L_0 = L$ μ-fü übereinstimmen. Folglich hat $(\mu_\beta)_{ac}$ als Träger L.

(vi) : Aus Lemma 3.4 wissen wir, dass u auch ein zyklischer Vektor für A_β ist. Also ist A_β nach Satz 1.9 unitär equivalent zum Multiplikationsoperator mit der unabhängigen Variable λ auf dem Raum $L^2(\mathbb{R}, \mu_\beta)$. Wie in Beispiel 2.7 ist dadurch der absolut stetige Anteil $(A_\beta)_{ac}$ unitär equivalent zum Multiplikationsoperator M_β auf dem Raum $L^2(\mathbb{R}, (\mu_\beta)_{ac})$. An dieser Stelle sei daran erinnert, dass diese Ergebnisse auch

für $\beta = 0$ gelten und wir $d(\mu_\beta)_{ac}$ über Gleichung (19) ausdrücken können.
Sei nun die Abbildung U von $L^2(\mathbb{R}, (\mu_\beta)_{ac})$ nach $L^2(\mathbb{R}, \mu_{ac})$ definiert als $(U(f))(\lambda) = (h_0^{-1}h_\beta)^{1/2}(\lambda)f(\lambda)$. Zu zeigen bleibt, dass U ein unitärer Isomorphismus ist. Es gilt

$$\langle U(f), U(g)\rangle_{L^2(\mathbb{R},(\mu)_{ac})} = \int_{\mathbb{R}} U(f)\overline{U(g)}h_0(\lambda)d\lambda =$$
$$= \int_{\mathbb{R}} f(\lambda)\overline{g(\lambda)}h_\beta(\lambda)d\lambda = \langle f, g\rangle_{L^2(\mathbb{R},(\mu_\beta)_{ac})}.$$

Offensichtlich ist U bijektiv, wobei $(U^{-1}(f))(\lambda) = (h_0 h_\beta^{-1})^{1/2}(\lambda)f(\lambda)$ der inverse Operator zu U ist. Damit gilt für die Multiplikationsoperatoren

$$UM_\beta U^{-1} = M_0. \tag{20}$$

Sie sind also unitär equivalent und somit sind auch die Operatoren A_{ac} und $(A_\beta)_{ac}$ unitär equivalent.

□

Aus dem letzten Punkt von Satz 4.1 ergibt sich direkt folgendes Korollar, wenn man bedenkt, dass A und A_α auf $u^\perp$ übereinstimmen.

Korollar 4.2 1. *Für beliebiges $\alpha \in \mathbb{R}$ sind die absolut stetige Anteile von A und A_α unitär äquivalent. Insbesondere gilt $\sigma_{ac}(A) = \sigma_{ac}(A_\alpha)$.*

Abschließend soll noch an zwei Beispielen eine Anwendung der eben erarbeiteten Theorie gezeigt werden.

Beispiel 4.3 (Rein diskretes Spektrum.) Sei $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton wachsende Folge in $\mathbb{R}$ mit $\lambda_n \to \infty$. Weiters sei A der Multiplikationsoperator mit (λ_n) auf dem Raum $\mathcal{H} = l^2(\mathbb{N})$ mit Definitionsbereich $\mathcal{D}(A) = \{(x_n) \in l^2(\mathbb{N}) : (\lambda_n x_n) \in l^2(\mathbb{N})\}$. Das zugehörige Spektralmaß $E_A(M)$ bildet die Folge (x_n) ab auf $(x_n\chi_M(n))$.
Wählt man einen festen Einheitsvektor $u = (u_n)$ mit $u_n \neq 0\ \forall n \in \mathbb{N}$, so ist offensichtlich $\operatorname{span}\big\{E_A(M)u : M \in \mathfrak{B}(\mathbb{N})\big\}$ dicht in $\mathcal{H}$. Damit ist u ein zyklischer Vektor. Sei das Maß μ gegeben durch $\mu(M) = \langle E_A(M)u, u\rangle = \sum_{n\in M} u_n^2$, so gilt für die Funktionen F und G

$$F(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n^2}{\lambda_n - z} \quad z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}, \quad \text{und} \quad G(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n^2}{(\lambda_n - t)^2} \quad t \in \mathbb{R}. \tag{21}$$

Da λ_n monoton wächst, ist $G(t) = \infty$ genau für $t = \lambda_k$ für ein k aus $\mathbb{N}$. Für $t \neq \lambda_k$ für alle k aus $\mathbb{N}$ gilt $F(t + \mathrm{i}0) = F(t) \in \mathbb{R}$. Für $t = \lambda_k$ gilt $\mathrm{Im}F(t + \mathrm{i}0) = +\infty$, woraus folgt, dass $L_\alpha = \{\lambda_n : n \in \mathbb{N}\}$. Da L_α aber offensichtlich eine Lebesgue-Nullemnge ist, gilt $\sigma_{ac}(A_\alpha) = \emptyset$.

Aus Punkt (i) von Satz 4.1 wissen wir, dass $t \in \mathbb{R}$ genau dann ein Eigenwert ist, wenn $t \neq \lambda_k \ \forall k \in \mathbb{N}$ und $F(t) = -\alpha^{-1}$. Da die Funktion $F(t)$ im Intervall $(\lambda_k, \lambda_{k+1})$ monoton von $-\infty$ bis $+\infty$ geht, gibt es in jedem Intervall genau einen Eigenwert $\nu_\alpha(k)$ von A_α. Für $\alpha > 0$ hat die Gleichung $F(t) = -\alpha^{-1}$ keine Lösung in $(-\infty, \lambda_1)$, während die Gleichung im Fall $\alpha < 0$ genau ein Lösung im Intervall $(-\infty, \lambda_1)$ hat. Man erhält also

$$\lambda_k < \nu(\alpha)_k < \lambda_{k+1} \quad \text{für } \alpha > 0, \qquad \nu(\alpha)_k < \lambda_k < \nu(\alpha)_{k+1} \quad \text{für } \alpha < 0.$$

Beispiel 4.4 (Eingebetteter Eigenwert) Sei $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}, \mu)$, wobei μ die Summe aus dem Lebesguemaß auf $[a,b]$ und dem Deltamaß δ_c mit $a < c < b$ ist. Weiters sei A der Multiplikationsoperator $(Af)(\lambda) = \lambda f(\lambda)$ und $u \equiv 1$. Dann ergibt sich für die Funktion $F(z) = \int_{\mathbb{R}} \frac{d\mu(\lambda)}{\lambda - z}$

$$\begin{aligned}(\mathrm{Im}F)(t+\mathrm{i}\epsilon) &= \mathrm{Im}\Big(\int_a^b \frac{\lambda - t + \mathrm{i}\epsilon}{(\lambda-t)^2+\epsilon^2}dt + \frac{c-t+\mathrm{i}\epsilon}{(c-t)^2+\epsilon^2}\Big) = \\ &= \arctan\Big(\frac{b-t}{\epsilon}\Big) - \arctan\Big(\frac{a-t}{\epsilon}\Big) + \frac{\epsilon}{(c-t)^2+\epsilon^2} \to \\ &\to \left\{\begin{array}{ll} \pi & a < t < b,\ t \neq c \\ 0 & t \notin [a,b] \\ \pi/2 & t = a, b \\ +\infty & t = c \end{array}\right\}\end{aligned}$$

Daraus ergibt sich $L = [a,b]$, sodass $\sigma_{ac}(A_\alpha) = [a,b]$ für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ in Übereinstimmung mit Korollar 1. Offensichtlich gilt $G(t) = +\infty$ genau für $t \in [a,b]$. Da aber auf $[a,b]$ $\mathrm{Im}(F(t+\mathrm{i}0)) \neq 0$ ist sicher $F(t+\mathrm{i}0) \neq \alpha$ und damit sind die Mengen S_α und $\sigma_{sc}(A_\alpha)$ leer für alle α aus $\mathbb{R}$.

Der Operator A hat genau einen Eigenwert $t = c$. Da $F(t)$ auf $[a,b]$ nicht existiert, hat A_α keinen Eigenwert in $[a,b]$. Für $t \notin [a,b]$ gilt $G(t) < \infty$ und mit dem Satz der majorisierten Konvergenz ergibt sich leicht

$$F(t) = F(t+\mathrm{i}0) = \log\left(\frac{b-t}{a-t}\right) + (c-t)^{-1}.$$

Also hat die Gleichung $F(t) = -\alpha^{-1}$ eine eindeutige Lösung t_α auf $\mathbb{R}\backslash[a,b]$. Damit hat A_α auch genau einen Eigenwert t_α. Für $\alpha < 0$ gilt $t_\alpha < a$ und für $\alpha > 0$ gilt $t_\alpha > b$.

5 Anhang

Satz 5.1 [Stone's Formel] Sei a, b aus $\mathbb{R} \cup \{-\infty\} \cup \{\infty\}$ und $c \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$E_A\big([a,b]\big) + E_A\big((a,b)\big) = \lim_{\epsilon \to 0+} \frac{1}{\pi \mathrm{i}} \int_a^b (A-(t+\mathrm{i}\epsilon)I)^{-1} - (A-(t-\mathrm{i}\epsilon)I)^{-1} dt$$

wobei der Limes bezüglich der starken Operatortopologie gebildet wird.

Definition 5.2 Sei μ ein reguläres komplexes Borelmaß auf $\mathbb{R}$, dann ist die Stieltjes-Transformation von μ definiert durch

$$I_\mu(z) := \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{t-z} d\mu(t), \quad z \in \mathbb{C} \backslash \mathbb{R}.$$

Satz 5.3 (Sokhotski-Plemlj Formel) Die Limiten $I_\mu(t \pm \mathrm{i}0) := \lim_{\epsilon \to \pm 0} I_\mu(t \pm \mathrm{i}\epsilon)$ existieren, sind endlich und es gilt

$$I_\mu(t \pm \mathrm{i}0) = \pm \mathrm{i}\pi \frac{d\mu}{dt} + \mathrm{CH} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{s-t} d\mu(s)$$

f.ü. auf $\mathbb{R}$. Hierbei bezeichnet CH$\int$ den Cauchyschen Hauptwert.

Satz 5.4 Sei μ ein reguläres komplexes Borelmaß auf $\mathbb{R}$ und $\mu = \mu_{sing} + \mu_{ac}$ die Zerlegung in einen singulären Anteil und einen absolut stetigen Anteil bezüglich des Lebesguemaßes. Bezeichne $(\mathrm{Im} I_\mu)(t + \mathrm{i}0)$ den Limes $\lim_{\epsilon \to 0} (\mathrm{Im} I_\mu)(t + \mathrm{i}\epsilon)$. Dann gilt:

1. Die Menge

   $$S_\mu := \{t \in \mathbb{R} : (\mathrm{Im} I_\mu)(t + \mathrm{i}0) = +\infty\}.$$

   ist Träger des singuläre Anteils μ_{sing}

2. Der absolut stetige Anteil μ_{ac} ist gegeben durch $d\mu_{ac}(t) = \pi^{-1} (\mathrm{Im} I_\mu)(t + \mathrm{i}0) dt$ und hat die Menge

   $$L_\mu := \{t \in \mathbb{R} : 0 < (\mathrm{Im} I_\mu)(t + \mathrm{i}0) < +\infty\}$$

   als Träger.