Das Haarsche Maß

Michael Feischl

7. Juli 2009

Inhaltsverzeichnis

In diesem Abschnitt werden topologische Gruppen definiert und einige einfache Eigenschaften gezeigt, die für das Hauptthema dieser Arbeit, den Existenz und Eindeutigkeitsbeweis des Haarschen Maßes benötigt werden.

1 topologische Gruppen

Definition 1.1. *Sie G im Folgenden eine (multiplikativ geschriebene) Gruppe mit dem Einselement e. Sind $A, B \subseteq G$ so schreiben wir*

$$AB := \{ab : a \in A, b \in B\}$$

$$xB := \{xb : b \in B\}$$

Weiters werden die Linkstranslation $L(a)$ und die Rechtstranslation $R(a)$ definiert

$$L(a) : \begin{cases} G \to G \\ x \mapsto ax \end{cases}$$

$$R(a) : \begin{cases} G \to G \\ x \mapsto xa \end{cases}$$

Definition 1.2. *Ein Paar $(G, \mathcal{T})$ heißt eine topologische Gruppe, wenn G ein Gruppe ist und $\mathcal{T}$ eine Topolgie auf G ist, sodass die Gruppenoperationen Multiplikation und Inversenbildung stetig sind. (Das Produkt $G \times G$ ist mit der Produkttopologie versehen) Mit $C_{00}(G)$ bezeichnen wir die stetigen Funktionen mit kompaktem Träger von G nach $\mathbb{R}$. $C_{00}^{+}(G) := \{f \in C_{00}(G) \,:\, f \geq 0\}$.*

Im Folgenden sei $(G, \mathcal{T})$ immer eine topologische Gruppe.

Lemma 1.1. *Die Translationen $L(a)$ und $R(a)$ und die Inversenbildung $\iota : x \mapsto x^{-1}$ sind Homöomorphismen von G in sich.*

Beweis. Die Abbildung $x \mapsto L(a)x$ kann geschrieben werden als $x \mapsto (a, x) \mapsto ax$ und ist damit als Zusammensetzung stetiger Abbildungen stetig.Es gilt $L(a)^{-1} = L(a^{-1})$ und damit ist $L(a)^{-1}$ auch stetig. Der Beweis für $R(a)$ verläuft analog. Die Inversenbildung ι ist laut Definition stetig und es gilt $\iota = \iota^{-1}$. □

Wir nennen eine Menge $M \subseteq G$ symmetrisch wenn gilt $x \in M \Leftrightarrow x^{-1} \in M$.
Im Folgenden sei $\mathcal{U}$ der Umgebungsfilter von e.

Lemma 1.2.
(i) Die Menge $\{U \cap U^{-1} : U \in \mathcal{U}\}$ ist eine Umgebungsbasis aus symmetrischen Mengen.
(ii) Der Umgebungsfilter von $a \in G$ ist durch $\{aU : U \in \mathcal{U}\}$ gegeben.
(iii) Für jedes $U \in \mathcal{U}$ existiert ein $V \in \mathcal{U}$ mit $V^2 = VV \subseteq U$

Beweis. *(i)* gilt klarerweise wegen Lemma 1.1. Für *(ii)* benutzt man, dass wegen der Stetigkeit der Gruppenmultiplikation eine offene Menge $\tilde{V} \in G \times G$ existiert mit $xy \in U$ für alle $(x, y) \in \tilde{V}$. Wegen der Definition der Produkttopologie existieren Mengen $V_1, V_2 \in \mathcal{T}$ mit $V_1 \times V_2 \subseteq \tilde{V}$. Wähle $V = V_1 \cap V_2$, dann ist V wieder offen und es gilt $V^2 \subseteq U$. □

Definition 1.3. *Wir nennen eine Funktion $f : G \to \mathbb{R}$ links-gleichmäßig stetig, falls zu jedem $\epsilon > 0$ eine Umgebung $U \in \mathcal{U}$ existiert, so dass*

$$|f(x) - f(y)| < \epsilon, \quad \forall x, y \in G,\ x^{-1}y \in U$$

oder äquivalent

$$|f(x) - f(xu)| < \epsilon, \quad \forall x \in G,\ u \in U$$

gilt.

Satz 1.1. *Sei $(G, \mathcal{T})$ eine topologische Gruppe, so ist jede Funktion $f \in C_0(G)$ links-gleichmäßig stetig.*

Beweis. Sei $\epsilon > 0$ fest. Da f stetig ist existiert zu jedem $x \in G$ eine Umgebung $U_x \in \mathcal{U}$ mit $|f(x) - f(xu)| < \epsilon$ für alle $u \in U_x$. Laut Lemma 1.2 existiert $\hat{V} \in \mathcal{U}$ mit $\hat{V}^2 \subseteq U_x$ und eine symmetrische Menge $V_x \in \mathcal{T}$ mit $V_x^2 \subseteq \hat{V}$. Also gilt $V_x^3 \subseteq U_x$. Da $K := \operatorname{supp}(f)$ kompakt ist exisitieren endlich viele Punkte $x_1, \ldots, x_n$, so dass

$$K \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} x_i V_{x_i}$$

gilt. Setze nun $V := \bigcap_{i=1}^{n} V_{x_i}$ und wähle $x \in G$ fest. Ist $xV \cap K = \emptyset$ dann ist $f(x) = f(xv)$, $v \in V$ und damit auch $|f(x) - f(xv)| = 0$, $v \in V$. Anderenfalls existiert $i \in \{1, \ldots, n\}$ mit $xV \cap x_i V_{x_i} \neq \emptyset$ und damit $x \in x_i V_{x_i} V^{-1} \subseteq x_i V_{x_i}^2$. Also gilt $xV \subseteq x_i V_{x_i}^3 \subseteq x_i U_{x_i}$. Nach der Wahl von U_{x_i} gilt

$$|f(x) - f(xv)| \leq |f(x) - f(x_i)| + |f(x_i) - f(xv)| < 2\epsilon \quad v \in V$$

Daher ist f links-gleichmäßig stetig.

□

Wir werden später den *Darstellungssatz von Riesz* verwenden. Für einen Beweis sei zum Beispiel auf [1] verwiesen.

Satz 1.2 (Darstellungssatz von F. Riesz)**.** *Es seien X ein lokal-kompakter Hausdorff-Raum und $I : C_0(X) \to \mathbb{R}$ eine positive Linearform. Dann existiert genau ein Radon-Maß μ, so dass*

$$I(f) = \int_X f d\mu, \quad f \in C_0(X)$$

Lemma 1.3. *Sei $(G, \mathcal{T})$ eine lokal-kompakte Hausdorffsche topologische Gruppe und $I : C_0(G) \to \mathbb{R}$ eine positive linksinvariante Linearform, so existiert genau ein Radon-Maß mit*

$$I(f) = \int_G f d\mu, \quad f \in C_0(G) \tag{1}$$

und μ ist linksinvariant. Umgekehrt enspricht jedem linksinvarianten Radon-Maß μ eine linksinvariante positive Linearform $I : C_{00} \to \mathbb{R}$.

Beweis. Nach Satz 1.2 existiert zu I genau ein Radon-Maß μ. Man erhält sofort

$$\int_G f dL(y)\mu = \int_G f \circ L(y) d\mu = I(f \circ L(y)) = I(f) = \int_G f d\mu, \quad f \in C_{00}(G)$$

Also ist μ linksinvariant. Analog folgt aus der Linksinvarianz eines Radon-Maßes auch die Linksinvarianz der durch (1) definierten Linearform. □

2 Das Haarsche Maß

Der folgende Beweis zeigt die Existenz eines linksinvarianten Radon-Maßes speziellen Gruppen. Solch ein Maß heißt Haar-Maß. Wir verwenden einen ähnlichen Ansatz, wie auch A. Haar in seinem Originalbeweis. Um diesen zu motivieren sei angenommen, ein linksinvariantes Maß u sei auf G gegeben. Dann wählen wir ein Kompaktum $K_0 \subseteq G$ und normieren μ so, dass $\mu(K_0) = 1$ gilt. Sei nun $U \in \mathcal{U}$ und $K \subseteq G$ kompakt, so existieren endlich viele Punkte $x_1, \ldots, x_n$ mit $K \subseteq \bigcup_{i=1}^n x_i U$. Nun definiert man $(K : U)$ als minimale Anzahl der nötigen Punkte für solche eine Überdeckung. Die Idee ist nun, U so klein zu wählen, dass sich die Translate beinahe lückenlos aneinander fügen, denn dann wird Näherungsweise gelten $\mu(K) \approx (K : U)\mu(U)$ und $\mu(K_0) \approx (K_0 : U)\mu(U)$. Also können wir $\mu(K) \approx (K : U)/(K_0 : U)$ erwarten. Nun will man U gegen $\{e\}$ schrumpfen lassen. Stellt sich dabei ein Limes ein, so kann man wegen der Linksinvarianz hoffen, einen Kandidaten für das Haar Maß gefunden zu haben. A. Haar meisterte dieses Zusammenziehen, indem er G als zusätzlich metrisierbar und seperabel voraussetzte. U durchläuft dann eine Umgebungsbasis $(U_n)_{n\geq 1}$ und daraus lässt sich eine konvergente Teilfolge gewinnen. In unserem Beweis umgehen wir diese zusätzlichen Voraussetzungen indem wir den Satz von Tychonoff und ein Kompaktheitsargument verwenden.

Satz 2.1 (A.Haar (1932))**.** *Sei $(G, \mathcal{T})$ eine lokal-kompakte Hausdorffsche topologische Gruppe, so gibt es eine linksinvariante positive Linearform $I : C_0(G) \to \mathbb{R}, I \neq 0$. I heißt linkes Haar-Integral auf $C_0(G)$*

Beweis. Es seien $f, g \in C_{00}^+(G)$, $g \neq 0$, dann ist die Menge $V := \left\{x \in G : g(x) > \frac{1}{2} \|g\|_\infty\right\}$ nicht leer und offen. Wegen der Kompaktheit von $\mathrm{supp}(f)$ existieren Punkte $x_1, \ldots, x_k$ für die gilt

$$\mathrm{supp}(f) \subseteq \bigcup_{i=1}^k x_i \cdot V$$

Da für jeden Punkt in V gilt $2g(x)/\|g\|_\infty > 1$, folgt sofort $f \leq \frac{2\|f\|_\infty}{\|g\|_\infty} \sum_{i=1}^k g \circ L(x_i^{-1})$. Es gilt also zumindest eine Ungleichung folgenden Typs

$$f \leq \sum_{i=1}^{k} c_i \cdot g \circ L(x_i^{-1}), \quad k \in \mathbb{N},\ c_i \geq 0 \text{ und } x_i \in G,\ i = 1, \ldots, k \tag{2}$$

Wir definieren nun

$$(f : g) := \inf \sum_{i=1}^{k} c_i, \quad f, g \in C_{00}^+(G),\ g \neq 0$$

Wobei das Infimum über alle Folgen $c_1, \ldots, c_k,\ k \in \mathbb{N}$ gebildet wird, für die eine Ungleichung des Typs (2) gilt. Für jede positive, linksinvariante Linearform $J : C_0(G) \to \mathbb{R},\ J \neq 0$ gilt $J(f) \leq \sum_{i=1}^k c_i \cdot J(g)$, also $\frac{J(f)}{J(g)} \leq \sum_{i=1}^k c_i$ und damit $\frac{J(f)}{J(g)} \leq (f : g)$.
Bemerke außerdem dass $(f, g) > 0, \quad f, g \in C_{00}^+(G),\ f, g \neq 0$ gilt. Um einen ersten Kandidaten für das gesuchte Funktional I zu erhalten, wollen wir den beschriebenen Ausdruck normieren, und für festes g als Funktion von f ansehen. Wir wählen eine feste Vergleichsfunktion $f_0 \in C_{00}^+(G),\ f_0 \neq 0$. Es gilt $(f_0, g) > 0$. Nun definieren wir

$$I_g(f) := \frac{(f : g)}{(f_0 : g)}, \quad f, g \in C_{00}^+(G),\ g \neq 0$$

Es gelten folgende Eigenschaften für $I_g : C_{00}^+(G) \to \mathbb{R}^+$.

$$\begin{aligned} I_g(f \circ L(y)) &= I_g(f), \quad y \in G && (3)\\ I_g(\lambda f) &= \lambda I_g(f), \quad \lambda \geq 0 && (4)\\ I_g(f_1 + f_2) &\leq I_g(f_1) + I_g(f_2) && (5) \end{aligned}$$

Außerdem gilt noch

$$I_g(f) \in \left[\frac{1}{(f_0 : f)}, (f : f_0)\right] \quad f \neq 0 \tag{6}$$

Gleichung (3) ergibt sich folgendermaßen. Für alle $c_i \geq 0$ und $x_i \in G,\ i = 1, \ldots, k$, für die (2) gilt, gilt auch $(f \circ L(y))(x) = f(L(y)x) \leq \sum_{i=1}^k c_i \left(g \circ L(x_i^{-1})\right)(L(y)x)$.
Da $\left(g \circ L(x_i^{-1})\right)(L(y)x) = (g \circ L(x_i^{-1}y))(x)$ ist, gilt die Ungleichung (2) mit den selben c_i und rechtstranslatierten $\tilde{x}_i = R(y)x_i$. Also erhalten wir $I_g(f \circ L(y)) \leq I_g(f)$. Die umgekehrte Ungleichung gilt natürlich gleichermaßen und damit ist $I_g(f \circ L(y)) = I_g(f)$.
Gleichung (4) ist wegen der Definition von $(f : g)$ und I_g trivial.
Wir kommen zu (5). Wenn f_1 die Ungleichung (2) mit $a_i \geq 0$ und $y_i \in G,\ i = 1, \ldots, k$, sowie f_2 mit $b_i \geq 0$ und $z_i \in G,\ i = 1, \ldots, l$ erfüllen, dann setze

$$c_i := a_i, \quad x_i := y_i, \quad i = 1, \ldots, k$$

und

$$c_i := b_{i-k}, \quad x_i := z_{i-k}, \quad i = k + 1, \ldots, k + l.$$

Klarerweise gilt nun

$$f_1 + f_2 \leq \sum_{i=1}^{k+l} c_i \cdot g \circ L(x_i^{-1})$$

Bildet man nun die entsprechenden Infima, so folgt Gleichung (5).
Um (6) einzusehen, zeigen wir zunächst

$$(h_1 : h_3) \leq (h_1 : h_2) \cdot (h_2 : h_3), \quad h_1, h_2, h_3 \in C_{00}^+(G),\ h_2, h_3 \neq 0$$

Wir wählen wieder entsprechende $a_i \geq 0$ und $y_i \in G$, $i = 1, \ldots, k$ sowie mit $b_i \geq 0$ und $z_i \in G$, $i = 1, \ldots, l$, so dass (2) gilt:

$$f \leq \sum_{i=1}^{k} a_i \cdot g \circ L(y_i^{-1})$$

$$g \leq \sum_{i=1}^{l} b_i \cdot h \circ L(z_i^{-1})$$

Dann schätzt man die rechte Seite der ersten Ungleichung mit der zweiten Ungleichung ab und erhält

$$f \leq \sum_{i=1}^{k} a_i \cdot g \circ L(y_i^{-1}) \leq \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{l} b_j \cdot h \circ L((z_j y_i)^{-1})$$

Also folgt $(f : h) \leq \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{l} a_i b_j$. Bildet man die Infima, so erhält man $(h_1 : h_3) \leq (h_1 : h_2)(h_2 : h_3)$. Setzt man $h_1 = f$, $h_2 = f_0$ und $h_3 = g$, so folgt

$$(f : g) \leq (f : f_0)(f_0 : g)$$

Analog ergibt sich mit $h_1 = f_0$, $h_2 = f$ und $h_3 = g$

$$(f_0 : g) \leq (f_0 : f)(f : g).$$

Aus diesen beiden Ungleichungen erhalten wir

$$\frac{1}{(f_0 : f)} \leq \underbrace{\frac{(f : g)}{(f_0 : g)}}_{=I_g(f)} \leq (f : f_0)$$

Wir fassen I_g als einen Näherung für die gesuchte linksinvariante Linearform I auf, denn die Eigenschaften (3) und (4) sind bereits passend. Eigenschaft (5) ist aber für die angestrebte Linearität unzureichend, daher zeigen wir noch eine Ungleichung in umgekehrter Richtung.

Zu allen $f_1, f_2 \in C_{00}^+(G)$ und $\epsilon > 0$ gibt es eine Umgebung $V \in \mathcal{U}$, so dass

$$I_g(f_1) + I_g(f_2) \leq I_g(f_1 + f_2) + \epsilon \tag{7}$$

für alle $g \in C_{00}^+(G)$, $g \neq 0$ *mit* $\mathrm{supp}(g) \subseteq V$ *gilt*

Um diese Aussage zu beweisen definiere $K := \mathrm{supp}(f_1 + f_2)$ und wähle ein $h \in C_{00}^+(G)$ mit $h|K = 1$. Wir setzen $F = f_1 + f_2 + \delta h$ wobei δ so klein gewählt wird, dass $2\delta(h : f_0) < \epsilon/2$ ist. Weiters definieren wir für $j = 1, 2$ Funktionen ϕ_j durch

$$\phi_j(x) := \begin{cases} \frac{f_j(x)}{F(x)} & , x \in \{x \in G : \; F(x) > 0\} \\ 0 & , x \in K^c \end{cases}$$

Damit sind die Funktion ϕ_j schon wohldefiniert, da $K \subseteq \{x \in G : \; F(x) > 0\}$ und für $x \in \{x \in G : \; F(x) > 0\} \cap K^c$ schon $f_j = 0$ ist. Wie man leicht erkennt ist ϕ_j, $j = 1, 2$ auch stetig, da ϕ_j, $j = 1, 2$ auf den offenen Mengen $\{x \in G : \; F(x) > 0\}$ und K^c stetig ist. Nach Satz 1.1 sind die Funktionen phi_j, $j = 1, 2$ schon links-gleichmäßig stetig. Weiters gilt klarerweise $0 \leq \phi_1 + \phi_2 \leq 1$.
Wählen wir nun $0 < \eta < \frac{1}{2}$ so klein, dass $2\eta(f_1 + f_2 : f_0) < \epsilon/2$ gilt, so existiert $V \in \mathcal{U}$ mit

$$|\phi_j(x) - \phi_j(xv)| < \eta, \quad x \in G, \; v \in V$$

Für festes $g \in C_{00}^+(G)$, $g \neq 0$ und $\mathrm{supp}(g) \subseteq V$ seien c_i und x_i so gewählt, dass

$$F \leq \sum_{i=1}^{k} c_i g \circ L(x_i^{-1}) \tag{8}$$

gilt.Ist $(g \circ L(x_i^{-1}))(x) \neq 0$ dann muss $x \in x_i \mathrm{supp}(g) \subseteq x_i V$ gelten. Also folgt wegen der gleichmäßigen Stetigkeit $\phi_j(x) \leq \phi_j(x_i) + \eta$ und damit

$$f_j(x) = \phi_j(x) F(x) \leq \sum_{i=1}^{k} c_i(\phi_j(x_i) + \eta) \cdot g(x_i^{-1} x), \quad x \in G, \; j = 1, 2$$

Wenn man nun diese beiden Ungleichungen addiert so erhält man

$$f_1(x) + f_2(x) = (\phi_1(x) + \phi_2(x))F(x) \leq \sum_{i=1}^{k} c_i(\phi_1(x_i) + \phi_2(x_i) + \eta) \cdot g(x_{i-1} x), \quad x \in G.$$

Daher ist

$$(f_1 : g) + (f_2 : g) \leq \sum_{i=1}^{k} c_i(\underbrace{\phi_1(x_i) + \phi_2(x_i)}_{\leq 1} + 2\eta) \leq \sum_{i=1}^{k} c_i(1 + 2\eta)$$

Bildet man das Infimum über alle Folgen $c_1, \ldots, c_k$, $k \in \mathbb{N}$ für die Ungleichung (8) gilt, so folgt

$$(f_1 : g) + (f_2 : g) \leq (F : g)(1 + 2\eta) \leq ((f_1 + f_2 : g) + \delta(h : g))(1 + 2\eta)$$

Die zweite Ungleichung folgt aus (3) und (4) da $(f_j : g) = I_g(f_j)(f_0 : g)$ gilt. Wir erhalten also

$$I_g(f_1) + I_g(f_2) \leq (I_g(f_1 + f_2) + \delta I_g(h))(1 + 2\eta)$$

Mit (6) und der Wahl von δ und η folgt

$$2\eta I_g(f_1 + f_2) \leq 2\eta(f_1 + f_2 : f_0) < \epsilon/2$$
$$\delta I_g(h)(1 + 2\eta) \leq 2\delta(h : f_0) < \epsilon/2$$

Damit ist (7) bewiesen.

Nun bleibt ist nur noch der oben angedeutete Prozess des Zusammenziehens zu spezifizieren. Wir betrachten den Produktraum

$$X = \prod_{f \in C_{00}^{+}(G),\, f \neq 0} \left[\frac{1}{(f_0 : f)}, (f : f_0)\right]$$

Dieser ist nach dem Satz von Tychonoff als Produkt kompakter Räume wieder kompakt in der Produkttopologie, und nach (6) ist $I_g \in X$ für alle $g \in C_{00}^{+}(G),\ g \neq 0$. Für alle $V \in \mathcal{U}$ sei nun $W(V)$ definiert als Abschluss der Menge $w(V) := \{I_g : g \in C_{00}^{+}(G),\ g \neq 0,\ \mathrm{supp}(g) \subseteq V\}$ in X. Für $V_i \in \mathcal{U},\ i = 1, \ldots, k$ gilt, dass der Durchschnitt

$$\bigcap_{i=1}^{k} W(V_i) \supseteq \bigcap_{i=1}^{k} w(V_i) = w(\bigcap_{i=1}^{k} V_i) \neq \emptyset$$

nicht leer ist. Da die $F(V)$ als abgeschlossene Teilmengen von X wieder kompakt sind, erfüllen sie die endliche Durchschnittseigenschaft und es existiert

$$I \in \bigcap_{V \in \mathcal{U}} F(V)$$

Die Funktion I ist im Abschluss jeder Menge der Form $\{I_g : g \in C_{00}^{+}(G),\ g \neq 0,\ \mathrm{supp}(g) \subseteq V\}$ und damit gibt zu jedem $V \in \mathcal{U}$ und jeder Umgebung U von I in der Produkttopologie eine Funktion I_g mit $\mathrm{supp}(g) \subseteq V$, so dass $I_g \in U$. Nach Definition der Produkttopologie gibt es also zu allen $f_1, \ldots, f_k \in C_{00}^{+}(G) \backslash \{0\},\ k \in \mathbb{N}, \epsilon > 0$ und $V \in \mathcal{U}$ ein $g \in C_{00}^{+}(G),\ g \neq 0$ mit $\mathrm{supp}(g) \subseteq V$ für das gilt

$$|I(f_j) - I_g(f_j)| < \epsilon \quad \text{für alle } j = 1, \ldots, k.$$

Durch diese Approximationseigenschaft, bleiben die Eigenschaften (3),(4),(5) und (6), die wir für I_g bewiesen haben, auch für I erhalten. Weiters gilt (7) für alle $\epsilon > 0$ und wir haben

$$\begin{aligned} I(f \circ L(y)) &= I(f), \quad y \in G && (9)\\ I(\lambda f) &= \lambda I(f), \quad \lambda \geq 0 && (10)\\ I(f_1 + f_2) &= I(f_1) + I(f_2) && (11)\\ I(f) &\in \left[\frac{1}{(f_0 : f)}, (f : f_0)\right] && (12) \end{aligned}$$

Nun kann man I auf $C_0(G)$ fortsetzen. Sei $f \in C_{00}(G)$ dann kann man f schreiben als $f = f_1 - f_2$ und $f_1, f_2 \in C_{00}^+(G)$. Man definiert $I(f) = I(f_1) + I(f_2)$. Um die Wohldefiniertheit von I zu zeigen,seien $f = f_1 - f_2$ und $f = \tilde{f}_1 - \tilde{f}_2$ zwei Zerlegungen von f. Dann folgt $f_1 + \tilde{f}_2 = \tilde{f}_1 + f_2$ und damit

$$I(f_1) + I(\tilde{f}_2) = I(f_1 + \tilde{f}_2) = I(\tilde{f}_1 + f_2) = I(\tilde{f}_1) + I(f_2)$$

also

$$I(f_1) - I(f_2) = I(\tilde{f}_1) - I(\tilde{f}_2)$$

Nun rechnet man leicht nach, dass die so definierte Fortsetzung $I : C_0(G) \to \mathbb{R}$ auch linear ist. Im Folgenden sei $f = f^+ - f^-$ eine beliebige Zerlegung von f in positiven und negativen Anteil. Es gilt

$$I(f_1+f_2) = I(f_1^+ - f_1^- + f_2^+ - f_2^-) = I(f_1^+ + f_2^+ - (f_1^- + f_2^-)) = I(f_1^+ + f_2^+) - I((f_1^- + f_2^-)) =$$

$$= I(f_1^+) + I(f_2^+) - I(f_1^-) - I(f_2^-) = I(f_1) + I(f_2),$$

also ist I additiv. Sei σ das Vorzeichen von $\lambda \in \mathbb{R}$ dann gilt

$$I(\lambda f) = I(\sigma|\lambda|f^+ - \sigma|\lambda|f^-) = \sigma I(|\lambda|f^+) - \sigma I(|\lambda|f^-) =$$

$$= \sigma|\lambda|I(f^+) - \sigma|\lambda|I(f^-) = \lambda I(f)$$

Somit ist gezeigt, dass I linear ist. Für ein $f \in C_{00}^+(G)$ gilt wegen (12)

$$I(f) \geq \frac{1}{(f_0 : f)} > 0$$

Daher ist I ein positives Funktional. Der Existenzbeweis ist damit abgeschlossen. □

Nach Lemma (1.3) ist dieser Satz äuqivalent zu folgender Aussage.

Satz 2.2. *Sei $(G, \mathcal{T})$ eine lokal-kompakte Hausdorffsche topologische Gruppe, so existiert ein linksinvariantes Radon-Maß μ auf G.*

Bevor wir die Eindeutigkeit beweisen, benötigen wir noch folgendes Resultat.

Lemma 2.1. *Jede Funktion $f \in C_0(G \times G)$ ist $\mathcal{B}(G) \times \mathcal{B}(G)$ messbar.*

Beweis. Man betrachte die lineare Hülle $M \subseteq C_0(G \times G)$, aller Funktionen der Bauart

$$f \cdot g : \ (x, y) \mapsto f(x) \cdot g(x) \quad f, g \in C_0(G)$$

Dann ist M gegenüber der Multiplikation abgeschlossen, denn es gilt

$$\left(\sum_k f_k \cdot g_k \right) \left(\sum_j h_j \cdot r_j \right) = \sum_{k,j} (f_k h_j) \cdot (g_k r_j) \ \in M$$

Also ist M eine Algebra. Ist $(x_1, x_2) \neq (y_1, y_2)$ und O.B.d.A $x_1 \neq x_2$, dann wähle eine Funktion $f \in C_0(G)$ mit $f(x_1) \neq f(y_1)$. Wähle weiters $g \in C_0(G)$ mit $g(x_2) = g(y_2) = 1$. Dann gilt

$$f \cdot g \in M$$

und

$$(f \cdot g)(x_1, x_2) \neq (f \cdot g)(y_1, y_2)$$

Also ist M punktetrennend, und wir können den Satz von Stone-Weierstrass für lokalkompakte Haussdorfräume anwenden. Damit erhalten wir $\overline{M}^{\|\cdot\|_\infty} = C_{00}(G \times G)$ und insbesondere $\overline{M}^{\|\cdot\|_\infty} \supseteq C_0(G \times G)$. Die Funktionen der Bauart $f \cdot g \in M$ sind wie folgt darstellbar

$$f \cdot g = \hat{f} \cdot \hat{g}$$

mit

$$\hat{f} : (x, y) \mapsto f(x) \quad \hat{g} : (x, y) \mapsto g(y)$$

Für jede offene Menge $O \in \mathbb{R}$ gilt klarerweise $\hat{f}^{-1}(O) = f^{-1}(O) \times G$ und $\hat{g}^{-1}(O) = G \times g^{-1}(O)$. Die Urbilder offener Mengen sind also Elemente von $\mathcal{B}(G) \times \mathcal{B}(G)$ und daher sind die beiden Funktionen messbar. Für jede Funktion aus M gilt, dass sie als Summe von Produkten von Messbaren Funktionen selbst messbar ist. Jedes Element aus $C_{00}(G \times G)$ lässt sich durch eine Folge aus M approximieren und ist daher messbar. □

Satz 2.3 (Eindeutigkeit des Haarschen Maßes)**.** *Das Haarsche-Maß ist bis auf einen positiven konstanten Faktor eindeutig bestimmt.*

Beweis. Seien μ_1 und μ_2 zwei linksinvariante, nicht verschwindende Radon-Maße. Betrachte folgende Funktion für ein $f \in C_0(G)$ mit $< f, \mu_1 >:= \int_G f(t) d\mu_1(t) \neq 0$

$$\nabla_f : G \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{1}{< f, \mu_1 >} \int_g f(tx) d\mu_2(t)$$

Dann ist ∇_f stetig. Dazu betrachtet man

$$\left| \int_G f(tx) d\mu_2(t) - \int_G f(ty) d\mu_2(t) \right| \leq \int_G |f(tx) - f(ty)| d\mu_2(t)$$

Wegen Satz 1.1 ist f links-gleichmäßig stetig, also gibt es für alle $\epsilon > 0$ ein $U \in \mathcal{U}$ mit

$$|f(tx) - f(ty)| < \epsilon, \quad \forall x, y \in G : \ x^{-1} t^{-1} ty = x^{-1} y \in U$$

Da G lokal-kompakt ist und $x \mapsto x^{-1}$ stetig ist, können wir U nötigenfalls so verkleinern, dass $U^{-1} \subseteq U_0$ für irgend eine kompakte Umgebung von e gilt. Für $x^{-1}y \in U$ und $f(ty) \neq 0$ folgt $t \in \operatorname{supp}(f) y^{-1} \subseteq \operatorname{supp}(f) U^{-1} x^{-1} \subseteq \operatorname{supp}(f) U_0 x^{-1}$. Analog erkennt man das für $f(tx) \neq 0$ gilt $t \in \operatorname{supp}(f) U_0 x^{-1}$. Nun erhält man

$$\int_G |f(tx) - f(ty)| d\mu_2(t) = \int_{\operatorname{supp}(f) U_0 x^{-1}} |f(tx) - f(ty)| d\mu_2(t) \leq \epsilon \cdot \mu_2(\operatorname{supp}(f) U_0 x^{-1}) = C\epsilon$$

Wegen der lokalen Endlichkeit von Radon-Maßen und da $\text{supp}(f)U_0x^{-1}$ kompakt ist gilt $C < \infty$. Daher die Funktion stetig.

Nun gilt für $g \in C_0(G)$

$$< f, \mu_1 > \int_G g(t^{-1})d\mu_2 = \int_G f(s)d\mu_1(s) \cdot \int_G g(t^{-1})d\mu_2(t) = \int_G \int_G f(s)g(t^{-1})d\mu_2(t)d\mu_1(s)$$

Wegen der Linksinvarianz von μ_2 ist dieser Ausdruck gleich

$$\int_G \int_G f(s)g(t^{-1}s)d\mu_2(t)d\mu_1(s) = \int_G \int_G f(s)g(t^{-1}s)d\mu_1(s)d\mu_2(t) =$$

Beachte $f\left((s^{-1}t)^{-1})\right) = f(t^{-1}s)$

$$= \int_G \int_G f(ts)g(s)d\mu_1(s)d\mu_2(t) = \int_G \int_G f(ts)g(s)d\mu_2(t)d\mu_1(s) =$$

$$=< f, \mu_1 > \cdot \int_G g(s)\nabla_f(s)d\mu_1(s)$$

Es bleibt zu zeigen, dass hier der Satz von Fubini anwendbar ist. Probleme bereitet, dass die Maße im Allgemeinen nicht σ-endlich sind. Die Messbarkeit der Integranden $h_1(x, y) := f(s)g(t^{-1}s)$ und $h_2(x, y) := f(ts)g(s)$ wird durch Lemma 2.1 gesichert.
Seien $K_1 := \text{supp}(f)$ und $K_2 := \text{supp}(g)$ definiert dann lässt sich leicht nachrechnen dass

$$\text{supp}(h_1) \subseteq K_1 \times K_1K_2^{-1}, \quad \text{supp}(h_2) \subseteq K_2 \times K_1K_2^{-1}$$

gilt. Diese Mengen sind wieder kompakt und auch $\mathcal{B}(G) \times B(G)$ messbar. Daher sind die Maße μ_1, μ_2 auf diesen Mengen endlich, und wir können die Maße darauf einschränken, und das Integral über den Produktraum definieren als

$$\int_G \int_G h_1(x, y)d\mu_1(x)d\mu_2(y) = \int_G \int_G h_1(x, y)d\mu_1(x)|_{K_1}d\mu_2(y)|_{K_1K_2^{-1}}$$

Analoges gilt auch für h_2. Die eingeschränkten Maße sind endlich, also insbesondere σ-endlich, und die Integranden beschränkt, also auf jeden Fall integrierbar, daher kann man den Satz von Fubini anwenden.
Kürzt man nun durch $< f, \mu_1 >$ so erhält man

$$\int_G g(t^{-1})d\mu_2 = \int_G g(s)\nabla_f(s)d\mu_1(s)$$

Da die linke Seite nicht von der Wahl von f abhängig ist gilt nun für beliebige $g, h, f \in C_0(G)$ mit $< h, \mu_1 > \neq 0$ und $< f, \mu_1 > \neq 0$

$$\int_G g(s)\nabla_f(s)d\mu_1(s) = \int_G g(s)\nabla_h(s)d\mu_1(s)$$

Da ∇_f stetig ist folgt

$$\nabla_f = \nabla_g$$

und damit $\nabla_f(e) = \frac{1}{<f,\mu_1>} \int_g f(t) d\mu_2(t) = C$ also $C < f, \mu_1 >=< f, \mu_2 >$. Die linearen Funktionale $C < \cdot, \mu_1 >$ und $< \cdot, \mu_2 >$ stimmen also auf dem Komplement der Hyperebene $< f, \mu_1 >= 0$ überein, und sind damit gleich. Da beide Maße positiv sind folgt insbesondere $C > 0$. Wegen der Eindeutigkeitsaussage in Satz 1.2 ist $C\mu_1 = \mu_2$. □

3 Die duale Gruppe und Fourier Transformation

Im Folgenden sei $(G, \mathcal{T})$ eine lokal-kompakte, hausdorffsche, abelsche Gruppe. Die Gruppe wird additiv geschrieben. Die benötigten Maße, sind die eindeutigen Haarschen Maße der Gruppen.

Definition 3.1. *Eine Funktion $\gamma : G \to \mathbb{C}$ heißt Charakter von $(G, \mathcal{T})$, falls $|\gamma(x)| = 1$ für alle $x \in G$ und falls die Funktionalgleichung*

$$\gamma(x + y) = \gamma(x) \cdot \gamma(y), \quad \forall x, y \in G$$

erfüllt ist. Die Menge aller stetigen Charakter von $(G, \mathcal{T})$ bildet eine Gruppe Γ falls die Addition mit

$$(\gamma_1 + \gamma_2)(x) = \gamma_1(x) \cdot \gamma_2(x), \quad x \in G, \ \gamma_{1,2} \in \Gamma$$

definiert wird. Γ heißt die duale Gruppe von G. Wegen der Dualität von Γ und G ist es sinnvoll die Notation $(x, \gamma) := \gamma(x)$ einzuführen.

Es ist einfach zu sehen, das folgende Eigenschaften erfüllt sind.

$$(0, \gamma) = (x, 0) = 1, \quad x \in G, \gamma \in \Gamma$$

$$(-x, \gamma) = (x, -\gamma) = (x, \gamma)^{-1}$$

Wegen $(x, \gamma) = (x, \gamma + 0) = (x, \gamma)(x, 0)$ folgt, dass $(x, 0) = 1$ gilt. Genauso sieht man $(x, \gamma) = (0 + x, \gamma) = (0, \gamma)(x, \gamma) \Rightarrow (0, \gamma) = 1$. Da $1 = (0, \gamma) = (x, \gamma)(-x, \gamma)$ und $1 = (x, 0) = (x, \gamma)(x, -\gamma)$ gilt, folgen die übrigen Aussagen sofort.

Bevor wir nun Γ mit einer Topologie versehen, zeigt der nächste Satz, dass man Γ mit der Menge aller Homomorphismen der Banachalgebra $L^1(G)$ identifizieren kann. Dazu benötigen wir allerdings folgendes Lemma

Lemma 3.1. *Sei A eine Banachalgebra und $h : A \to \mathbb{C}$ ein komplexer Homomorphismus, dann gilt $\|h\| \leq 1$*

Beweis. Angenommen es existiert ein $x_0 \in A$ mit $|h(x_0)| > \|x_0\|$. Setze $x = \frac{x_0}{h(x_0)}$ und $s_n = -x - x^2 - \cdots - x^n$. Da $\|x^n\| \leq \|x\|^n$ gilt folgt für $n < m$

$$\|s_m - s_n\| \leq \|x^{m+1}\| + \cdots \|x^n\| \leq \sum_{k=m+1}^{n} \|x\|^k.$$

Sie Summe $\sum_{k=m+1}^{n} \|x\|^k$ geht wegen $\|x\| < 1$ gegen Null. Also ist s_n eine Cauchyfolge. Da A vollständig ist existiert ein y mit $\|s_n - y\| \to 0$. Man sieht sofort das $x + s_n = xs_{n-1}$ gilt. Geht man zum Grenzwert über, folgt $x + y = xy$. Nun erhalten wir den Widerspruch

$$1 + h(y) = h(x) + h(y) = h(x)h(y) = h(y).$$

□

Satz 3.1. *Für $\gamma \in \Gamma$ und*

$$\hat{f}(\gamma) = \int_G f(x)(-x,\gamma)dx \quad f \in L^1(G) \tag{13}$$

ist die Abbildung $f \mapsto \hat{f}(\gamma)$ ein nichtverschwindender, komplexer Homomorphismus auf $L^1(G)$. Umgekehrt kann man jeden nicht verschwindenden komplexen Homomorphismus auf $L^1(G)$ in obiger Weise eindeutig darstellen.

Beweis. Es seien $f, g \in L^1(G)$ dann gilt

$$\widehat{f * g}(\gamma) = \int_G (f*g)(x)(-x,\gamma)dx = \int_G (-x,\gamma) \int_G f(x-y)g(y)dydx =$$

$$= \int_G g(y)(-y,\gamma) \int_G f(x-y)(-x+y,\gamma)dxdy$$

Wegen der Translationsinvarianz von dx, dy ist dieser Ausdruck äquivalent zu

$$\int_G g(y)(-y,\gamma)dy \int_G f(x)(-x,\gamma)dx = \hat{g}(\gamma)\hat{f}(\gamma)$$

Also ist die Abbildung multiplikativ und klarerweise ist sie auch linear. Daher ist die Funktion $f \mapsto \hat{f}(\gamma)$ ein Homomorphismus. Für die Umkehrung sei angenommen, dass h ein komplexer Homomorphismus von $L^1(G)$ ist und $h \neq 0$ gilt. Laut Lemma 3.1 ist h ein beschränkes lineares Funktional mit Norm kleiner gleich 1. Man kann h nun wie folgt darstellen.

$$h(f) = \int_G f(x)\phi(x)dx$$

für ein $\phi \in L^\infty(G)$ mit $\|\phi\|_{L^\infty} \leq 1$. Wir schreiben nun

$$\int_G h(f)g(y)\phi(y)dy = h(f)h(g) = h(f*g) = \int_G (f*g)(x)\phi(x)dx =$$

$$= \int_G g(y) \int f(x-y)\phi(x)dxdy = \int_G g(y)h(f_y)dy$$

Wobei $f_y = f(x-y)$ ist. Da g beliebig war gilt nun

$$h(f)\phi(y) = h(f_y), \text{ f.ü. in } G$$

Da die Translation sowie h stetig sind folgt das ϕ fast überall mit einer stetigen Funktion übereinstimmt. Also können wir ϕ als stetig annehmen. Ersetzt man im obigen Beweis y mit $x+y$ und f mit f_x dann erhält man

$$h(f)\phi(x+y) = h(f_{x+y}) = h((f_x)_y) = h(f_x)\phi(y) = h(f)\phi(x)\phi(y)$$

Sei $f \in L^1(G)$ eine Funktion mit $h(f) \neq 0$, dann folgt $\phi(x+y) = \phi(x)\phi(y)$. Wie schon in Definition 3.1 gesehen impliziert diese Gleichung $\phi(-x) = \phi(x)^{-1}$. Angenommen es gibt ein Element $x \in G$ mit $|\phi(x)| < 1$, so erhält man den Widerspruch $\phi(-x) = \phi(x)^{-1} > 1$. Also ist $\phi \in \Gamma$.
Schlussendlich sei $\hat{f}(\gamma_1) = \hat{f}(\gamma_2)$ dann folgt aus (13) das

$$(-x, \gamma_1) = (-x, \gamma_2)$$

für fast alle $x \in G$ gelten muss. Da $\gamma_{1,2}$ stetige Funktionen sind folgt also $\gamma_1 = \gamma_2$. □

3.1 Die Fourier Transformation

Definition 3.2. *Für alle Funktionen $f \in L^1(G)$, definieren wir die Abbildung $\hat{f} : \Gamma \to \mathbb{C}$ durch*

$$\hat{f}(\gamma) = \int_G f(x)(-x, \gamma)dx \quad \gamma \in \Gamma$$

$\hat{f}$ heißt Fourier Transformierte von f.

Wir nennen die Menge aller $\hat{f}$ nun $A(\Gamma)$ und versehen Γ mit der durch $A(\Gamma)$ induzierten initialen Topologie. Wie wir in Satz 3.2 sehen werden ist $A(\Gamma)$ punktetrennend, daraus folgt das Γ ein Hausdorffraum ist. Die Menge $C_0(\Gamma)$ bezeichne von nun an alle stetigen Funktionen von Γ nach $\mathbb{C}$ die im Unendlichen verschwinden.

Lemma 3.2. *Für alle $f \in L^1(G)$ gilt $\hat{f} \in C_0(\Gamma)$. Außerdem ist Γ lokal-kompakt und Hausdorffsch.*

Beweis. Wegen der Wahl der Topologie auf $A(\Gamma)$ ist $\hat{f} \in C(G)$ klar.
Bezeichne mit Δ die Menge aller komplexen Homomorphismen von $A := L^1(G)$ die nicht verschwinden. Satz 3.1 zeigt, dass man $\Delta mit \Gamma$ identifizieren kann. Also können wir $\Gamma = \Delta \subseteq A^*$ auch mit einer relativ Topologie von A^*, der ω^*-Topologie versehen. Diese Topologie ist die initiale Topologie bezüglich der Abbildungen

$$\iota(f)(h) := h(f) = \hat{f}(\gamma_h), \quad h \in \Delta,\ \gamma_h \in \Gamma,\ f \in A$$

Wobei γ_h durch Satz 3.1 festgelegt wird. Also gilt auf Γ dass die Abbildungsfamilien $A(\Gamma)$ und die Einbettung von A in den Bidualraum übereinstimmen. Daher ist die initiale Topologie bezüglich $A(\Gamma)$ auf Γ gleich der relativen ω^*-Topologie. Wegen $\|h\| \leq 1$ für alle

$h \in \Delta$, gilt dass $\Delta \subseteq S^*$, wobei S^* die abgeschlossene Einheitskugel von A^* bezeichnet. Es gilt

$$\Delta \cup \{0\} = \bigcap_{f \in L^1(G)} \iota(f)^{-1}\left(\overline{U_{\|f\|_{L^1}}(0)}\right) \cap \bigcap_{f,g \in L^1(G)} \left(\iota(f) \cdot \iota(g) - \iota(f+g)\right)^{-1}(0)$$

wobei $\iota(f)\cdot\iota(g)$ punktweise definiert ist. Als Durchschnitt von Urbildern stetiger Funktionen von abgeschlossenen Mengen ist $\Delta \cup \{0\}$ abgeschlossen in der w^*-Topologie. Damit ist $\Delta \cup \{0\}$ nach dem Satz von Banach-Alaoglu w^*-kompakt. Nun ist $\Delta \cup \{0\}$ ein kompakter Hausdorffraum und Δ lokal-kompakt und hausdorffsch. Es bleibt noch $\hat{f} \in C_0(\Gamma)$ zu zeigen. Sei dazu $\hat{f} \in A(\Gamma)$ und $\epsilon > 0$ vorgegeben, dann definiere

$$K = \hat{f}^{-1}\left(\overline{U_{\|f\|_{L^1}}(0)} \backslash U_\epsilon(0)\right)$$

K ist abgeschlossen und als Teilmenge von S^* kompakt in der w^*-Topologie die mit der Topologie von Γ übereinstimmt. Für ein $\gamma \notin K$ gilt klarerweise dann $|\hat{f}(\gamma)| < \epsilon$ und damit $\hat{f} \in C_0(\Gamma)$. □

Satz 3.2.

(i) *$A(\Gamma)$ ist eine separierende, selbst-adjungierte Unteralgebra von $C_0(\Gamma)$, und ist laut dem Satz von Stone Weierstrass $A(\Gamma)$ dicht in $C_0(\Gamma)$.*

(ii) *Die Fourier Transformierte von $f * g$ ist $\hat{f}\hat{g}$.*

(iii) $\hat{f}_x(\gamma) = (-x,\gamma)\hat{f}(\gamma)$

(iv) *Betrachtet man die Fourier Transformation als Abbildung von $L^1(G)$ nach $C_0(\Gamma)$, dann ist diese Abbildung stetig. Also $\|\hat{f}\|_\infty \leq \|f\|_{L^1}$*

(v) *Für $f \in L^1(G)$ und $\gamma \in \Gamma$ gilt $(f * \gamma)(x) = (x,\gamma)\hat{f}(\gamma)$.*

Beweis. *(i)* Sei $f \in L^1(G)$, dann gilt für $\tilde{f} : x \mapsto \overline{f(-x)}$, $\tilde{f} \in L^1(G)$ und $\hat{\tilde{f}} = \overline{\hat{f}}$.

$$\overline{\hat{f}(\gamma)} = \int_G \overline{f(x)(-x,\gamma)}dx = \int_G \overline{f(x)}(x,\gamma)dx = \int_G \overline{f(-x)}(-x,\gamma)dx = \hat{\tilde{f}}(\gamma)$$

Die Abgeschlossenheit gegenüber den algebraischen Operationen folgt aus Satz 3.1. Seien $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$ verschieden. Wegen der Stetigkeit existiert eine offene Menge U aus G sodass O.B.d.A $\gamma_1(x) < \gamma_2(x)$ für alle $x \in U$ gilt. Wähle eine Funktion f aus $L^1(G)$ mit Träger in U dann gilt trivialerweise $\hat{f}(\gamma_1) < \hat{f}(\gamma_2)$. Also ist $A(\Gamma)$ separierend.
Der Punkt *(ii)* wurde bereits in Satz 3.1 gezeigt.
(iii)

$$\hat{f}_x(\gamma) = \int_G f(y-x)(-y,\gamma)dy = (-x,\gamma)\int_G f(y-x)(x-y,\gamma)dy = (-x,\gamma)\hat{f}(\gamma)$$

Für *(iv)* betrachtet man

$$\hat{f}(\gamma) = \int_G f(x)(-x,\gamma)dx \leq \int_G |f(x)|dx = \|f\|_{L^1}$$

Auch *(v)* braucht man nur nachrechen.

$$(f * \gamma)(x) = \int_G f(x-y)(y,\gamma)dy = (x,\gamma)\int_G f(x-y)(-(x-y),\gamma)dy = (x,\gamma)\hat{f}(\gamma)$$

□

Literatur

[1] Jürgen Elstrodt. *Maß- und Integrationstheorie*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg

[2] Walter Rudin. *Fourier Analysis on Groups*, Interscience Publishers