Saturationsprobleme

Philipp Dörsek

10. Mai 2006

Zusammenfassung

Wir stellen Saturationsprobleme anhand von Arbeiten von G. G. Lorentz, P. L. Berens, H. Butzer und R. Schnabl vor.

Sei A_n, $n \in \mathbb{N}$ eine Folge stetiger Operatoren auf einem Banachraum X, die in der starken Operatortopologie gegen die Identität konvergieren, also einen Approximationsprozess bilden. Dann ist die Aufgabe beim Saturationsproblem dadurch gegeben, einen Unterraum K von X, die Favardklasse, so zu finden, dass die Approximation durch A_n auf K in dem Sinne optimal ist, dass für alle $f \in X$, die eine bessere Konvergenz aufweisen, bereits gilt, dass sie unter A_n invariant bleiben.

Wir stellen das Saturationsproblem der Bernsteinpolynome auf $[0, 1]$ vor und charakterisieren die Favardklasse. In diesem Zusammenhang beweisen wir einige grundlegende Eigenschaften der Bernsteinpolynome.

Anschließend behandeln wir Approximationsprozesse, die durch eine stark stetige Operatorhalbgruppe gegeben sind. Diese sind, durch Verwendung des infinitesimalen Erzeugers, recht einfach allgemein zu behandeln.

Schließlich führen wir die Bernstein-Schnabl-Operatoren ein. Diese sind eine Verallgemeinerung der gewöhnlichen Bernsteinpolynome auf Räume von Funktionen auf Wahrscheinlichkeitsmaßen auf kompakten Mengen. Wir behandeln deren Saturationsproblem und beweisen die Saturiertheit, indem wir sie auf eine stark stetige Operatorhalbgruppe zurückführen.

Dann beweisen wir einen Satz von Voronovskaya-Typ für diese Operatoren.

Wir beschließen die Arbeit mit einer Darstellung der modifizierten Bernsteinoperatoren und zeigen, dass mit ihrer Hilfe das Saturationsproblem der gewöhnlichen Bernsteinoperatoren gelöst werden kann.

Kapitel 1

Approximation und Saturation

Wir folgen [BB67] und definieren:

Definition 1.1. Sei $(X, \|.\|)$ ein Banachraum und $A_n\colon X \to X$, $n \in \mathbb{N}$, eine Folge stetiger linearer Operatoren. A_n konvergiere gegen I in der starken Operatortopologie. Sei K ein Unterraum von X und $\varphi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$ mit $\lim_{n\to\infty} \varphi(n) = 0$.

(1) Eine Aussage der Form

$$\|A_n f - f\| = O(\varphi(n)) \quad \text{für } n \to \infty \text{ für alle } f \in K$$

heißt *direktes Theorem.*

(2) Eine Aussage der Form

$$\|A_n f - f\| = O(\varphi(n)) \text{ für } n \to \infty \quad \Rightarrow \quad f \in K$$

heißt *inverses Theorem.*

(3) Ist φ eine Funktion so, dass für (K, φ) sowohl ein direktes als auch ein inverses Theorem gilt, so sprechen wir von einem *Äquivalenztheorem.*

(4) Gilt für (K, φ) ein Äquivalenztheorem und zusätzlich

$$\|A_n f - f\| = o(\varphi(n)) \text{ für } n \to \infty \quad \Rightarrow \quad A_n f = f \text{ für } n \text{ groß genug,}$$

und gibt es ein $f_0 \in K$, sodass f_0 nicht invariant ist unter (A_n), so ist (K, φ) *optimal.* K heißt dann *Favardklasse* und wir nennen die Aussage *Saturationstheorem* und den Approximationsprozess (A_n) *saturiert in X mit Ordnung $\varphi(n)$.*

Gilt dies nicht, so ist die Approximationsordnung $O(\varphi(n))$, $n \to \infty$, *nicht optimal.*

Ein Approximationsprozess ist daher saturiert in X mit Ordnung $\varphi(n)$ genau dann, wenn es eine nur von f abhängige Konstante $C_1(f) > 0$ so gibt, dass für alle unter A_n nicht invarianten f

$$\|A_n f - f\| > C_1(f)\varphi(n)$$

gilt und es ein unter A_n nicht invariantes f_0 und eine nur von f_0 abhängige Konstante $C_2(f_0)$ mit

$$\|A_n f - f\| < C_2(f_0)\varphi(n)$$

gibt. Die Menge aller $f \in X$ mit $\|A_n f - f\| = O(\varphi(n))$ ist dann die Saturationsklasse von (A_n).

Bemerkung 1.2. Dieselben Definitionen werden auch für eine stark stetige Operatorhalbgruppe vorgenommen.

Kapitel 2

Saturationsklassen der Bernsteinpolynome auf $[0,1]$

Wir wollen die gewöhnlichen Bernsteinoperatoren als Beispiel anführen. Hier hat Lorentz in [Lor64] das Saturationsproblem auf direktem Wege gelöst.

Definition 2.1. Sei $f \in C[0,1]$.
Dann heißt der Operator

$$B_n \colon C[0,1] \to C[0,1], \quad f \mapsto B_n f := \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) p_{nk}$$

mit

$$p_{nk}(x) := \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$$

der *n-te Bernsteinoperator*.

Offensichtlich gilt $p_{nk}(x) \geq 0$ für $x \in [0,1]$.

2.1 Approximation durch Bernsteinpolynome

Satz 2.2 (Approximationssatz von Weierstraß)**.** *Für alle $f \in C[0,1]$ gilt*

$$\lim_{n\to\infty} \|B_n f - f\|_\infty = 0,$$

es gilt also $B_n \to I$ in der starken Operatortopologie von $C[0,1]$.

Beweis. Sei $X_{k,p} \sim A_p$ eine Folge alternativverteilter Zufallsvariablen, das heißt, es gelte

$$W[X_{k,p} = 1] = p, \quad W[X_{k,p} = 0] = 1 - p.$$

Sei weiters $Y_{n,p} := \overline{X}_{n,p} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_{k,p}$ das Stichprobenmittel der $(X_{k,p})$. Dann gilt nach dem schwachen Gesetz der großen Zahlen für alle $\delta > 0$

$$\lim_{n\to\infty} W[|Y_{n,p} - p| \geq \delta] = 0. \tag{2.1}$$

Wir stellen $(B_n f)(p)$ mit Hilfe von $Y_{n,p}$ dar. Es gilt, weil die Summe alternativverteilter Zufallsvariablen binomialverteilt ist,

$$\mathbb{E}(f(Y_{n,p})) = \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = (B_n f)(p).$$

Daher erhalten wir nach der Jensen-Ungleichung für $\psi_\alpha(x) := |x - \alpha|$

$$\begin{aligned}|(B_n f)(p) - f(p)| &= |\mathbb{E}(f(Y_{n,p}) - f(p)| \le \mathbb{E}\,|f(Y_{n,p}) - f(p)| \\ &= \int_{[|Y_{n,p}-p|\ge\delta]} |f(Y_{n,p} - f(p)|\,dW + \int_{[|Y_{n,p}-p|<\delta]} |f(Y_{n,p} - f(p)|\,dW \\ &\le 2\,\|f\|_\infty\, W[|Y_{n,p} - p| \ge \delta] + \int_{[|Y_{n,p}-p|<\delta]} |f(Y_{n,p} - f(p)|\,dW.\end{aligned}$$

Sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Da f auf $[0,1]$ gleichmäßig stetig ist, können wir δ so wählen, dass $|f(y) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$ für $|y - x| < \delta$ gilt, und nach (2.1) gibt es für dieses δ ein $N \in \mathbb{N}$ so, dass $W[|Y_{n,p} - p| \ge \delta] < \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $n > N$ erfüllt ist. Insgesamt gilt daher

$$|(B_n f)(p) - f(p)| \le \varepsilon. \qquad \square$$

Eine andere, sehr kurze, Möglichkeit, diesen Satz zu beweisen, liefert der Satz von Korovkin (Satz 5.2).

2.2 Saturation der Bernsteinpolynome

Lemma 2.3. *Sei*

$$T_{nm}(x) = \sum_{k=0}^{n} (k - nx)^m p_{nk}(x), \quad n \in \mathbb{N}, \quad m \in \mathbb{N}_0. \tag{2.2}$$

Dann gilt $T_{n0}(x) = 1$, $T_{n1}(x) = \sum_{k=0}^{n} k p_{nk}(x) - nx = 0$ *und* $T_{n2}(x) = nx(1-x)$, *und* $T_{nm}(x)$ *ist ein Polynom in* x *vom Grad* $\le m$ *und in* n *vom Grad* $\lfloor m/2 \rfloor$.

Beweis. Es gilt

$$\begin{aligned}T'_{nm}(x) &= -nmT_{n,m-1}(x) + \sum_{k=0}^{n} (k - nx)^m \frac{dp_{nk}(x)}{dx} \\ &= -nmT_{n,m-1}(x) + \sum_{k=0}^{n} (k - nx)^{m+1} \binom{n}{k} x^{k-1}(1-x)^{n-k-1},\end{aligned}$$

wir erhalten die Rekursionsformel

$$T_{n,m+1}(x) = x(1-x)\left(T'_{nm}(x) + nmT_{n,m-1}(x)\right). \tag{2.3}$$

Die Aussagen folgen daher durch Rekursion. $\square$

Lemma 2.4. *Seien* $0 < a < b < 1$, *und sei das Polynom* P_n *für* $|a_k| \le L$ *definiert durch*

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k p_{nk}(x). \tag{2.4}$$

Dann gibt es Konstanten C_1, C_2 *so, dass*

$$\left|P_n^{(r)}(x)\right| \le C_r L n^{r/2}, \quad a \le x \le b, \quad r = 1, 2, \tag{2.5}$$

gilt.

Dies gilt allgemeiner auch für $r \in \mathbb{N}$.

Beweis. Sei $u(x) := (x(1-x))^{-1}$, dann gilt

$$p'_{nk}(x) = (k - nx)u(x)p_{nk}(x).$$

Setzen wir dies für P'_n ein, ergibt sich

$$P'_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k(k - nx)u(x)p_{nk}(x).$$

Für den Absolutbetrag folgt wegen $p_{nk} \geq 0$ nach der Hölder'schen Ungleichung

$$\begin{aligned}
|P'_n(x)| &= \left| \sum_{k=0}^{n} a_k(k - nx)u(x)p_{nk}(x) \right| \leq \sum_{k=0}^{n} |a_k| \cdot |(k - nx)u(x)p_{nk}(x)| \\
&\leq Lu(x) \sum_{k=0}^{n} |(k - nx)p_{nk}(x)| = Lu(x) \sum_{k=0}^{n} |k - nx|\, p_{nk}(x) \\
&\leq Lu(x) \sqrt{\sum_{k=0}^{n} (k - nx)^2 p_{nk}(x)} \sqrt{\sum_{k=0}^{n} p_{nk}(x)} = Lu(x)\sqrt{T_{n2}(x)} \\
&= Lu(x)\sqrt{nx(1-x)} = Lu(x)^{1/2}\sqrt{n}.
\end{aligned}$$

Die Funktion $u(x)^{1/2}$ ist stetig auf $[a, b]$, daher folgt die Ungleichung, wenn wir als Konstante $C_1 := \sup_{x \in [a,b]} \left| u(x)^{1/2} \right|$ wählen.

Die Ungleichung für die zweite Ableitung folgt auf ähnliche Weise. □

Lemma 2.5. *Für alle $\delta > 0$ und $A \in \mathbb{N}$ gibt es eine Konstante $C = C(\delta, A)$ so, dass*

$$\sum_{|k/n - x| \geq \delta} p_{nk}(x) \leq Cn^{-A} \tag{2.6}$$

und

$$p_{nk}(x) \leq Cn^{-A} \quad \textit{für } |k/n - x| \geq \delta \tag{2.7}$$

gilt.

Beweis. Es gilt

$$\begin{aligned}
\sum_{|k/n - x| \geq \delta} p_{nk}(x) &\leq \delta^{-2m} \sum_{|k/n - x| \geq \delta} (k/n - x)^{2m} p_{nk}(x) \leq n^{-2m}\delta^{-2m} \sum_{k=0}^{n} (nx - k)^{2m} p_{nk}(x) \\
&= n^{-2m}\delta^{-2m} T_{n,2m}(x).
\end{aligned} \tag{2.8}$$

Da $T_{n,2m}(x)$ ein Polynom vom Grad m in n und $p_{nk} \geq 0$ ist, folgt die Behauptung, wenn wir $m = A$ setzen. □

Lemma 2.6. *Sei $0 < a_1 < a_2 < b_2 < b_1 < 1$, und Q_n eine Folge von zweimal stetig differenzierbaren Funktionen auf $[0, 1]$, und es gelte*

(1) $\mu_n := \max_{x \in (0,a_2) \cup (b_2,1)} |Q_n(x)|$ ist von der Ordnung $O(n^{-1})$, und

(2) $M_n := \max_{x \in (a_1,b_1)} |Q''_n(x)|$ ist von der Ordnung $O(n)$.

Dann gilt

$$\sum_{a_1<k/n<b_1} Q_n(k/n) - n\int_0^1 Q_n(x)dx = O(1). \tag{2.9}$$

Beweis. Sei k_1 der kleinste und k_2 der größte Wert von k im Intervall (na_1, nb_1), und sei n groß genug, sodass $k_1/n < a_2$ und $k_2/n > b_2$ erfüllt sind. Dann ist der Fehler des zu untersuchenden Ausdruckes zu

$$n\sum_{k=k_1}^{k_2-1}\left(\frac{1}{2n}\left(Q_n(k/n)+Q_n((k+1)/n)\right)-\int_{k/n}^{(k+1)/n} Q_n(x)dx\right) \tag{2.10}$$

nicht größer als $(n+1)\mu_n = O(1)$. Nach der Fehlerformel für die Trapezregel gilt

$$\frac{1}{2n}\left(Q_n(k/n)+Q_n((k+1)/n)\right)-\int_{k/n}^{(k+1)/n} Q_n(x)dx = \frac{1}{12n^3}Q_n''(\xi_k)$$

mit $\xi_k \in (k/n, (k+1)/n)$. Wegen $M_n = O(n)$ ist daher dieser Term von der Ordnung $O(n^{-2})$, und insgesamt ergibt sich nach Multiplikation mit n und Summation als Ordnung $O(1)$. □

Lemma 2.7. *Sei $0 \le a < b \le 1$, ψ zweimal stetig differenzierbar und Träger in (α, β) mit $a < \alpha < \beta < b$, und*

$$\varphi(x) := \frac{1}{2}\cdot x(1-x)\psi(x).$$

Die Menge aller dieser Funktionen φ sei Φ. Seien a_i, b_i, $i = 1, 2$, gegeben mit $a < a_1 < a_2 < \alpha$ und $\beta < b_2 < b_1 < b$ und L_n definiert durch

$$\begin{aligned} L_n(f) :=& 2\sum_{k:\ a<k/n<b} \frac{(B_nf)(k/n)-f(k/n)}{\frac{k}{n}\left(1-\frac{k}{n}\right)}\cdot\varphi(k/n) \\ =& \sum_{a_1<k/n<b_1}\Big((B_nf)(k/n)-f(k/n)\Big)\psi(k/n). \end{aligned} \tag{2.11}$$

Dann ist L_n ein stetiges Funktional auf $C[a,b]$, und die Normen der L_n sind gleichmäßig in n beschränkt.

Beweis. Wir setzen in L_n für B_n ein und erhalten mit Taylorenwicklung ersten Grades von $\psi(k/n)$ um $\psi(l/n)$

$$\begin{aligned} L_n(f) &= \sum_{l=0}^n f(l/n)\left(\sum_{a_1<k/n<b_1}\psi(k/n)p_{nl}(k/n)-\psi(l/n)\right) \\ &= \sum_{l=0}^n f(l/n)\Bigg(\psi(l/n)\left(\sum_{a_1<k/n<b_1}p_{nl}(k/n)-1\right) \\ &\quad + \psi'(l/n)\sum_{a_1<k/n<b_1}\frac{k-l}{n}p_{nl}(k/n)+\frac{1}{2}\sum_{a_1<k/n<b_1}\left(\frac{k-l}{n}\right)^2 p_{nl}(k/n)\psi''(\xi_{kl}),\Bigg) \end{aligned}$$

wobei $k/n < \xi_{kl} < l/n$ gilt. Da $p_{nl} \geq 0$ gilt und ψ'' stetig ist, folgt die Aussage, wenn die drei Summen

$$S'_n = \sum_{l=0}^{n} \left| \sum_{a_1<k/n<b_1} p_{nl}(k/n) - 1 \right| \cdot |\psi(l/n)|, \tag{2.12}$$

$$S''_n = \sum_{l=0}^{n} \left| \sum_{a_1<k/n<b_1} \frac{k-l}{n} p_{nl}(k/n) \right| \cdot |\psi'(l/n)|, \tag{2.13}$$

$$S'''_n = \sum_{k,l=0}^{n} \left(\frac{k-l}{n} \right)^2 p_{nl}(k/n), \tag{2.14}$$

beschränkt sind. Dies folgt für S'''_n aus

$$S'''_n = \frac{1}{n^2} \cdot \sum_{k=0}^{n} \sum_{l=0}^{n} \left(n\frac{k}{n} - l \right)^2 p_{nl}(k/n) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n} \cdot \frac{k}{n} \left(1 - \frac{k}{n} \right) = \frac{n(n+1)}{2n^2} - \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3},$$

und weil der letzte Ausdruck für $n \to \infty$ konvergiert, bleibt er beschränkt.

Um S'_n abzuschätzen, sei $\psi_{nl} := \pm\psi(l/n)$ beziehungsweise 0 für $l/n \leq \alpha$ oder $l/n \geq \beta$ so, dass alle Terme nichtnegativ werden. Klarerweise sind die ψ_{nl} beschränkt. Es gilt dann

$$S'_n = \sum_{l=0}^{n} \psi_{nl} \left(\sum_{a_1<k/n<b_1} p_{nl}(k/n) - 1 \right).$$

Wir setzen

$$Q_n(x) := \sum_{l=0}^{n} \psi_{nl} p_{nl}(x) = \sum_{\alpha<l/n<\beta} \psi_{nl} p_{nl}(x). \tag{2.15}$$

Durch Auswerten der Beta-Funktion erhalten wir $\int_0^1 p_{nl}(x)dx = (n+1)^{-1}$, und daraus folgt

$$S'_n = \sum_{a_1<k/n<b_1} Q_n(k/n) - (n+1) \int_0^1 Q_n(x)dx. \tag{2.16}$$

Nach Lemma 2.5 gibt es eine Konstante C so, dass auf $(0, a_2)$ und $(b_2, 1)$

$$|Q_n(x)| \leq \max_{k=0,\ldots,n} |\psi_{nk}| \sum_{\alpha<k/n<\beta} p_{nk}(x) \leq Cn^{-1} \max_{k=0,\ldots,n} |\psi_{nk}|$$

gilt, und nach Lemma 2.4 ist das Maximum von $Q''(x)$ auf $[a_1, b_1]$ von der Ordnung $O(n)$. Nach Lemma 2.6 ist daher S'_n beschränkt.

Um S''_n abzuschätzen, setzen wir $\overline{Q}_n := \sum_{l=0}^{n} \psi'_{nl} p_{nl}$, $\overline{\overline{Q}}_n = \sum_{l=0}^{n} \frac{l}{n} \psi'_{nl} p_{nl}$ mit $\psi'_{nl} = \pm\psi'(l/n)$ so, dass alle Terme nichtnegativ sind. Dann gilt

$$S''_n = \sum_{a_1<k/n<b_1} \left(\frac{k}{n} \overline{Q}_n(k/n) - \overline{\overline{Q}}_n(k/n) \right). \tag{2.17}$$

Es gilt

$$\int_0^1 x p_{nl}(x)dx = \frac{l+1}{n+1} \int_0^1 p_{n+1,l+1}(x)dx = \frac{l+1}{(n+1)(n+2)},$$

und daher gibt es eine Konstante D so, dass

$$\left|\int_0^1 x\overline{Q}_n(x)dx - \int_0^1 \overline{\overline{Q}}_n(x)dx\right| = \left|\sum_{l=0}^n \psi'_{ln}\frac{n-2l}{n(n+1)(n+2)}\right| \leq D\sum_{l=0}^n \frac{1}{n^2} = O(1/n)$$

gilt. Die Funktionen $x\overline{Q}_n$ und $\overline{\overline{Q}}_n$ erfüllen ebenfalls die Voraussetzungen von Lemma 2.6, denn es gilt $\left|(x\overline{Q}_n)''(x)\right| \leq 2\left|\overline{Q}'_n(x)\right| + \left|\overline{Q}''_n(x)\right|$, und diese Terme sind $O(n)$ nach Lemma 2.4. Daher gilt

$$\begin{aligned} S''_n \leq & \left|\left(\sum_{a_1<k/n<b_1} \frac{k}{n}\overline{Q}(k/n) - n\int_0^1 x\overline{Q}_n(x)dx\right) - \left(\sum_{a_1<k/n<b_1} \overline{\overline{Q}}_n(k/n) - n\int_0^1 \overline{\overline{Q}}_n(x)dx\right)\right| \\ & + n\left|\int_0^1 x\overline{Q}_n(x)dx - \int_0^1 \overline{\overline{Q}}_n(x)dx\right| = O(1). \end{aligned}$$

Somit sind S'_n, S''_n, S'''_n, also auch die Normen von L_n unabhängig von n beschränkt. □

Lemma 2.8 (Satz von Voronovskaya)**.** *Ist f beschränkt in $[0,1]$ und zweimal differenzierbar an x, dann gilt*

$$\lim_{n\to\infty} n\left((B_nf)(x) - f(x)\right) = \frac{x(1-x)}{2}\cdot f''(x). \tag{2.18}$$

Dies gilt gleichmäßig auf dem Intervall $[a_1, b_1]$, wenn $0 \leq a < a_1 < b_1 < b \leq 1$ erfüllt und f auf $[a, b]$ zweimal stetig differenzierbar ist.

Beweis. Durch Taylorentwicklung ergibt sich

$$f(k/n) = f(x) + \left(\frac{k}{n} - x\right)f'(x) + \left(\frac{k}{n} - x\right)^2\left(\frac{1}{2}f''(x) + \eta\left(\frac{k}{n} - x\right)\right),$$

wobei $\eta(h)$ beschränkt ist, es also H gibt mit $|\eta(h)| \leq H$ für alle h, und $\lim_{h\to 0}\eta(h) = 0$. Multiplizieren wir mit p_{nk} und summieren wir auf, so folgt

$$(B_nf)(x) = \sum_{k=0}^n f(k/n)p_{nk}(x) = f(x) + \frac{1}{2}f''(x)n^{-2}T_{n2}(x) + \sum_{k=0}^n\left(\frac{k}{n} - x\right)^2\eta\left(\frac{k}{n} - x\right)p_{nk}(x).$$

Sei $\varepsilon > 0$ beliebig und $\delta > 0$ so, dass $|\eta(h)| < \varepsilon$ für $|h| < \delta$ folgt. Dann gibt es nach Lemma 2.5 eine Konstante C mit

$$\begin{aligned} \left|\sum_{k=0}^n\left(\frac{k}{n} - x\right)^2\eta\left(\frac{k}{n} - x\right)p_{nk}(x)\right| &\leq \varepsilon\sum_{|k/n-x|\leq\delta}\left(\frac{k}{n} - x\right)^2 p_{nk}(x) + H\sum_{|k/n-x|>\delta} p_{nk}(x) \\ &\leq \varepsilon n^{-2}T_{n2}(x) + CHn^{-2}. \end{aligned}$$

Da $T_{n2} = nx(1-x)$ gilt, ist dieser Ausdruck kleiner als $2\varepsilon/n$ für n groß genug, und somit existiert eine Nullfolge ε_n mit

$$(B_nf)(x) = f(x) + \frac{x(1-x)}{2n}f''(x) + \frac{\varepsilon_n}{n}, \tag{2.19}$$

und multiplizieren wir mit n und betrachten wir $n \to \infty$, so folgt die Behauptung. □

Sei für $M > 0$ und ein Intervall $I \subseteq [0,1]$

(2.20) $\quad K_M^I := \{f \in C[0,1] \colon$ f' existiert und ist Lipschitz-stetig mit Konstante M auf $I\}$

und

$$K_0^I := \{f \in C[0,1] \colon f \text{ linear auf } I\}. \tag{2.21}$$

Die nun folgende, lokale Aussage beschreibt bereits die Saturation der Bernsteinpolynome.

Satz 2.9 (Lorentz). *(1) Gilt für $f \in C[0,1]$*

$$|(B_n f)(x) - f(x)| \le \frac{Mx(1-x)}{2n}, \quad x \in [a,b], \quad n \in \mathbb{N}, \tag{2.22}$$

für gewisse $0 \le a < b \le 1$, dann folgt $f \in K_M^{[a,b]}$.

(2) Gilt $f \in K_M^{(a',b')}$ mit $[a,b] \subseteq (a',b')$, dann gilt für alle $A \in \mathbb{N}$

$$|(B_n f)(x) - f(x)| \le \frac{Mx(1-x)}{2n} + O(n^{-A}), \quad a \le x \le b. \tag{2.23}$$

(3) Gilt zusätzlich zu (2.22)

$$|(B_n f)(x) - f(x)| = o(n^{-1}) \quad \text{für fast alle } x \in [c,d], \tag{2.24}$$

wobei $[c,d]$ ein Teilintervall von $[a,b]$ ist, dann gilt $f \in K_0^{[c,d]}$.

Beweis. (1) Wir wollen

$$\lim_{n\to\infty} L_n(f) = \int_a^b f(x)\varphi''(x)dx \quad \text{für } f \in C[a,b] \text{ und } \varphi \in \Phi. \tag{2.25}$$

beweisen. Sei vorerst $f \in C^2[a,b]$. Nach der Definition von L_n in (2.11), Lemma 2.8 und partieller Integration folgt

$$L_n(f) = o(1) + \frac{1}{n} \sum_{a<k/n<b} f''(k/n)\varphi(k/n) \to \int_a^b f''(x)\varphi(x)dx = \int_a^b f(x)\varphi''(x)dx,$$

daher folgt (2.25) auf $C^2[a,b]$. Da dieser Raum dicht ist in $C[a,b]$ und die Normen der L_n nach Lemma 2.7 gleichmäßig beschränkt sind, gilt (2.25) auf ganz $C[a,b]$.

Andererseits können wir L_n als Riemann-Stieltjes-Integral

$$L_n(f) = \int_a^b \varphi(x)d\lambda_n(x)$$

darstellen mit

$$\lambda_n(x) = 2 \sum_{a<k/n\le x} \frac{(B_n f)(k/n) - f(k/n)}{\frac{k}{n}\left(1 - \frac{k}{n}\right)},$$

einer monotonen Stufenfunktion. Da f (2.22) für $a \le x \le b$ erfüllt, haben die λ_n Totalvariation nicht größer als M, und ein Inkrement $|\lambda_n(y) - \lambda_n(x)|$ übersteigt nicht die Anzahl der Punkte k/n in $[x, y]$ multipliziert mit Mn^{-1}. Nach dem Satz von Helly-Bray gibt es eine Teilfolge $\lambda_{n_p}(x)$, die auf $[a, b]$ gegen eine monotone Funktion $\lambda(x)$ mit beschränkter Variation konvergiert, also gilt

$$L_{n_p}(f) \to \int_a^b \varphi d\lambda. \tag{2.26}$$

Seien x und $y \in [0, 1] \setminus \mathbb{Q}$, und p so groß, dass λ an x und y durch λ_{n_p} bereits nicht schlechter als ε approximiert wird. Die Anzahl der Punkte k/n_p im Intervall $[x, y]$ ist nicht größer als $(n_p + 1) \cdot |x - y|$. Dann gilt für λ

$$\begin{aligned} |\lambda(x) - \lambda(y)| &\leq \left|\lambda(x) - \lambda_{n_p}(x)\right| + \left|\lambda_{n_p}(x) - \lambda_{n_p}(y)\right| + \left|\lambda_{n_p}(y) + \lambda(y)\right| \\ &\leq 2\varepsilon + \left|\lambda_{n_p}(x) - \lambda_{n_p}(y)\right| \\ &\leq 2\varepsilon + M \cdot \frac{n_p + 1}{n_p} \cdot |x - y|, \end{aligned}$$

und durch $\varepsilon \to 0$ und $p \to \infty$ ergibt sich die Lipschitzstetigkeit von λ mit Lipschitzkonstante M auf $[0, 1] \setminus \mathbb{Q}$. Speziell ist λ daher dort auch gleichmäßig stetig, es gibt also genau eine gleichmäßig stetige Fortsetzung $\tilde{\lambda}$ auf $[0, 1]$, und aufgrund der Monotonie von λ folgt $\lambda = \tilde{\lambda}$. Die Lipschitz-Stetigkeit überträgt sich daher auch auf λ.

Wir erhalten mit partieller Integration

$$\int_a^b f\varphi'' dx = \int_a^b \varphi d\lambda = \int_a^b \lambda d\varphi = \int_a^b \lambda\varphi' dx = \int_a^b \Lambda\varphi'' dx, \tag{2.27}$$

wobei Λ ein unbestimmtes Integral von λ bezeichne. Da dies für alle $\varphi \in \Phi$ erfüllt ist, gilt $f = \Lambda$, f ist Integral einer lipschitzstetigen Funktion mit Lipschitzkonstante M.

(2) Sei $0 < a' < a$ und $b < b' < 1$, oder $a' = 0$ für $a = 0$ beziehungsweise $b' = 0$ für $b = 0$. Auf (a', b') gilt

$$\begin{aligned} |f(y) - f(x) - (y - x)f'(x)| &= \left|\int_x^y (f'(t) - f'(x))\, dt\right| \leq M \left|\int_x^y (t - x) dt\right| \\ &= \frac{1}{2} M(y - x)^2. \end{aligned} \tag{2.28}$$

Für $a \leq x \leq b$ gilt wegen $T_{n1}(x) = 0$

$$\begin{aligned} (B_n f)(x) - f(x) &= \sum_{k=0}^{n} (f(k/n) - f(x) - (k/n - x)f'(x))\, p_{nk}(x) \\ &= \sum_{a' < k/n < b'} (f(k/n) - f(x) - (k/n - x)f'(x))\, p_{nk}(x) \\ &\quad + \sum_{k/n \leq a', b' \leq k/n} (f(k/n) - f(x) - (k/n - x)f'(x))\, p_{nk}(x). \end{aligned}$$

Nach Lemma 2.5 ist die zweite Summe $O(n^{-A})$ und verschwindet für $(a, b) = (0, 1)$. Für die erste Summe erhalten wir nach (2.28)

$$\begin{aligned} &\left|\sum_{a' < k/n < b'} (f(k/n) - f(x) - (k/n - x)f'(x))\, p_{nk}(x)\right| \\ &\leq \sum_{a' < k/n < b'} |f(k/n) - f(x) - (k/n - x)f'(x)|\, p_{nk}(x) \\ &\leq \frac{1}{2} \cdot M \sum_{a' < k/n < b'} \left(\frac{k}{n} - x\right)^2 p_{nk}(x) = M\frac{x(1 - x)}{2n}, \end{aligned}$$

also folgt die Behauptung.

(3) Dies folgt aus der Kombination des ersten Punktes mit Lemma 2.8, weil lipschitzstetige Funktionen fast überall differenzierbar sind. $\square$

Sind alle Voraussetzungen des letzten Satzes jeweils auf ganz $[0,1]$ erfüllt, dann erhalten wir das folgende Resultat.

Folgerung 2.10 (Saturationstheorem der Bernsteinpolynome)**.** *(1) Gilt für $f \in C(0,1)$*

$$|(B_n f)(x) - f(x)| \leq \frac{Mx(1-x)}{2n}, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{2.29}$$

dann folgt $f \in K_M^{[0,1]}$.

(2) Gilt umgekehrt $f \in K_M^{[0,1]}$, so folgt (2.29).

(3) Gilt zusätzlich zu (2.29)

$$|(B_n f)(x) - f(x)| = o(n^{-1}) \quad \textit{für fast alle } x \in [0,1], \tag{2.30}$$

so folgt $f \in K_0^{[0,1]}$.

Kapitel 3

Approximation durch stark stetige Operatorhalbgruppen

Wir stellen die Lösungstheorie von Saturationsproblemen von stark stetigen Operatorhalbgruppen vor, die in [BB67] entwickelt wird. Hierzu nehmen wir eine Anpassung der Definition 1.1 vor.

Definition 3.1. Sei X ein Banachraum und $\{T(t)\colon 0 < t < \infty\}$ eine Familie von beschränkten linearen Operatoren von X nach X, die für $t \to 0+$ in der starken Operatortopologie gegen I konvergiert. Es gebe eine positive fallende Funktion φ auf $(0, \infty)$ mit $\lim_{s\to\infty} \varphi(s) = 0$ und eine Klasse von Funktionen mit:

(1) Aus $\|T(t)f - f\| = o\left(\varphi\left(\frac{1}{t}\right)\right)$ bei $t \to 0+$ folgt $T(t)f = f$ für kleine t,

(2) aus $\|T(t)f - f\| = O\left(\varphi\left(\frac{1}{t}\right)\right)$ beit $t \to 0+$ folgt $f \in K$,

und umgekehrt

(3) aus $f \in K$ folgt $\|T(t)f - f\| = O\left(\varphi\left(\frac{1}{t}\right)\right)$,

wobei es $f_0 \in K$ gebe, das unter $T(t)$ nicht invariant ist.

Dann sagen wir, dass der Approximationsprozess $\{T(t)\colon 0 < t < \infty\}$ *optimalen Approximationsgrad* $O\left(\varphi(1/t)\right)$ *für* $t \to 0+$ hat oder *saturiert in* X *mit Saturationsgrad* $O(\varphi(1/t))$ *für* $t \to 0+$ ist. K heißt *Saturations-* oder *Favardklasse.*

In diesem Kapitel werden die Saturationsprobleme von stark stetigen Halbgruppen auf reflexiven Räumen und für duale Halbgruppen gelöst. Ist der Raum nicht reflexiv und kein Dualraum, so ist dennoch eine Behandlung möglich; in diesem Fall ergibt sich die Favardklasse als relativer Abschluss des Definitionsbereichs des infinitesimalen Erzeugers bezüglich der Graphennorm.

3.1 Das Saturationsproblem auf reflexiven Räumen

Für stark stetige Halbgruppen auf reflexiven Räumen ist es besonders einfach, das Saturationsproblem zu lösen.

Satz 3.2. *Sei* $\{T(t)\colon 0 \le t < \infty\}$ *eine stark stetige Halbgruppe beschränkter Operatoren in* X *mit infinitesimalem Erzeuger* A.

(1) Seien f, $g \in X$ so, dass

$$\liminf_{\tau \to 0+} \left\| \frac{T(\tau)f - f}{\tau} - g \right\| = 0 \tag{3.1}$$

erfüllt ist.

Dann gilt $f \in \operatorname{dom} A$ und $Af = g$. Ist $g = 0$, so gilt $T(t)f = f$ für alle $t \geq 0$, f ist also invariant unter der Halbgruppe.

(2) Für alle $f \in \operatorname{dom} A$ gilt

$$\|T(t)f - f\| \leq \sup_{0 \leq u \leq t} \|T(u)\| \cdot \|Af\| \, t. \tag{3.2}$$

(3) Ist X reflexiv und $f \in X$ so, dass

$$\liminf_{\tau \to 0+} \left\| \frac{T(\tau)f - f}{\tau} \right\| < \infty \tag{3.3}$$

gilt, dann gilt $f \in \operatorname{dom} A$, es gibt also $g \in X$ mit

$$\operatorname*{s-lim}_{\tau \to 0+} \frac{T(\tau)f - f}{\tau} = g.$$

Beweis. (1) Sei $\tau > 0$ und $A_\tau := \frac{1}{\tau}(T(\tau) - I)$. Für festes $t > 0$ erhalten wir

$$\begin{aligned}
A_\tau \int_0^t T(u)f du &= \frac{1}{\tau} \int_0^t (T(\tau) - I)T(u)f du = \frac{1}{\tau} \int_\tau^{t+\tau} T(u)f du - \frac{1}{\tau} \int_0^t T(u)f du \\
&= \frac{1}{\tau} \int_0^{t+\tau} T(u)f du - \frac{1}{\tau} \int_0^\tau T(u)f du - \frac{1}{\tau} \int_0^t T(u)f du \\
&= \frac{1}{\tau} \int_t^{t+\tau} T(u)f du - \frac{1}{\tau} \int_0^\tau T(u)f du \\
&= \frac{1}{\tau} \int_0^\tau T(u)(T(t) - I)f du.
\end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\int_0^t T(u)A_\tau f du = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau T(u)(T(t)f - f)du, \tag{3.4}$$

und wegen der starken Stetigkeit der Halbgruppe

$$\operatorname*{s-lim}_{\tau \to 0+} \int_0^t T(u)A_\tau f du = T(t)f - f, \quad t > 0. \tag{3.5}$$

Weiters gilt

$$\left\| \int_0^t T(u) \left(A_\tau f - g \right) du \right\| \leq \sup_{0 \leq u \leq t} \|T(u)\| \cdot \|A_\tau f - g\| \, t.$$

Laut Voraussetzung geht der Limes Inferior der rechten Seite gegen 0 für $\tau \to 0+$, und damit ergibt sich

$$T(t)f - f = \int_0^t T(u)g du \quad \text{für alle } t \geq 0. \tag{3.6}$$

Daher gilt $f \in \operatorname{dom} A$ und $Af = g$. Weiters folgt mit der Integraldarstellung, dass f für $g = 0$ ein unter der Halbgruppe invariantes Element ist.

(2) Dies folgt aus

$$T(t)f - f = \int_0^t T(u)Af du \quad \text{für alle } t > 0 \text{ und } f \in \operatorname{dom} A.$$

(3) Hält die vorausgesetzte Gleichung, dann gibt es eine Folge $(\tau_n)_{n=1}^\infty$ mit $\tau_n \to 0+$ so, dass $A_{\tau_n} f$ beschränkt bleibt. In einem reflexiven Banachraum besitzt jede beschränkte Folge eine schwach konvergente Teilfolge, es gibt also eine Teilfolge (τ_n') so, dass $(A_{\tau_n'} f)$ schwach gegen ein $g \in X$ konvergiert. Daher gilt

$$\lim_{n\to\infty} \left\langle f^*, A_{\tau_n'} f \right\rangle = \langle f^*, g \rangle \quad \text{für alle } f^* \in X*.$$

Es folgt

$$\lim_{n\to\infty} \left\langle f^*, T(u) A_{\tau_n'} f \right\rangle = \langle f^*, T(u)g \rangle \quad \text{für alle } u \geq 0 \text{ und } f^* \in X^*.$$

Da

$$\left| \left\langle f^*, T(u) A_{\tau_n'} f \right\rangle \right| \leq \|f^*\| \cdot \|T(u)\| \cdot \left\| A_{\tau_n'} f \right\| \leq \|f^*\| \sup_{0 \leq u \leq t} \|T(u)\| \cdot \left\| A_{\tau_n'} f \right\|$$

auf jedem endlichen Intervall $0 \leq u \leq t$ gleichmäßig bezüglich n beschränkt ist, ist die Konvergenz von $f^*(T(u)A_{\tau_n'} f)$ gegen $f^*(T(u)g)$ dominiert in $[0, t]$. Nach dem Satz von der dominierten Konvergenz gilt daher für alle $f^* \in X^*$

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \left\langle f^*, \int_0^t T(u) A_{\tau_n'} f du \right\rangle &= \lim_{n\to\infty} \int_0^t \left\langle f^*, T(u) A_{\tau_n'} f \right\rangle du \\ &= \int_0^t \langle f^*, T(u)g \rangle \, du = \left\langle f^*, \int_0^t T(u) g du \right\rangle. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Da aus starker Konvergenz schwache Konvergenz folgt, gilt wegen (3.5)

$$\lim_{n\to\infty} \left\langle f^*, \int_0^t T(u) A_{\tau_n'} f du \right\rangle = \langle f^*, T(t)f - f \rangle \quad \text{für alle } f^* \in X^*, \tag{3.8}$$

insgesamt also für alle $t > 0$ und alle $f^* \in X^*$

$$\langle f^*, T(t)f - f \rangle = \left\langle f^*, \int_0^t T(u) g du \right\rangle.$$

Da der Dualraum eines Banachraums punktetrennend operiert, folgt daraus

$$T(t)f - f = \int_0^t T(u) g du,$$

also gilt $f \in \operatorname{dom} A$ und $Af = g$. □

Folgerung 3.3. *Sei X ein reflexiver Banachraum und $\{T(t) \colon 0 \leq t < \infty\}$ eine stark stetige Halbgruppe in X.*

Dann ist diese saturiert mit Saturationsgrad $O(t)$ für $t \to 0+$, und die Favardklasse ist der Definitionsbereich des infinitesimalen Erzeugers.

3.2 Duale Halbgruppen

Ist der Raum nicht reflexiv, so können duale Halbgruppen dennoch erfolgreich untersucht werden. Dazu führen wir erst deren Theorie ein.

Satz 3.4. *Sei $\{T(t)\colon 0 \le t < \infty\}$ eine stark stetige Halbgruppe von Operatoren auf dem Banachraum X.*

Dann ist $T^*(t)$ eine operatorwertige Funktion von $0 \le t < \infty$ in die stetigen Operatoren von X^* nach X^* mit $\|T^*(t)\| = \|T(t)\|$ für alle $t \ge 0$. Darüber hinaus gilt

$$T^*(s)T^*(t) = T^*(s+t) \quad \text{für alle } s,\, t > 0, \tag{3.9a}$$

$$T^*(0) = I^*, \tag{3.9b}$$

$$\underset{t\to 0+}{\text{w*-lim}}\, T^*(t)f^* = f^* \quad \text{für alle } f^* \in X^*. \tag{3.9c}$$

Der letzte Punkt ist die Schwach-*-Stetigkeit von $T^*(t)$ am Ursprung.

Beweis. Bekanntermaßen ist für jedes $t \ge 0$ der adjungierte Operator zu $T(t)$ ein beschränkter Operator von X^* nach X^* mit $\|T^*(t)\| = \|T(t)\|$. Die ersten zwei Aussagen über T^* folgen direkt aus den entsprechenden Eigenschaften von T. Die Schwach-*-Stetigkeit von $T^*(t)$ am Ursprung folgt aus

$$\langle T^*(t)f^* - f^*, f\rangle = \langle f^*, T(t)f - f\rangle\,,$$

denn die rechte Seite geht für $t \to 0+$ gegen 0 für alle $f \in X$ und alle $f^* \in X^*$ nach der starken Stetigkeit von T. □

Satz 3.5. *Seien die Voraussetzungen des letzten Satzes erfüllt.*
Dann gilt:

(1) Die Adjungierte A^* des infinitesimalen Erzeugers A von $\{T(t)\colon 0 \le t < \infty\}$ ist ein schwach--abgeschlossener linearer Operator, und der Definitionsbereich* $\operatorname{dom} A^*$ *ist schwach-*-dicht in X^*.*

(2) Wenn f^* in $\operatorname{dom} A^*$ *liegt, dann liegt auch $T^*(t)f^*$ für alle $t \ge 0$ in* $\operatorname{dom} A^*$, *und es gilt*

$$A^*T^*(t)f^* = T^*(t)A^*f^*.$$

Weiters gilt

$$\langle T^*(t)f^* - f^*, f\rangle = \int_0^t \langle T^*(u)A^*f^*, f\rangle\, du \quad \text{für alle } f \in X \text{ und alle } t > 0. \tag{3.10}$$

(3) Es gilt $f^* \in \operatorname{dom} A^*$ genau dann, wenn

$$A^*_\tau f^* := \frac{1}{\tau}(T^*(\tau) - I^*)f^*$$

in der Schwach--Topologie für $\tau \to 0+$ konvergiert. Der Limes ist dann gleich A^*f^*.*

Beweis. (1) A ist ein dicht definierter, abgeschlossener Operator, daher folgt dies aus den bekannten Eigenschaften adjungierter Operatoren.

(2) Für $f^* \in \operatorname{dom} A^*$ gilt für alle $t \geq 0$ nach den Eigenschaften von A

$$\langle T^*(t)A^*f^*, f\rangle = \langle A^*f^*, T(t)f\rangle = \langle f^*, AT(t)f\rangle = \langle f^*, T(t)Af\rangle = \langle T^*(t)f^*, Af\rangle\,,$$

also gilt $T^*(t)f^* \in \operatorname{dom} A^*$ und $A^*T^*(t)f^* = T^*(t)A^*f^*$. Weiters ist für jedes feste $f^* \in \operatorname{dom} A^*$ die Funktion $u \mapsto \langle T^*(u)A^*f^*, f\rangle = \langle A^*f^*, T(u)f\rangle$ auf $[0,\infty)$ stetig für alle $f \in X$. Daher gilt für $t > 0$, weil $u \mapsto T(u)f$ auf $[0,\infty)$ stark stetig, das Integral $\int_0^t T(u)f du$ in $\operatorname{dom} A$ und $A\left(\int_0^t T(u)f du\right) = T(t)f - f$ ist,

$$\begin{aligned}\int_0^t \langle T^*(u)A^*f^*, f\rangle\, du = \int_0^t \langle A^*f^*, T(u)f\rangle\, du &= \left\langle A^*f^*, \int_0^t T(u)f du\right\rangle \\ &= \left\langle f^*, A\left(\int_0^t T(u)f du\right)\right\rangle = \langle f^*, T(t)f - f\rangle \\ &= \langle T^*(t)f^* - f^*, f\rangle\,.\end{aligned}$$

(3) Konvergiere $A^*_\tau f^*$ gegen ein Element $g^* \in X^*$ in der Schwach-*-Topologie von X^* bei $\tau \to 0+$. Dann gilt für alle $f \in \operatorname{dom} A$

$$\langle g^*, f\rangle = \lim_{\tau\to 0+} \langle A^*_\tau f^*, f\rangle = \lim_{\tau\to 0+} \langle f^*, A_\tau f\rangle = \langle f^*, Af\rangle\,,$$

also gilt $f^* \in \operatorname{dom} A^*$ und $A^*f^* = g^*$.

Ist umgekehrt $f^* \in \operatorname{dom} A^*$, so gilt nach (3.10)

$$\begin{aligned}\langle A^*_\tau f^*, f\rangle &= \frac{1}{\tau}\langle T^*(\tau)f^* - f^*, f\rangle = \frac{1}{\tau}\int_0^\tau \langle T^*(u)A^*f^*, f\rangle\, du = \frac{1}{\tau}\int_0^\tau \langle A^*f^*, T(u)f\rangle\, du \\ &= \left\langle A^*f^*, \frac{1}{\tau}\int_0^\tau T(u)f du\right\rangle\end{aligned}$$

für alle $f \in X$. Da $\frac{1}{\tau}\int_0^\tau T(u)f du$ in der starken Topologie von X mit $\tau \to 0+$ gegen f konvergiert, existiert der Grenzwert von $\langle A^*_\tau f^*, f\rangle$ für $\tau \to 0+$ und ist gleich $\langle A^*f^*, f\rangle$ für alle $f \in X$. □

Folgerung 3.6. *Der adjungierte Operator A^* ist der schwach-*-infinitesimale Erzeuger der dualen Halbgruppe.*

Im Allgemeinen ist T^* nicht auf ganz X^* eine stark stetige Halbgruppe. Daher definieren wir

$$X_0^* := \{f^* \in X^* \colon \lim_{t\to 0+} \|T^*(t)f^* - f^*\| = 0\}, \tag{3.11}$$

die maximale Menge, auf der die starke Stetigkeit erfüllt ist. Der folgende Satz gibt Aussagen über die Struktur von X_0^* an.

Satz 3.7. *(1) X_0^* ist ein stark abgeschlossener, unter T^* invarianter Unterraum von X^*.*

(2) Es gilt $\operatorname{dom} A^* \subseteq X_0^*$, *und weiters*

$$\|T^*(t)f^* - f^*\| \leq \sup_{0\leq u\leq t} \|T(u)\| \cdot \|A^*f^*\|\, t \quad \textit{für alle } f^* \in \operatorname{dom} A^*. \tag{3.12}$$

Beweis. (1) Offensichtlich ist X_0^* ein Unterraum. Um zu zeigen, dass X_0^* stark abgeschlossen ist, sei $(f_n^*)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in X_0^*, die in der Norm gegen ein $f_0^* \in X^*$ für $n \to \infty$ konvergieren, das heißt, für alle $\varepsilon > 0$ gibt es ein $n = n(\varepsilon)$ so, dass $\|f_n^* - f_0^*\| < \varepsilon/2(M+1)$ gilt mit M so, dass $\|T^*(t)\| = \|T(t)\| \leq M$ auf $[0,1]$ gilt. Dann folgt

$$\begin{aligned}\|T^*(t)f_0^* - f_0^*\| &\leq \|T^*(t)f_0^* - T^*(t)f_n^*\| + \|T^*(t)f_n^* - f_n^*\| + \|f_n^* - f_0^*\| \\ &\leq (M+1)\,\|f_n^* - f_0^*\| + \|T^*(t)f_n^* - f_n^*\|\,.\end{aligned}$$

Da $\{T^*(t)\colon 0 \leq t < \infty\}$ auf X_0^* stark stetig ist, gibt es $\delta = \delta(\varepsilon, n) > 0$ mit $\delta \leq 1$ so, dass $\|T^*(t)f_n^* - f_n^*\| < \varepsilon/2$ für alle $0 \leq t < \delta$ gilt, und daher folgt $\|T^*(t)f_0^* - f_0^*\| < \varepsilon$ für $0 \leq t < \delta$. Also ist T^* stark stetig bei f_0^*, und X_0^* stark abgeschlossen.

Die Halbgruppeneigenschaft von T^* ergibt, dass $f^* \in X_0^*$ genau dann gilt, wenn $t \mapsto T^*(t)f^*$ stark stetig auf $[0,\infty)$ ist. Daher ist X_0^* invariant unter T^*, das heißt, es gilt $T^*(t)X_0^* \subseteq X_0^*$ für alle $t \geq 0$.

(2) Für $f^* \in \operatorname{dom} A^*$ folgt aus (3.10)

$$\begin{aligned}|\langle T^*(t)f^* - f^*, f\rangle| &\leq \int_0^t |\langle T^*(u)A^*f^*, f\rangle|\,du \\ &\leq \sup_{0\leq u\leq t} \|T(u)\| \cdot \|A^*f^*\| \cdot \|f\|\,t.\end{aligned}$$ □

Aus dem letzten Satz folgt insbesondere, dass X_0^* ein Banachraum ist und die Einschränkungen $T_0^*(t)\colon X_0^* \to X_0^*$ der dualen Halbgruppe wohldefiniert sind und eine stark stetige Operatorhalbgruppe auf X_0^* definieren. Wir schreiben diese als $\{T_0^*(t)\colon 0 \leq t < \infty\}$ und ihren infinitesimalen Erzeuger als A_0^*, mit Definitionsbereich $\operatorname{dom} A_0^*$.

Wir wollen nun $\{T_0^*(t)\colon 0 \leq t < \infty\}$ mit Hilfe von $\{T^*(t)\colon 0 \leq t < \infty\}$ untersuchen.

Satz 3.8. *(1) Es gilt* $\operatorname{dom} A_0^* \subseteq \operatorname{dom} A^* \subseteq X_0^*$. *Weiters ist X_0^* der starke Abschluss von* $\operatorname{dom} A^*$ *in X^*, während* $\operatorname{dom} A_0^*$ *schwach-*-dicht in X^* liegt.*

(2) A_0^* ist die größte Einschränkung von A^*, für die gilt, dass sowohl Definitions- als auch Bildbereich in X_0^* liegen. Weiters ist A^* gleich der Schwach--Abschließung von A_0^*, das heißt, der Graph von A^* ist gleich dem Schwach-*-Abschluss des Graphen von A_0^* in $X^* \times X^*$.*

Beweis. (1) Ist $f^* \in \operatorname{dom} A_0^*$, dann gilt laut Definition $A_\tau^* f^* \to A_0^* f^*$ im starken Sinn für $\tau \to 0+$. Da aus starker Konvergenz schwache und Schwach-*-Konvergenz folgt, erhalten wir nach Satz 3.5, Punkt (3), $f^* \in \operatorname{dom} A^*$.

$\operatorname{dom} A^* \subseteq X_0^*$ wurde in Satz 3.7, Punkt (2), bereits gezeigt. Als infinitesimaler Erzeuger einer Halbgruppe auf X_0^* ist A_0^* dicht definiert, also folgt, dass der starke Abschluss von $\operatorname{dom} A_0^*$ gerade X_0^* ist, und daher insbesondere, dass auch $\operatorname{dom} A^*$ in X_0^* stark dicht liegt.

Der Schwach-*-Abschluss von $\operatorname{dom} A_0^*$ ist jedenfalls nicht weniger als der starke Abschluss X_0^*, und umfasst daher insbesondere auch $\operatorname{dom} A^*$. Da dieser Raum nach Satz 3.5, Punkt (1), schwach-*-dicht in X^* ist, liegt also $\operatorname{dom} A_0^*$ ebenfalls schwach-*-dicht in X^*.

(2) Der erste Teil folgt, wenn wir zeigen können, dass $f^* \in \operatorname{dom} A^*$ in $\operatorname{dom} A_0^*$ liegt, wenn $A^*f^* \in X_0^*$ gilt. Aus $A^*f^* \in X_0^*$ folgt, dass die Abbildung $u \mapsto T_0^*(u)A^*f^*$ stark stetig von $[0,\infty)$ nach X_0^* ist, und aus (3.10) ergibt sich für alle $f \in X$ und festes $t > 0$

$$\langle T_0^* f^* - f^*, f\rangle = \int_0^t \langle T_0^*(u)A^*f^*, f\rangle\,du = \left\langle \int_0^t T_0^*(u)A^*f^* du, f \right\rangle.$$

Daraus folgt, weil der Dualraum eines normierten Raumes punktetrennend operiert,

$$T_0^*(t)f^* - f^* = \int_0^t T_0^*(u)A^*f^*du,$$

also $f^* \in \operatorname{dom} A_0^*$ und $A_0^*f^* = A^*f^*$.

Da A^* ein schwach-*-abgeschlossener Operator ist, reicht es zu zeigen, dass der Graph von A_0^* schwach-*-dicht im Graphen von A^* liegt; wir müssen daher nur zeigen, dass jedes schwach-*-stetige lineare Funktional auf $X^* \times X^*$, das auf dem Graphen von A_0^* verschwindet, auch auf dem Graphen von A^* verschwindet.

Der Schwach-*-Dualraum von $X^* \times X^*$ ist gegeben durch $X \times X$, also sei $(f, g) \in X \times X$ gegeben mit

$$\langle A_0^*f^*, f\rangle - \langle f^*, g\rangle = 0 \quad \text{für alle } f^* \in \operatorname{dom} A_0^*. \tag{3.13}$$

Wegen $T_0^*(t)f^* - f^* = \int_0^t T_0^*(u)A_0^*f^*du$ für alle $f^* \in \operatorname{dom} A_0^*$ und festes $t > 0$ folgt

$$\begin{aligned}
\langle f^*, T(t)f - f\rangle = \langle T_0^*(t)f^* - f^*, f\rangle &= \left\langle \int_0^1 T_0^*(u)A_0^*f^*du, f \right\rangle \\
&= \int_0^t \langle A_0^*T_0^*(u)f^*, f\rangle\, du = \int_0^t \langle T_0^*(u)f^*, g\rangle\, du = \int_0^t \langle f^*, T(u)g\rangle\, du \\
&= \left\langle f^*, \int_0^t T(u)gdu \right\rangle.
\end{aligned}$$

Da $\operatorname{dom} A_0^*$ schwach-*-dicht in X^* liegt, gilt die Gleichung

$$\langle f^*, T(t)f - f\rangle = \left\langle f^*, \int_0^t T(u)gdu \right\rangle$$

für alle $f^* \in X^*$ und festes $t > 0$, und daraus folgt $T(t)f - f = \int_0^t T(u)gdu$. Das bedeutet $f \in \operatorname{dom} A$ und $Af = g$, also verschwindet das durch (f, g) in (3.13) definierte Funktional für alle $f^* \in \operatorname{dom} A^*$. Damit gilt, dass A^* die Schwach-*-Abschließung von A_0^* ist. □

Für reflexive Räume vereinfacht sich die Situation drastisch.

Folgerung 3.9. *Ist X reflexiv, dann gilt $X_0^* = X^*$. Weiters stimmen dann die beiden Operatoren A_0^* und A^* überein.*

Beweis. Ist X reflexiv, dann stimmen auf X^* die schwache und die Schwach-*-Topologie überein. Daher ist der Schwach-*-Abschluss von $\operatorname{dom} A^*$ gleich ihrem schwachen Abschluss, und der ist, weil $\operatorname{dom} A^*$ ein Unterraum und damit konvex ist, ihr starker Abschluss, also gilt $X_0^* = X^*$. Aus dem letzten Satz folgt daher, dass $A_0^* = A^*$ gilt. □

3.3 Das Saturationsproblem für duale Halbgruppen

Satz 3.10. *Sei X_0^* der maximale abgeschlossene Unterraum von X^*, für den die Einschränkung $\{T_0^*(t)\colon 0 \leq t < \infty\}$ der dualen Halbgruppe $\{T^*(t)\colon 0 \leq t < \infty\}$ stark stetig ist, und A_0^* deren infinitesimaler Erzeuger.*

(1) Seien f^*, $g^* \in X^*$ so, dass

$$\liminf_{\tau\to 0+} \left\| \frac{T^*(\tau)f^* - f^*}{\tau} - g^* \right\| = 0 \tag{3.14}$$

erfüllt ist.

Dann gilt $f^* \in \operatorname{dom} A_0^*$ und $A_0^* f^* = g^*$. Ist $g^* = 0$, so gilt $T^*(t)f^* = f^*$ für alle $t \geq 0$.

(2) Für alle $f^* \in \operatorname{dom} A^*$ gilt

$$\|T^*(t)f^* - f^*\| \leq \sup_{0\leq u\leq t} \|T(u)\| \cdot \|A^* f^*\|\, t. \tag{3.15}$$

(3) Ist $f^* \in X_0^*$ mit

$$\liminf_{\tau\to 0+} \left\| \frac{T^*(\tau)f^* - f^*}{\tau} \right\| < \infty, \tag{3.16}$$

dann gilt $f^* \in \operatorname{dom}(A^*)$.

Beweis. (1) Dies folgt aus Satz 3.2, denn $\{T_0^*(t)\colon 0 \leq t < \infty\}$ ist eine stark stetige Halbgruppe mit infinitesimalem Erzeuger A_0^*, und aus $f^* \in \operatorname{dom} A_0^* \subseteq X_0^*$ folgt $T^*(t)f^* = T_0^*(t)f^*$ für alle $t \geq 0$.

(2) Dies ist Gleichung (3.12).

(3) Laut Voraussetzung gibt es eine Konstante $C > 0$ und eine Folge $(\tau_j)_{j\in\mathbb{N}}$, $\tau_j \to 0+$ für $j \to \infty$ so, dass

$$\left\| \frac{T^*(\tau_j)f^* - f^*}{\tau_j} \right\| \leq C \quad \text{für alle } j \in \mathbb{N}$$

gilt. Sei S_n für $n \in \mathbb{N}$ der Schwach-*-Abschluss der Menge

$$\left\{ \frac{T^*(\tau_j)f^* - f^*}{\tau_j} : j \geq n \right\}$$

in X^*. Nach dem Satz von Banach-Alaoglu sind die S_n als beschränkte, schwach-*-abgeschlossene Mengen in X^* kompakt in der Schwach-*-Topologie, und weil daher die Folge

$$S_1 \supseteq S_2 \supseteq S_3 \supseteq \cdots$$

die endliche Durchschnittseigenschaft hat, gibt es ein $g^* \in X^*$ mit $g^* \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} S_n$. Für jedes $f \in \operatorname{dom} A$ folgt $\langle g^*, f\rangle \in \overline{\left\{ \left\langle \frac{T^*(\tau_j)f^*-f^*}{\tau_j}, f \right\rangle : j \geq n \right\}}$ für alle $n \in \mathbb{N}$, es gibt daher eine Teilfolge $(\tau_j')_{j\in\mathbb{N}}$, abhängig von f, so, dass

$$\langle f^*, Af\rangle = \lim_{j\to\infty} \left\langle f^*, \frac{T(\tau_j')f - f}{\tau_j'} \right\rangle = \lim_{j\to\infty} \left\langle \frac{T^*(\tau_j')f^* - f^*}{\tau_j'}, f \right\rangle = \langle g^*, f\rangle \tag{3.17}$$

erfüllt ist. Da dies aber für alle $f \in \operatorname{dom} A$ gilt, folgt $f^* \in \operatorname{dom}(A^*)$ und $A^* f^* = g^*$. □

Folgerung 3.11. *Unter den Voraussetzungen des letzten Satzes gilt:*

(1) Erfüllt $f^* \in X_0^*$

$$\|T^*(t)f^* - f^*\| = o(t) \quad \text{für } t \to 0+,$$

dann ist f^* invariant unter der dualen Halbgruppe.

(2) Für $f^* \in X_0^*$ sind die folgenden Aussagen äquivalent:

(a) $f^* \in \mathrm{dom}(A^*)$,

(b) $\text{w*-}\lim_{t \to 0+} \frac{T^*(t)f^* - f^*}{t} = g^*$ *für ein* $g^* \in X^*$,

(c) $\|T^*(t)f^* - f^*\| = O(t)$ *für* $t \to 0+$.

Kapitel 4

Bernstein-Schnabl-Operatoren

Wir stellen den in [Sch68], [Sch69a] und [Sch69b] von R. Schnabl beschriebenen Weg vor, die im zweiten Kapitel untersuchten Bernsteinoperatoren zu verallgemeinern.

Sei S ein Kompaktum, das mindestens zwei Punkte enthält. Wir definieren

$$K(S) := \{\mu \in C(S)^*\colon \mu \geq 0, \mu(1) = 1\},$$

dann ist $K(S)$ konvex und kompakt mit der Schwach-*-Topologie und entspricht dem Raum aller positiven, normierten, regulären Borelmaße auf S. Wir schreiben

$$\hat{f}(\mu) = \mu(f) := \int_S f(x) d\mu(x), \quad f \in C(S), \quad \mu \in K(S).$$

Für $x \in S$ definieren wir

$$\varepsilon_x\colon C(S) \to \mathbb{R}, \quad f \mapsto \varepsilon_x(f) := f(x),$$

das Diracmaß in x. Durch $x \mapsto \varepsilon_x$ ist eine stetige Einbettung $S \to K(S)$ gegeben, und weiters ist

$$\Phi_n\colon S^n \to K(S), \quad (x_1, \ldots, x_n) \mapsto \Phi_n(x_1, \ldots, x_n) := \frac{1}{n} \cdot (\varepsilon_{x_1} + \cdots + \varepsilon_{x_n})$$

eine stetige Abbildung.

Definition 4.1. Sei $G\colon K(S) \to \mathbb{R}$ eine reellwertige Funktion auf $K(S)$, für die die Einschränkung $G|_{\Phi_n(S^n)}$ stetig ist.

Dann heißt

$$(B_n G)(\mu) := \int \cdots \int_{S^n} (G \circ \Phi_n)(x_1, \ldots, x_n) d\mu(x_1) \cdots d\mu(x_n), \quad \mu \in K(S), \tag{4.1}$$

das *n-te Bernstein-Schnabl-Polynom von G.*

Wir schreiben auch $\mu^{(n)}$ für das n-fache Produktmaß von μ. $\mu^{(n)}$ erfüllt insbesondere $\mu^{(n)}(g) = \mu(g_1) \cdots \mu(g_n)$ für $g(x_1, \ldots, x_n) = g_1(x_1) \cdots g_n(x_n)$. Es gilt

$$\mu^{(n)}(G \circ \Phi_n) = (B_n G)(\mu).$$

Es ist folgende wahrscheinlichkeitstheoretische Deutung möglich: Sind $X_i\colon \Omega \to S$, $i = 1, \ldots, n$, unabhängig identisch verteilte Zufallsvariable, definiert auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{A}, W)$, mit $W^{X_i} = \mathbb{P}$, $i = 1, \ldots, n$, so gilt

$$(B_n G)(\mathbb{P}) = \mathbb{E} G\left(\frac{\varepsilon_{X_1} + \cdots + \varepsilon_{X_n}}{n}\right) = \mathbb{E}\left(G \circ \Phi_n(X_1, \ldots, X_n)\right).$$

Ist $S = \{0,1\}$ und identifizieren wir $[0,1]$ mit $K(S)$ unter der Abbildung

$$[0,1] \to K(\{0,1\}), \quad t \mapsto (1-t)\cdot\varepsilon_0 + t\cdot\varepsilon_1,$$

dann erhalten wir die klassischen Bernsteinoperatoren.

Satz 4.2. *Sei $C(K) := C(K(S))$.*

(1) Der n-te Bernstein-Schnabl-Operator

$$B_n\colon C(K) \to C(K), G \mapsto B_n(G),$$

ist ein positiver, linearer Operator mit $\|B_n\| = 1$.

(2) Für $g \in C(S)$ gilt

$$B_n(\hat{g}) = \hat{g}$$

und

$$B_n(\hat{g}^2) = \hat{g}^2 + \frac{\widehat{g^2} - \hat{g}^2}{n}.$$

(3) Für alle $G \in C(K)$ gilt

$$B_n(B_1 G) = B_1 G. \tag{4.2}$$

Beweis. Die ersten beiden Aussagen folgen direkt aus der Definition.

Die dritte Aussage ergibt sich aus

$$\begin{aligned}
(B_n(B_1G))(\mu) &= \int\cdots\int_{S^n} (B_1G)\left(\frac{\varepsilon_{x_1}+\cdots+\varepsilon_{x_n}}{n}\right) d\mu(x_1)\cdots d\mu(x_n) \\
&= \int\cdots\int_{S^n} \left(\int_S G(\varepsilon_x) d\left(\frac{\varepsilon_{x_1}+\cdots+\varepsilon_{x_n}}{n}\right)(x)\right) d\mu(x_1)\cdots d\mu(x_n) \\
&= \int\cdots\int_{S^n} \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \int_S G(\varepsilon_x) d\varepsilon_{x_i}(x)\right) d\mu(x_1)\cdots d\mu(x_n) \\
&= \int\cdots\int_{S^n} \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n G(\varepsilon_{x_i})\right) d\mu(x_1)\cdots d\mu(x_n) = \int_S G(\varepsilon_x) d\mu(x) \\
&= (B_1G)(\mu).
\end{aligned}$$

□

Daraus folgt auch $B_n 1 = 1$ für die konstante Einsfunktion.

Es sind wesentlich allgemeinere Kommutationseigenschaften der Bernstein-Schnabl-Operatoren bekannt, die auf einer weiteren Verallgemeinerung beruhen, bei der nicht mehr alle Punkte wie bei Φ_n konstant gewichtet werden, sondern stattdessen Wahrscheinlichkeitsverteilungen auf der Einpunktkompaktifizierung von $\mathbb{N}$ benützt werden.

Lemma 4.3. *Für $\mu \in K(S)$ und $f_1, \ldots, f_m \in C(S)$ gilt*

$$\int\cdots\int_{S^n} \sum_{i=1}^m \left(\sum_{l=1}^n f_i(s_l) - n\mu(f_i)\right)^2 d\mu(s_1)\cdots d\mu(s_n) \le n\mu\left(\sum_{i=1}^m f_i^2\right). \tag{4.3}$$

Beweis. Es gilt

$$\begin{aligned}
&\int \cdots \int_{S^n} \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{l=1}^{n} f_i(s_l) - n\mu(f_i) \right)^2 d\mu(s_1) \cdots d\mu(s_n) \\
&\quad = \int \cdots \int_{S^n} \sum_{i=1}^{m} \Bigg(\sum_{l=1}^{n} f_i(s_l)^2 + 2 \sum_{1 \le l < k \le n} f_i(s_l) f_i(s_k) \\
&\qquad\qquad - 2n\mu(f_i) \sum_{l=1}^{n} f_i(s_l) + n^2 \mu(f_i)^2 \Bigg) d\mu(s_1) \cdots d\mu(s_n) \\
&\quad = \sum_{i=1}^{m} \left(n\mu(f_i^2) + n(n-1)\mu(f_i)^2 - 2n^2\mu(f_i)^2 + n^2\mu(f_i)^2 \right) \\
&\quad = n \cdot \sum_{i=1}^{m} \left(\mu(f_i^2) - \mu(f_i)^2 \right) \\
&\quad \le n\mu \left(\sum_{i=1}^{m} f_i^2 \right).
\end{aligned}$$

□

Satz 4.4. *(1) Ist G eine beschränkte, reellwertige Funktion auf $K(S)$, deren Einschränkung auf $\Phi_n(S^n)$ stetig ist, dann gilt in jedem Stetigkeitspunkt μ von G*

$$\lim_{n\to\infty} (B_n G)(\mu) = G(\mu).$$

(2) Die Folge der Bernstein-Schnabl-Operatoren $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ approximiert die Identität auf $C(K)$ im Sinne der starken Operatortopologie.

(3) Es gilt

$$\|B_n(G) - G\| \le 2\Omega(G, n^{-1/2})$$

für alle $G \in C(K)$ und alle $n \in \mathbb{N}$, wobei

$$\Omega(G,\delta) := \inf \left\{ \omega(G; f_1, \dots, f_m) \colon f_1, \dots, f_m \in C(S), m \in \mathbb{N}, \left\| \sum_{i=1}^{m} f_i^2 \right\| = \delta^{-2} \right\}$$

mit

$$\omega(G; f_1, \dots, f_m) := \sup \left\{ |G(\mu) - G(\mu')| : \sum_{i=1}^{m} (\mu(f_i) - \mu'(f_i))^2 \le 1 \right\}$$

für $\delta > 0$ den Stetigkeitsmodul von G *bezeichnet.*

Beweis. (1) Sei μ_0 ein Stetigkeitspunkt von G, $|G(\mu)| \le M$ für alle $\mu \in K(S)$ und $\varepsilon > 0$. Dann existieren $f_1, \dots, f_m \in C(S)$ so, dass

$$|G(\mu) - G(\mu_0)| < \varepsilon \quad \text{für alle } \mu \in U(\mu_0; f_1, \dots, f_m)$$

gilt, wobei

$$U(\mu_0; f_1, \dots, f_m) := \left\{ \mu \in K(S) \colon \sum_{i=1}^{m} (\mu(f_i) - \mu_0(f_i))^2 \le 1 \right\}$$

eine abgeschlossene Umgebung von μ_0 in der Schwach-*-Topologie ist.

Sei $C_n := \Phi_n^{-1}(U(\mu_0; f_1, \ldots, f_m))$ und $D_n := S^n \setminus C_n$. Da Φ_n stetig und und die Menge $U(\mu_0; f_1, \ldots, f_m)$ abgeschlossen ist, ist C_n abgeschlossen und D_n offen in S^n. Seien $\mathbb{1}_{C_n}$ und $\mathbb{1}_{D_n}$ die Indikatorfunktionen der jeweiligen Mengen. Ist $(x_1, \ldots, x_n) \in C_n$, so gilt

$$|G(\mu_0) - (G \circ \Phi_n)(x_1, \ldots, x_n)| \leq \varepsilon,$$

und daher

$$\left|\mu_0^{(n)}\left(\mathbb{1}_{C_n} \cdot (G(\mu_0) - G \circ \Phi_n)\right)\right| \leq \varepsilon \mu_0^{(n)}(\mathbb{1}_{C_n}) \leq \varepsilon \mu_0^{(n)}(1) = \varepsilon.$$

Für $(x_1, \ldots, x_n) \in D_n$ ist

$$\sum_{i=1}^{m} \left(\frac{1}{n}\left(\varepsilon_{x_1} + \cdots + \varepsilon_{x_n}\right)(f_i) - \mu_0(f_i)\right)^2 > 1,$$

und damit äquivalent

$$\sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{l=1}^{n} f_i(x_l) - n\mu_0(f_i)\right)^2 > n^2.$$

Daraus folgt nach dem vorangegangenen Lemma

$$\begin{aligned}
&\left|\mu_0^{(n)}\left(\mathbb{1}_{D_n} \cdot (G(\mu_0) - G \circ \Phi_n)\right)\right| \\
&\quad \leq 2M \cdot \mu_0^{(n)}(\mathbb{1}_{D_n}) \\
&\quad \leq 2Mn^{-2} \cdot \int \cdots \int_{S^n} \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{l=1}^{n} f_i(s_l) - n\mu_0(f_i)\right)^2 d\mu(s_1) \cdots d\mu(s_n) \\
&\quad \leq 2Mn^{-2} n \cdot \mu_0\left(\sum_{i=1}^{m} f_i^2\right) \leq 2Mn^{-1} \cdot \left\|\sum_{i=1}^{m} f_i^2\right\| \\
&\quad < \varepsilon \quad \text{für } n > N(\varepsilon) = \frac{2M}{\varepsilon} \cdot \left\|\sum_{i=1}^{m} f_i^2\right\|.
\end{aligned}$$

Es gilt

$$G(\mu_0) - (B_n G)(\mu_0) = (B_n(G(\mu_0) - G))(\mu_0),$$

und daher

$$\begin{aligned}
|G(\mu_0) - (B_n G)(\mu_0)| &= \left|\mu_0^{(n)}\Big((G(\mu_0) - G \circ \Phi_n) \cdot (\mathbb{1}_{C_n} + \mathbb{1}_{D_n})\Big)\right| \\
&\leq \left|\mu_0^{(n)}(\mathbb{1}_{C_n} \cdot (G(\mu_0) - G \circ \Phi_n))\right| + \left|\mu_0^{(n)}(\mathbb{1}_{D_n} \cdot (G(\mu_0) - G \circ \Phi_n))\right| \\
&< 2\varepsilon \quad \text{für } n > N(\varepsilon) = \frac{2M}{\varepsilon} \cdot \left\|\sum_{i=1}^{m} f_i^2\right\|,
\end{aligned}$$

es folgt also $\lim_{n\to\infty}(B_n G)(\mu_0) = G(\mu_0)$.

(2) Da $K(S)$ kompakt ist, ist G gleichmäßig stetig, das heißt, es können im ersten Punkt des Beweises $f_1, \ldots, f_m \in C(S)$ unabhängig von μ_0 gewählt und $M := \|G\|$ gesetzt werden. Weiters ist auch $N(\varepsilon)$ nicht von μ_0 abhängig, und es gilt

$$|G(\mu_0) - (B_n G)(\mu_0)| < 2\varepsilon \quad \text{für } n > \frac{2\,\|G\|}{\varepsilon} \cdot \left\|\sum_{i=1}^{m} f_i^2\right\| \text{ und alle } \mu_0 \in K(S).$$

(3) Wir definieren

$$\|\mu\|_F := \left(\sum_{i=1}^m \mu(f_i)^2\right)^{1/2} \qquad \text{für } \mu \in K(S) \text{ und } F := (f_1, \dots, f_m) \in C(S)^m.$$

Dann gilt für alle μ und $\mu' \in K(S)$

$$|G(\mu) - G(\mu')| \le \left(\|\mu - \mu'\|_F^2 + 1\right) \cdot \omega(G; f_1, \dots, f_m),$$

denn ist $n := \lfloor \|\mu - \mu'\|_F^2 + 1 \rfloor$, dann gilt $n \in \mathbb{N}$, und die Punkte $\mu_k = \frac{1}{n} \cdot ((n-k)\mu + k\mu')$, $k = 0, 1, \dots, n$, sind in $K(S)$. Es gilt $\|\mu_{k+1} - \mu_k\|_F^2 = \frac{1}{n^2} \cdot \|\mu - \mu'\|_F^2 \le 1$ für $k = 0, 1, \dots, n-1$, und

$$\begin{aligned} |G(\mu) - G(\mu')| &= \left|\sum_{k=0}^{n-1} (G(\mu_{k+1}) - G(\mu_k))\right| \le \sum_{k=0}^{n-1} |G(\mu_{k+1}) - G(\mu_k)| \le n \cdot \omega(G; f_1, \dots, f_m) \\ &\le (\|\mu - \mu'\|_F^2 + 1) \cdot \omega(G; f_1, \dots, f_m). \end{aligned}$$

Sei nun $\mu \in K(S)$. Dann gilt nach dem letzten Lemma

$$\begin{aligned} |G(\mu) - (B_n G)(\mu)| &= |(B_n(G(\mu) - G))(\mu)| = \left|\mu^{(n)}(G(\mu) - G \circ \Phi_n)\right| \\ &\le \omega(G; f_1, \dots, f_m) \times \\ &\qquad \times \int \cdots \int_{S^n} (\|\mu - \Phi_n(s_1, \dots, s_n)\|_F^2 + 1) d\mu(s_1) \cdots d\mu(s_n) \\ &= \omega(G; f_1, \dots, f_m) \times \\ &\qquad \times \left(1 + \int \cdots \int_{S^n} \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^m \left(\sum_{l=1}^n f_i(s_l) - n\mu(f_i)\right)^2 d\mu(s_1) \cdots d\mu(s_n)\right) \\ &\le \omega(G; f_1, \dots, f_m) \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\mu\left(\sum_{i=1}^m f_i^2\right)\right) \\ &\le \omega(G; f_1, \dots, f_m) \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\left\|\sum_{i=1}^m f_i^2\right\|\right). \end{aligned}$$

Mit der Definition von Ω folgt daher

$$\begin{aligned} \|G - (B_n G)\| &\le \inf\left\{\omega(G; f_1, \dots, f_m) \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\left\|\sum_{i=1}^m f_i^2\right\|\right) : \left\|\sum_{i=1}^m f_i^2\right\| = n\right\} \\ &= 2\Omega(G, n^{-1/2}). \end{aligned}$$

□

Mit entsprechend allgemeinen Sätzen von Korovkin ist es wesentlich einfacher, s-lim $B_n = I$ zu beweisen.

4.1 Darstellung durch eine stark stetige Operatorhalbgruppe

Satz 4.5. *Sei X ein Banachraum, $D\colon X \to X$ ein beschränkter, linearer Operator, $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge beschränkter linearer Operatoren von X in X mit $\lim_{n\to\infty} \|C_n\| = 0$, $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine*

Folge positiver Zahlen mit $\lim_{n\to\infty}\varphi_n = 0$, $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *eine Folge natürlicher Zahlen, und* α *eine nicht negative Zahl mit* $\lim_{n\to\infty}\varphi_n s_n = \alpha$.

Dann ist

$$\lim_{n\to\infty}(I + \varphi_n D + \varphi_n C_n)^{s_n} = e^{\alpha D} \tag{4.4}$$

und

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{s_n+1}\sum_{k=0}^{s_n}(I + \varphi_n D + \varphi_n C_n)^k = \int_0^1 e^{\alpha\beta D}d\beta, \tag{4.5}$$

wobei das Integral in der Normtopologie zu verstehen ist.

Beweis. Wir zeigen zuerst für beschränkte Operatoren C, $D\colon X\to X$ und $m\in\mathbb{N}_0$

$$\left\|(I+D+C)^m - e^{mD}\right\| \le \|C\|\, e^{m(\|D\|+\|C\|)} + e^{m\|D\|} - (1+\|D\|)^m. \tag{4.6}$$

Vollständige Induktion nach k zeigt

$$\left\|(D+C)^k - D^k\right\| \le k\,\|C\|\,(\|D\|+\|C\|)^{k-1}, \quad k\in\mathbb{N}.$$

Damit erhalten wir wegen $\frac{m^{k-1}}{k!} \ge \binom{m}{k}$

$$\begin{aligned}
\left\|(I+D+C)^m - e^{mD}\right\| &= \left\|\sum_{k=0}^{\infty}\left(\binom{m}{k}(D+C)^k - \frac{m^k D^k}{k!}\right)\right\| \\
&= \left\|\sum_{k=0}^{\infty}\left(\binom{m}{k}\left((D+C)^k - D^k\right) + \binom{m}{k}D^k - \frac{m^k D^k}{k!}\right)\right\| \\
&\le \sum_{k=0}^{\infty}\binom{m}{k}k\,\|C\|\,(\|D\|+\|C\|)^{k-1} + \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{m^k}{k!} - \binom{m}{k}\right)\|D\|^k \\
&\le \|C\|\, e^{m(\|D\|+\|C\|)} + e^{m\|D\|} - (1+\|D\|)^m,
\end{aligned}$$

also ist (4.6) gezeigt.

Um (4.4) zu beweisen, setzen wir in (4.6) für D, C und m jeweils $\varphi_n D$, $\varphi_n C_n$ und s_n ein und erhalten

$$\left\|(I+\varphi_n D+\varphi_n C_n)^{s_n} - e^{s_n\varphi_n D}\right\| \le \varphi_n\,\|C_n\|\, e^{s_n\varphi_n(\|D\|+\|C_n\|)} + e^{s_n\varphi_n\|D\|} - (1+\varphi_n\,\|D\|)^{s_n}.$$

Die rechte Seite strebt mit $n\to\infty$ gegen 0, und aus $\lim_{n\to\infty}\left\|e^{\alpha D} - e^{s_n\varphi_n D}\right\| = 0$ folgt (4.4).

Für (4.5) sei zunächst $\alpha > 0$. Dann folgt mit Hilfe von (4.6)

$$\left\|\frac{1}{s_n+1}\sum_{k=0}^{s_n}\left((I+\varphi_n D+\varphi_n C_n)^k - e^{k\varphi_n D}\right)\right\| \to 0 \quad \text{für } n\to\infty$$

und, weil $\beta\mapsto\exp(s_n\varphi_n\beta D)$ auf $[0,1]$ gleichmäßig in der Operatornorm gegen $\beta\mapsto\exp(\alpha\beta D)$ konvergiert,

$$\left\|\frac{1}{s_n+1}\sum_{k=0}^{s_n}e^{k\varphi_n D} - \int_0^1 e^{\alpha\beta D}d\beta\right\| \to 0 \quad \text{für } n\to\infty,$$

und damit (4.5) für $\alpha > 0$. Der Fall $\alpha = 0$ verläuft ähnlich. □

Lemma 4.6. *Sei P_k der von der Menge $\{\hat{f}_1 \cdots \hat{f}_k \colon f_1, \ldots, f_k \in C(S)\}$ aufgespannte Unterraum von $C(K)$.*

Dann liegt $P := \bigcup_{k\in\mathbb{N}} P_k$ dicht in $C(K)$.

Weiters gilt:

(1) Es existiert eine Folge von linearen Operatoren $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ von P in P so, dass

$$B_n|_P = I + \frac{1}{n}A_1 + \frac{1}{n^2}A_2 + \cdots$$

und

$$A_i|_{P_k} = 0 \quad \text{für } i \geq k$$

gilt.

(2) Es gilt für $f_i \in C(S)$, $i = 1, \ldots, k$

$$A_1(\hat{f}_1 \cdots \hat{f}_k) = \sum_{0\leq i<j\leq k} (\widehat{f_i f_j} - \hat{f}_i \hat{f}_j) \prod_{\substack{r=1\\ r\neq i, r\neq j}}^{k} \hat{f}_r.$$

(3) Für $f \in P_k$ existiert ein endlichdimensionaler Unterraum C_f von P_k, der f enthält und invariant gegenüber den Bernstein-Schnabl-Operatoren ist.

Beweis. P ist die von der Menge $\{\hat{f} | f \in C(S)\}$ erzeugte Algebra. Sie enthält die Konstanten und ist punktetrennend auf $K(S)$. Nach dem Satz von Stone-Weierstraß liegt sie daher dicht in $C(K)$, und daraus folgt die erste Behauptung.

Die ersten zwei Punkte ergeben sich aus der Gleichung

$$\begin{aligned}
&B_n(\hat{f}_1 \cdots \hat{f}_k)(\mu) \\
&= \frac{1}{n^k} \int \cdots \int_{S^n} \prod_{i=1}^{k} (f_i(x_1) + \cdots + f_i(x_n))\, d\mu(x_1) \cdots d\mu(x_n) \\
&= \hat{f}_1(\mu) \cdots \hat{f}_k(\mu) + \frac{1}{n} \sum_{0\leq i<j\leq k} \Big(\widehat{f_i f_j}(\mu) - \hat{f}_i(\mu)\hat{f}_j(\mu)\Big) \prod_{\substack{r=1\\ r\neq i, r\neq j}}^{k} \hat{f}_r(\mu) + \cdots \\
&\quad + \frac{1}{n^{k-1}} \widehat{f_1 \cdots f_k}(\mu).
\end{aligned} \tag{4.7}$$

Für den Beweis des dritten Punktes genügt es, Funktionen der Form $f = \hat{f}_1 \cdots \hat{f}_k$ zu betrachten, denn ist $f \in P_k$, dann ist f Linearkombination solcher Funktionen, und der gewünschte Teilraum ergibt sich als direkte Summe der Teilräume, die den einzelnen Summanden entsprechen. Sei also $f = \hat{f}_1 \cdots \hat{f}_k$, dann leistet nach (4.7) die lineare Hülle von

$$\Big\{\hat{f}_1 \cdots \hat{f}_k, \widehat{f_1 f_2}\hat{f}_3 \cdots \hat{f}_k, \hat{f}_1\widehat{f_2 f_3} \cdots \hat{f}_k, \ldots, \widehat{f_1 f_2 f_3}\hat{f}_4 \cdots \hat{f}_k, \ldots, \widehat{f_1 \cdots f_k}\Big\}$$

das Gewünschte. □

Satz 4.7. *Es existiert eine Familie $\{W(\alpha) \colon 0 \leq \alpha < \infty\}$, $W(\alpha) \colon C(K) \to C(K)$ für alle $\alpha \in [0, \infty)$, mit folgenden Eigenschaften:*

(1) $\{W(\alpha) \colon 0 \leq \alpha < \infty\}$ ist eine stark stetige Halbgruppe von positiven linearen Kontraktionen.

(2) Ist $0 \leq \alpha < \infty$, $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge natürlicher Zahlen mit $\lim_{n\to\infty} \frac{s_n}{n} = \alpha$, dann gilt

$$\operatorname*{s-lim}_{n\to\infty} B_n^{s_n} = W(\alpha)$$

und

$$\operatorname*{s-lim}_{n\to\infty} \frac{1}{s_n+1}(I + B_n + B_n^2 + \cdots + B_n^{s_n}) = \int_0^1 W(\alpha\beta)d\beta,$$

wobei das Integral in der starken Operatortopologie zu verstehen ist.

Die im zweiten Punkt angegebenen Eigenschaften haben starke Ähnlichkeit mit Approximationsprozessen, die zur numerischen Lösung von parabolischen und hyperbolischen partiellen Differentialgleichungen verwendet werden. Tatsächlich ist es möglich, wenn der infinitesimale Erzeuger von $\{W(\alpha)\colon 0 \leq \alpha < \infty\}$ bekannt ist, das entsprechende abstrakte Cauchyproblem mit Hilfe der Bernstein-Schnabl-Operatoren (zum Beispiel hinsichtlich asymptotischer Eigenschaften) zu untersuchen, siehe hierzu [AC94, S. 447ff] für einige Anwendungen.

Beweis. Sei $0 \leq \alpha < \infty$, $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge natürlicher Zahlen, und $f \in P$. Dann gibt es k so, dass $f \in P_k$ gilt, und nach dem dritten Punkt des letzten Lemmas existiert ein endlichdimensionaler Teilraum C_f mit $f \in C_f$ und $B_n(C_f) \subseteq C_f$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Mit $\varphi_n := \frac{1}{n}$, $D := A_1|_{C_f}$ und $C_n := \left(\frac{1}{n}A_2 + \cdots + \frac{1}{n^{k-1}}A_k\right)|_{C_f}$ sind, weil C_f endlichdimensional ist, die Voraussetzungen von Satz 4.5 erfüllt, und damit gilt

$$\lim_{n\to\infty} \left\| B_n^{s_n}(f) - e^{\alpha A_1}(f) \right\| = 0 \tag{4.8}$$

und

$$\lim_{n\to\infty} \left\| \frac{1}{s_n+1} \sum_{k=0}^{s_n} B_n^{s_n}(f) - \int_0^1 e^{\alpha\beta A_1}(f)d\beta \right\| = 0. \tag{4.9}$$

Da die Operatoren B_n^k positive lineare Kontraktionen sind, sind wegen (4.8) auch die Operatoren $\{e^{\alpha A_1}\colon P \to P\colon 0 \leq \alpha < \infty\}$ positive lineare Kontraktionen. Da P in $C(K)$ nach Lemma 4.6 dicht liegt, gibt es eindeutige Fortsetzungen $\{W(\alpha)\colon C(K) \to C(K)\colon 0 \leq \alpha < \infty\}$ auf $C(K)$ mit $W(\alpha)|_P = e^{\alpha A_1}$. Mit $e^{\alpha A_1}$ ist auch $W(\alpha)$ eine positive lineare Kontraktion, und die Halbgruppeneigenschaft der Familie $\{W(\alpha)\}$ folgt aus der der Familie $\{e^{\alpha A_1}\}$. Nun folgen die Aussagen über die Approximation von W durch B_n aus (4.8) und (4.9).

Es bleibt noch die starke Stetigkeit von $\{W(\alpha)\}$ bei 0 zu zeigen. Sei $g \in C(S)$, dann folgt aus Satz 4.2 und der Approximation von $W(\alpha)$ durch B_n

$$W(\alpha)(\hat{g}) = \hat{g} \quad \text{und} \quad W(\alpha)(\hat{g}^2) = e^{-\alpha}\hat{g}^2 + (1 - e^{-\alpha})\widehat{g^2} \quad \text{für alle } \alpha > 0. \tag{4.10}$$

Damit ergibt sich

$$\lim_{\alpha\to 0+} W(\alpha)(\hat{g}) = \hat{g} \quad \text{und} \quad \lim_{\alpha\to 0+} W(\alpha)(\hat{g}^2) = \hat{g}^2. \tag{4.11}$$

Ist nun $G \in C(K)$, dann gibt es, weil die Mengen der Form

$$\left\{\mu \in K(S)\colon \sum_{i=1}^k (\mu(g_i) - \nu(g_i))^2 \leq 1\right\}, \quad g_i \in C(S),\ k \text{ beliebig},$$

eine Umgebungsbasis von ν in $K(S)$ bilden, zu jedem $\varepsilon > 0$ Funktionen $g_1, \ldots, g_n \in C(S)$ so, dass

$$|G(\mu) - G(\nu)| \leq \varepsilon + 2\,\|G\| \sum_{i=1}^k (\mu(g_i) - \nu(g_i))^2 \tag{4.12}$$

erfüllt ist. Wenden wir $W(\alpha)$ auf diese Ungleichung an, so erhalten wir, weil $W(\alpha)$ positiv ist,

$$\|W(\alpha)(G) - G\| \leq \varepsilon + 2\|G\| \sum_{i=1}^{k} \left\|W(\alpha)(\hat{g}_i^2) - \hat{g}_i^2\right\|.$$

Für $\alpha \to 0+$ erhalten wir nach Gleichung (4.11)

$$\lim_{\alpha \to 0+} \|W(\alpha)(G) - G\| = 0,$$

und damit ist der Satz bewiesen. □

Ähnliche Methoden wie im letzten Satz führen zum folgenden Ergebnis (siehe [AC94, S. 68]).

Satz 4.8 (Schnabl). *Sei $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge linearer Kontraktionen auf einem Banachraum X, und sei $(\rho_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine fallende Folge positiver reeller Zahlen mit $\lim_{n\to\infty} \rho_n = 0$.*

Definiere den linearen Operator $A\colon \operatorname{dom} A \to X$ vermittels

$$\operatorname{dom} A := \left\{ x \in X \colon \exists \lim_{n\to\infty} \frac{L_n x - x}{\rho_n} \in X \right\}, \quad Ax := \lim_{n\to\infty} \frac{L_n x - x}{\rho_n}.$$

Es existiere eine Familie $(F_i)_{i\in I}$ von endlichdimensionalen Unterräumen von $\operatorname{dom} A$, die invariant unter allen L_n sind, das heißt, es gelte $L_n(F_i) \subseteq F_i$ für alle $i \in I$ und alle $n \in \mathbb{N}$, und sei weiters $\bigcup_{i\in I} F_i$ dicht in X.

Dann ist A abschließbar, und die Abschließung von A ist der infinitesimale Erzeuger einer stark stetigen Halbgruppe $\{T(t)\colon 0 \leq t < \infty\}$, die für alle $t \geq 0$ und alle Folgen $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von positiven ganzen Zahlen mit $\lim_{n\to\infty} k_n\rho_n = t$

$$T(t) = \operatorname*{s-lim}_{n\to\infty} L_n^{k_n}$$

erfüllt.

Insbesondere gilt, wenn wir $k_n := \lfloor t/\rho_n \rfloor$ setzen,

$$T(t) = \operatorname*{s-lim}_{n\to\infty} L_n^{\lfloor t/\rho_n \rfloor},$$

und diese Konvergenz ist gleichmäßig auf beschränkten Teilintervallen von $\mathbb{R}^+$.

4.2 Das Saturationsproblem

Satz 4.9. *(1) Ist $f \in P$, so gilt*

$$\lim_{n\to\infty} \|n(B_n f - f) - A_1 f\| = 0.$$

(2) Ist $G \in C(K)$ und $\liminf_{n\to\infty} \|n(B_n - I)(G)\| = 0$, dann ist $G = B_n G$ für alle $n \in \mathbb{N}$, das heißt, es gilt

$$G(\nu) = \int_S G(\varepsilon_x) d\nu(x) \quad \text{für alle } \nu \in K(S).$$

(3) Sind $G, H \in C(K)$ und $\liminf_{n\to\infty} \|n(B_n - I)(G) - H\| = 0$, dann ist $G \in \operatorname{dom} A$ und $AG = H$, wobei A der infinitesimale Erzeuger der Halbgruppe $\{W(\alpha)\colon 0 \leq \alpha < \infty\}$ ist.

(4) Ist $G \in C(K)$ und $\|n(B_n - I)(G)\| \leq M$ für alle $n \in \mathbb{N}$, dann gilt $\|(W(\alpha) - I)(G)\| \leq \alpha M$ für alle $\alpha \geq 0$.

(5) Die Folge der Bernstein-Schnabl-Operatoren $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist saturiert mit Saturationsgrad $O(n^{-1})$.

Beweis. (1) Dies folgt direkt aus dem zweiten Punkt von Lemma 4.6 und Gleichung (4.7).

(2) Dies folgt aus dem folgenden Punkt, denn erfüllt G die Voraussetzungen, dann folgt $G \in \operatorname{dom} A$ und $AG = 0$, also $W(\alpha)(G) = G$ für alle $\alpha \geq 0$. Nach dem Beweis von Satz 4.7 gilt aber

$$\lim_{\alpha\to\infty} W(\alpha)(G) = B_1 G \quad \text{gleichmäßig auf } K(S): \tag{4.13}$$

Ist $\varepsilon > 0$, so gibt es $g_1, \ldots, g_k \in C(S)$ so, dass

$$|G(\mu) - G(\nu)| \leq \varepsilon + 2\|G\| \sum_{i=1}^{k} (\hat{g}_i(\mu) - \hat{g}_i(\nu))^2$$

gilt. Wenden wir auf diese Gleichung zuerst B_1 und dann $W(\alpha)$ an, dann erhalten wir wegen $W(\alpha)B_1 = B_1$ und (4.10)

$$|G(\mu) - (B_1 G)(\mu)| \leq \varepsilon + 2\|G\| \sum_{i=1}^{k} (\hat{g}_i^2(\mu) - \widehat{g_i^2}(\mu))$$

und

$$\|W(\alpha)(G) - B_1 G\| \leq \varepsilon + 2\|G\| \sum_{i=1}^{k} e^{-\alpha} \left\|\hat{g}_i^2 - \widehat{g_i^2}\right\|.$$

Für $\alpha \to \infty$ folgt (4.13). Damit ergibt sich aus $W(\alpha)(G) = G$ für $\alpha \geq 0$

$$G(\mu) = (B_1 G)(\mu) = \int_S G(\varepsilon_x)\, d\mu(x),$$

und daher nach dem letzten Punkt von Satz 4.2 $G = B_n G$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(3) Wir setzen

$$C_n := \|n(B_n - I)(G) - H\|,$$

dann folgt

$$\begin{aligned}
&\left\|n(B_n^2 - B_n)(G) - B_n H)\right\| \leq C_n,\\
&\quad\vdots\\
&\left\|n(B_n^m - B_n^{m-1})(G) - B_n^{m-1}(H)\right\| \leq C_n,\\
&\left\|n(B_n^m - I)(G) - (I + B_n + B_n^2 + \cdots + B_n^{m-1})(H)\right\| \leq mC_n.
\end{aligned}$$

Sei nun $\alpha > 0$ und $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge natürlicher Zahlen mit $\frac{s_n}{n} \to \alpha$ für $n \to \infty$. Dividieren wir beide Seiten der letzten Gleichung durch m und setzen $m = s_n$, so erhalten wir

$$\liminf_{n\to\infty} \left\| \frac{n}{s_n}(B_n^{s_n} - I)(G) - \frac{I + B_n + \cdots + B_n^{s_n-1}}{s_n}(H) \right\| = 0.$$

Da nach Satz 4.7 gilt, dass $\frac{n}{s_n}(B_n^{s_n} - I)(G)$ gleichmäßig gegen $\frac{1}{\alpha}(W(\alpha) - I)(G)$ und $\frac{I+B_n+\dots+B_n^{s_n-1}}{s_n}(H)$ gleichmäßig gegen $\int_0^1 W(\alpha\beta)(H)d\beta$ strebt, folgt

$$\frac{1}{\alpha}(W(\alpha) - I)(G) = \int_0^1 W(\alpha\beta)(H)d\beta = \frac{1}{\alpha}\int_0^\alpha W(\beta)(H)d\beta \quad \text{für } \alpha > 0.$$

Für $\alpha \to 0+$ folgt daraus $G \in \operatorname{dom} A$ und $AG = H$, und damit ist der Beweis vollbracht.

(4) Dies folgt analog zum letzten Punkt.

(5) Dies folgt aus den ersten beiden Punkten. □

4.3 Ein Satz vom Voronovskaya-Typ

In Lemma 2.8 wurde ein Zusammenhang zwischen Geschwindigkeit der Konvergenz der Bernstein-Polynome und Eigenschaften der zweiten Ableitung einer Funktion auf $[0, 1]$ beschrieben. Nun soll ein entsprechendes Resultat für die Bernstein-Schnabl-Operatoren gezeigt werden. Hierzu führen wir einen verallgemeinerten Ableitungsbegriff ein.

Definition 4.10. Sei $G\colon K(S) \to \mathbb{R}$ beschränkt.

Genau dann heißt G *in* $\mu_1 \in K(S)$ *zweimal differenzierbar*, wenn es Funktionen $f \in C(S)$, $g \in C(S^2)$ mit $g(s,t) = g(t,s)$ für alle $(t,s) \in S^2$, $h \in C(S^2)$ und $d\colon K(S) \to \mathbb{R}$ beschränkt mit $\lim_{\mu\to\mu_1} d(\mu) = 0$ gibt, sodass

$$G(\mu) = G(\mu_1) + (\mu - \mu_1)(f) + (\mu - \mu_1)^{(2)}(g) + r(\mu) \quad \text{für alle } \mu \in K(S) \tag{4.14}$$

gilt, wobei $|r(\mu)| \le d(\mu)(\mu - \mu_1)^{(2)}(h)$ für alle $\mu \in K(S)$ erfüllt ist. Dann heißen

$$((D_1, \mu_1) \circ G)(\mu) := (\mu - \mu_1)(f) \quad \text{beziehungsweise}$$
$$((D_2, \mu_2) \circ G)(\mu) := 2(\mu - \mu_1)^{(2)}(g), \quad \mu \in K(S),$$

die *erste* beziehungsweise *zweite Ableitung von G in μ_1*.

Die Funktionen f und g in der obigen Definition sind nicht eindeutig, aber die Ableitungen, denn unter den obigen Voraussetzungen existieren die *Richtungsableitungen*

$$\frac{d}{dt}G(t\mu + (1-t)\mu_1)|_{t=0} = (\mu - \mu_1)(f),$$
$$\frac{d^2}{dt^2}G(t\mu + (1-t)\mu_1)|_{t=0} = 2(\mu - \mu_1)^{(2)}(g),$$

und diese bestimmen $(D_1, \mu_1) \circ G$ und $(D_2, \mu_1) \circ G$ eindeutig.

Lemma 4.11. *(1) Für $g \in C(S^2)$ sei $\hat{g}\colon K(S) \to \mathbb{R}$ definiert durch $\hat{g}(\mu) := \mu^{(2)}(g)$. Dann gilt*

$$(B_n\hat{g})(\mu) = \mu^{(2)}(g) + \frac{1}{n}\int_S (\varepsilon_x - \mu)^{(2)}(g)d\mu(x) \quad \textit{für alle } \mu \in K(S).$$

(2) Seien $\mu_1 \in K(S)$, $f \in C(S)$ und $g \in C(S^2)$. Weiters gelte $g(s,t) = g(t,s)$ für alle $(s,t) \in S^2$.

Dann gilt für $n \ge 4$

$$R(f,g) := \mu_1^{(n)}\left((\Phi_n - \mu_1)^{(2)}(g) \cdot ((\Phi_n - \mu_1)(f))^2\right) \le \frac{20}{n^2}\|g\| \cdot \|f\|^2.$$

Beweis. Dies folgt durch Nachrechnen aus der Definition der B_n. $\square$

Satz 4.12. *Sei $\mu_1 \in K(S)$ und $G\colon K(S) \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion, deren Einschränkung auf $\Phi_n(S^n)$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ stetig, und die in μ_1 zweimal differenzierbar ist.*

Dann gilt

$$\lim_{n\to\infty} n((B_nG)(\mu_1) - G(\mu_1)) = \frac{1}{2}\int_S ((D_2, \mu_1) \circ G)(\varepsilon_x) d\mu_1(x). \tag{4.15}$$

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$. Mit den Bezeichnungen aus der Definition der zweimaligen Differenzierbarkeit folgt aus $\lim_{n\to\infty} d(\mu) = 0$, dass es eine Umgebung $U(\mu_1; f_1, \ldots, f_m)$ von μ_1,

$$U(\mu_1; f_1, \ldots, f_m) := \left\{ \mu \in K(S)\colon \sum_{i=1}^{m} (\mu(f_i) - \mu_1(f_i))^2 \leq 1 \right\},$$

gibt, sodass $|d(\mu)| < \varepsilon$ für alle $\mu \in U(\mu_1; f_1, \ldots, f_m)$ gilt, wenn wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit $d(\mu_1) = 0$ fordern. Daraus ergibt sich

$$|d(\mu)| \leq \varepsilon + \|d\|_\infty \sum_{i=1}^{m} (\mu(f_i) - \mu_1(f_i))^2 \quad \text{für alle } \mu \in K(S),$$

und aus $|r(\mu)| \leq d(\mu)(\mu - \mu_1)^{(2)}(h)$ folgt

$$|r(\mu)| \leq \varepsilon(\mu - \mu_1)^{(2)}(h) + \|d\|_\infty (\mu - \mu_1)^{(2)}(h) \sum_{i=1}^{m} (\mu(f_i) - \mu_1(f_i))^2, \quad \text{für alle } \mu \in K.$$

Wenden wir auf die letzte Gleichung B_n bezüglich μ an und werten wir bei μ_1 aus, so erhalten wir aufgrund von Satz 4.2 (der Positivität von B_n) und dem letzten Lemma für $n \geq 4$

$$\begin{aligned} |(B_n r)(\mu_1)| &\leq (B_n |r|)(\mu_1) \leq \varepsilon \frac{1}{n} \int_S (\varepsilon_x - \mu_1)^{(2)}(h) d\mu_1(x) + \|d\|_\infty \sum_{i=1}^{m} R(f_i, h) \\ &\leq 4\frac{1}{n}\varepsilon \|h\|_\infty + \frac{1}{n^2} \|d\|_\infty \|h\|_\infty \sum_{i=1}^{m} \|f_i\|^2 . \end{aligned}$$

Wenden wir nun B_n auf (4.14) an, so ergibt sich nach der letzten Ungleichung und dem letzten Lemma für $n \geq 4$

$$(B_nG)(\mu_1) = G(\mu_1) + \frac{1}{n} \int_S (\varepsilon_x - \mu_1)^{(2)}(g) d\mu_1(x) + O\left(\frac{\varepsilon}{n} + \frac{1}{n^2}\right),$$

und daraus folgt die Behauptung. $\square$

Kapitel 5

Modifizierte Bernsteinoperatoren und Anwendungen

Wir beschreiben nun eine zweite Variante, die Saturationsklasse der Bernsteinoperatoren zu bestimmen. Diese wurde in [Sch70] angegeben.

5.1 Die modifizierten Bernsteinoperatoren und die ihnen zugeordnete Halbgruppe

Definition 5.1. Sei $\varphi\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ definiert durch $\varphi(x) := \frac{1}{2}x(1-x)$. Dann heißt

$$C_n\colon C[0,1] \to C[0,1], \quad f \mapsto C_n(f) := \frac{1}{\varphi} \cdot B_n(\varphi f), \tag{5.1}$$

der *n-te modifizierte Bernsteinoperator auf* $C[0,1]$.

Der folgende, klassische, Satz von Korovkin ist ein fundamentales Resultat der Approximationstheorie. Weitgehende Verallgemeinerungen sind möglich, siehe hierzu [AC94]. Die hier angegebene Formulierung und Beweis stammen aus [Wer05].

Satz 5.2 (Korovkin)**.** *Seien $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ positive lineare Operatoren von $C[0,1]$ in $C[0,1]$. Setze $x_i(t) := t^i$, $i = 0,1,2$. Gilt $\lim_{n\to\infty} T_n x_i = x_i$ für $i = 0,1,2$, so folgt bereits* $\text{s-}\lim_{n\to\infty} T_n = I$.

Beweis. Sei $x \in C[0,1]$ beliebig und $\varepsilon > 0$ gegeben, dann gibt es wegen der gleichmäßigen Stetigkeit von x ein $\delta > 0$ mit

$$|s-t| \leq \sqrt{\delta} \quad \Rightarrow \quad |x(s) - x(t)| \leq \varepsilon.$$

Für $\alpha := 2\|x\|\delta^{-1}$ ergibt sich

$$|x(s) - x(t)| \leq \varepsilon + \alpha(t-1)^2 \quad \text{für alle } s,t \in [0,1]^2,$$

denn für $|t-s| \leq \sqrt{\delta}$ gilt dies wegen der Wahl von δ, und für $|t-s| > \delta$ gilt

$$\varepsilon + \alpha(t-s)^2 > \varepsilon + 2\|x\| > |x(s)| + |x(t)| \geq |x(s) - x(t)|.$$

Setzen wir $y_t(s) := (t-s)^2$, dann gilt also

$$-\varepsilon - \alpha y_t \leq x - x(t) \leq \varepsilon + \alpha y_t,$$

und nach der Positivität der T_n folgt

$$-\varepsilon T_n x_0 - \alpha T_n y_t \leq T_n x - x(t) T_n x_0 \leq \varepsilon T_n x_0 + \alpha T_n y_t,$$

also

$$|T_n x - x(t) T_n x_0| \le \varepsilon T_n x_0 + \alpha T_n y_t \quad \text{für alle } t \in [0,1]$$

und insbesondere

$$|(T_n x)(t) - x(t)(T_n x_0)(t)| \le \varepsilon (T_n x_0)(t) + \alpha (T_n y_t)(t) \quad \text{für alle } t \in [0,1].$$

Wegen $y_t \in \operatorname{lin}\{x_0, x_1, x_2\}$ konvergiert die rechte Seite gleichmäßig gegen $\varepsilon x_0(t) + \alpha y_t(t) = \varepsilon$, denn es gilt

$$T_n y_t - y_t = (T_n x_2 - x_2) - 2t(T_n x_1 - x_1) + t^2 (T_n x_0 - x_0).$$

Wenden wir $\lim_{n\to\infty} T_n x_0 = x_0$ ein weiteres Mal an, so folgt $\|T_n x - x\| \le 2\varepsilon$ für hinreichend große n, und damit folgt $\lim_{n\to\infty} T_n x = x$. □

Der Satz von Korovkin liefert eine elegante Möglichkeit, $\text{s-}\lim_{n\to\infty} B_n = I$ zu beweisen, denn die Voraussetzungen des Satzes sind für die Bernsteinoperatoren offensichtlich erfüllt.

Es bezeichne im Weiteren $\mathcal{P}_k$ den Vektorraum der Polynome höchstens k-ten Grades.

Satz 5.3. *(1) Der n-te modifizierte Bernsteinoperator ist ein positiver linearer Operator mit $\|C_n\| = 1 - \frac{1}{n}$.*

(2) Es gilt $C_n(\mathcal{P}_k) \subseteq \mathcal{P}_k$ und $C_{k+2}(C[0,1]) \subseteq \mathcal{P}_k$.

(3) Es gilt $C_n(1) = 1 - \frac{1}{n}$. Für $y(t) := t$ gilt

$$(C_n y)(x) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right) x + \frac{1}{n}\left(1 - \frac{1}{n}\right) \qquad \textit{und}$$

$$(C_n(y^2))(x) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\left(1 - \frac{3}{n}\right) x^2 + \frac{3}{n}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right) x + \frac{1}{n^2}\left(1 - \frac{1}{n}\right).$$

(4) Es gilt $\text{s-}\lim_{n\to\infty} C_n = I$.

(5) Ist $f \in C[0,1]$ in $x_0 \in [0,1]$ zweimal differenzierbar, dann gilt

$$\lim_{n\to\infty} n\,(C_n f - f)\,(x_0) = (\varphi f)''(x_0). \tag{5.2}$$

Beweis. Die ersten drei Punkte folgen unmittelbar aus der Definition der modifizierten Bernsteinoperatoren und den entsprechenden Eigenschaften der gewöhnlichen Bernsteinoperatoren.

Der vierte Punkt folgt aus den ersten drei Punkten nach dem Satz von Korovkin.

Der fünfte Punkt ergibt sich aus Lemma 2.8: Danach gilt

$$\lim_{n\to\infty} n(B_n(\varphi f) - \varphi f)(x_0) = \varphi(x_0)(\varphi f)''(x_0).$$

Ist $x_0 \ne 0, 1$, so folgt die Behauptung, indem wir mit $\frac{1}{\varphi(x_0)}$ multiplizieren. Für $x_0 = 0$ erhalten wir

$$\lim_{n\to\infty} n(C_n f - f)(0) = \lim_{n\to\infty} n\,(f(1/n)(1 - 1/n) - f(0)) = f'(0) - f(0) = (\varphi f)''(0).$$

Der Fall $x_0 = 1$ verläuft analog. □

Satz 5.4. *Es existiert eine Familie $\{W(t)\colon 0 \le t \le \infty\}$ von linearen, posiven Operatoren von $C[0,1]$ in $C[0,1]$ mit folgenden Eigenschaften:*

(1) Es gilt $W(0) = I$, $W(\infty) = 0$, $\|W(t)\| = e^{-t}$, $W(t)(1) = e^{-t}$, *und für* $y(x) := x$ *gilt*

$$(W(t)y)(x) = e^{-3t}x + \frac{1}{2}\left(e^{-t} - e^{-3t}\right) \quad \textit{und}$$
$$(W(t)(y^2))(x) = e^{-6t}x^2 + (e^{-3t} - e^{-6t})x + \frac{1}{10}(3e^{-t} - 5e^{-3t} - 2e^{-6t}).$$

(2) $\{W(t)\colon 0 \le t < \infty\}$ *ist eine stark stetige Operatorhalbgruppe.*

(3) Ist $0 \le \alpha \le \infty$ *und* $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *eine Folge natürlicher Zahlen mit* $\lim_{n\to\infty} \frac{s_n}{n} = \alpha$, *dann gilt für* $f \in C[0,1]$

$$\lim_{n\to\infty} \|C_n^{s_n}(f) - W(\alpha)(f)\| = 0 \quad \textit{und} \tag{5.3}$$
$$\lim_{n\to\infty} \left\| \frac{1}{s_n+1}\left(I + C_n + C_n^2 + \cdots + C_n^{s_n}\right)(f) - \int_0^1 W(\alpha t)(f)dt \right\| = 0. \tag{5.4}$$

Beweis. Sei $\alpha \in [0,\infty)$. Definiere den Operator D durch

$$D\colon C^2[0,1] \to C[0,1], f \mapsto D(f) := (\varphi f)'',$$

und seien $C_{n,k} := C_n|_{\mathcal{P}_k}$ und $D_k := D|_{\mathcal{P}_k}$ die Einschränkungen von C_n und D auf $\mathcal{P}_k$. Dann gilt für den Operator $E_{n,k} := n(C_{n,k} - I) - D_k$, $\mathcal{P}_k \to \mathcal{P}_k$, nach dem letzten Satz $\lim_{n\to\infty} \|E_{n,k}(f)\| = 0$ für alle $f \in \mathcal{P}_k$. Da $\mathcal{P}_k$ endlichdimensional ist, folgt daraus sogar $\lim_{n\to\infty} \|E_{n,k}\| = 0$, und daher nach Satz 4.5 für jede Folge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\lim_{n\to\infty} \frac{s_n}{n} = \alpha$, wenn wir $\varphi_n := \frac{1}{n}$, $D := D_k$ und $C_n := E_{n,k}$ setzen,

$$\lim_{n\to\infty} \left\|C_{n,k}^{s_n} - e^{\alpha D_k}\right\| = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{n\to\infty} \left\| \frac{1}{s_n+1}\left(I + C_{n,k} + \cdots + C_{n,k}^{s_n}\right) - \int_0^1 e^{\alpha t D_k} dt \right\| = 0.$$

Da mit C_n auch $e^{\alpha D_k}$ und $\int_0^1 e^{\alpha t D_k} dt$ positive lineare Operatoren sind und da

$$\left\|e^{\alpha D}\right\| \le \lim_{n\to\infty} \left\|C_{n,k}^{s_n}\right\| \le \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{s_n} = e^{-\alpha}$$

gilt, existiert genau ein Operator $W(\alpha)\colon C[0,1] \to C[0,1]$ mit $W(\alpha)|_{\mathcal{P}_k} = e^{\alpha D_k}$. Aus Stetigkeitsgründen folgt dann die Halbgruppeneigenschaft der $\{W(\alpha)\colon 0 \le \alpha < \infty\}$ und die Darstellung als Grenzwert.

Es gilt $\|C_n^s\| \le \left(1 - \frac{1}{n}\right)^s$, und daraus folgt unmittelbar die Darstellung als Grenzwert für $\alpha = \infty$ und $W(\infty)$. Der erste Punkt ergibt sich durch Nachrechnen, und die starke Stetigkeit folgt aus diesem und dem Satz von Korovkin. □

Lemma 5.5. *Seien*

$$J\colon C[0,1] \to C[0,1], g \mapsto Jg, \quad (Jg)(x) := \int_0^x \int_0^u g(v)dvdu - x\int_0^1 \int_0^u g(v)dvdu \quad \textit{und}$$
$$F_n\colon C[0,1] \to C[0,1], g \mapsto F_n g := n(C_n - I)\left(\frac{1}{\varphi} \cdot Jg\right).$$

Dann gilt:

(1) F_n *ist ein positiver linearer Operator von* $C[0,1]$ *in* $C[0,1]$.

(2) Es gilt $F_n(1) = 1$, $\|F_n\| = 1$, *und für* $y(x) := x$

$$(F_n y)(x) = \left(1 - \frac{2}{3n}\right) x + \frac{1}{3n} \quad \textit{und}$$
$$(F_n(y^2))(x) = \left(1 - \frac{11}{6n} + \frac{1}{n^2}\right) x^2 + \left(\frac{7}{6n} - \frac{1}{n^2}\right) x + \frac{1}{6n^2}.$$

(3) Es gilt $\text{s-lim}_{n\to\infty} F_n = I$.

Beweis. Es gilt $(Jg)'' = g$. Ist $g \geq 0$, so ist also Jg konvex, und daher folgt

$$(Jg)(t) - (Jg)(x) - (t - x)(Jg)'(x) \geq 0.$$

Wenden wir auf diese Ungleichung B_n für festes x an, so ergibt sich $B_n Jg - Jg \geq 0$, und daraus $F_n g \geq 0$, also ist F_n positiv. Der zweite Punkt ergibt sich durch Nachrechnen, und der dritte folgt aus dem zweiten und dem Satz von Korovkin. □

Satz 5.6. *Sei* $A\colon \operatorname{dom} A \to C[0,1]$ *der infinitesimale Erzeuger von* $\{W(t)\colon 0 \leq t < \infty\}$. *Dann sind äquivalent:*

(1) $(\varphi f) \in C^2[0,1]$ *und* $(\varphi f)'' = g$.

(2) $\lim_{n\to\infty} \|n(C_n - I)(f) - g\| = 0$.

(3) $\liminf_{n\to\infty} \|n(C_n - I)(f) - g\| = 0$.

(4) $f \in \operatorname{dom} A$ *und* $Af = g$.

Beweis. **(1)⇒(2).** Wenden wir J auf $(\varphi f)'' = g$ an, so folgt $\frac{1}{\varphi} \cdot Jg = f$, und daher nach dem letzten Lemma die Aussage.

(2)⇒(3). Dies ist trivial.

(3)⇒(4). Sei $z_n := \|n(C_n - I)(f) - g\|$. Dann gilt laut Voraussetzung $\liminf_{n\to\infty} z_n = 0$, und aus $\|C_n\| \leq 1$ folgt

$$\begin{aligned}
&\big\|n(C_n^2 - C_n)(f) - C_n g\big\| \leq z_n, \\
&\big\|n(C_n^3 - C_n^2)(f) - C_n^2 g\big\| \leq z_n, \\
&\quad\vdots \\
&\big\|n(C_n^{m+1} - C_n^m)(f) - C_n^m(g)\big\| \leq z_n.
\end{aligned}$$

Mit der Dreiecksungleichung ergibt sich

$$\big\|n(C_n^{m+1} - I)(f) - (I + C_n + C_n^2 + \cdots + C_n^m)(g)\big\| \leq (m+1) z_n.$$

Sei $\alpha > 0$ fest gewählt. Wir definieren die Folge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ durch $s_n := \lfloor \alpha n \rfloor$. Dann gilt $\lim_{n\to\infty} \frac{s_n}{n} = \alpha$ und, wenn wir in der obigen Gleichung $m := s_n$ setzen,

$$\liminf_{n\to\infty} \left\| \frac{n}{s_n + 1}(C_n^{s_n+1} - I)(f) - \frac{1}{s_n + 1}(I + C_n + \cdots + C_n^{s_n})(g) \right\| \leq \liminf_{n\to\infty} z_n = 0.$$

Nach (5.3) und (5.4) folgt daraus

$$\left\| \frac{1}{\alpha}(W(\alpha) - I)(f) - \int_0^1 W(\alpha t)(g) dt \right\| = 0 \quad \text{für alle } \alpha > 0,$$

und damit $f \in \operatorname{dom}(A)$ und $Af = g$, also die Behauptung.

(4)⇒(1). Nach dem Bisherigen folgt

$$\begin{aligned} &\mathcal{D} := \{f \in C[0,1] \colon (\varphi f) \in C^2[0,1]\} \subseteq \operatorname{dom} A \quad \text{und} \\ &A\left(\frac{1}{\varphi} Jg\right) = g \quad \text{für alle } g \in C[0,1], \end{aligned}$$

insbesondere ist also A surjektiv, denn es gilt bereits $A\mathcal{D} = C[0,1]$. Weiters ist A auch injektiv, denn aus $Af = 0$ folgt $W(t)(f) = f$ für alle $t \geq 0$, also $\|f\| = \|W(t)(f)\| \leq e^{-t}\|f\|$ für alle $t \geq 0$, und damit $f = 0$. Daher gilt $\mathcal{D} = \operatorname{dom} A$.

Sei nun $f \in \operatorname{dom} A$ und $Af = g$. Dann folgt $(\varphi f) \in C^2[0,1]$ und

$$g = Af = A\left(\frac{1}{\varphi} J((\varphi f)'')\right) = (\varphi f)'',$$

also die Behauptung. □

Daraus ergeben sich zwei Folgerungen.

Folgerung 5.7. *Für $f \in C[0,1]$ folgt aus $\liminf_{n\to\infty} \|n(C_n - I)(f)\| = 0$ bereits $f = 0$.*

Folgerung 5.8. *Die Folge der Approximationsoperatoren $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist saturiert mit der Saturationsordnung $O(n^{-1})$. Die triviale Klasse besteht nur aus der Nullfunktion $f = 0$.*

5.2 Bestimmung der Saturationsklasse

Satz 5.9. *Sei $A\colon \operatorname{dom} A \to C[0,1]$ der infinitesimale Erzeuger der Halbgruppe $\{W(t)\colon t \leq 0\}$ und $f \in C[0,1]$. Dann sind äquivalent:*

(1) $(\varphi f) \in C^1[0,1]$ *und* $(\varphi f)' \in \operatorname{Lip}_M[0,1]$.

(2) Für alle Paare (x,h) mit $x, x+h \in [0,1]$ gilt

$$|(\varphi f)(x+2h) - 2(\varphi f)(x+h) + (\varphi f)(x)| \leq Mh^2.$$

(3) $\|AC_n f\| \leq \left(1 - \frac{1}{n}\right) M$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$.

(4) $\liminf_{n\to\infty} \|AC_n f\| \leq M$.

(5) $\|n(C_n - I)(f)\| \leq M$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$.

(6) $\liminf_{n\to\infty} \|n(C_n - I)(f)\| \leq M$.

(7) $\|(W(t) - I)(f)\| \leq Mt$ *für alle* $t \leq 0$.

(8) Es existiert eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $f_n \in \operatorname{dom} A$, $\|Af_n\| \leq M$ für alle $n \in \mathbb{N}$, und $\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\| = 0$.

Beweis. **(1)⇒(2).** Es gilt

$$\begin{aligned} |(\varphi f)(x+2h) - 2(\varphi f)(x+h) + (\varphi f)(x)| &= \left| \int_0^h ((\varphi f)'(x+h+u) - (\varphi f)'(x+u))\, du \right| \\ &\leq \int_0^h |(\varphi f)'(x+h+u) - (\varphi f)'(x+u)|\, du \\ &\leq \int_0^h hM du = Mh^2. \end{aligned}$$

(2)⇒(3). Sei g_n definiert durch

$$g_n(x) := (\varphi f)\left(\left(1-\frac{2}{n}\right)x+\frac{2}{n}\right) - 2(\varphi f)\left(\left(1-\frac{2}{n}\right)x+\frac{1}{n}\right) + (\varphi f)\left(\left(1-\frac{2}{n}\right)x\right)$$

für $x \in [0,1]$. Dann gilt $(B_n(\varphi f))'' = \left(1-\frac{1}{n}\right) n^2 B_{n-2}(g)$ für $n \geq 3$, wie sich durch Nachrechnen ergibt. Setzen wir in der Voraussetzung $h = \frac{1}{n}$, dann ergibt sich die Behauptung für $n \geq 3$, und für $n = 1, 2$ ist sie direkt zu sehen.

(3)⇒(4). Dies ist offensichtlich.

(4)⇒(5). Es gilt

$$\begin{aligned}
\|n(C_n - I)(f)\| &\leq \|n(C_n - I)C_k f\| + \|n(C_n - I)(f - C_k f)\| \\
&\leq \left\| n(C_n - I)\left(\frac{1}{\varphi} JAC_k f\right)\right\| + 2n\,\|f - C_k f\| \\
&= \|F_n(AC_k f)\| + 2n\,\|f - C_k f\| \\
&\leq \|F_n\| \cdot \|AC_k f\| + 2n\,\|f - C_k f\| \\
&= \|AC_k f\| + 2n\,\|f - C_k f\|\,.
\end{aligned}$$

Daraus folgt wegen $\text{s-lim}_{k\to\infty} C_k = I$

$$\begin{aligned}
\|n(C_n - I)(f)\| &= \liminf_{k\to\infty} \|n(C_n - I)(f)\| \\
&\leq \liminf_{k\to\infty} \|AC_k f\| + 2n \liminf_{k\to\infty} \|f - C_k f\| \\
&= \liminf_{k\to\infty} \|AC_k f\| \\
&\leq M.
\end{aligned}$$

(5)⇒(6). Dies folgt unmittelbar.

(6)⇒(7). Dies folgt ähnlich wie der Teil (3)⇒(4) des letzten Beweises.

(7)⇒(8). Sei $f_t := \frac{1}{t} \cdot \int_0^t W(u)(f)du$ für $t > 0$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\lim_{s\to 0+} \frac{1}{s}(W(s) - I)(f_t) &= \frac{1}{t} \lim_{s\to 0+} \frac{1}{s} \int_0^t (W(s+u) - W(u))(f)du \\
&= \frac{1}{t} \lim_{s\to 0+} \frac{1}{s} \int_0^s (W(t+v) - W(v))(f)dv \\
&= \frac{1}{t}(W(t) - I)(f).
\end{aligned}$$

Daraus folgt $f_t \in \operatorname{dom} A$ und $Af_t = t^{-1}(W(t) - I)(f)$. Wegen $\lim_{t\to 0+} \|f_t - f\| = 0$ und $\|Af_t\| \leq M$ folgt die Behauptung.

(8)⇒(1). Für $(\varphi f_n)'$ gilt wegen der Stetigkeit der f_n

$$\begin{aligned}
(\varphi f_n)'(0) &= \lim_{h\to 0+} \frac{1}{h}((\varphi f_n)(h) - (\varphi f_n)(0)) = \lim_{h\to 0+} \frac{1}{h} \cdot \frac{1}{2} h(1-h) f_n(h) = \lim_{h\to 0+} \frac{1}{2}(1-h) f_n(h) \\
&= \frac{1}{2} f_n(0)
\end{aligned}$$

und daher wegen $Af_n = (\varphi f_n)''$

$$(\varphi f_n)'(x) = \int_0^x (\varphi f_n)''(x)dx + (\varphi f_n)'(0) = \int_0^x (Af_n)(x)dx + \frac{1}{2} f_n(0),$$

es gilt also mit geeignetem $R > 0$

$$\|(\varphi f_n)'\| \leq \|A f_n\| + \frac{1}{2}\|f_n\| \leq R.$$

Daraus folgt

$$|(\varphi f_n)(x+h) - (\varphi f_n)(x)| \leq R\,|h| \quad \text{für } x, h \text{ mit } x, x+h \in [0,1]$$

und für $n \to \infty$

$$|(\varphi f)(x+h) - (\varphi f)(x)| \leq R\,|h| \quad \text{für } x, h \text{ mit } x, x+h \in [0,1].$$

Daher ist (φf) absolut stetig, also existiert $(\varphi f)'(x)$ für fast alle $x \in [0,1]$.

Für $x, y \in [0,1]$ gilt nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung

$$|(\varphi f_n)'(x) - (\varphi f_n)'(y)| = |x-y| \cdot |(\varphi f_n)''(\xi)| \leq \|(\varphi f_n)''\| \cdot |x-y| \leq M\,|x-y|\,,$$

also sind $(\varphi f_n)'$ Lipschitz-stetig mit Lipschitzkonstante M. Sind $x, x+h \in [0,1]$ zwei Punkte, an denen $(\varphi f)'$ existiert, dann gilt daher für t hinreichend klein

$$\begin{aligned}
&|(\varphi f_n)(x+h+t) - (\varphi f_n)(x+h) - (\varphi f_n)(x+t) + (\varphi f_n)(x)| \\
&\quad = \left|\int_0^t ((\varphi f_n)'(x+h+u) - (\varphi f_n)'(x+u))\,du\right| \\
&\quad \leq \int_0^t |(\varphi f_n)'(x+h+u) - (\varphi f_n)'(x+u)|\,du \leq \int_0^t M\,|h|\,du = M\,|h| \cdot |t|\,,
\end{aligned}$$

und für $n \to \infty$

$$|(\varphi f)(x+h+t) - (\varphi f)(x+h) - (\varphi f)(x+t) + (\varphi f)(x)| \leq M\,|h| \cdot |t|\,.$$

Für $t \to 0$ folgt

$$|(\varphi f)'(x+h) - (\varphi f)'(x)| \leq M\,|h|\,.$$

Somit existiert $g \in \mathrm{Lip}_M[0,1]$ so, dass $g(x) = (\varphi f)'(x)$ für fast alle $x \in [0,1]$ gilt. (φf) ist damit eine Stammfunktion von g, also folgt sogar $(\varphi f) \in C^1[0,1]$ und $g = (\varphi f)' \in \mathrm{Lip}_M[0,1]$, die Behauptung. □

Folgerung 5.10. *Die Saturationsklasse der Folge der Approximationsoperatoren $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist identisch mit derjenigen der Halbgruppe $\{W(t)\colon 0 \leq t < \infty\}$, nämlich $\{f \in C[0,1]\colon (\varphi f) \in C^1[0,1]$ und $(\varphi f)' \in \mathrm{Lip}[0,1]\}$.*

5.3 Beweis des Satzes von Lorentz

Satz 5.11. *Sei $f \in C[0,1]$. Dann sind äquivalent:*

(1) $f \in C^1[0,1]$ und $f' \in \mathrm{Lip}_M[0,1]$.

(2) $|n((B_n - I)f)(x)| \leq \frac{1}{2}x(1-x)M$ für $x \in [0,1]$ und $n \in \mathbb{N}$.

Beweis. **(1)⇒(2).** Die Funktion $g\colon [0,1] \to \mathbb{R}$,

$$g(x) := \frac{f(x) - (1-x)f(0) - xf(1)}{\varphi(x)},$$

erfüllt die Bedingung (1) von Satz 5.9. Daraus folgt mit Bedingung (5) desselben Satzes

$$\|n(C_n - I)(g)\| = \left\| \frac{n}{\varphi} \cdot (B_n - I)(\varphi g) \right\| \leq M,$$

also folgt wegen $B_n(\mathrm{id}_{[0,1]}) = \mathrm{id}_{[0,1]}$ und $B_n(1) = 1$

$$\left| \frac{n}{\varphi(x)} (B_n - I)\Big((f) - (1 - \mathrm{id}_{[0,1]}) f(0) - \mathrm{id}_{[0,1]} f(1)\Big) \right| = \left| \frac{n}{\varphi(x)} (B_n - I)(f)(x) \right| \leq M.$$

Multiplizieren mit $\varphi(x)$ liefert die Behauptung.

(2)⇒(1). Sei g wie oben erklärt, dann gilt

$$\left\| \varphi^{-1} B_n(\varphi g) - g \right\| \leq M n^{-1}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Daher folgt $\|n(C_n - I)(g)\| \leq M$, also Bedingung (5) von Satz 5.9. Damit gilt auch Bedingung (1) desselben Satzes, also die Behauptung. □

Literaturverzeichnis

[AC94] F. Altomare and M. Campiti, *Korovkin-type Approximation Theory and its Applications*, de Gruyter Studies in Mathematics, vol. 17, de Gruyter, 1994.

[BB67] P. L. Butzer and H. Berens, *Semi-Groups of Operators and Approximation*, Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen, vol. 145, Springer-Verlag, 1967.

[Lor53] G. G. Lorentz, *Bernstein Polynomials*, Mathematical Expositions, vol. 8, University of Toronto Press, 1953.

[Lor64] ———, *Inequalities and the Saturation Classes of Bernstein Polynomials*, On Approximation Theory (P. L. Butzer and J. Korevaar, eds.), Birkhäuser, 1964, pp. 200–207.

[Sch68] R. Schnabl, *Eine Verallgemeinerung der Bernsteinpolynome*, Mathematische Annalen **179** (1968), 74–82.

[Sch69a] ———, *Zum Saturationsproblem der verallgemeinerten Bernsteinoperatoren*, Abstract Spaces and Approximation (P. L. Butzer and B. Sz.-Nagy, eds.), Birkhäuser, 1969, pp. 281–289.

[Sch69b] ———, *Zur Approximation durch Bernsteinpolynome auf gewissen Räumen von Wahrscheinlichkeitsmaßen*, Mathematische Annalen **180** (1969), 326–330.

[Sch70] ———, *Zum globalen Saturationsproblem der Folge der Bernsteinoperatoren*, Acta Sci. Math. (Szeged) **31** (1970), 351–358.

[Wer05] D. Werner, *Funktionalanalysis*, Springer-Verlag, 2005.