TU Wien SS 2009

Der Satz von Krein-Milman und einige Konsequenzen

Seminararbeit aus Funktionalanalysis

Markus Faustmann

1 Extremalpunkte und der Satz von Krein-Milman

DEFINITION 1.1 (*Extremale Mengen*)

- Sei K eine konvexe Teilmenge eines Vektorraumes X. Dann heißt eine nichtleere Teilmenge $S \subseteq K$ extremale Teilmenge von K, wenn eine Konvexkombination

$$tx + (1-t)y \quad \text{mit} \quad x, y \in K, 0 < t < 1$$

  nur in S liegen kann, falls x und y selbst bereits in S liegen.

- Eine einpunktige extremale Menge wird als Extremalpunkt von K bezeichnet. Die Menge der Extremalpunkte von K wird mit $E(K)$ bezeichnet.

Eine etwas anschaulichere, äquivalente Definition eines Extremalpunktes kann gegeben werden durch:
Ein Punkt $z \in K$ ist ein Extremalpunkt, falls

$$\forall x, y \in K, 0 < t < 1: \; z = tx + (1-t)y \quad \Rightarrow \quad x = y = z.$$

Beispiel 1.2.
Man betrachte das Einheitsquadrat im $\mathbb{R}^2$.
Dann sind die Kanten extremale Mengen und die Eckpunkte Extremalpunkte.

Beispiel 1.3.
Die abgeschlossene Einheitskugel im $L^1[0,1]$ enthält keine Extremalpunkte.
Zunächst sei festgestellt, dass Extremalpunkte nur auf der Einheitssphäre liegen können, also muss $\int_0^1 |f(t)|\,dt = 1$ für solch ein f gelten.
Die Abbildung $s \mapsto \int_0^s |f(t)|\,dt$ ist stetig und monoton wachsend, also existiert ein $s_0 \in (0,1)$ mit $\int_0^{s_0} |f(t)|\,dt = \frac{1}{2}$. Nun kann f dargestellt werden als $f = \frac{1}{2}(f_1 + f_2)$ mit $f_1 = 2\chi_{[0,s_0]}f$, $f_2 = 2\chi_{[s_0,1]}f$, wobei $\|f_i\| = 1$, $f_1 \neq f_2$ gilt. Somit kann f kein Extremalpunkt sein.

SATZ 1.4 (*Krein-Milman*)
Sei X ein lokalkonvexer topologischer Vektorraum und $K \subseteq X$ eine kompakte, konvexe und nichtleere Teilmenge. Dann ist K gleich der abgeschlossenen konvexen Hülle der Extremalpunkte von K, also $K = \overline{co}\,(E(K))$.

Beweis:
1.Schritt: Sei $\mathcal{P}$ die Menge aller kompakten, nichtleeren extremalen Mengen von K. Dann ist $\mathcal{P} \neq \emptyset$ da $K \in \mathcal{P}$.

- Sei $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{P}$. Zunächst sei festgestellt, dass $\bigcap_{U\in\mathcal{U}} U \in \mathcal{P}$ oder $\bigcap_{U\in\mathcal{U}} U = \emptyset$. auf Grund der endlichen Durchschnittseigenschaft gilt, da K kompakt ist.
  Weiters folgt daher klarerweise $\bigcap_{T\in\mathcal{U}} T \in \mathcal{P}$.

- Sei $S \in \mathcal{P}$, $f \in X'$ sowie $\mu := \max\{\mathrm{Re}f(x) : x \in S\}$ und
  $$S_f := \{x \in S : \mathrm{Re}f(x) = \mu\}.$$
  Dann gilt $S_f \in \mathcal{P}$.
  Um dies zu erkennen sei $tx + (1-t)y = z \in S_f$ mit $x, y \in K$, $t \in [0,1]$. Da auch $z \in S$ und $S \in \mathcal{P}$ und S eine extremale Menge ist, gilt gemäß Definition, dass $x, y \in S$. Somit folgt $\mathrm{Re}f(x) \leq \mu$, $\mathrm{Re}f(y) \leq \mu$. Aus der Darstellung von z und der Linearität von f resultiert nun
  $$\mu = \mathrm{Re}f(z) = t\mathrm{Re}f(x) + (1-t)\mathrm{Re}f(y)$$
  und daher klarerweise $\mathrm{Re}f(x) = \mathrm{Re}f(y) = \mu$ und somit $x, y \in S_f$.

Sei nun $S_0 \in \mathcal{P}$ und $\mathcal{P}' := \{T \in \mathcal{P} : T \subseteq S_0\}$. Weiters sei $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{P}'$ bezüglich der Mengeninklusion geordnet.
Da $\bigcap_{T\in\mathcal{U}} T \in \mathcal{P}$ als absteigende Folge die endliche Durchschnittseigenschaft erfüllt, gilt $\bigcap_{T\in\mathcal{U}} T \neq \emptyset$ und somit ist mit obiger Bemerkung $\bigcap_{T\in\mathcal{U}} T \in \mathcal{P}'$ eine untere Schranke in $\mathcal{P}'$.
Das Lemma von Zorn liefert nun die Existenz eines minimalen Elements $M \in \mathcal{P}'$.
Da wie oben bewiesen stets $S_f \in \mathcal{P}'$, muss wegen der Minimalität von M gelten, dass $\mathrm{Re}f$ konstant auf M für jedes $f \in X'$ ist. Da nun X' punktetrennend auf X operiert, muss M einpunktig sein.
Somit wurde gezeigt, dass jedes $S_0 \in \mathcal{P}$ einen Extremalpunkt enthält, dass also gilt
$$\forall S_0 \in \mathcal{P} : \; E(K) \cap S_0 \neq \emptyset. \tag{1}$$

<u>2.Schritt:</u> Da K eine kompakte und konvexe Menge ist, folgt trivialerweise
$$\overline{co}\,(E(K)) \subseteq K.$$
Insbesondere ist $\overline{co}\,(E(K))$ kompakt.
Für die umgekehrte Inklusion sei angenommen, dass $x_0 \in K \backslash \overline{co}\,(E(K))$ existiert.
Der Trennungssatz von Hahn-Banach liefert nun die Existenz eines Funktionals $f \in X'$ mit $\mathrm{Re}f(x_0) > \mathrm{Re}f(y)$ für alle $y \in \overline{co}\,(E(K))$.
Da aber wie oben gezeigt stets $K_f \in \mathcal{P}$ gilt und K_f wegen $\mathrm{Re}f(x_0) > \mathrm{Re}f(y)$ keinen Punkt aus $\overline{co}\,(E(K))$ enthält, liefert $K_f \cap \overline{co}\,(E(K)) = 0$ einen Widerspruch zu (1). $\square$

Oftmals stellt gerade die Existenz von Extremalpunkten die signifikante Aussage des Satzes von Krein-Milman dar.

Beispiel 1.5.
Man betrachte den Raum $C[0,1]$ versehen mit der Maximumsnorm. Der Dualraum $X = C[0,1]'$ ist der Raum der reellen Baire-Maße auf $[0,1]$ mit beschränkter Totalvariation. Die Einheitskugel in X ist schwach*-kompakt nach dem Satz von Alaoglu. Die Extremalpunkte

von K stimmen nun mit den linearen Funktionalen $f_{t_0} \in X$ der Form $\langle x, f_{t_0} \rangle = x(t_0)$, $t_0 \in [0,1]$ überein, was hier nicht bewiesen wird.
Der Satz von Krein-Milman besagt nun, dass jedes lineare Funktional $f \in X$ gegeben ist als der schwach*-Grenzwert von Funktionalen der Gestalt

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j x(t_j), \quad \text{mit} \quad \sum_{j=1}^{n} \alpha_j = 1,\ t_j \in [0,1].$$

KOROLLAR 1.6
Ist ein Raum Y Dualraum eines normierten Vektorraumes X, so hat die Einheitskugel in Y Extremalpunkte.

Beweis: Wegen des Satzes von Alaoglu ist die Einheitskugel B_Y schwach*-kompakt. Da die Einheitskugel klarerweise auch konvex ist, liefert der Satz von Krein-Milman die Existenz von Extremalpunkten. □

KOROLLAR 1.7
Der Raum $L^1[0,1]$ ist nicht isometrisch isomorph zu einem Dualraum eines normierten Vektorraums.

Beweis: Da die Einheitskugel im $L^1[0,1]$ wie in Beispiel 1.2 gezeigt keine Extremalpunkte besitzt, kann sie nicht kompakt sein. □

LEMMA 1.8
Seien $A_1, \ldots, A_n$ kompakte konvexe Teilmengen eines topologischen Vektorraumes X, dann ist $co(A_1 \cup \cdots \cup A_n)$ kompakt.

Beweis: Sei

$$S = \{s = (s_1, \ldots, s_n) : 0 \le s_i \le 1, \sum_{i=1}^{n} s_i = 1\}.$$

Setze $A = A_1 \times \cdots \times A_n$ und definiere $f : S \times A \to X$ durch

$$f(s,a) := \sum_{i=1}^{n} s_i a_i$$

mit $a_i \in A_i$ und setze $K = f(S \times A)$. Da f klarerweise stetig ist, ist K kompakt und es gilt $K \subseteq co(A_1 \cup \cdots \cup A_n)$.
Zum Beweis der anderen Inklusion seien $(s,a), (t,b) \in S \times A$ und $\alpha, \beta \ge 0$ mit $\alpha + \beta = 1$. Dann gilt

$$\alpha f(s,a) + \beta f(t,b) = f(u,c)$$

mit $u = \alpha s + \beta t \in S$ und $c \in A$ wegen
$$c_i = \frac{\alpha s_i a_i + \beta t_i b_i}{\alpha s_i + \beta t_i} \in A_i,$$
womit gezeigt ist, dass K konvex ist. Wählt man speziell $s_i = 1$, $s_j = 0$ für $i \neq j$, so erhält man aus der Definition von K, dass $A_i \subseteq K$. Somit liefert die Konvexität von K, dass $co(A_1 \cup \cdots \cup A_n) \subseteq K$. □

Wird im Satz von Krein-Milman die Voraussetzung der Konvexität von K weggelassen, so könnten Extremalpunkte von $\overline{co}\,(K)$ auch außerhalb von K liegen.
Der nachfolgende Satz, auch bekannt als Milman'sche Umkehrung des Satzes von Krein-Milman, zeigt, dass dieses Phänomen nicht auftreten kann, wenn $\overline{co}\,(K)$ kompakt ist.

Satz 1.9 (*Milman*)
Sei X ein lokalkonvexer topologischer Vektorraum und $K \subseteq X$ eine kompakte Teilmenge. Ist weiters $\overline{co}\,(K)$ kompakt, dann liegt jeder Extremalpunkt von $\overline{co}\,(K)$ bereits in K.

Beweis:
Sei $p \in E(\overline{co}\,(K)) \backslash K$. Dann existiert eine konvexe kreisförmige Nullumgebung V mit
$$(p + \overline{V}) \cap K = \emptyset. \tag{2}$$
Da K kompakt ist, existieren $x_1, \dots, x_n \in K$ mit
$$K \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} (x_i + V).$$
Setzt man
$$A_i = \overline{co}\,(K \cap (x_i + V)) \subseteq \overline{co}\,(K)\,,$$
so erhält man, dass die Mengen A_i kompakt und konvex sind und $K \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} A_i$. Obiges Lemma zeigt nun, dass
$$\overline{co}\,(K) \subseteq \overline{co}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = co\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right).$$
Die umgekehrte Inklusion ist trivial, da $A_i \subseteq \overline{co}\,(K)$ für alle i gilt.
Nun kann p also dargestellt werden als $p = \sum_{j=1}^{N} t_j y_j$, wobei jedes y_j in einem A_i liegt und $\sum_{j=1}^{n} t_j = 1$. Drückt man hier t_1 explizit aus und setzt dies in die Darstellung von p ein, so erhält man
$$p = t_1 y_1 + (1 - t_1) \frac{t_2 y_2 + \cdots + t_N y_N}{t_2 + \cdots + t_N},$$
also ist p die Konvexkombination zweier Punkte aus $\overline{co}\,(K)$.
Da p ein Extremalpunkt von $\overline{co}\,(K)$ ist, liefert diese Darstellung $y_1 = p$. Da y_1 in einem A_i liegt und weiters V konvex ist, erhält man schließlich
$$p \in A_i \subseteq x_i + \overline{V} \subseteq K + \overline{V},$$
was ein Widerspruch zu (2) ist. □

2 Bishop's Theorem

Mit Hilfe des Satzes von Krein-Milman kann der Satz von Stone-Weierstrass verallgemeinert werden.
Hierfür benötigt man zunächst ein paar Begriffsbildungen.

Definition 2.1
Sei S ein kompakter Hausdorff-Raum und A eine abgeschlossene Unteralgebra von $C(S)$.
Eine Menge $E \subseteq S$ wird A-antisymmetrisch genannt, wenn jedes $f \in A$, das auf E nur reelle Werte annimmt, konstant auf E ist.
Anders ausgedrückt bedeutet das nichts anderes, als dass die Algebra $A_E := \{f|_E : f \in A\}$, die aus den Einschränkungen der Funktionen aus A auf E besteht, keine nichtkonstante reellwertige Funktion enthält.

Nun kann man eine Äquivalenzrelation auf S folgendermaßen definieren. Seien $p, q \in S$, dann sei $p \sim q$, wenn eine A-antisymmetrische Menge E existiert, die p und q enthält.

Jede Äquivalenzklasse bezüglich dieser Relation ist abgeschlossen und die Äquivalenzklassen sind die maximalen A-antisymmetrischen Mengen.

Satz 2.2 (*Bishop*)
Sei S ein kompakter Hausdorff-Raum und A eine abgeschlossene Unteralgebra von $C(S)$. Weiters sei $g \in C(S)$ und $g|_E \in A_E$ für jede maximale A-antisymmetrische Menge E. Dann gilt $g \in A$.

Beweis:
Betrachtet man den Annihilator von A, so besteht dieser aus allen regulären komplexen Borelmaßen μ auf S mit $\int f d\mu = 0$ für alle $f \in A$. Nun definiert man

$$K = \{\mu \in A^{\perp} : \|\mu\| \leq 1\},$$

wobei $\|\mu\| = |\mu|(S)$. Dann ist K konvex, kreisförmig und wegen des Satzes von Alaoglu schwach*-kompakt.
Ist $K = \{0\}$, dann ist auch $A^{\perp} = \{0\}$, also $A = C(S)$ und es ist nichts zu zeigen.
Sei also K nichttrivial, dann existiert auf Grund des Satzes von Krein-Milman ein Extremalpunkt μ, für den klarerweise $\|\mu\| = 1$ gelten muss.
Sei $E = \operatorname{supp}(\mu)$ der Träger von μ, also die kleinste kompakte Menge mit $|\mu|(E) = \|\mu\|$.
Wir zeigen zunächst, dass E antisymmetrisch ist.
Hierfür betrachtet man $f \in A$ mit $f|_E$ reell, o.B.d.A kann man $-1 < f < 1$ auf E angenehmen. Weiters definiert man Maße σ, τ durch

$$d\sigma = \frac{1}{2}(1+f)d\mu, \quad d\tau = \frac{1}{2}(1-f)d\mu.$$

Da A eine Algebra ist, gilt $\sigma, \tau \in A^{\perp}$. Da $1+f$ und $1-f$ positiv auf E sind, folgt

$$\|\sigma\| + \|\tau\| = \frac{1}{2}\int_E 1 + f d\,|\mu| + \frac{1}{2}\int_E 1 - f d\,|\mu| = |\mu|\,(E) = 1.$$

μ ist also eine Konvexkombination von Maßen $\sigma_1 = \frac{\sigma}{\|\sigma\|}$ und $\tau_1 = \frac{\tau}{\|\tau\|}$, die beide in K liegen. Da μ extremal ist, folgt nun $\mu = \sigma_1$ oder

$$\frac{1}{2}(1+f)d\mu = \|\sigma\|\, d\mu.$$

Daher ist $f = 2\|\sigma\| - 1$ auf E, die Einschränkung ist also konstant, und somit ist E antisymmetrisch.

Sei nun g so wie in den Voraussetzung des Satzes, dann gilt klarerweise $\int g d\mu = 0$ für alle in K extremalen μ, also auch für alle μ aus der konvexen Hülle dieser Extremalpunkte.
Da die Abbildung $\mu \mapsto \int g d\mu$ schwach*-stetig auf K ist, impliziert der Satz von Krein-Milman, dass $\int g d\mu = 0$ für jedes $\mu \in K$, also für jedes $\mu \in A^{\perp}$.
Wir haben also gezeigt, dass jedes stetige lineare Funktional auf $C(S)$, das A annihiliert, auch g annihiliert. Der Trennungssatz von Hahn-Banach liefert nun die gewünschte Aussage $g \in A$. □

Bemerkung 2.3. Ist A abgeschlossen, selbstadjungiert und punktetrennend, so ist jede antisymmetrische Menge einelementig. Der obige Satz impliziert also den Satz von Stone-Weierstrass.

3 Der Fixpunktsatz von Kakutani

Eine weitere Anwendungsmöglichkeit des Satzes von Krein-Milman sind Beweise für verschiedene Fixpunktsätze.
Nachfolgend wird der Fixpunktsatz von Kakutani bewiesen, der zum Beispiel zum Beweis der Existenz eines Haar'schen Maßes für kompakte Gruppen verwendet werden kann.

LEMMA 3.1
Seien A, B topologische Vektorräume, B kompakt, $E \subseteq A \times B$ und π die kanonische Projektion von $A \times B$ nach A, dann gilt:
Liegt $p \in A$ im Abschluss von $\pi(E)$, dann liegt (p, q) im Abschluss von E für ein $q \in B$.

Beweis: Der Beweis wird indirekt geführt. Sei also angenommen, dass die Aussage nicht gilt, dann existiert für jedes $q \in B$ eine Umgebung $W_q \subseteq B$, dass $(V_q \times W_q) \cap E = \emptyset$ für eine Umgebung V_q von p in A.
Da $\{W_q : q \in B\}$ eine Überdeckung von B ist, folgt aus der Kompaktheit von B, dass bereits $B \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} W_{q_i}$ mit gewissen endlich vielen $q_1, \ldots, q_n \in B$.

Nun ist aber $\bigcap_{i=1}^{n} V_{q_i}$ eine Umgebung von p, die mit $\pi(E)$ leeren Schnitt hat, ein Widerspruch zu $p \in \overline{\pi(E)}$. □

Definition 3.2
Eine Menge G von Abbildungen einer Teilmenge K eines topologischen Vektorraumes X in sich selbst heißt gleichgradig stetige Gruppe, wenn sie die folgenden beiden Eigenschaften erfüllt.

1. Jede Abbildung $T \in G$ ist bijektiv von K nach K und für die Inverse gilt $T^{-1} \in G$. Für $T_1, T_2 \in G$ gilt $T_1 T_2 \in G$. (Gruppeneigenschaft)
2. Zu jeder Nullumgebung W in X existiert eine Nullumgebung V in X mit $Tx - Ty \in W$, wenn $x, y \in K$, $x - y \in V$ und $T \in G$.

Beispiel 3.3. Eine Gruppe linearer Isometrien auf einem normierten Raum X ist eine gleichgradig stetige Gruppe.

Satz 3.4 (*Fixpunktsatz von Kakutani*)
Sei K eine nichtleere kompakte konvexe Menge in einem lokalkonvexen Vektorraum X und G eine gleichgradig stetige Gruppe von affinen Abbildungen von K nach K. Dann hat G einen gemeinsamen Fixpunkt in K.

Beweis:
Sei Ω die Menge aller nichtleeren, kompakten konvexen Mengen $H \subseteq K$ mit $T(H) \subseteq H$ für alle $T \in G$. Ω ist nichtleer, da $K \in \Omega$. Ordnet man Ω nun mit der Mengeninklusion, so liefert das Hausdorff'sche Maximalitätsprinzip (eine äquivalente Formulierung des Lemmas von Zorn), dass Ω ein maximal total geordnetes Teilsystem Ω_0 enthält. Der Durchschnitt $Q := \bigcap_{U \in \Omega_0} U$ ist dann minimal in Ω. Das Ziel ist nun zu zeigen, dass Q einpunktig ist.
Man nehme hierfür das Gegenteil an, also dass $x, y \in Q$, $x \neq y$ existieren.
Dann gibt es eine Nullumgebung W in X mit $x - y \notin W$. Sei nun V die in der Definition der gleichgradigen Stetigkeit zugehörige Nullumgebung.
Wäre nun $Tx - Ty \in V$ für irgendein $T \in G$, dann liefert

$$x - y = T^{-1}(Tx) - T^{-1}(Ty) \in W$$

einen Widerspruch. Es ist also für kein $T \in G$ $Tx - Ty \in V$.
Setze nun $z = \frac{1}{2}(x+y) \in Q$ und definiere $G(z) = \{Tz : T \in G\}$. Diese Menge ist klarerweise G-invariant und so auch der Abschluss $K_0 = \overline{G(z)}$. Daher ist $\overline{co}\,(K_0)$ eine nichtleere G-invariante kompakte konvexe Teilmenge von Q. Da Q laut Konstruktion minimal ist, folgt $\overline{co}\,(K_0) = Q$.
Sei nun p ein Extremalpunkt von Q, der wegen des Satzes von Krein-Milman existiert. Da Q kompakt ist und $Q = \overline{co}\,(K_0)$ gilt liefert Satz 1.9, dass p im Abschluss K_0 von $G(z)$ liegt.
Nun definiert man die Menge

$$E = \{(Tz, Tx, Ty) : T \in G\} \subseteq Q \times Q \times Q.$$

Da $p \in \overline{G(z)}$ und $Q \times Q$ kompakt ist, liefert Lemma 3.1, dass ein Punkt $(x^*, y^*) \in Q \times Q$ existiert, so dass (p, x^*, y^*) im Abschluss von E liegt. Da $2Tz = Tx + Ty$ für alle $T \in G$, folgt, dass $2p = x^* + y^*$, was impliziert, dass $x^* = y^*$ da p ein Extremalpunkt von Q ist. Nun wurde aber bereits gezeigt, dass $Tx - Ty \notin V$ für alle $T \in G$ und damit $x^* - y^* \notin V$. Somit folgt $x^* \neq y^*$, was den gewünschten Widerspruch liefert. □

4 Integral-Repräsentationstheorie

In diesem Abschnitt soll der Satz von Krein-Milman umformuliert und verallgemeinert werden.

Definition 4.1
Sei K eine nichtleere kompakte Teilmenge eines lokalkonvexen Vektorraumes X und $x \in X$. Dann heißt x dargestellt von einem nichtnegativen regulären Borel-Maß μ auf K mit $\mu(K) = 1$, also einem Wahrscheinlichkeitsmaß, wenn gilt

$$f(x) = \int_K f d\mu, \quad \forall\, f \in X'.$$

Für die Umformulierung des Satzes von Krein-Milman in einen Integral-Repräsentationssatz ist folgende Proposition nützlich.

Satz 4.2
Sei K eine kompakte Teilmenge eines lokalkonvexen Vektorraumes X, dann gilt:
Ein Punkt $x \in X$ gehört genau dann zu $\overline{co}\,(K)$, wenn ein Wahrscheinlichkeitsmaß μ auf $\overline{co}\,(K)$ existiert, das x darstellt.

Beweis: Ist μ ein Wahrscheinlichkeitsmaß, dass x darstellt, dann gilt für jedes $f \in X'$

$$f(x) = \int_K f d\mu \le \sup \mathrm{Re} f(K)\mu(K) \le \sup \mathrm{Re} f(\overline{co}\,(K)).$$

Da $\overline{co}\,(K)$ abgeschlossen und konvex ist, gilt somit mit dem Trennungssatz von Hahn-Banach $x \in \overline{co}\,(K)$.

Sei umgekehrt $x \in \overline{co}\,(K)$, dann gibt es ein Netz in der konvexen Hülle von K, das gegen x konvergiert. Das heißt es existieren Punkte y_α mit $y_\alpha = \sum_{i=1}^{n_\alpha} \lambda_i^\alpha x_i^\alpha$, wobei α eine gerichtete Menge durchläuft und $\lambda_i^\alpha > 0, \sum \lambda_i^\alpha = 1, x_i^\alpha \in K$, mit $\lim y_\alpha = x$.
Nun kann jeder Punkt y_α durch das Wahrscheinlichkeitsmaß $\mu_\alpha = \sum \lambda_i^\alpha \varepsilon_{x_i}^\alpha$ dargestellt werden, wobei ε_{x_i} das Punktmaß von x_i ist, also jenes Maß, das auf jeder Borel-Menge, die x_i enthält, den Wert 1 und sonst den Wert 0 annimmt.
Der Darstellungssatz von Riesz liefert nun, dass die Menge aller Wahrscheinlichkeitsmaße auf

K mit einer schwach*-kompakten konvexen Teilmenge von $C(K)'$ identifiziert werden kann. Wegen der Kompaktheit existiert also ein Teilnetz μ_β von μ_α, das in der schwach*-Topologie auf $C(K)'$ gegen ein Wahrscheinlichkeitsmaß μ auf K konvergiert.
Ein Funktional $f \in X'$ ist speziell eingeschränkt auf K stetig. Da wegen $y_\alpha \to x$ auch $y_\beta \to x$ gilt, folgt

$$f(x) = \lim f(y_\beta) = \lim \int_K f d\mu_\beta = \int_K f d\mu.$$

□

KOROLLAR 4.3
Der Satz von Krein-Milman ist äquivalent zu der Aussage:
Jeder Punkt einer kompakten konvexen Teilmenge K eines lokalkonvexen Vektorraumes wird von einem Wahrscheinlichkeitsmaß mit Träger $\overline{E(K)}$ dargestellt.

Beweis:
„$\Rightarrow$“: Setze $Y := \overline{E(K)}$ und sei $x \in K$. Dann gilt nach dem Satz von Krein-Milman auch $x \in \overline{co}(Y)$ und Satz 4.2, angewendet mit Y als kompakte Menge, liefert, dass x durch ein Wahrscheinlichkeitsmaß μ auf Y dargestellt wird. Setzt man μ auf K fort durch 0 außerhalb von Y, so ist die Behauptung gezeigt.

„$\Leftarrow$“: Satz 4.2 liefert mit obigem Y und $x \in K$, dass $x \in \overline{co}(Y)$ und somit auch in $\overline{co}(E(K))$ gilt. □

Betrachtet man nun diese Äquivalenzaussage, so erkennt man, dass jedes Repräsentationstheorem, das Aussagen über Darstellbarkeit durch Wahrscheinlichkeitsmaße liefert, deren Träger die Extremalpunkte $E(K)$ sind (anstatt des Abschlusses dieser Menge), eine Verschärfung des Satzes von Krein-Milman darstellt. Wir wollen, ohne Beweis, zwei Aussagen in dieser Richtung angeben. Für den Beweis siehe [Phelps].

SATZ 4.4 (*Choquet*)
Sei K eine metrisierbare kompakte konvexe Teilmenge eines lokalkonvexen topologischen Vektorraumes X und $x \in K$.
Dann existiert ein Wahrscheinlichkeitsmaß μ auf K, das x darstellt und dessen Träger in $E(K)$ enthalten ist.

Dieses Theorem ist ein Spezialfall des nachfolgenden Satzes.

SATZ 4.5 (*Choquet-Bishop-de Leeuw*)
Sei K eine kompakte konvexe Teilmenge eines lokalkonvexen topologischen Vektorraumes X und $x \in K$.
Dann existiert ein Wahrscheinlichkeitsmaß μ auf K, das x darstellt und das auf jeder Baire-Menge, die disjunkt zu $E(K)$ ist, verschwindet.

Literatur

[Rudin] *Functional Analysis*, Walter Rudin, McGraw-Hill 1991

[Werner] *Funktionalanlysis*, Dirk Werner, Springer, 2007

[Yoshida] *Functional Analysis*, Kosaku Yoshida, Springer, 1980

[Phelps] *Lectures on Choquet's Theorem*, Robert R. Phelps, Springer, 2001