BLUMBERG RÄUME

GREGOR GANTNER

Prolog

Im Jahr 1922 bewies H. Blumberg folgenden bemerkenswerten Satz:

Satz. *Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine beliebige reellwertige Funktion, dann gibt es eine dichte Teilmenge D, sodass $f|_D$ stetig ist. Dabei ist $\mathbb{R}$ jeweils mit der euklidischen Topologie $\mathcal{E}$ und D mit der Spurtopologie versehen.*

In dieser Seminararbeit werden wir eine wesentlich allgemeinere Version beweisen, indem wir die Definitionsmenge durch einen topologischen Raum X, an den wir bestimmte Bedingungen stellen, ersetzen.

1. Baire Räume

In der Funktionalanalysis ist uns beim Satz von Baire schon der Begriff der Kategorie eines topologischen Raumes untergekommen, wir rufen diesen in Erinnerung:

Definition 1.1. Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum. Eine Teilmenge $Y \subseteq X$ heißt dann von *erster Kategorie*, falls Y sich als abzählbare Vereinigung nirgends dichter Mengen schreiben lässt, andernfalls ist sie von *zweiter Kategorie*.

Eine Teilmenge $E \subseteq X$ heißt dabei *nirgends dicht*, falls $\overline{E}$ keine nichtleere offene Menge enthält, also $\overline{E}^\circ = \emptyset$.

Folgendes Lemma wird sich am Ende als hilfreich erweisen:

Lemma 1.2. *Ist $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum, $V \subseteq X$ und ist $Y \subseteq V$ von erster Kategorie in $(V, \mathcal{T}|_V)$, dann ist Y von erster Kategorie in $(X, \mathcal{T})$.*

Beweis. Wir können $Y = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n$ schreiben, wobei die E_n, $n \in \mathbb{N}$, nirgends dicht in V sind. Die E_n sind auch in X nirgends dicht:

Angenommen es gäbe ein $n \in \mathbb{N}$, sodass $(\overline{E_n})^\circ \neq \emptyset$. Dann gäbe es ein nichtleeres $O \in \mathcal{T}$ mit $O \subseteq \overline{E_n} \subseteq \overline{V}$. Dann hat aber O mit V nichtleeren Schnitt und man erhält den Widerspruch

$$\emptyset \neq O \cap V \subseteq \overline{E_n} \cap V = \overline{E_n}^V .$$

$\square$

Definition 1.3. Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum. Sei $Y \subseteq X$, dann heißt ein $x \in X$ von *zweiter Kategorie in X bezüglich Y* genau wenn:

$$\forall U \in \mathfrak{U}(x) : U \cap Y \text{ ist von zweiter Kategorie in } X$$

Dabei ist $\mathfrak{U}(x)$ der Umgebungsfilter um x. Andernfalls nennen wir x von *erster Kategorie bezüglich Y*. Ist jeder Punkt $x \in X$ von zweiter Kategorie in X bezüglich X, so nennen wir X *von homogener zweiter Kategorie.*

Wir schreiben $S_X(Y) := \{x \in X : x \text{ ist von 2. Kat. in } X \text{ bez. } Y\}$ und $F_X(Y) := \{x \in X : x \text{ ist von 1. Kat. in } X \text{ bez. } Y\}$.

Bemerkung 1.4. Offensichtlich kann in obiger Definition $\mathfrak{U}(x)$ durch eine beliebige Umgebungsbasis $\mathfrak{W}(x)$ ersetzt werden.

Ein Punkt ist also von zweiter Kategorie bezüglich einer Menge, wenn er in der Nähe dieser Menge liegt. Tatsächlich ist dies ein recht ähnliches Konzept wie der Abschluss:

Lemma 1.5. *Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topogogischer Raum und Y eine Teilmenge von X. Dann ist $S_X(Y)$ eine abgeschlossene Teilmenge von X mit $S_X(Y) \subseteq \overline{Y}$. Außerdem gilt für $Y_1 \subseteq Y_2 \subseteq X$, dass $S_X(Y_1) \subseteq S_X(Y_2)$.*

Beweis. Um zu sehen, dass $S_X(Y)$ abgeschlossen ist, sei $x \in \overline{S_X(Y)}$ und sei $\mathfrak{W}(x)$ die Menge aller offenen Umgebungen von x. Wir betrachten ein beliebiges $W \in \mathfrak{W}(x)$. Es gilt $W \cap S_X(Y) \neq \emptyset$, insbesondere existiert ein $y \in W \cap S_X(Y)$. Da $y \in W$ und W offen ist, folgt $W \in \mathfrak{U}(y)$. Nun ist $W \cap Y$ von zweiter Kategorie, weil ja $y \in S_X(Y)$. Da $W \in \mathfrak{W}(x)$ beliebig war, folgt $x \in S_X(Y)$ und somit $S_X(Y) = \overline{S_X(Y)}$.

Sei nun $x \in S_X(Y)$. Da für beliebige $U \in \mathfrak{U}(x)$ gilt, dass $U \cap Y$ von zweiter Kategorie ist und somit nichtleer ist, folgt $x \in \overline{Y}$.

Die Aussage $S_X(Y_1) \subseteq S_X(Y_2)$ folgt unmittelbar aus der Definition. □

Laut dem Satz von Baire hat jeder vollständig metrische Raum die Eigenschaft, dass der abzälbare Durchschnitt offener dichter Mengen wieder dicht ist. Räume mit dieser Eigenschaft nennt man Baire'sch:

Definition 1.6. Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum. Wir nennen X *Baire'sch*, falls für beliebige $(O_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{T}^{\mathbb{N}}$ mit in X dichten O_n, $n \in \mathbb{N}$, auch $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} O_n$ dicht in X ist.

Lemma 1.7. *Ist $(X, \mathcal{T})$ ein Baire'sch, so ist auch jede offene nichtleere Teilmenge $Y \subseteq X$ versehen mit der Spurtopologie Baire'sch.*

Beweis. Wir betrachen $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in Y offener dichter Mengen . Da Y offen in X ist, sind die W_n auch in X offen. Es ist $Y = \overline{W_n}^Y = \overline{W}_n \cap Y$ und damit $Y \subseteq \overline{W_n} \subseteq \overline{Y}$. Dies impliziert $\overline{W_n} = \overline{Y}$. Wir definieren $O_n := W_n \cup \overline{Y}^c$ für $n \in \mathbb{N}$. $(O_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bildet eine Folge von offenen dichten Mengen in X. Damit ist ihr Schnitt ebenfalls dicht, weil X Baire'sch ist. Also gilt $\overline{\bigcap_{n\in\mathbb{N}} W_n \cup \overline{Y}^c} = X$ und daher $\overline{\bigcap_{n\in\mathbb{N}} W_n}^Y = X \cap Y$, denn

$$\overline{\overline{Y}^c} \cap Y \subseteq \overline{Y^c} \cap Y = Y^c \cap Y = \emptyset.$$

□

Satz 1.8. *Ein topologischer Raum $(X, \mathcal{T})$ ist genau dann Baire'sch, wenn er von homogener zweiter Kategorie ist.*

Beweis. Zuerst bemerken wir, dass der Raum genau dann von homogener zweiter Kategorie ist, wenn jede offene nichtleere Teilmenge von X von zweiter Kategorie ist.

Sei X nicht von homogener zweiter Kategorie, dann gibt es eine nichtleere offene Menge $Y \subseteq X$ mit $Y = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$ mit passenden in X nirgends dichten E_n, die o.B.d.A. abgeschlossen in Y seien. Die E_n sind auch in Y nirgends dicht, da wegen $Y \in \mathcal{T}$

$$(\overline{E}_n^Y)^{\circ_Y} = E_n^\circ \subseteq \overline{E_n}^\circ = \emptyset.$$

Mittels Komplementbildung sieht man, dass $(Y \setminus E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine abzählbare Familie in Y offener und dichter Mengen ist, deren Schnitt leer und somit nicht dicht in Y ist. Damit ist aber Y nicht Baire'sch und wegen Lemma 1.7 ist auch X nicht Baire'sch.

Angenommen X ist nicht Baire'sch, dann gibt es $(O_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{T}^{\mathbb{N}}$, sodass $\forall n \in \mathbb{N} : \overline{O_n} = X$ und $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} O_n$ nicht dicht in X ist. Geht man zu den Komplementen über, so erhält man: $(O_n^c)^\circ = \emptyset$ und $(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} O_n^c)^\circ \neq \emptyset$. Damit ist aber $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} O_n^c$ und somit auch das Innere dieser Menge von erster Kategorie in X. Also gibt es eine nichleere offene Menge von erster Kategorie, daher ist X nicht von homogener zweiter Kategorie. □

Bemerkung 1.9. Wir bemerken noch, dass jeder lokalkompakte Hausdorffraum ein Baire Raum ist. Dieses Resultat ist ebenfalls als Satz von Baire bekannt. Für den Beweis betrachtet man zuerst nur kompakte Hausdorffräume. Hier geht man dann sehr ähnlich wie beim Beweis des aus der Funktionalanalysis bekannten Satzes von Baire vor. Mittels Alexandroff-Kompaktifizierung und Lemma 1.7 kann man dann zu lokalkompakten Hausdorffräumen übergehen.

2. Satz von Bradford - Goffman

In diesem Abschnitt wollen wir die Verallgemeinerung des Satzes von Blumberg formulieren. Wir nennen Räume, in denen der Satz von Blumberg gilt, Blumberg Räume:

Definition 2.1. Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum. Wir nennen $(X, \mathcal{T})$ *Blumberg Raum*, falls es für beliebige Funktionen $f : X \to \mathbb{R}$ eine dichte Teilmenge D von X gibt, sodass $f|_D$ stetig ist. Dabei ist D mit der Spurtopologie und $\mathbb{R}$ mit der euklidischen Topologie $\mathcal{E}$ versehen.

Satz 2.2. *Sei $(X, \mathcal{T})$ ein Blumberg Raum, dann ist $(X, \mathcal{T})$ Baire'sch.*

Beweis. Wir gehen indirekt vor: Sei X nicht Baire'sch, also nicht von homogener zweiter Kategorie. Dann existiert ein $x \in X$ und ein $U \in \mathfrak{U}(x)$, sodass $U \cap X$ von erster Kategorie ist. Wir können also schreiben $U = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n$ mit nirgends dichten U_n, diese können wir disjunkt wählen, da Teilmengen nirgends dichter Mengen selbst nirgends dicht sind. Somit können wir folgende Funktion f definieren:

$$f : X \to \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} n & \text{falls } x \in U_n, n \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{falls } x \notin U \end{cases}$$

Sei nun D eine dichte Teilmenge von X. Dann ist $D \cap U \neq \emptyset$, somit gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ und ein $y \in X$ so, dass $y \in D \cap U_n$. Wir wollen zeigen, dass $f|_D$ nicht stetig bei y ist, also dass

$$\exists \epsilon > 0 : \forall V \in \mathfrak{W}|_D(y) : \exists z \in V : |f(y) - f(z)| \geq \epsilon.$$

Dabei ist $\mathfrak{W}|_D(y) := \{W \cap D : W \in \mathfrak{U}(y) \cap \mathcal{T}\}$. Wir zeigen, dass man $\epsilon = 1$ wählen kann. Sei hierzu $V \in \mathfrak{W}|_D(y)$, also $V = W \cap D$ mit einem $W \in \mathfrak{U}(y) \cap \mathcal{T}$. Wegen

$$X = \emptyset^c = (\overline{U_n}^\circ)^c = \overline{\overline{U_n}^c} = \overline{(U_n^c)^\circ}$$

ist $(U_n^c)^\circ$ dicht in X. Daraus folgt $\emptyset \neq W \cap (U_n^c)^\circ \in \mathcal{T}$ und somit

$$\emptyset \neq W \cap (U_n^c)^\circ \cap D \subseteq W \cap U_n^c \cap D.$$

Es gibt also $z \in W \cap D \cap U_n^c$. Da $z \in U_n^c$, folgt wegen der Definition von f, dass $|f(y) - f(z)| \geq 1$. □

Für metrisierbare Räume gilt auch die Umkehrung. Dies ist somit eine Verallgemeinerung des Satzes von Blumberg:

Satz 2.3. *(Bradford-Goffman) Sei $(X, \mathcal{T})$ ein metrisierbarer topologischer Raum. Dann ist X genau dann ein Baire Raum, wenn er Blumberg'sch ist.*

Für den Beweis brauchen wir die folgenden beiden Abschnitte.

3. Resultat von Banach

Folgendes Lemma geht auf Banach zurück.

Lemma 3.1. *Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und $Y \subseteq X$. Weiters seien alle $y \in Y$ von erster Kategorie in X bezüglich Y, also $Y \subseteq F_X(Y)$. Dann ist Y von erster Kategorie in X.*

Beweis. Sei o.B.d.A. $Y \neq \emptyset$. Wir gehen in 3 Schritten vor.

Schritt 1: Wir konstruieren eine Familie von paarweise disjunkten offenen nichtleeren Mengen $(S_i)_{i \in I}$ mit $I \neq \emptyset$ und folgenden Eigenschaften:

(1) $\forall i \in I : Y \cap S_i$ ist von 1.Kat.
(2) $\forall O \in \mathcal{T} \setminus \{\emptyset\}$ mit $O \cap Y$ ist von 1.Kat. : $\exists i \in I : O \cap S_i \neq \emptyset$

Hierzu definieren wir die Mengen

$$\begin{aligned} M &:= \{O \in \mathcal{T} \setminus \{\emptyset\} : O \cap Y \text{ ist von 1. Kat.}\} \\ \mathfrak{A} &:= \{A \subseteq M : \forall O_1, O_2 \in A : (O_1 = O_2 \vee O_1 \cap O_2 = \emptyset)\} \end{aligned}$$

Dann ist $(\mathfrak{A}, \subseteq)$ eine nichtleere Halbordnung. Wir wollen das Lemma von Zorn anwenden.

Sei also $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{A}$ totalgeordnet. Dann sieht man leicht, dass $\bigcup_{A \in \mathfrak{B}} A$ eine obere Schranke in $\mathfrak{A}$ ist: Denn sind O_1, O_2 in der Vereinigung, so liegen sie wegen der Totalordnung beide in einem $A \in \mathfrak{B}$ und sind somit gleich oder disjunkt. Also enthält $\mathfrak{A}$ ein maximales Element $A_{\max}$. Interpretiert man nun $A_{\max}$ als Familie, so erhält man gerade eine passende Familie I:

Hierbei ist (1) klar. Angenommen (2) würde nicht gelten, so gäbe es $O \in M$, sodass $O \cap S_i = \emptyset$ für beliebige $i \in I$, dann wäre aber $A_{\max} \subsetneq A_{\max} \dot\cup \{O\} \in \mathfrak{A}$, was der Maximalität von $A_{\max}$ widerspräche. Dabei ist $I \neq \emptyset$, denn aus $\emptyset \neq Y \subseteq F_X(Y)$ folgt $M \neq \emptyset$ und wegen (2) muss ein $i \in I$ existieren.

Schritt 2: Wir zeigen, dass das Komplement von $S := \bigcup_{i \in I} S_i$ nirgends dicht ist.

Angenommen S^c ist nicht nirgends dicht. Da S^c abgeschlossen ist, heißt dies gerade $(S^c)^\circ \neq \emptyset$. Also gibt es eine nichtleere offene Menge O mit $O \subseteq S^c$ und damit $O \cap S_i = \emptyset$ für $i \in I$. Wegen (2) folgt damit, dass $O \cap Y$ von zweiter Kategorie ist. Also gilt insbesondere $O \cap Y \neq \emptyset$. Sei $y \in O \cap Y$, dann ist y laut Voraussetzung von erster Kategorie bezüglich Y. Es gibt also eine offene Umgebung $U \in \mathfrak{U}(y)$ mit o.B.d.A. $U \subseteq O$, sodass $U \cap Y$ von erster Kategorie ist. Wegen (2) folgt damit

$U \cap S_i \neq \emptyset$ für ein passendes $i \in I$. Das widerspicht aber $U \cap S_i \subseteq O \cap S_i = \emptyset$.

Schritt 3: Falls $Y \cap S$ von erster Kategorie ist, sind wir fertig, denn $S^c \cap Y$ ist als Teilmenge von S^c nirgends dicht und damit ist $Y = Y \cap (S^c \cup S)$ abzählbare Vereinigung von nirgends dichten Mengen. Zeigen wir also, dass $Y \cap S$ von erster Kategorie ist.

Wegen (1) gilt für jedes $i \in I$ immer $Y \cap S_i = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} N_i^n$ mit nirgends dichten N_i^n. Wir setzen nun $N^n := \bigcup_{i \in I} N_i^n$ für $n \in \mathbb{N}$ und erhalten

$$Y \cap S = Y \cap \bigcup_{i \in I} S_i = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} N^n.$$

Wenn wir zeigen, dass N^n für alle $n \in \mathbb{N}$ nirgends dicht ist, so sind wir fertig.

Angenommen es gäbe ein $n \in \mathbb{N}$, sodass N^n nicht nirgends dicht ist. Dann gibt es eine offene nichtleere Menge H mit $H \subseteq \overline{N^n}$. Nun ist $H \nsubseteq S^c$, da ja S^c abgeschlossen und nirgends dicht ist. Somit existiert ein $i \in I$ mit $H \cap S_i \neq \emptyset$.

Aus

$$\overline{N^n} = \overline{N_i^n} \cup \overline{\bigcup_{j \neq i} N_j^n} \subseteq \overline{N_i^n} \cup \overline{\bigcup_{j \neq i} S_j}$$

folgt

$$\overline{N^n} \cap S_i \subseteq \left(\overline{N_i^n} \cap S_i\right) \cup \left(\overline{\bigcup_{j \neq i} S_j} \cap S_i\right).$$

Da die $(S_j)_{j \in I}$ offen und disjunkt sind folgt wegen $\bigcup_{j \neq i} S_j \subseteq S_i^c$, dass der zweite Term die leere Menge ist. Die Ungleichung erhält somit folgende Gestalt:

$$\overline{N^n} \cap S_i \subseteq \overline{N_i^n} \cap S_i \subseteq \overline{N_i^n},$$

womit

$$\emptyset \neq \underbrace{H \cap S_i}_{\text{offen}} \subseteq \overline{N^n} \cap S_i \subseteq \overline{N_i^n}.$$

Damit wäre aber N_i^n nicht nirgends dicht, im Widerspruch zur Annahme. □

Korollar 3.2. *Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und $Y \subseteq X$. Dann ist die Menge $Y \cap F_X(Y)$ von erster Kategorie in X.*

Beweis. Für $y \in Y \cap F_X(Y)$ ist y von erster Kategorie bezüglich Y. Daher gibt es $U \in \mathfrak{U}(y)$, sodass $U \cap Y$ von erster Kategorie ist. Damit ist aber auch $U \cap Y \cap F_X(Y)$ von erster Kategorie. Also ist y von erster Kategorie bezüglich $Y \cap F_X(Y)$. Somit ist $Y \cap F_X(Y)$ aber laut Lemma 3.1 von erster Kategorie. □

4. Fast stetig

In diesem Abschnitt werden wir den Beweis des Satzes von Bradford-Goffman liefern, wofür sich folgende Definition als hilfreich erweist.

Definition 4.1. Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und $Y \subseteq X$. Dann heißt ein Punkt $x \in X$ *stark in X bezüglich Y*, falls

$$\exists U \in \mathfrak{U}(x) : U \subseteq S_X(Y).$$

Dabei kann $\mathfrak{U}(x)$ offenbar durch eine beliebige Umgebungsbasis $\mathfrak{W}(x)$ ersetzt werden. Wir schreiben $H_X(Y) := \{x \in X : x \text{ ist stark in } X \text{ bez. } Y\}$.

Lemma 4.2. *Sei $(X,\mathcal{T})$ ein topologischer Raum, Y eine Teilmenge. Dann gilt $S_X(Y)^\circ = H_X(Y)$. Außerdem ist $S_X(Y) \setminus H_X(Y)$ nirgends dicht und aus $Y_1 \subseteq Y_2 \subseteq X$ folgt $H_X(Y_1) \subseteq H_X(Y_2)$.*

Beweis. Aus der Definition von H_X folgt unmittelbar $H_X(Y) \subseteq S_X(Y)$. Außerdem ist $H_X(Y)$ offen: Sei hierzu $x \in H_X(Y)$. Dann gibt es ein offenes U, sodass $U \subseteq S_X(Y)$. Dieses U ist Umgebung von jedem Element aus U, womit $U \subseteq H_X(Y)$ folgt.

Wir haben also $H_X(Y) \subseteq S_X(Y)^\circ$. Um die andere Inklusion einzusehen, sei $x \in S_X(Y)^\circ$, dann ist $S_X(Y) \in \mathfrak{U}(x)$ und $S_X(Y) \subseteq S_X(Y)$. Daraus folgt $x \in H_X(Y)$.

Wegen $S_X(Y) \setminus H_X(Y) = \overline{S_X(Y)} \setminus S_X(Y)^\circ$ (vgl. Lemma 1.5) ist $S_X(Y) \setminus H_X(Y)$ abgeschlossen und es gilt

$$\overline{S_X(Y) \setminus H_X(Y)}^\circ = \left(S_X(Y) \setminus S_X(Y)^\circ\right)^\circ = \emptyset.$$

Um die letzte Behauptung zu zeigen, verwenden wir wieder Lemma 1.5 und erhalten $S_X(Y_1) \subseteq S_X(Y_2)$. Wendet man nun $^\circ$ an, so folgt aus dem zuvor Bewiesenen $H_X(Y_1) \subseteq H_X(Y_2)$. □

Lemma 4.3. *Sei $(X,\mathcal{T})$ ein topologischer Raum und $Y \subseteq X$, dann ist $Y \setminus H_X(Y)$ von erster Kategorie in X.*

Beweis. Wir können Y wie folgt zerlegen:

$$Y = Y \cap \Big(F_X(Y) \,\dot\cup\, S_X(Y)\Big) = \Big(Y \cap F_X(Y)\Big) \,\dot\cup\, \Big(Y \cap S_X(Y) \setminus H_X(Y)\Big) \,\dot\cup\, \Big(Y \cap H_X(Y)\Big)$$

Damit gilt

$$Y \setminus H_X(Y) = \Big(Y \cap F_X(Y)\Big) \,\dot\cup\, \Big(Y \cap S_X(Y) \setminus H_X(Y)\Big).$$

Nun ist $Y \cap F_X(Y)$ wegen Korollar 3.2 von erster Kategorie. Außerdem ist $Y \cap S_X(Y) \setminus H_X(Y)$ wegen Proposition 4.2 nirgends dicht. Damit ist $Y \setminus H_X(Y)$, als Vereinigung zweier Mengen von erster Kategorie, selbst von erster Kategorie. □

Definition 4.4. Sei $(X,\mathcal{T})$ ein topologischer Raum und $x \in X$. Eine Funktion $f : X \to \mathbb{R}$ heißt *fast stetig in x*, falls ($\mathbb{R}$ sei mit der euklidischen Topologie versehen)

$$\forall V \in \mathfrak{U}(f(x)) : x \in H_X(f^{-1}(V)).$$

Bemerkung 4.5. Gewöhnliche Stetigkeit von f in x ist äquivalent zu

$$\forall V \in \mathfrak{U}(f(x)) : x \in (f^{-1}(V))^\circ.$$

Lemma 4.6. *Sei $(X,\mathcal{T})$ ein topologischer Raum und $f : X \to \mathbb{R}$, dann ist die Menge $\{x \in X : f$ ist nicht fast stetig bei $x\}$ von erster Kategorie in X.*

Beweis. Wir setzen

$$M := \{x \in X : f \text{ ist nicht fast stetig bei } x\}.$$

Sei $\mathfrak{B} = \{B_n : n \in \mathbb{N}\}$ eine abzählbare Basis der euklidischen Topologie in $\mathbb{R}$. Wir definieren $E_n := f^{-1}(B_n) \setminus H_X(f^{-1}(B_n))$ für $n \in \mathbb{N}$. Wegen Lemma 4.3 sind die E_n von erster Kategorie in X. Damit ist auch die Vereinigung $E := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$ von erster Kategorie. Wir zeigen, dass $M \subseteq E$:

Sei $x \in M$, das heißt

$$\exists V \in \mathfrak{U}(f(x)) : x \notin H_X(f^{-1}(V)).$$

Dann können wir V wegen der Monotonie von H_X (vgl. Lemma 4.2) aus $\mathfrak{B}$ wählen, also $V = B_n$ für ein passendes $n \in \mathbb{N}$. Nun liegt x in $f^{-1}(B_n)$, aber nicht in $H_X(f^{-1}(B_n))$, also $x \in E_n \subseteq E$. □

Korollar 4.7. *Ist $(X, \mathcal{T})$ Baire'sch und $f : X \to \mathbb{R}$, dann ist die Menge $\{x \in X : f$ ist fast stetig bei $x\}$ dicht in X.*

Beweis. Da $\tilde{A}^c := \{x \in X : f \text{ ist fast stetig bei } x\}^c$ laut Lemma 4.6 von erster Kategorie ist, können wir $\tilde{A} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} E_n^c \supseteq \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{E_n}^c$ mit nirgends dichten E_n schreiben. Somit ist $\tilde{A}$ als Obermenge eines Schnitts von dichten offenen Mengen selbst dicht in X, weil X Baire'sch ist. □

Beim Beweis des Satzes von Bradford-Goffman werden wir die dichte Menge rekursiv konstruieren. Folgendes Lemma liefert den Rekursionsanfang und den Schritt.

Lemma 4.8. *Seien (X, d) ein Baire'scher Raum, $\epsilon > 0$ und $f : X \to \mathbb{R}$ eine beliebige Funktion. Ist $\chi \in X$ so, dass f fast stetig bei χ ist, so gibt es eine indizierte Menge $\{U_\alpha : \alpha \in A\}$ aus paarweise disjunkten offenen Kugeln mit Radius [1] in $(0, \epsilon)$, sodass $\overline{\bigcup_{\alpha\in A} U_\alpha} = X$ und sodass es für jedes $\alpha \in A$ ein $V_\alpha \subseteq U_\alpha = B_{r_\alpha}(x_\alpha)$ gibt mit*

(1) $x_\alpha \in V_\alpha$
(2) *f ist fast stetig in x_α*
(3) $U_\alpha \subseteq H_X(V_\alpha)$
(4) $\forall x \in V_\alpha : |f(x) - f(x_\alpha)| < \epsilon$
(5) $\exists \alpha \in A : x_\alpha = \chi$.

Beweis. Wir definieren $\tilde{A} := \{x \in X : f \text{ fast stetig in } x\}$. Sei $\preceq$ eine (laut dem Wohlordnungssatz existierende) Wohlordnung auf der Menge $\tilde{A}$, sodass χ das kleinste Element von $\tilde{A}$ ist. Wir definieren $x_\alpha, r_\alpha, U_\alpha, V_\alpha$ für $\alpha \in \tilde{A}$ mittels transfiniter Rekursion.

Anfang: Da χ das kleinste Element ist, schreiben wir $1 := \chi$ und setzen $x_1 := 1$. Um r_1 korrekt zu wählen, verwenden wir, dass f fast stetig ist bei x_1, das bedeutet gerade

$$\forall V \in \mathfrak{U}(f(x)) : x \in H_X(f^{-1}(V)).$$

Wegen Lemma 4.2 sieht man leicht, dass dies äquivalent ist zu

$$\forall E > 0 : \exists r > 0 : B_r(x_1) \subseteq S_X(\{x \in X : |f(x) - f(x_1)| < E\}).$$

Wir definieren nun $r_1 < \epsilon$ (für $E = \epsilon$) so wie oben und $U_1 := B_{r_1}(x_1)$. Weiters setzen wir $\tilde{V}_1 := \{x \in X : |f(x) - f(x_1)| < \epsilon\}$ und $V_1 := \tilde{V}_1 \cap U_1$. Dann ist offenbar $x_1 \in V_1$ und es gilt auch $U_1 \subseteq S_X(V_1)$. Um dies einzusehen sei $x \in U_1$, $\delta > 0$ so, dass $B_\delta(x) \subseteq U_1$. Definieren wir die Umgebungsbasis $\mathfrak{W}(x) := \{B_\eta(x) : \delta > \eta\}$, so ist $W \cap \tilde{V}_1 \cap U_1 = W \cap \tilde{V}_1$ von zweiter Kategorie für beliebige $W \in \mathfrak{W}(x)$, weil ja $x \in U_1 \subseteq S_X(\tilde{V}_1)$.

Damit erhalten wir mit Lemma 4.2 insgesamt $U_1 \subseteq S_X(V_1)^\circ = H_X(V_1)$.

[1] Der einzige Grund, warum man hier X als metrischen Raum und nicht als allgemeinen topologischen Raum voraussetzen muss, ist eine Forderung für den Radius. Ohne dieser Forderung, kann das Lemma leicht auch für beliebige topologische Räume umformuliert werden, indem man statt Kugeln Umgebungen verwendet.

<u>Schritt:</u> Sei $\alpha \in \tilde{A}$. Angenommen wir haben für jedes $\beta \prec \alpha$ $x_\beta \in X, r_\beta \in (0,\epsilon), U_\beta, V_\beta \subseteq X$ definiert. Falls gilt $\alpha \in \overline{\bigcup_{\beta \prec \alpha} U_\beta}$, so setzen wir $U_\alpha := \emptyset =: V_\alpha, r_\alpha := \frac{\epsilon}{2}$ und $x_\alpha := \alpha$. Falls $\alpha \notin \overline{\bigcup_{\beta \prec \alpha} U_\beta}$, so wählen wir $\alpha := x_\alpha$ und $r_\alpha < \epsilon$ so, dass einerseits

$$U_\alpha := B_{r_\alpha}(x_\alpha) \subseteq \overline{\bigcup_{\beta \prec \alpha} U_\beta}^c$$

und andererseits (f ist fast stetig bei x_α)

$$B_{r_\alpha}(x_\alpha) \subseteq S_X(\underbrace{\{x \in X : |f(x) - f(x_\alpha)| < \epsilon\}}_{=:\tilde{V}_\alpha}).$$

Dann definieren wir $V_\alpha := \tilde{V}_\alpha \cap U_\alpha$ und sehen wie beim Rekursionsanfang, dass $U_\alpha \subseteq H_X(V_\alpha)$.

Nun setzen wir $A := \{\alpha \in \tilde{A} : U_\alpha \neq \emptyset\}$. Laut Konstruktion haben wir alle im Lemma gefordeten Eigenschaften. Dabei ist Dichtheit erfüllt, weil die dichte Menge $\tilde{A}$(vgl. Korollar 4.7) laut Konstruktion Teilmenge von $\overline{\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha}$ ist. □

Bemerkung 4.9. Der Beweis zeigt, dass man $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$ so konstruieren kann, dass man für $\alpha \in A$ die Menge V_α als $U_\alpha \cap f^{-1}(f(x_\alpha) - \epsilon, f(x_\alpha) + \epsilon)$ wählen kann.

Lemma 4.10. *In der Situation von Lemma 4.8 gilt:*

(1) *Für $\alpha \in A$ ist $(V_\alpha, d|_{V_\alpha \times V_\alpha})$ Baire'sch.*
(2) *Sind $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$ und $(V_\alpha)_{\alpha \in A}$ wie in Bemerkung 4.9, so ist für $\alpha \in A$ die Funktion $f|_{V_\alpha}$ fast stetig bei x_α.*

Beweis.

(1) Angenommen V_α wäre nicht von homogener zweiter Kategorie, dann gäbe es ein $x \in V_\alpha$ und ein $\delta > 0$ so, dass $V_\alpha \cap B_\delta(x)$ von erster Kategorie in V_α ist. Wegen Lemma 1.2 würde folgen, dass $V_\alpha \cap B_\delta(x) \ni x$ auch von erster Kategorie in X ist, dies widerspricht aber $x \in S_X(V_\alpha)$, was ja wegen

$$V_\alpha \subseteq U_\alpha \subseteq H_X(V_\alpha) \subseteq S_X(V_\alpha)$$

gilt.

(2) Zunächst ist f fast stetig bei x_α. Dies bedeutet wegen Lemma 4.2 gerade, dass für beliebige $W \in \mathfrak{U}(f(x_\alpha))$ mit o.B.d.A. $W \subseteq (f(x_\alpha) - \epsilon, f(x_\alpha) + \epsilon)$ ein $Y(W) \in \mathfrak{U}(x_\alpha)$ gibt mit

$$\forall y \in Y(W) : \underbrace{\forall Z \in \mathfrak{U}_{\subseteq U_\alpha}(y) : f^{-1}(W) \cap Z \text{ von 2. Kat. in } X}_{\Leftrightarrow y \in S_X(f^{-1}(W))}.$$

Dabei meinen wir mit $\mathfrak{U}_{\subseteq U_\alpha}(y)$ die Menge aller Umgebungen von y, die Teilmengen von U_α sind, diese Menge ist offenbar eine Umgebungsbasis von y. Wir wollen nun zeigen, dass es für beliebige $W \in \mathfrak{U}(f(x_\alpha))$ mit $W \subseteq (f(x_\alpha) - \epsilon, f(x_\alpha) + \epsilon)$ ein $\tilde{Y}(W) \in \mathfrak{U}|_{V_\alpha}(x_\alpha)$ gibt mit:

$$\forall y \in \tilde{Y}(W) : \forall \tilde{Z} \in \mathfrak{W}(y) : f|_{V_\alpha}^{-1}(W) \cap \tilde{Z} \text{von 2. Kat. in } V_\alpha$$

Dabei sei $\mathfrak{W}(x_\alpha) := \mathfrak{U}_{\subseteq U_\alpha}(y) \cap V_\alpha$ (hierbei meinen wir den elementweisen Schnitt). Diese Menge ist eine Umgebungsbasis von x_α bezüglich der Spurtopologie. Zu $W \in \mathfrak{U}(f(x_\alpha))$ mit $W \subseteq (f(x_\alpha) - \epsilon, f(x_\alpha) + \epsilon)$ wählen wir $\tilde{Y}(W) := Y(W) \cap V_\alpha$. Ist nun $y \in \tilde{Y}(W)$ und $\tilde{Z} \in \mathfrak{W}(y)$, also $\tilde{Z} = Z \cap V_\alpha$

mit einem $Z \in \mathfrak{U}_{\subseteq U_\alpha}(y)$, so ist $f^{-1}(W) \cap Z$ von zweiter Kategorie in X. Nun gilt

$$f^{-1}(W) \cap Z \subseteq f^{-1}(f(x_\alpha) - \epsilon, f(x_\alpha) + \epsilon) \cap U_\alpha = V_\alpha$$

und damit ist $f|_{V_\alpha}^{-1}(W) \cap \tilde{Z} = f^{-1}(W) \cap Z$ von zweiter Kategorie in X. Der Ausdruck ist wegen Lemma 1.2 auch von zweiter Kategorie in V_α.

□

Wir kommen nun endlich zum Beweis des Satzes von Bradford-Goffman:

Beweis. Dass aus Blumberg'sch Baire'sch folgt, wissen wir schon aus Satz 2.2.

Sei also $(X, \mathcal{T})$ ein metrisierbarer Baire Raum und sei d eine Metrik, die $\mathcal{T}$ induziert und $f : X \to \mathbb{R}$ beliebig. Wir definieren $\tilde{A} := \{x \in X : f \text{ fast stetig bei } x\}$. Wir benützen Rekursion:

<u>Anfang:</u> Wir wenden Lemma 4.8 mit $\epsilon = 1$, der Funktion f und beliebigem $\chi \in \tilde{A}$ (nichtleer wegen Korollar 4.7) auf den Raum X wie in Bemerkung 4.9 an und erhalten damit eine Indexmenge A und zu $\alpha_0 \in A$ Punkte $x_{\alpha_0} \in X$, Kugeln $U_{\alpha_0} \subseteq X$ und Mengen $V_{\alpha_0} \subseteq X$.

<u>Schritt:</u> Haben wir für $n \in \mathbb{N}_0$ eine Indexmenge A und zu jedem $\alpha_0 \in A$ eine Indexmenge A_{α_0} und zu jedem $\alpha_1 \in A_{\alpha_0}$ eine Indexmenge $A_{\alpha_0\alpha_1}$ ... und zu jedem $\alpha_{i+1} \in A_{\alpha_0 \ldots \alpha_i}$ eine Indexmenge $A_{\alpha_0 \ldots \alpha_{i+1}}$ ... und zu jedem $\alpha_n \in A_{\alpha_0 \ldots \alpha_{n-1}}$ eine Indexmenge $A_{\alpha_0 \ldots \alpha_n}$ und zu diesen Indexmengen

$$x_{\alpha_0 \ldots \alpha_n} \in V_{\alpha_0 \ldots \alpha_{n-1}} \text{ und } U_{\alpha_0 \ldots \alpha_n}, V_{\alpha_0 \ldots \alpha_n} \subseteq V_{\alpha_0 \ldots \alpha_{n-1}}$$

(falls $n = 0$ ersetze den Ausdruck $V_{\alpha_0 \ldots \alpha_{n-1}}$ durch X) für beliebige $(\alpha_0, \ldots, \alpha_n)$ mit $\alpha_0 \in A, \alpha_1 \in A_{\alpha_0}, \ldots, \alpha_n \in A_{\alpha_0 \ldots \alpha_{n-1}}$ definiert, so gehen wir wie folgt vor: Sei

$$(\alpha_0, \ldots, \alpha_n) \in \mathfrak{A}_n := \{(\beta_0, \ldots, \beta_n) : \beta_0 \in A, \beta_1 \in A_{\beta_0}, \ldots, \beta_n \in A_{\beta_0 \ldots \beta_{n-1}}\}.$$

Wir wenden Lemma 4.8 mit $\epsilon = \frac{1}{n+2}$, der Funktion $f|_{V_{\alpha_0 \cdots \alpha_n}}$ und $\chi = x_{\alpha_0 \ldots \alpha_n}$ ($f|_{V_{\alpha_0 \cdots \alpha_n}}$ ist fast stetig bei $x_{\alpha_0 \ldots \alpha_n}$ wegen Lemma 4.10(2)) auf den Baire Raum $V_{\alpha_0 \ldots \alpha_n}$ (vgl. Lemma 4.10(1)) wie in Bemerkung 4.9 an. Damit erhalten wir eine Indexmenge $A_{\alpha_0 \ldots \alpha_{n+1}}$ und

$$x_{\alpha_0 \ldots \alpha_{n+1}} \in V_{\alpha_0 \ldots \alpha_n} \text{ und } U_{\alpha_0 \ldots \alpha_{n+1}}, V_{\alpha_0 \ldots \alpha_{n+1}} \subseteq V_{\alpha_0 \ldots \alpha_n}$$

für $\alpha_{n+1} \in A_{\alpha_0 \ldots \alpha_n}$, wobei es ein $\alpha_{n+1} \in A_{\alpha_0 \ldots \alpha_n}$ gibt mit $x_{\alpha_0 \ldots \alpha_{n+1}} = x_{\alpha_0 \ldots \alpha_n}$.

Wir setzen nun für $n \in \mathbb{N}_0$

$$D_n := \{x_{\alpha_0 \ldots \alpha_n} : (\alpha_0, \ldots, \alpha_n) \in \mathfrak{A}_n\}.$$

Weiters definieren wir $D := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} D_n$. Dann ist wegen unserer Konstruktion $D_n \subseteq D_{n+1}$ für $n \in \mathbb{N}_0$.[2] Wir zeigen nun, dass D eine dichte Teilmenge von X ist, sodass $f|_D$ stetig ist:

<u>Dichtheit:</u> Sei $x \in X$ und $\delta > 0$. Wir suchen ein $x_{\alpha_0 \ldots \alpha_n} \in D$ mit $d(x, x_{\alpha_0 \ldots \alpha_n}) < 3\delta$. Wegen Lemma 1.5 und Lemma 4.2 gilt

$$U_{\alpha_0} \subseteq H_X(V_{\alpha_0}) \subseteq S_X(V_{\alpha_0}) \subseteq \overline{V_{\alpha_0}}$$

und somit

$$X = \overline{\bigcup_{\alpha_0 \in A} \overline{V_{\alpha_0}}} = \overline{\bigcup_{\alpha_0 \in A} V_{\alpha_0}}.$$

[2] deshalb das χ

Also gibt es ein $\alpha_0 \in A$ und ein $y_{\alpha_0} \in V_{\alpha_0}$ so, dass $d(y_{\alpha_0}, x) < \delta$. Angenommen man hat bereits ein $(\alpha_0, ..., \alpha_n) \in \mathfrak{A}_n$ so, dass es ein $y_{\alpha_0 \ldots \alpha_n} \in V_{\alpha_0 \ldots \alpha_n}$ gibt mit $d(y_{\alpha_0 \ldots \alpha_n}, x) < \delta \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{2^i}$. Das gleiche Argument wie zuvor zeigt:

$$V_{\alpha_0, \ldots, \alpha_n} = \overline{\bigcup_{\alpha_{n+1} \in A_{\alpha_0, \ldots, \alpha_n}} V_{\alpha_0 \ldots \alpha_{n+1}}}^{V_{\alpha_0 \ldots \alpha_n}}$$

Also gibt es ein $\alpha_{n+1} \in A_{\alpha_0, \ldots, \alpha_n}$ und ein $y_{\alpha_0 \ldots \alpha_{n+1}} \in V_{\alpha_0 \ldots \alpha_{n+1}}$ so, dass:

$$d(y_{\alpha_0 \ldots \alpha_{n+1}}, y_{\alpha_0 \ldots \alpha_n}) < \frac{\delta}{2^{n+1}}$$

Damit erhalten wir:

$$d(y_{\alpha_0 \ldots \alpha_{n+1}}, x) < \delta \sum_{i=0}^{n+1} \frac{1}{2^i}$$

Sei nun $N \in \mathbb{N}_0$ so groß, dass $\frac{1}{N+1} < \delta$, dann gilt wegen

$$y_{\alpha_0 \ldots \alpha_N} \in V_{\alpha_0 \ldots \alpha_N} \subseteq U_{\alpha_0 \ldots \alpha_N} \subseteq B_{\frac{1}{N+1}}(x_{\alpha_0 \ldots \alpha_N}),$$

dass $d(x, x_{\alpha_0 \ldots \alpha_N}) < 3\delta$.

Stetigkeit: Sei $x = x_{\beta_0 \ldots \beta_m} \in D$. Wir zeigen, dass $f|_D$ stetig ist bei x. Sei hierzu $\epsilon > 0$. Wir suchen ein $\delta > 0$ mit $D \cap B_\delta(x) \subseteq f|_D^{-1}(f(x) - \epsilon, f(x) + \epsilon))$. Zunächst gilt für beliebige $n \in \mathbb{N}_0$, $(\alpha_0, \ldots, \alpha_n) \in \mathfrak{A}_n$, dass $D \cap U_{\alpha_0 \ldots \alpha_n} \subseteq V_{\alpha_0 \ldots \alpha_n}$. Um dies zu sehen, sei $z \in D \cap U_{\alpha_0 \ldots \alpha_n}$, also $z = x_{\gamma_0 \ldots \gamma_N}$ mit einem passenden $N \in \mathbb{N}$ und geeignetem $(\gamma_0, ..., \gamma_N) \in \mathfrak{A}_N$, wobei o.B.d.A. $N \geq n$. Dieser Punkt z liegt laut unserer Konstruktion in $V_{\gamma_0 \ldots \gamma_n} \subseteq U_{\gamma_0 \ldots \gamma_n}$, daraus folgt $(\alpha_0, \ldots, \alpha_n) = (\gamma_0, \ldots, \gamma_n)$, weil U-Kugeln zu verschiedenen Indices gleicher Länge disjunkt (oder gleich - man kann aber die Funktion, die jedem Index einer bestimmten Länge die entsprechende Kugel zuordnet, o.B.d.A. injektiv wählen) sind.

Damit folgt $|f(x_{\alpha_0 \ldots \alpha_n}) - f(y)| < \frac{1}{n+1}$ für beliebige Elemente $y \in D \cap U_{\alpha_0 \ldots \alpha_n}$ laut Konstruktion von $V_{\alpha_0 \ldots \alpha_n}$. Sei nun $M \in \mathbb{N}_{\geq m}$ so groß, dass $\frac{1}{M+1} < \epsilon$. Dann ist

$$x = x_{\beta_0 \ldots \beta_m} = x_{\tilde{\beta}_0 \ldots \tilde{\beta}_M}$$

mit passenden $(\tilde{\beta}_0, \ldots, \tilde{\beta}_M) \in \mathfrak{A}_M$. Damit haben wir $|f(x_{\tilde{\beta}_0 \ldots \tilde{\beta}_M}) - f(y)| < \frac{1}{M+1} < \epsilon$ für beliebige Elemente $y \in D \cap U_{\tilde{\beta}_0 \ldots \tilde{\beta}_M}$. Wähle also δ kleiner als den Radius von $U_{\tilde{\beta}_0 \ldots \tilde{\beta}_M}$. □

Epilog

Es sei noch bemerkt, dass im Allgemeinen aus Baire'sch nicht Blumberg'sch folgt. Tatsächlich gibt es sogar kompakte Hausdorffräume (jeder kompakte Hausdorffraum ist Baire'sch), die nicht Blumberg'sch sind. Soweit der Autor informiert ist, sind bis heute allerdings nur Beispiele gefunden, welche die Kontinuumshypothese voraussetzen.