Lineare Relationen

Wie allgemein bekannt ist, muss nicht jeder Operator auf einem Vektorraum eine inverse Abbildung besitzen. Um solchen linearen Abbildungen trotzdem ein "inverses Objekt" zuzuordnen, benötigt man einen allgemeineren Begriff. Dieser ist der der linearen Relation. Formal werden solche als lineare Unterräume von dem Produkt zweier Vektorräume definiert - anders formuliert, sind das mehrwertige partiell definierte lineare Abbildungen. In der vorliegenden Arbeit, werden zuächst die grundlegenden Begriffe eingeführt. Anschließend wird untersucht, wie sich Polynome von linearen Relationen unter Summen, Produkten und Kompositionen verhalten. Insbesondere werden wir die natürlich wirkende Formel $pq(T) = p(T)q(T)$ beweisen. Abschließend untersuchen wir noch das Spektrum von Polynomen von linearen Relationen.

Diese Arbeit folgt im Wesentlichen [1]. Einige Definition wurden auch aus [2] übernommen.

Grundlagen

Definition 1. Seien X, Y Vektorräume. T heißt lineare Relation zwischen X und Y, falls T ein Unterraum von $X \times Y$ ist, dh. $T \leq X \times Y$.

Analog zu linearen Abbildungen definiert man die folgenden Unterräume von X bzw. Y.

Definition 2. Sei $T \leq X \times Y$ eine lineare Relation.

- $dom\, T := \{x \in X : \exists y \in X : (x; y) \in T\}$
- $ran\, T := \{y \in Y : \exists x \in X : (x; y) \in T\}$
- $ker\, T := \{x \in X : (x; 0) \in T\}$
- $mul\, T := \{y \in Y : (0; y) \in T\}$

Lemma 3. *T ist genau dann ein linearer Operator, falls $mul\, T = \{0\}$.*

Beweis. Gilt $(x; y) \in T$, $(x; z) \in T$, dann auch $(0; z - y) \in T$. Da $mul\, T = \{0\}$ folgt $y = z$ und wir erhalten, dass T eine Funktion ist. Es ist trivial zu überprüfen, dass Linearität als Relation äquivalent zu Linearität als Operator ist. □

Ebenfalls in Anlehnung an lineare Abbildungen definieren wir die folgenden algebraischen Operationen.

Definition 4. Seien $S, T \leq X \times Y$ und $R \leq Y \times Z$ lineare Relationen.

- $T^{-1} := \{(y; x) \in Y \times X : (x; y) \in T\}$
- $T + S := \{(x; y) \in X \times Y : \exists (x; y_1) \in T, (x; y_2) \in S : y = y_1 + y_2\}$
- $cT := \{(x; cy) \in X \times Y : (x; y) \in T\}$
- $RS := \{(x; z) \in X \times Z : \exists y \in Y : (x; y) \in S,\ (y; z) \in R\}$

Fakt 5. *Direkt aus den Definitionen folgt.*

- $(T^{-1})^{-1} = T$.
- $T + S = S + T$.
- $(R + S) + T = R + (S + T)$.
- $c(S + T) = cS + cT$ für $c \in \mathbb{C}$.
- $ran\, T = dom\, T^{-1}$ und $mul\, T = ker\, T^{-1}$.
- $dom\, (T + S) = dom\, T \cap dom\, S$ und $mul\, (T + S) = mul\, T + mul\, S$.
- $mul\, R \subseteq mul\, (RS)$.

Summen und Produkte von linearen Relationen sind im Allgemeinen nicht distributiv. Allerdings gelten zumindest die folgenden Inklusionen.

Lemma 6. *Seien $S, T \leq X \times Y$, $R \leq Y \times Z$, $U \leq W \times X$ lineare Relationen und $c \in \mathbb{C}$ ungleich Null. Dann gilt*

1. $(T+S)U \subseteq TU + SU$
2. $R(T+S) \supseteq RT + RS$
3. $T(cS) = c(TS)$
4. $(RS)U = R(SU)$

Beweis. 1) Sei $(w;y) \in (T+S)U$. Nach Definition gibt es $(w;x) \in U$, $(x;y_1) \in T$, $(x;y_2) \in S$ mit $y_1 + y_2 = y$. Dann gilt aber $(w;y_1) \in TU$, $(w;y_2) \in SU$ und damit $(w;y) \in TU + SU$.

2) Sei $(x;z) \in RT + RS$. Damit gibt es $(x;y_1) \in T$, $(x;y_2) \in S$ und $(y_1;z_1), (y_2;z_2) \in R$ mit $z_1+z_2 = z$. Da $(x;y_1+y_2) \in S+T$ und $(y_1+y_2;z_1+z_2) \in R$ gilt auch $(x;z) \in R(T+S)$.

3) Sei $(x;z) \in T(cS)$. Dann gibt es $(x;y) \in S$ und $(cy;z) \in T$. Da T ein linearer Unterraum ist, gilt auch $(y;\frac{z}{c}) \in S$ und damit $(x;z) \in c(TS)$. Ist umgekehrt $(x;z) \in c(TS)$, dann gibt es $(x;y) \in S$ und $(y;\frac{z}{c}) \in T$. Wieder, da T ein Unterraum ist, gilt auch $(cy;z) \in T$ und damit $(x;z) \in T(cS)$.

4) Sei $(w;z) \in (RS)U$. Das ist äquivalent zur Existenz von $x \in X$, $y \in Y$, sodass $(w;x) \in U$, $(x;y) \in S$, $(y;z) \in R$. Das ist nun wiederum äquivalent zu $(w;z) \in R(SU)$. □

Definition 7. Sei $p(\lambda) = a_n\lambda^n + \cdots + a_1\lambda + a_0$ ein Polynom. Dann definiert man für eine lineare Relation $T \leq X \times X$

$$p(T) := a_nT^n + \cdots + a_1T + a_oI.$$

wobei I die Identität ist.

Wir werden die folgende triviale Tatsache benötigen (vgl. Fakt 5).

Fakt 8. *Sei $T \leq X \times X$ eine lineare Relation und p ein Polynom. Dann gilt*

- $mul\, T^i \subseteq mul\, T^j$ für $i \leq j$; insbesondere $mul\, p(T) = mul\, T^n$ mit $n = grad\, p$.
- $dom\, T^j \subseteq dom\, T^i$ für $i \leq j$; insbesondere gilt $dom\, p(T) = dom\, T^n$ mit $n = grad\, p$.

Definition 9. Sei $T \leq X \times X$ eine lineare Relation. Ist $x_1, x_2, \ldots, x_n$ eine Folge, sodass $(x_i;x_{i+1}) \in T$ für alle $1 \leq i < n$, so nennt man $x_1, x_2, \ldots, x_n$ eine T-Kette.

Summen, Produkte

Lemma 10. *Seien p, q Polynome und $T \leq X \times X$ eine lineare Relation. Dann gilt*

$$(p+q)(T) \subseteq p(T) + q(T).$$

Falls $c_1, \dots, c_k \in \mathbb{C}$ mit $\sum_{i=1}^k c_i \neq 0$, dann gilt außerdem

$$(\sum_{i=1}^k c_i)T = \sum_{i=1}^k c_i T.$$

Beweis. Wegen der Kommutativität der Addition genügt es die Behauptung für den Fall $p(\lambda) = a\lambda^m$ und $q(\lambda) = b\lambda^m$ zu zeigen. Aus Punkt 1 von Lemma 6 folgt

$$(a+b)T^m = (aI + bI)T^m \subseteq aIT^m + bIT^m = aT^m + bT^m$$

wobei $I := (x; x) : x \in X$ die Identität ist.

Sei nun $\sum_{i=1}^k c_i \neq 0$, und $(x; y) \in \sum_{i=1}^k c_i T$. Dann gibt es $(x; y_i) \in T$ mit $\sum_{i=1}^k c_i y_i = y$. Andererseits gilt $(x; \sum_{i=1}^k c_i y_1) \in (\sum_{i=1}^k c_i)T$ und da

$$\sum_{i=1}^k c_i y_i - \sum_{i=1}^k c_i y_1 = \sum_{i=1}^k c_i (y_i - y_1) \in mul\, T = mul\, (\sum_{i=1}^k c_i)T$$

auch

$$(x; y) = (x; \sum_{i=1}^k c_i y_i) = (x; \sum_{i=1}^k c_i y_1) + (0; \sum_{i=1}^k c_i y_i - \sum_{i=1}^k c_i y_1) \in (\sum_{i=1}^k c_i)T.$$

□

Ist $T \leq X \times X$ mit $mul\, T \neq \{0\}$, dann gilt $0T \subsetneq T - T$. Da $mul\, T \neq \{0\}$, gibt es nämlich Paare $(x; y), (x; z) \in T$ mit $y \neq z$. Offensichtlich gilt dann $(x; y - z) \in T - T$ aber $(x; y - z) \notin 0T$. Insbesondere muss im obigen Lemma nicht immer Gleichheit herrschen. Wir werden jedoch im Folgenden sehen, dass unter gewissen Bedingungen doch Gleichheit gilt.

Lemma 11. *Sei $n \geq k$, dann gilt $T^n = T^n + c(T^k - T^k)$.*

Beweis. Die Inklusion $\subseteq$ folgt aus $dom\, T^n \subseteq dom\, T^k$. Für die Umkehrung sei $(x; y) \in T^n + c(T^k - T^k)$. Dann gibt es $(x; y_1) \in T^n$ und $(x; y_2) \in c(T^k - T^k)$ mit $y_1 + y_2 = y$. Da aus $(x; y_2) \in c(T^k - T^k)$ folgt, dass $(x; y'), (x; y'') \in T^k$ mit $y_2 = c(y' - y'')$, erhalten wir $y_2 \in c \cdot mul\, T^k \subseteq mul\, T^n$. Somit folgt $(x; y) = (x; y_1) + (0; y_2) \in T^n$. □

Korollar 12. *Sei $T \leq X \times X$ eine lineare Relation und p, q Polynome mit $grad\, (p+q) = \max\{grad\, p,\ grad\, q\}$, dann gilt*

$$(p+q)(T) = p(T) + q(T).$$

Beweis. Sei $p(z) = a_n z^n + \cdots + a_0$, $q(z) = b_m z^m + \cdots + b_0$. Gemäß der zweiten Aussage von Lemma 10 und da nach Vorrausetzung $a_n + b_n \neq 0$ gilt

$$p(T) + q(T) = (a_n T^n + b_n T^n) + \cdots + (a_0 I + b_0 I) =$$
$$= (a_n + b_n)T^n + (a_{n-1}T^{n-1} + b_{n-1}T^{n-1}) + \cdots + (a_0 I + b_0 I) =$$
$$= (p+q)(T) - \left[a_{j_1}(T^{j_1} - T^{j_1}) + \cdots + a_{j_k}(T^{j_k} - T^{j_k})\right]$$

für jene Indizes $0 \leq j_1, \cdots, j_k < n$ für die $a_{j_i} = -b_{j_i} \neq 0$ gilt.
Da $j_i < n$, gilt nach dem vorherigen Lemma die gewünschte Gleichheit. □

Im Folgenden beschäftigen wir uns mit dem Produkt von Polynomen. Im nächste Lemma werden wir einige Fakten über obere Toeplitzmatrizen benötigen.

Definition 13. Seien $a_n, \ldots, a_0 \in \mathbb{C}$. Dann ist die dazugehörige obere Toeplitzmatrix gegeben durch

$$\begin{pmatrix} a_n & a_{n-1} & \cdots & a_0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_{n-1} \\ 0 & \cdots & 0 & a_n \end{pmatrix}.$$

Die für unsere Verwendung entscheidende Eigenschaft von solchen Matrizen ist, dass sie T-Ketten

$$0, x_1, \ldots, x_n \cong \begin{pmatrix} x_n \\ x_{n-1} \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

unter einer Vektor-Matrix Multiplikation, wieder auf solche T-Ketten abbilden. Ist nämlich $0 = x_0, x_1, \ldots, x_k$ eine T-Kette, dann gilt offensichtlich

$$(a_{n-i}x_{k-i-1}; a_{n-i}x_{k-i}) \in T$$

für $0 \leq i \leq k-1$. Damit gilt dann für alle $k = 1, \ldots, n$

$$(\sum_{i=0}^{k-1} a_{n-i}x_{k-i-1}; \sum_{i=0}^{k-1} a_{n-i}x_{k-i} + a_{n-k}0) = (\sum_{i=0}^{k-1} a_{n-i}x_{k-i-1}; \sum_{i=0}^{k} a_{n-i}x_{k-i}) \in T.$$

Es lässt sich außerdem elementar nachrechnen, dass die Inverse einer oberen Toeplitzmatrix, mit nicht verschwindender Diagonale, wieder eine ist.

Lemma 14. *Sei $T \leq T \times T$, $p(z) = a_n T^n + \cdots + a_0$ mit $a_n \neq 0$ und $z \in mul\, T^n$. Dann gibt es eine T-Kette $h_0, \cdots, h_n$ mit $h_0 = 0$, sodass*

$$\sum_{i=0}^{n} a_i h_i = z.$$

Beweis. Nach Definition gibt es eine T-Kette $z_0, \cdots, z_n$ mit $z_0 = 0$, $z_n = z$. Wir betrachten die obere Toeplitzmatrix

$$A := \begin{pmatrix} a_n & a_{n-1} & \cdots & a_0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_{n-1} \\ 0 & \cdots & 0 & a_n \end{pmatrix}.$$

Sei nun

$$\begin{pmatrix} h_n \\ h_{n-1} \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} := A^{-1} \begin{pmatrix} z_n \\ z_{n-1} \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Dann gilt

$$z = \begin{pmatrix} 1, & 0, & \cdots, & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_n \\ z_{n-1} \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1, & 0, & \cdots, & 0 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} h_n \\ h_{n-1} \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \sum_{i=0}^{n} a_i h_i.$$

Wir sehen, dass $0, h_1, \ldots, h_n$ die gesuchte T-Kette ist. □

Korollar 15. *Sei $T \leq X \times X$ und $p(\lambda) = a_n\lambda^n + \cdots + a_1\lambda + a_0$ mit $a_n \neq 0$. Ist $(x; y) \in p(T)$, dann gibt es eine T-Kette $y_0, y_1, \cdots, y_n$, sodass*

$$y_0 = x, \sum_{i=0}^{n} a_i y_i = y.$$

Beweis. Nach Definition, gibt es $x_0, x_1, \ldots, x_n$ mit $x_i \in T^i$, $x_0 = x$, $\sum_{i=0}^n a_i x_i = y$. Wegen $dom\, p(T) = dom\, T^n$ gibt es eine T-Kette $z_0, z_1, \ldots, z_n$ mit $z_0 = x$. Es gilt $y = \sum_{i=0}^n a_i x_i = \sum_{i=0}^n a_i z_i + \sum_{i=0}^n a_i(x_i - z_i)$. Wegen $x_i - z_i \in mul\, T^i$ gilt $\sum_{i=0}^n a_i(x_i - z_i) \in mul\, T^n$. Nach dem vorherigen Lemma gibt es daher eine T-Kette $0, h_1, \ldots, h_n$ mit

$$y = \sum_{i=0}^{n} a_i(z_i + h_i).$$

Definieren wir

$$y_i := z_i + h_i$$

so erhalten wir die gewünschte Kette. □

Theorem 16. *Sei $T \leq X \times X$ eine lineare Relation und $p(\lambda) = a_n\lambda^n + \cdots + a_1\lambda + a_0$, $q(\lambda) = b_m\lambda^m + \cdots + b_1\lambda + b_0$ Polynome mit $b_m \neq 0 \neq a_n$. Dann gilt*

$$(pq)(T) = p(T)q(T).$$

Beweis. Im Folgenden bezeichnen wir die Koeffizienten

$$\sum_{j=\max\{0,i-m\}}^{n} a_j b_{i-j}$$

von pq mit d_i. Sei $(x; y) \in (pq)(T)$. Nach dem vorherigen Lemma existiert dann eine T-Kette $x_0, x_1, \ldots, x_{n+m}$ mit $x_0 = x$ und $\sum_{i=0}^{m+n} d_i x_i = y$. Wir definieren nun

$$y_j = \sum_{i=0}^{m} b_i x_{i+j}, \quad 0 \leq j \leq n.$$

Offensichtlich bilden auch die y_j eine T-Kette, außerdem gilt $(x, y_0) \in q(T)$. Es ist einfach nachzurechnen, dass $y = \sum_{j=0}^{n} a_j y_j$ und wir sehen, dass $(y_0; y) \in p(T)$. Damit folgt aber $(x; y) \in p(T)q(T)$.

Sei nun umgekehrt $(x; z) \in p(T)q(T)$. Es gibt dann ein y, sodass $(x; y) \in q(T)$ und $(y; z) \in p(T)$. Nach dem letzten Lemma findet man T-Ketten $x_0, x_1, \cdots, x_m$ und $y_0, y_1, \cdots, y_n$ mit $x_0 = x$, $y_0 = y$, sodass

$$\sum_{i=0}^{m} b_i x_i = y, \ \sum_{i=0}^{n} a_i y_i = z.$$

Wir betrachten nun den von Elementen $\xi_0, \xi_1, \cdots, \xi_m, \eta_1, \cdots, \eta_n$ aufgespannten freien Vektorraum V über $\mathbb{C}$ der durch eine Abbildung F gemäß

$$F(\xi_i) = x_i, \ F(\eta_i) = y_i$$

in X eingebettet wird. Auf $span\,\{\xi_0, \ldots, \xi_m, \eta_0, \ldots, \eta_{n-1}\}$ definieren wir nun eine lineare Abbildung S folgendermaßen

$$S(\xi_i) = \xi_{i+1}, \ S(\eta_i) = \eta_{i+1}, \ S(\sum_{i=0}^{m} b_i \xi_i) = \eta_1.$$

Offensichtlich gilt, $(F(\xi); F(S\xi)) \in T$ für $\xi \in dom\,S$. Daraus folgt auch für ein beliebiges Polynom r, $(F(\xi); F(r(S)(\xi)) \in r(T)$ für $\xi \in dom\,r(S)$. Wenden wir diese Tatsache nun für $\xi = \xi_0$ und $r = pq$ an, so folgt aus $q(S)(\xi_0) = \sum_{i=0}^{m} b_i \xi_i$

$$F(pq(S)(\xi_0)) = F([p(S)q(S)]\,(\xi_0)) = F(p(S)(\eta_1)) = F(\sum_{i=0}^{n} a_i \eta_i) = \sum_{i=0}^{n} a_i y_i = z.$$

Wir erhalten $(x; z) \in (pq)(T)$. □

Als Korollar erhalten wir auch die Verträglichkeit mit Kompositionen.

Korollar 17. *Seien p, q Polynome und $T \leq X \times X$ eine lineare Relation. Dann gilt*

$$(p \circ q)(T) = p(q(T)).$$

Beweis. Da $(p_1 p_2)(T) = p_1(T)p_2(T)$ für alle Polynome p_1, p_2, folgt die Identität durch übliches Einsetzen und Ausrechnen. $\square$

Das Spektrum

Wir wenden uns nun dem Spektrum von linearen Relationen zu.

Definition 18. Sei $T \leq X \times X$ eine lineare Relation. T wird auflösbar genannt, falls T^{-1} ein linearer Operator auf X ist. Die Resolventenmenge einer Relation T ist definiert durch

$$\rho(T) := \{\lambda \in \mathbb{C} : (T - \lambda) \text{ ist auflösbar } \}.$$

Das Spektrum ist dann definiert durch

$$\sigma(T) := \mathbb{C} \setminus \rho(T).$$

Fakt 19. *Eine lineare Relation T ist genau dann auflösbar falls*

$$T^{-1}T \subseteq I \subseteq TT^{-1}.$$

Lemma 20. *Das Produkt von endlich vielen paarweise kommutierenden linearen Relation ist genau dann auflösbar, falls jeder Faktor auflösbar ist.*

Beweis. Offensichtlich genügt es, zwei Faktoren zu betrachten. Seien also $T_1, T_2 \leq X \times X$. Sind beide auflösbar, dann auch ihr Produkt, wie man durch

$$T_2^{-1}T_1^{-1}T_1T_2 \subseteq T_2^{-1}T_2 \subseteq I \subseteq T_2T_2^{-1} \subseteq T_1T_2T_2^{-1}T_1^{-1}$$

einfach sieht.

Nehmen wir nun an, dass (ohne Beschränkung der Allgemeinheit) T_1 nicht auflösbar ist. Es muss dann entweder ein $x \in X$ geben mit $(x, 0) \in T_1$ oder $ran\, T \neq X$. Dementsprechend gilt entweder $(x, 0) \in T_2T_1$ oder $ran\,(T_1T_2) \neq X$. □

Das folgende Theorem zeigt, dass das Anwenden von Polynomen mit dem Spektrum verträglich ist.

Theorem 21. *Sei p ein Polynom und $T \leq X \times X$ eine lineare Relation. Dann gilt*

$$\sigma(p(T)) = \{\mu \in \mathbb{C} : \exists \lambda \in \sigma(T),\, \mu = p(\lambda)\} := p(\sigma(T)).$$

Beweis. Sei $\mu \in \mathbb{C}$. Nach dem Fundamentalsatz der Algebra gilt

$$p(T) - \mu = c(T - \lambda_1) \cdots (T - \lambda_n)$$

mit $\mu = p(\lambda_1) = \cdots = p(\lambda_n)$.

Offensichtlich kommutieren die Faktoren. Gilt $\mu \in \sigma(p(T))$, dann ist $p(T) - \mu$ nicht auflösbar. Nach dem letzen Lemma ist dann auch mindesten ein $(T - \lambda_i)$ nicht auflösbar. Da $\mu = p(\lambda_i)$, erhalten wir $\mu \in p(\sigma(T))$.

Ist umgekehrt $\mu \in p(\sigma(T))$, dann gilt $p^{-1}(\{\mu\}) \cap \sigma(T) = \{\lambda_1, \cdots, \lambda_n\} \cap \sigma(T) \neq \emptyset$. Es muss also zumindest ein λ_i geben, sodass $(T - \lambda_i)$ nicht auflösbar ist. Wiederum nach dem vorherigen Lemma, ist auch $p(T) - \lambda$ nicht auflösbar und wir erhalten $\mu \in \sigma(p(T))$. □

Literatur

[1] Richard Arens. *Operational Calculus of linear Relations*.

[2] Michael Kaltenbaeck. *Funktionalanalysis 2*. WS 2011-2012.