Dominik Leopold Forkert

EINFÜHRUNG IN DIE WAVELET-ANALYSIS

Seminar aus Analysis
7. November 2011

Institut für
Analysis und
Scientific Computing

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
WIEN

Inhaltsverzeichnis

1 Einführung

1.1 Motivation

Wavelets sind ein recht junger Gegenstand der angewandten Mathematik. Die *Wavelet-Transformation* stellt sich als Erweiterung der Theorie um die *Fouriertransformation* als nützliches Werkzeug in den Bereichen der zeitlich eingegrenzten Frequenzanalyse und Filterung von Signalen, sowie der Datenkompression heraus.

Im Folgenden soll die *kontinuierliche Wavelet-Transformation* in rein analytischem Kontext behandelt werden. Sie liefert scharfe Aussagen über *lokale Differenzierbarkeit* von Funktionen. Exemplarisch soll die Weierstraß-Funktion dahin gehend untersucht werden.

1.2 Ad Fourier-Transformation

Zunächst werden wesentliche Aussagen zur Fourier-Transformation benötigt, wie sie beispielsweise in [1] formuliert sind:

1.2.1 DEFINITION. *Für $f \in L^1(\mathbb{R})$ sei die* Fouriertransformierte $\mathcal{F}f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *von f definiert durch*

$$\mathcal{F}f(\zeta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(\eta) \exp(-\imath\zeta\eta)\,\mathrm{d}\lambda(\eta).$$

1.2.2 FAKTA. *Sei $f, g \in L^1(\mathbb{R})$, $a, b \in \mathbb{C}$, $r \in \mathbb{R}$. Es gilt:*

(FT1) $\mathcal{F}(af + bg) = a\mathcal{F}f + b\mathcal{F}g$

(FT2) $\mathcal{F}f \in C_0(\mathbb{R})$[1] *mit* $\|\mathcal{F}f\|_\infty \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \|f\|_1$

(FT3) $\mathcal{F}(f * g) = \sqrt{2\pi}\mathcal{F}f \cdot \mathcal{F}g$

(FT4) $\mathcal{F}(|r|\, f(r\eta)) = \mathcal{F}(\frac{1}{r}\eta)$ *mit* $\||r|\, f(r\eta)\|_1 = \|f\|_1$

(FT5) *Sei zusätzlich $f \in C^k(\mathbb{R})$ und $g := f^{(k)} \in L^1(\mathbb{R})$, so folgt $\mathcal{F}g(\zeta) = (\imath\zeta)^k\mathcal{F}f(\zeta)$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$*

(FT6) *Sei zusätzlich $g(\xi) = (-\imath\xi)^k f(\xi) \in L^1(\mathbb{R})$, so folgt $\mathcal{F}g(\zeta) = (\mathcal{F}f)^{(k)}(\zeta)$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$*

(FT7) *Gilt $\mathcal{F}f \in L^1(\mathbb{R})$, so folgt $\mathcal{F} \circ \mathcal{F}f(\zeta) = f(-\zeta)$* [λ-f.ü.]

(FT8) *Für $f \in L^2(\mathbb{R})$ folgt $\mathcal{F}f \in L^2(\mathbb{R})$ mit $\|f\|_2 = \|\mathcal{F}f\|_2$*

Diese Aussage ist im Sinne einer eindeutigen, unitären Isometrie zu verstehen, die die Fouriertransformation von $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ auf $L^2(\mathbb{R})$ fortsetzt. Diese Fortsetzung wird im Allgemeinen ebenfalls Fouriertransformation *genannt, weswegen $\mathcal{F}$ ohne Gefahr auf Verwechselung auch jene Fortsetzung bezeichnen soll. Dieses Resultat ist in der Literatur auch als* Satz von Plancherel[2] *bekannt.*

[1] $C_0(\mathbb{R})$ bezeichnet den Raum aller komplexwertigen, beschränkten, stetigen und im Unendlichen verschwindenden Funktionen.

[2] Michel Plancherel, * 16. Januar 1885 in Bussy; † 4. März 1967 in Zürich.

1.2.3 DEFINITION. *Wir definieren die* Schwartz-Klasse *als Menge von Funktionen*

$$\begin{aligned}\mathcal{S}(\mathbb{R}) &:= \left\{ f \in C^\infty(\mathbb{R}) : \left\| x^n f^{(m)}(x) \right\|_\infty < \infty \quad \forall n, m \in \mathbb{N}_0 \right\} \\ &= \left\{ f \in C^\infty(\mathbb{R}) : x^n f^{(m)}(x) \in C_0(\mathbb{R}) \quad \forall n, m \in \mathbb{N}_0 \right\}\end{aligned}$$

1.2.4 FAKTA. *Sei $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, so gilt:*

(SK1) $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$

(SK2) *Die Abbildung $f \mapsto \mathcal{F}f$ ist eine Bijektion auf $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, wobei $\mathcal{F} \circ \mathcal{F}f(x) = f(-x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.*

2 Wavelets

2.1 Grundlagen

2.1.1 DEFINITION. *Eine komplexwertige Funktion $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ heißt* Wavelet, *wenn*

$$0 < C_\psi := 2\pi \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{|\mathcal{F}\psi(\omega)|^2}{|\omega|} \, \mathrm{d}\lambda(\omega) < \infty \tag{2.1}$$

gilt. Die Bedingung (2.1) wird als Admissibilität *bezeichnet.*

Laut (FT8) ist auch $\mathcal{F}\psi \in L^2(\mathbb{R})$. Daher ist die Admissibilität (2.1) genau dann erfüllt, wenn

$$\int\limits_{U} \frac{|\mathcal{F}\psi(\omega)|^2}{|\omega|} \, \mathrm{d}\lambda(\omega) < \infty \tag{2.2}$$

für eine Umgebung $U \in \mathfrak{U}(0)$.

2.1.2 BEMERKUNG. Eine alternative Definition eines Wavelets ψ ist $\psi \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R}), \mathcal{F}\psi(0) = 0$. Gemäß (FT2) folgt hieraus $\mathcal{F}\psi \in C_0(\mathbb{R})$. Für ein stetiges $\mathcal{F}\psi$ ist jedoch $\mathcal{F}\psi(0) = 0$ für die Existenz des Integrals in (2.2) notwendig.
Fordert man andererseits für ein Wavelet ψ dieser Definition die Differenzierbarkeit von $|\mathcal{F}\psi|^2$ an 0 – das heißt, dass der Grenzwert

$$\lim_{\omega \to 0} \frac{|\mathcal{F}\psi(\omega)|^2 - |\mathcal{F}\psi(0)|^2}{\omega} = \lim_{\omega \to 0} \frac{|\mathcal{F}\psi(\omega)|^2}{\omega} \in \mathbb{R}$$

existiert – so ist der Integrand in (2.2) auf einer hinreichend kleinen Umgebung $U \in \mathfrak{U}(0)$ beschränkt; es folgt

$$\int\limits_{U} \frac{|\mathcal{F}\psi(\omega)|^2}{|\omega|} \, \mathrm{d}\lambda(\omega) \le \left\| \frac{|\mathcal{F}\psi(\omega)|^2}{|\omega|} \right\|_\infty \cdot \lambda(U) < \infty \tag{2.3}$$

Also handelt es bei beiden Konzepten um ungefähr die gleiche Funktionenklasse.

2.1.3 BEISPIEL. Das älteste bekannte Wavelet ist das *Haar-Wavelet*[3]. Es ist definiert durch

$$\psi(x) := \begin{cases} 1 & 0 \le x < \frac{1}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} \le x < 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Direkte Berechnung der Fouriertransformieten des Haar-Wavelets liefert

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\psi(\zeta) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{1 + \exp(-\imath\zeta) - 2\exp(-\frac{\imath\zeta}{2})}{\imath\zeta} \right) \\ |\mathcal{F}\psi(\zeta)|^2 &= \frac{16 \sin^4(\frac{\zeta}{4})}{\zeta^2} \end{aligned}$$

[3] Alfréd Haar, * 11. Oktober 1885 in Budapest; † 16. März 1933 in Szeged.

Da die direkte Berechnung der Admissibilität (2.1) vergleichsweise aufwändig ist, stützen wir uns auf Aussagen aus Bemerkung 2.1.2: Offensichtlich gilt $\psi \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$, sowie $\mathcal{F}\psi(0) = 0$. Da $|\mathcal{F}\psi(\zeta)|^2$ an 0 differenzierbar ist, genügt das Haar-Wavelet folglich der Definition 2.1.1.

Das Haar-Wavelet ist zwar nicht stetig, zählt allerdings zur Klasse der sogenannten *orthogonalen Wavelets*: Definiert man $\psi_{j,k} := 2^{\frac{j}{2}}\psi(2^j x - k)$, so ist $\{\psi_{j,k} : j, k \in \mathbb{Z}\}$ ein *vollständiges Orthonormalsystem*[4] (*VONS*) bezüglich des $(L^2(\mathbb{R}), \langle\cdot,\cdot\rangle_{L^2})$.

2.1.4 BEISPIEL. Das *Mexican Hat Wavelet* ist die negative, normierte, zweite Ableitung einer *Gauß-Funktion*, d.h.

$$\psi(x) := -\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) = (1 - x^2)\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$$

Unter Zuhilfenahme von (FT5) lässt sich die Fouriertransformierte des Mexican Hat Wavelets berechnen:

$$\mathcal{F}\psi(\zeta) = \frac{\zeta^2}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{\eta^2}{2}\right)\exp(-\imath\zeta\eta)\,\mathrm{d}\lambda(\eta) = \zeta^2\exp\left(-\frac{\zeta^2}{2}\right)$$

Für die Admissibilitätskonstante C_ψ folgt daher

$$C_\psi = 2\pi\int\limits_{\mathbb{R}} \frac{|\mathcal{F}\psi(\zeta)|^2}{|\zeta|}\,\mathrm{d}\lambda(\zeta) = 4\pi\int\limits_{\mathbb{R}^+} \zeta^3\exp(-\zeta^2)\,\mathrm{d}\zeta = 2\pi\int\limits_{\mathbb{R}^+} \xi\exp(-\xi)\,\mathrm{d}\xi = 2\pi.$$

Im Gegensatz zum Haar-Wavelet ist das Mexican Hat Wavelet eine $C^\infty(\mathbb{R})$-Funktion, besitzt allerdings keinen kompakten Träger und zählt nicht zur Klasse der orthonormalen Wavelets.

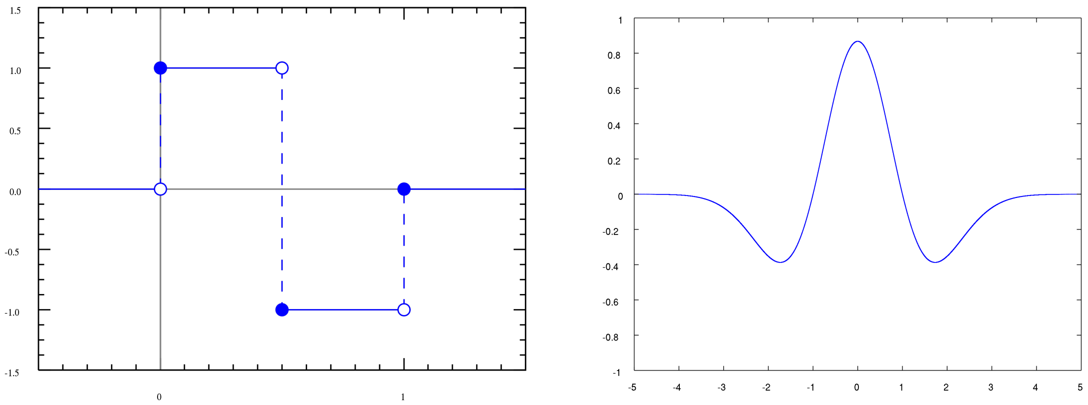

Abbildung 2.1 Haar-Wavelet und Mexican Hat Wavelet

[4] Ein Orthonormalsystem eines Prähilbertraums ist genau dann vollständig, wenn kein echt größeres Orthonormalsystem existiert.

2.2 Die kontinuierliche Wavelet-Transformation

2.2.1 DEFINITION. *Sei ψ ein Wavelet im Sinne von Definition 2.1.1, so bezeichnen wir*

$$\psi_{a,b}(x) := |a|^{-\frac{1}{2}}\, \psi\left(\frac{x-b}{a}\right) \qquad a \in \mathbb{R}\setminus\{0\}, b \in \mathbb{R}, \tag{2.4}$$

wobei wir a als Skalierung *und b als* Translation *eines Wavelets auffassen.*
Die kontinuierliche Wavelet-Transformierte *einer Funktion $f \in L^2(\mathbb{R})$ sei gegeben durch*

$$\mathcal{W}_\psi f(a,b) := \langle f, \psi_{a,b}\rangle_{L^2} \tag{2.5}$$

2.2.2 PROPOSITION. *Sei ψ ein Wavelet laut Definition 2.1.1, dann ist auch $\psi_{a,b} \in L^2(\mathbb{R})$ und es gilt*

(WT1) $\|\psi_{a,b}\|_2 = \|\psi\|_2$

(WT2) *Gilt sogar $\psi \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$, so folgt $\mathcal{F}\psi_{a,b}(\omega) = |a|^{\frac{1}{2}} \exp(-\imath b\omega)\cdot \mathcal{F}\psi(a\omega)$*

BEWEIS.

Ad (WT1) Unter Anwendung der *Transformationsformel* für λ-Integrale mit dem C^1-*Diffeomorphismus* $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, y \mapsto ay + b, |\det \mathrm{d}T| = |a|$ folgt

$$\|\psi_{a,b}\|_2 = \frac{1}{|a|}\int_{\mathbb{R}} \left|\psi\left(\frac{x-b}{a}\right)\right|^2 \mathrm{d}\lambda(x) = \frac{1}{|a|}\int_{\mathbb{R}} |\psi(y)|^2 \cdot |a|\, \mathrm{d}\lambda(y) = \|\psi\|_2 < \infty.$$

Ad (WT2) Wir führen den linken Ausdruck auf die Definition 1.2.1 zurück:

$$\mathcal{F}\psi_{a,b}(\omega) = |a|^{-\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \psi\left(\frac{x-b}{a}\right) \exp(-\imath\omega x)\, \mathrm{d}\lambda(x)$$

Ein weiteres Vorgehen wie im ersten Teil dieses Beweises liefert

$$\begin{aligned}
&|a|^{-\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \psi\left(\frac{x-b}{a}\right) \exp(-\imath\omega x)\, \mathrm{d}\lambda(x) = \\
&= |a|^{-\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \psi(y) \exp(-\imath\omega a y - \imath b\omega)\cdot |a|\, \mathrm{d}\lambda(y) = \\
&= |a|^{\frac{1}{2}} \exp(-\imath b\omega) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \psi(y) \exp(-\imath\omega a y)\, \mathrm{d}\lambda(y) = \\
&= |a|^{\frac{1}{2}} \exp(-\imath b\omega)\cdot \mathcal{F}\psi(a\omega)
\end{aligned}$$

■

2.2.3 BEMERKUNG. Da in Definition 2.2.1 $\psi, f \in L^2(\mathbb{R})$ vorausgesetzt wird, folgt aus (WT1) in Proposition 2.2.2 und Anwendung der *Hölder-Ungleichung*

$$|\mathcal{W}_\psi f(a,b)| \leq \|f\psi_{a,b}\|_1 \leq \|f\|_2 \cdot \|\psi_{a,b}\|_2 = \|f\|_2 \cdot \|\psi\|_2 < \infty.$$

Somit ist die kontinuierliche Wavelet-Transformierte $\mathcal{W}_\psi f(a,b)$ unter den gegeben Voraussetzungen stets existent.

Aus (FT7) auf Seite 3 folgt die Injektivität der Fouriertransformation. Bei der stetigen Wavelet-Tranformation liefert die folgende *Calderón-Identität*[5] Aussagen zur Injektivität:

2.2.4 SATZ (Calderón-Identität). *Sei ψ ein Wavelet gemäß Definition 2.1.1, welches zusätzlich $\psi \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ erfüllt. Für alle $f, g \in L^2(\mathbb{R})$ gilt*

$$\int_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{a^2} \mathcal{W}_\psi f(a,b) \cdot \overline{\mathcal{W}_\psi g(a,b)} \, \mathrm{d}\lambda_2(a,b) = C_\psi \langle f, g \rangle_{L^2}$$

BEWEIS. Zunächst definieren wir uns die beiden Hilfsfunktionen

$$F_a(\omega) := |a|^{\frac{1}{2}} \, \mathcal{F}f(\omega) \cdot \overline{\mathcal{F}\psi(a\omega)} \tag{2.5a}$$

$$G_a(\omega) := |a|^{\frac{1}{2}} \, \mathcal{F}g(\omega) \cdot \overline{\mathcal{F}\psi(a\omega)} \tag{2.5b}$$

Gemäß (FT2) auf Seite 3 gilt $\mathcal{F}\psi \in C_0(\mathbb{R})$ und aus (FT8) folgt $\mathcal{F}f, \mathcal{F}g \in L^2(\mathbb{R})$. Aus diesen beiden Aussagen kann man auf

$$\begin{aligned} |a|^{-\frac{1}{2}} \|F_a\|_2 &\leq \|\mathcal{F}f\|_2 \cdot \|\mathcal{F}\psi\|_\infty < \infty, \\ |a|^{-\frac{1}{2}} \|G_a\|_2 &\leq \|\mathcal{F}g\|_2 \cdot \|\mathcal{F}\psi\|_\infty < \infty \end{aligned}$$

schließen. Weiters folgt aus der Hölder-Ungleichung

$$\begin{aligned} |a|^{-\frac{1}{2}} \|F_a\|_1 &\leq \|\mathcal{F}f\|_2 \cdot \|\mathcal{F}\psi\|_2 < \infty, \\ |a|^{-\frac{1}{2}} \|G_a\|_1 &\leq \|\mathcal{F}g\|_2 \cdot \|\mathcal{F}\psi\|_2 < \infty. \end{aligned}$$

Es gilt daher $F_a, G_a \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$.

Man betrachte nun unter Anwendung von (FT8) sowie (WT2) die Wavelet-Transformierten von f und g:

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_\psi f(a,b) &= \langle f, \psi_{a,b} \rangle_{L^2} = \langle \mathcal{F}f, \mathcal{F}\psi_{a,b} \rangle_{L^2} = \\ &= \int_{\mathbb{R}} |a|^{\frac{1}{2}} \, \mathcal{F}f(\omega) \cdot \overline{\mathcal{F}\psi(a\omega) \cdot \exp(-\imath b\omega)} \, \mathrm{d}\lambda(\omega) = \\ &= \int_{\mathbb{R}} F_a(\omega) \exp(\imath b\omega) \, \mathrm{d}\lambda(\omega) = \\ &= \sqrt{2\pi} \mathcal{F}F_a(-b) \end{aligned} \tag{2.6a}$$

$$\mathcal{W}_\psi g(a,b) = \sqrt{2\pi} \mathcal{F}G_a(-b) \tag{2.6b}$$

[5] Alberto Pedro Calderón, * 14. September 1920 in Mendoza in Argentinien; † 16. April 1998 in Chicago.

Unter nochmaliger Anwendung von (FT8) folgt

$$\int_{\mathbb{R}} \mathcal{W}_\psi f(a,b) \cdot \overline{\mathcal{W}_\psi g(a,b)} \, \mathrm{d}\lambda(b) = 2\pi \langle \mathcal{F}F_a, \mathcal{F}G_a \rangle_{L^2} = 2\pi \langle F_a, G_a \rangle_{L^2} = \tag{2.7}$$

$$= 2\pi \, |a| \int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}f(\omega) \cdot \overline{\mathcal{F}g(\omega)} \cdot |\mathcal{F}\psi(a\omega)|^2 \, \mathrm{d}\lambda(\omega)$$

Mit der Admissiblität (2.1) aus Definition 2.1.1 folgt aus der Transformationsformel für λ-Integrale für alle $\omega \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$C_\psi := 2\pi \int_{\mathbb{R}} \frac{|\mathcal{F}\psi(a)|^2}{|a|} \, \mathrm{d}\lambda(a) = 2\pi \int_{\mathbb{R}} \frac{|\mathcal{F}\psi(a\omega)|^2}{|a|} \, \mathrm{d}\lambda(a) \tag{2.8}$$

Hieraus folgt

$$C_\psi \langle f, g \rangle_{L^2} = C_\psi \langle \mathcal{F}f, \mathcal{F}g \rangle_{L^2} =$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}f(\omega) \cdot \overline{\mathcal{F}g(\omega)} \left(2\pi \int_{\mathbb{R}} \frac{|\mathcal{F}\psi(a\omega)|^2}{|a|} \, \mathrm{d}\lambda(a) \right) \mathrm{d}\lambda(\omega) =$$

$$= 2\pi \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{|a|} \mathcal{F}f(\omega) \cdot \overline{\mathcal{F}g(\omega)} \cdot |\mathcal{F}\psi(a\omega)|^2 \, \mathrm{d}\lambda(a) \, \mathrm{d}\lambda(\omega) \tag{2.9}$$

Da der Ausdruck

$$2\pi \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} |\mathcal{F}f(\omega)| \cdot |\mathcal{F}g(\omega)| \cdot \frac{|\mathcal{F}\psi(a\omega)|^2}{|a|} \, \mathrm{d}\lambda(a) \, \mathrm{d}\lambda(\omega) = C_\psi \langle |\mathcal{F}f| \, , |\mathcal{F}g| \rangle_{L^2} < \infty$$

laut Voraussetzungen existiert, ist der Integrand bezüglich des Maßes $\lambda(a)$ in (2.9) laut des *Satzes von Fubini* auf $\mathbb{R}^2$ nach dem Produktmaß $\lambda_2(a,\omega)$ integrierbar und das iterierte Integral aus (2.9) stimmt mit jenem bezüglich $\lambda_2(a,\omega)$ überein.

Abschließend folgt daher unter Berücksichtigung von (2.7)

$$2\pi \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{|a|} \mathcal{F}f(\omega) \cdot \overline{\mathcal{F}g(\omega)} \cdot |\mathcal{F}\psi(a\omega)|^2 \, \mathrm{d}\lambda(a) \, \mathrm{d}\lambda(\omega) =$$

$$= 2\pi \int_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{|a|} \mathcal{F}f(\omega) \cdot \overline{\mathcal{F}g(\omega)} \cdot |\mathcal{F}\psi(a\omega)|^2 \, \mathrm{d}\lambda_2(a,\omega) =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{a^2} \mathcal{W}_\psi f(a,b) \cdot \overline{\mathcal{W}_\psi g(a,b)} \, \mathrm{d}\lambda_2(a,b)$$

■

Es soll zudem auch noch folgende Variante der Calderón-Identität angegeben werden:

2.2.5 KOROLLAR. *Sei ein Wavelet ψ laut Definition 2.1.1 gegeben, welches zusätzlich $\psi \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ leistet, sowie $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge kompakter Mengen aus $\mathbb{R} \setminus \{0\} \times \mathbb{R}$, welche bezüglich der Ordnungsrelation $\subseteq$ monoton gegen $\mathbb{R}^2$ konvergiert, das heißt $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n = \mathbb{R}^2$. Dann konvergiert*

$$f_n(x) := \frac{1}{C_\psi} \int\limits_{K_n} \frac{1}{a^2} \mathcal{W}_\psi f(a,b) \cdot \psi_{a,b}(x) \, \mathrm{d}\lambda_2(a,b) \xrightarrow{\|\cdot\|_2} f(x) \tag{2.10}$$

für alle $f \in L^2(\mathbb{R})$ in der $L^2(\mathbb{R})$-Norm.

BEWEIS. Durch Anwendung der *Jensen-Ungleichung* bezüglich der konvexen Funktion $\xi \mapsto \xi^2$ folgt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} C_\psi^2 \int\limits_{\mathbb{R}} |f_n(x)|^2 \, \mathrm{d}\lambda(x) &\leq \int\limits_{\mathbb{R}} \left(\int\limits_{K_n} \frac{1}{a^2} \left| \mathcal{W}_\psi f(a,b) \cdot \psi_{a,b}(x) \right| \, \mathrm{d}\lambda_2(a,b) \right)^2 \mathrm{d}\lambda(x) \leq \\ &\leq \iint\limits_{\mathbb{R}\, K_n} \frac{\lambda_2(K_n)}{a^4} \left| \mathcal{W}_\psi f(a,b) \cdot \psi_{a,b}(x) \right|^2 \, \mathrm{d}\lambda_2(a,b) \, \mathrm{d}\lambda(x) \end{aligned} \tag{2.11}$$

Da der Integrand bezüglich $\lambda_2(a,b)$ in (2.11) stets nicht-negativ ist, lässt sich dank des Satzes von Fubini die Integrationsreihenfolge vertauschen; aus der Hölder-Ungleichung folgt weiters

$$\begin{aligned} &\iint\limits_{K_n \mathbb{R}} \frac{\lambda_2(K_n)}{a^4} \left| \mathcal{W}_\psi f(a,b) \cdot \psi_{a,b}(x) \right|^2 \, \mathrm{d}\lambda(x) \, \mathrm{d}\lambda_2(a,b) \leq \\ \leq &\int\limits_{K_n} \frac{\lambda_2(K_n)}{a^4} \, \mathrm{d}\lambda_2(a,b) \cdot \|f\|_2^2 \cdot \|\psi\|_2^4 < \infty. \end{aligned}$$

Also sind die Funktionen f_n als Elemente des $L^2(\mathbb{R})$ wohldefiniert. Laut des *Satzes von Fréchet-Riesz*[6] (vgl. z.B. Lemma 13.33 in [2]) wird jedem f_n durch

$$\Phi_n(\lambda) g := \langle f_n, g \rangle_{L^2} = \int\limits_{\mathbb{R}} f_n(x) \overline{g(x)} \, \mathrm{d}\lambda(x) \qquad g \in L^2(\mathbb{R})$$

ein beschränktes lineares Funktional $\Phi_n(\lambda) \in \big(L^2(\mathbb{R})\big)' \cong L^2(\mathbb{R})$ zugeordnet, für dessen *Operatornorm* $\|\Phi_n(\lambda)\| = \|f_n\|_2$ gilt. Es folgt

$$\begin{aligned} &\|f - f_n\|_2^2 = \\ = &\sup_{\|g\|_2 = 1} \left| \left\langle f - \frac{1}{C_\psi} \int\limits_{K_n} \frac{1}{a^2} \mathcal{W}_\psi f(a,b) \cdot \psi_{a,b}(x) \, \mathrm{d}\lambda_2(a,b), g \right\rangle_{L^2} \right|^2 = \\ = &\sup_{\|g\|_2 = 1} \left| \left\langle f, g \right\rangle_{L^2} - \left\langle \frac{1}{C_\psi} \int\limits_{K_n} \frac{1}{a^2} \mathcal{W}_\psi f(a,b) \cdot \psi_{a,b}(x) \, \mathrm{d}\lambda_2(a,b), g \right\rangle_{L^2} \right|^2 \end{aligned} \tag{2.12}$$

Vermöge der Abschätzung

[6] Maurice René Fréchet,* 2. September 1878 in Maligny, Département Yonne; † 4. Juni 1973 in Paris. Frigyes Riesz, * 22. Januar 1880 in Győr; † 28. Februar 1956 in Budapest.

$$\iint\limits_{K_n \mathbb{R}} \frac{1}{a^2} \left| \mathcal{W}_\psi f(a,b) \cdot \psi_{a,b}(x) \right| \cdot |g(x)| \, \mathrm{d}\lambda(x) \, \mathrm{d}\lambda_2(a,b) \leq$$
$$\leq \int\limits_{K_n} \frac{1}{a^2} \, \mathrm{d}\lambda_2(a,b) \cdot \|f\|_2 \cdot \|\psi\|_2^2 \cdot \|g\|_2 < \infty$$

legitimiert der Satz von Fubini die Vertauschung der Integrale im zweiten Skalarprodukt in (2.12) und es gilt

$$\left\langle \int\limits_{K_n} \mathcal{W}_\psi f(a,b) \cdot \psi_{a,b}(x) \, \mathrm{d}\lambda_2(a,b), g \right\rangle_{L^2} =$$
$$= \iint\limits_{K_n \mathbb{R}} \mathcal{W}_\psi f(a,b) \cdot \psi_{a,b}(x) \cdot \overline{g(x)} \, \mathrm{d}\lambda(x) \, \mathrm{d}\lambda_2(a,b) =$$
$$= \int\limits_{K_n} \mathcal{W}_\psi f(a,b) \cdot \langle \psi_{a,b}, g \rangle_{L^2} \, \mathrm{d}\lambda_2(a,b) =$$
$$= \int\limits_{K_n} \mathcal{W}_\psi f(a,b) \cdot \overline{\mathcal{W}_\psi g(a,b)} \, \mathrm{d}\lambda_2(a,b)$$

Wendet man zudem Satz 2.2.4 auf den Ausdruck $\langle f, g \rangle_{L^2}$ an, so folgt für (2.12)

$$\sup_{\|g\|_2 = 1} \left| \left\langle f, g \right\rangle_{L^2} - \left\langle \frac{1}{C_\psi} \int\limits_{K_n} \frac{1}{a^2} \mathcal{W}_\psi f(a,b) \cdot \psi_{a,b}(x) \, \mathrm{d}\lambda_2(a,b), g \right\rangle_{L^2} \right|^2 =$$
$$= \sup_{\|g\|_2 = 1} \left| \frac{1}{C_\psi} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{a^2} \mathcal{W}_\psi f(a,b) \cdot \overline{\mathcal{W}_\psi g(a,b)} \, \mathrm{d}\lambda_2(a,b) - \right.\right.$$
$$\left.\left. - \int\limits_{K_n} \frac{1}{a^2} \mathcal{W}_\psi f(a,b) \cdot \overline{\mathcal{W}_\psi g(a,b)} \, \mathrm{d}\lambda_2(a,b) \right) \right|^2 =$$
$$= \sup_{\|g\|_2 = 1} \left| \frac{1}{C_\psi} \int\limits_{\mathbb{R}^2 \setminus K_n} \frac{1}{a^2} \mathcal{W}_\psi f(a,b) \cdot \overline{\mathcal{W}_\psi g(a,b)} \, \mathrm{d}\lambda_2(a,b) \right|^2 \leq$$
$$\leq \sup_{\|g\|_2 = 1} \left(\frac{1}{C_\psi} \int\limits_{\mathbb{R}^2 \setminus K_n} \frac{1}{a^2} \left| \mathcal{W}_\psi f(a,b) \right|^2 \, \mathrm{d}\lambda_2(a,b) \right) \cdot \tag{2.13a}$$
$$\cdot \left(\frac{1}{C_\psi} \int\limits_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{a^2} \left| \mathcal{W}_\psi g(a,b) \right|^2 \, \mathrm{d}\lambda_2(a,b) \right) \tag{2.13b}$$

Vermöge des *Satzes der beschränkten Konvergenz* folgt für die Folge von Integralen der Gestalt wie in (2.13a)

$$\lim_{n \to \infty} \int\limits_{\mathbb{R}^2 \setminus K_n} \frac{1}{a^2} \left| \mathcal{W}_\psi f(a,b) \right|^2 \, \mathrm{d}\lambda_2(a,b) = 0$$

Aus Satz 2.2.4 folgt für das Integral in (2.13b) sogleich

$$\sup_{\|g\|_2=1} \frac{1}{C_\psi} \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{1}{a^2} \left|\mathcal{W}_\psi g(a,b)\right|^2 \,\mathrm{d}\lambda_2(a,b) = \sup_{\|g\|_2=1} \langle g, g\rangle_{L^2} = 1$$

Hieraus folgt schließlich (2.10).

■

2.2.6 BEMERKUNG. Sind Voraussetzungen wie in Korollar 2.2.5 gegeben, so erlaubt uns die Abschätzung

$$\iint\limits_{K_n \mathbb{R}} \frac{1}{a^2} \left|\mathcal{W}_\psi f(a,b) \cdot \psi_{a,b}(x)\right| \,\mathrm{d}\lambda(x) \,\mathrm{d}\lambda_2(a,b) \leq$$

$$\leq \int\limits_{K_n} |a|^{-\frac{3}{2}} \,\mathrm{d}\lambda_2(a,b) \cdot \|f\|_2 \cdot \|\psi\|_2 \cdot \|\psi\|_1 < \infty$$

die Anwendung des Satzes von Fubini auf das Integral von f_n für $n \in \mathbb{N}$. Die Tatsache, dass die Integrale der Wavelets verschwinden, wurde bereits in Bemerkung 2.1.2 auf Seite 5 erwähnt, da jene Integrale mit den Fouriertransformierten $\mathcal{F}f_n$ an der Stelle 0 übereinstimmen. Diese Eigenschaft überträgt sich anhand

$$C_\psi \int\limits_{\mathbb{R}} f_n(x) \,\mathrm{d}\lambda(x) = \iint\limits_{\mathbb{R}\, K_n} \frac{1}{a^2} \mathcal{W}_\psi f(a,b) \cdot \psi_{a,b}(x) \,\mathrm{d}\lambda_2(a,b) \,\mathrm{d}\lambda(x) =$$

$$= \iint\limits_{K_n \mathbb{R}} \frac{1}{a^2} \mathcal{W}_\psi f(a,b) \cdot \psi_{a,b}(x) \,\mathrm{d}\lambda(x) \,\mathrm{d}\lambda_2(a,b) = 0$$

auf alle f_n aus Korollar 2.10.
Wir wollen die Voraussetzungen dieses Korollars verschärfen, indem wir annehmen, dass $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$. Der Ausdruck

$$f(x) - \frac{1}{C_\psi} \int\limits_{K_n} \frac{1}{a^2} \mathcal{W}_\psi f(a,b) \cdot \psi_{a,b}(x) \,\mathrm{d}\lambda_2(a,b)$$

konvergiert für $n \to \infty$ in der $L^2(\mathbb{R})$-Norm gegen 0, während sein Integral konstant jenem von f entspricht.
Die etwas erstaunlich anmutende Aussage von Korollar 2.2.5 ist also, dass sich jedes $f \in L^2(\mathbb{R})$ beliebig gut durch Funktionen f_n bezüglich $\|\cdot\|_2$ approximieren lässt, obwohl deren Integrale für alle $n \in \mathbb{N}$ verschwinden.

3 Wavelets & Differenzierbarkeit

3.1 Einfache Aussagen zur Differenzierbarkeit

Für den folgenden Abschnitt wollen wir spezielle Anforderungen an unser Wavelet stellen.

3.1.1 DEFINITION. *Bezeichne φ ein reellwertiges Wavelet, von welchem $\varphi \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ gefordert wird. Dessen Fouriertransformierte $\mathcal{F}\varphi$ soll zudem folgenden Bedingungen genügen:*

$$\rightsquigarrow \quad \mathcal{F}\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$$
$$\rightsquigarrow \quad \operatorname{supp} \mathcal{F}\varphi \subseteq [\alpha^{-1}, \alpha] \text{ für festes } \alpha > 1$$
$$\rightsquigarrow \quad \mathcal{F}\varphi(1) = 1$$

Im Weiteren soll die Bezeichnung $\varphi_j(\omega) := \alpha^j \varphi(\alpha^j \omega)$ für $j \in \mathbb{N}_0$ eingeführt werden.

3.1.2 BEMERKUNG. Das Wavelet φ in Definition 3.1.1 ist so beschaffen, dass offensichtlich die Stelle 0 außerhalb des Trägers $\operatorname{supp} \mathcal{F}\varphi$ liegt, also $(\mathcal{F}\varphi)^{(k)}(0) = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$ gilt. Weiters liefert Definition 3.1.1 sofort, dass der Träger $\operatorname{supp} \mathcal{F}\varphi$ als beschränkte und abgeschlossene Teilmenge in $\mathbb{R}$ kompakt ist. Demnach ist auch der Träger aller Ableitungen $\operatorname{supp}(\mathcal{F}\varphi)^{(k)}$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$ kompakt. Da folglich alle Funktionen der Bauart $\omega^m(\mathcal{F}\varphi)^{(k)}$ für alle $m, k \in \mathbb{N}_0$ beschränkt sind, gilt $\mathcal{F}\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Laut (SK2) ist $\acute{\varphi} := \mathcal{F} \circ \mathcal{F}\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ und wegen (FT7) gilt $\acute{\varphi}(\omega) = \varphi(-\omega)$ für fast alle $\omega \in \mathbb{R}$. Wendet man nun (FT6) an, so folgt mit $\phi(\xi) = (-\imath\xi)^k \acute{\varphi}(\xi)$ sogar $(\mathcal{F}\varphi)^{(k)}(0) = \mathcal{F}\phi(0) = \int_{\mathbb{R}} \omega^k \varphi(\omega) \,\mathrm{d}\lambda(\omega) = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$.

3.1.3 PROPOSITION. *Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine beschränkte, stetige Abbildung. So folgt aus Differenzierbarkeit von f an der Stelle ω_0 für spezielle, reellwertige Wavelets φ gemäß Definition 3.1.1, sowie für eine geeignete Folge $(\varepsilon_j)_{j \in \mathbb{N}_0}$, die $\lim_{j \to \infty} \varepsilon_j = 0$ leistet:*

$$(f * \varphi_j)(\omega_0) = \alpha^{-j} \varepsilon_j \tag{3.1}$$

BEWEIS. Einsetzen in die Definition der Faltung sowie jener der Differenzierbarkeit von $f(\omega_0 - \omega)$ liefern:

$$\begin{aligned}(f * \varphi_j)(\omega_0) &= \alpha^j \int_{\mathbb{R}} f(\omega_0 - \omega) \cdot \varphi(\alpha^j \omega) \,\mathrm{d}\lambda(\omega) \qquad (3.2)\\ &= \alpha^j \int_{\mathbb{R}} \big(f(\omega_0) - \omega f'(\omega_0) + \omega\varepsilon(\omega)\big)\, \varphi(\alpha^j \omega) \,\mathrm{d}\lambda(\omega)\end{aligned}$$

Aus Bemerkung 3.1.2 folgt das Verschwinden der beiden Integrale:

$$\rightsquigarrow \quad \int_{\mathbb{R}} f(\omega_0) \cdot \varphi(\alpha^j \omega) \,\mathrm{d}\lambda(\omega) = 0$$
$$\rightsquigarrow \quad \int_{\mathbb{R}} \omega f'(\omega_0) \cdot \varphi(\alpha^j \omega) \,\mathrm{d}\lambda(\omega) = 0$$

Für das *Restglied* $\varepsilon(\omega)$ gilt $\lim\limits_{\omega\longrightarrow 0}\varepsilon(\omega)=0$ bzw. $\lim\limits_{\omega\longrightarrow 0}\varepsilon(\alpha^{-j}\omega)=0$.
Da f als beschränkt und stetig vorausgesetzt wurde, existiert zudem ein $\kappa\in\mathbb{R}^+$, welches $|\varepsilon(\omega)|<\kappa$ bzw. $\left|\varepsilon(\alpha^{-j}\omega)\right|<\kappa$ auf dem gesamten Definitionsbereich von f leistet.

Daher gilt für (3.2) unter der Anwendung der Transformationsformel für λ-Integrale

$$\begin{aligned}(f*\varphi_j)(\omega_0) &= \alpha^j\int\limits_{\mathbb{R}}\omega\varepsilon(\omega)\cdot\varphi(\alpha^j\omega)\,\mathrm{d}\lambda(\omega) = \\ &= \alpha^{-j}\int\limits_{\mathbb{R}}\eta\varepsilon(\alpha^{-j}\eta)\cdot\varphi(\eta)\,\mathrm{d}\lambda(\eta)<\infty.\end{aligned}$$

Wir setzen $\varepsilon_j:=\int_{\mathbb{R}}\eta\varepsilon(\alpha^{-j}\eta)\cdot\varphi(\eta)\,\mathrm{d}\lambda(\eta)$. Es sei daran erinnert, dass gemäß Bemerkung 3.1.2 $\int_{\mathbb{R}}\kappa\eta\varphi(\eta)\,\mathrm{d}\lambda(\eta)=0$. Also ist $|\kappa\eta\varphi(\eta)|$ als Majorante integrierbar und die Anwendung des *Satzes der majorisierenden Konvergenz* ist legitim; es folgt $\lim\limits_{j\longrightarrow\infty}\varepsilon_j=0$.

■

3.2 Die Weierstraß-Funktion

In diesem Abschnitt soll das Objekt unserer Betrachtung die *Weierstraß-Funktion*[7] sein, wie sie *Hardy*[8] 1916 formulierte:

$$W:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\qquad W(x):=\sum_{n=0}^{\infty}\beta^n\cos(\alpha^n x)\text{ für feste }\beta\in(0,1),\alpha\beta>1\tag{3.3a}$$

Analog zu (3.3a) definieren wir die Funktion

$$\widetilde{W}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\qquad \widetilde{W}(x):=\sum_{n=0}^{\infty}\beta^n\sin(\alpha^n x)\text{ für feste }\beta\in(0,1),\alpha\beta>1\tag{3.3b}$$

Sowohl (3.3a) als auch (3.3b) sind pathologische Beispiele von reellwertigen $C(\mathbb{R})$-Funktionen, die nirgends differenzierbar sind.
Während die Stetigkeit von W und $\widetilde{W}$ direkt aus dem *Weierstraß'schen Majorantenkriterium* folgt, wollen wir die Nirgends-Differenzierbarkeit mittels Proposition 3.1.3 zeigen:

3.2.1 BEISPIEL. Für die Faltung $W*\varphi_j$ gilt unter Anwendung des Satzes der majorisierenden Konvergenz und der *Eulerschen Formel:*

$$\begin{aligned}(W*\varphi_j)(\omega) &= \sum_{n=0}^{\infty}\beta^n\int\limits_{\mathbb{R}}\cos\left(\alpha^n(\omega_0-\omega)\right)\cdot\varphi_j(\omega)\,\mathrm{d}\lambda(\omega) = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\beta^n\int\limits_{\mathbb{R}}\left(\exp(\imath\alpha^n(\omega_0-\omega))+\exp(\imath\alpha^n(\omega-\omega_0))\right)\cdot\varphi_j(\omega)\,\mathrm{d}\lambda(\omega) =\end{aligned}\tag{3.4}$$

[7] Karl Theodor Wilhelm Weierstraß, * 31. Oktober 1815 in Ostenfelde bei Ennigerloh/Münsterland; † 19. Februar 1897 in Berlin.
[8] Godfrey Harold Hardy, * 7. Februar 1877 in Cranleigh, Surrey; † 1. Dezember 1947 in Cambridge, England.

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \beta^n \Bigg(\int_{\mathbb{R}} \exp(\imath\alpha^n(\omega_0 - \omega)) \cdot \varphi_j(\omega) \,\mathrm{d}\lambda(\omega) + \tag{3.5a}$$

$$+ \int_{\mathbb{R}} \exp(\imath\alpha^n(\omega - \omega_0)) \cdot \varphi_j(\omega) \,\mathrm{d}\lambda(\omega) \Bigg) \tag{3.5b}$$

Das Integral in (3.5b) verschwindet unter Beachtung von (FT4) auf Seite 3 aufgrund der Trägerbedingung $\operatorname{supp} \mathcal{F}\varphi_j \cap \mathbb{R}^- = \emptyset$ aus Definition 3.1.1:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \exp(\imath\alpha^n(\omega - \omega_0)) \cdot \varphi_j(\omega) \,\mathrm{d}\lambda(\omega) &= \frac{\sqrt{2\pi}}{\exp(\imath\alpha^n\omega_0)} \mathcal{F}\varphi_j(-\alpha^n) = \\ &= \frac{\sqrt{2\pi}}{\exp(\imath\alpha^n\omega_0)} \mathcal{F}\varphi(-\alpha^{n-j}) = 0 \end{aligned}$$

Es folgt daher für (3.4) durch Umschreiben von φ_j in die Fouriertransformierte sofort

$$\begin{aligned} (W * \varphi_j)(\omega) &= \sum_{n=0}^{\infty} \beta^n \int_{\mathbb{R}} \exp(\imath\alpha^n(\omega_0 - \omega)) \cdot \varphi_j(\omega) \,\mathrm{d}\lambda(\omega) = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\pi}{\sqrt{2}} \alpha^{-n} (\alpha\beta)^n \exp(\imath\alpha^n\omega_0) \cdot \mathcal{F}\varphi_j(\alpha^n) = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\pi}{\sqrt{2}} \alpha^{-n} (\alpha\beta)^n \exp(\imath\alpha^n\omega_0) \cdot \mathcal{F}\varphi(\alpha^{n-j}) \end{aligned} \tag{3.6}$$

Aus Definition 3.1.1 folgt offensichtlich die Beziehung $\mathcal{F}\varphi(\alpha^{n-j}) = \begin{cases} 1 & j = n \\ 0 & j \neq n \end{cases}$
Daher Verschwinden alle bis auf ein Summenglied aus (3.6) und es ergibt sich

$$(W * \varphi_j)(\omega) = \frac{\pi}{\sqrt{2}} \alpha^{-j} (\alpha\beta)^j \exp(\imath\alpha^j\omega_0).$$

Wir setzen $\varepsilon_j := \frac{\pi}{\sqrt{2}} (\alpha\beta)^j \exp(\imath\alpha^j\omega_0)$. Offensichtlich existiert $\lim\limits_{j\to\infty} \sqrt{2}(\alpha\beta)^j \exp(\imath\alpha^j\omega_0)$ nicht. Laut Proposition 3.1.3 ist W daher nirgends differenzierbar.

Analoge Berechnungen für $\widetilde{W}$ führen zu

$$(\widetilde{W} * \varphi_j)(\omega) = \frac{\imath\pi}{\sqrt{2}} \alpha^{-j} (\alpha\beta)^j \exp(\imath\alpha^j\omega_0). \tag{3.7}$$

Auch hier ist die Nirgends-Differenzierbarkeit von $\widetilde{W}$ vermöge Proposition 3.1.3 offensichtlich.

4 Literatur

1 Kaltenbäck, M. (2011). Analysis 3. TU Vienna.

2 Kusolitsch, N. (2011). Maß- und Wahrscheinlichkeitstheorie – Eine Einführung. Springer.

3 Stöckler, J. (2007). Wavelet-Analysis. University of Dortmund.

4 Daubechies, I. (1992). 10 Lectures on Wavelets. SIAM.

5 Jaffard, S., Meyer, Y. und Ryan, R. D. (2001). Wavelets: Tools for Science & Technology. SIAM.

6 Johnsen, J. (2008). Simple Proofs of Nowhere-Differentiability for Weierstrass's Function and Cases of Slow Growth. Birkhäuser.

7 Debnath, L. (1998). Wavelet Transforms and Their Applications. INSA.

8 Wikipedia (2011). Die freie Enzyklopädie. Online; Stand 6. Juli 2011.